Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ein neuer Beweis des Moessnerschen Satzes

Von Ivan Paasche in München

Vorgelegt von Herrn O. Perron am 1. Februar 1952

In den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften[1] hat O. Perron einen zahlentheoretischen Satz von A. Moessner veröffentlicht und bewiesen, der wie folgt lautet:

Wenn man aus der Reihe der natürlichen Zahlen jede k-te ausstreicht und von der übrigbleibenden die Summenreihe bildet, sodann aus dieser jede $(k-1)^{\text{te}}$ Zahl ausstreicht und wieder die Summenreihe bildet, aus dieser sodann jede $(k-2)^{\text{te}}$ ausstreicht und abermals die Summenreihe bildet und diesen Prozeß fortsetzt, bis man schließlich beim $(k-1)^{\text{ten}}$ Schritt jede zweite Zahl ausstreicht und dann die Summenreihe bildet, so entsteht die Reihe der k-ten Potenzen $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$

Für diesen Satz soll hier unter Benutzung erzeugender Funktionen ein neuer Beweis gegeben werden, der sich fast wörtlich auf gewisse Verallgemeinerungen des Satzes übertragen läßt.[2] Wir orientieren uns am Beispiel $k = 3$, wobei wir mit den Streichungen und Summationen bereits eine Reihe früher beginnen wollen, nämlich in der Einheitsreihe $1, 1, 1, \ldots$:

$$
(1) \qquad
\begin{array}{cccc|cccc|cccc|l}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \ldots \\
1 & 2 & 3 & & 4 & 5 & 6 & & 7 & 8 & 9 & & 10 \ldots \\
1 & 3 & & & 7 & 12 & & & 19 & 27 & & & 37 \ldots \\
1 & & & & 8 & & & & 27 & & & & 64
\end{array}
$$

Die Zahlen dieses Streichungs- und Summationsschemas, von dem wir die ersten drei Abschnitte und den Beginn des vierten

---

[1] Math.-nat. Klasse 1951, Nr. 3 S. 29 u. Nr. 4 S. 31–34.

[2] Statt jede k-te Zahl der natürlichen Zahlrenreihe zu streichen, kann man z. B. irgendwelche Zahlen in nichtabnehmendem Abstand aus einer beliebigen Ausgangsreihe streichen und im übrigen wie in (1) Halbmatrizen durch fortgesetzte Streichung und Summation bilden.

hingeschrieben haben, seien im Anschluß an die genannte Arbeit wie folgt bezeichnet (wir notieren die Abschnitte 1, 2 und n):

(2)

$$\begin{array}{llll|llll|l|llll|l}
A^0_{11} & A^0_{12} & A^0_{13} & A^0_{14} & A^0_{21} & A^0_{22} & A^0_{23} & A^0_{24} & \ldots\ldots & A^0_{n1} & A^0_{n2} & A^0_{n3} & A^0_{n4} & \ldots\ldots \\
A^1_{11} & A^1_{12} & A^1_{13} & & A^1_{21} & A^1_{22} & A^1_{23} & & \ldots & A^1_{n1} & A^1_{n2} & A^1_{n3} & & \ldots \\
A^2_{11} & A^2_{12} & & & A^2_{21} & A^2_{22} & & & \ldots & A^2_{n1} & A^2_{n2} & & & \ldots \\
A^3_{11} & & & & A^3_{21} & & & & . & A^3_{n1} & & & & .
\end{array}$$

Hier entsteht jede folgende Zeile aus der vorangehenden, indem dort in jedem Abschnitt die letzte Zahl gestrichen und zu der verbleibenden Zeile die Summenreihe gebildet wird. So erkennt man leicht die Formeln

$$\begin{aligned} A^\lambda_{n,\,\nu+1} &= A^\lambda_{n\nu} + A^{\lambda-1}_{n,\,\nu+1} \\ A^\lambda_{n+1,\,1} &= A^\lambda_{n,\,4-\lambda} + A^{\lambda-1}_{n+1,\,1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n &= 1,\,2,\,3,\ldots \\ \lambda,\nu &= 1,\,2,\,3 \\ \lambda+\nu &\leqq 4 \end{aligned} \quad ,$$

die im Verein mit den Anfangswerten

$$A^0_{n\nu} = 1 \qquad A^\lambda_{11} = 1$$

die $A^\lambda_{n\nu}$ rekurrent festlegen. Der Moessnersche Satz (für $k = 3$) nimmt nun die folgende Gestalt an:

$$A^3_{n1} = n^3.$$

Im allgemeinen Fall (k statt 3) sind die $A^\lambda_{n\nu}$ entsprechend durch

$$\begin{aligned} &(3) \quad A^\lambda_{n,\,\nu+1} = A^\lambda_{n\nu} + A^{\lambda-1}_{n,\,\nu+1} \\ &(4) \quad A^\lambda_{n+1,\,1} = A^\lambda_{n,\,k+1-\lambda} + A^{\lambda-1}_{n+1,\,1} \\ &(5) \quad A^0_{n\nu} = 1 \qquad A^\lambda_{11} = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n &= 1,\,2,\,3,\ldots \\ \lambda,\nu &= 1,\,2,\ldots,k \\ \lambda+\nu &\leqq 1+k \end{aligned}$$

festgelegt, und der Moessnersche Satz erscheint in der Form

$$A^k_{n1} = n^k. \tag{6}$$

Zu seinem Beweis entwickeln wir die Funktion

$$(1+z)^{\lambda+\nu-1-k}(1+nz)^k \qquad \begin{aligned} &n,\nu \text{ beliebig} \\ &\lambda \geqq 0 \text{ ganz} \end{aligned}$$

nach Potenzen von z und bezeichnen speziell den von n, ν und λ abhängenden Koeffizienten von z^λ mit $B^\lambda_{n\nu}$.[3] Durch die Substitution $\lambda \to \mu$, $\nu \to \lambda + \nu - \mu$ geht die zu entwickelnde Funktion offenbar in sich selbst über, wobei z^μ nunmehr mit dem Koeffizienten $B^\mu_{n,\,\lambda+\nu-\mu}$ behaftet erscheint. Man hat also

$$(7) \qquad (1 + z)^{\lambda+\nu-1-k}\,(1 + nz)^k = \sum_{\mu=0}^{\infty} B^\mu_{n,\,\lambda+\nu-\mu}\, z^\mu.$$

Dann gilt der

Hauptsatz: Es ist $B^\lambda_{n\nu} = A^\lambda_{n\nu}$ für alle Wertsysteme n, ν, λ, für die $A^\lambda_{n\nu}$ definiert ist.

Speziell für $\lambda + \nu = 1 + k$ lautet die Formel (7)

$$(1 + nz)^k = \sum B^\mu_{n,\,1+k-\mu}\, z^\mu,$$

woraus folgt

$$(8) \qquad B^\mu_{n,\,1+k-\mu} = \binom{k}{\mu} n^\mu \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Insbesondere für $\mu = k$ kommt $B^k_{n1} = n^k$, nach dem Hauptsatz also auch $A^k_{n1} = n^k$. Das ist aber gerade (6), also der Satz von Moessner.

Die Gültigkeit des Hauptsatzes kann man zunächst vermuten, wenn man bemerkt, daß die Schrägzeilen des Schemas (1) die Anfangskoeffizienten der Potenzentwicklungen von rationalen Funktionen der Form (7) sind,[4] z. B. im Abschnitt $n = 2$:

1 6 12 8 die von $(1 + 2z)^3 = 1 + 6z + 12z^2 + 8z^3$,

1 5 7 die von $(1 + z)^{-1}\,(1 + 2z)^3 = 1 + 5z + 7z^2 + \ldots$,

1 4 die von $(1 + z)^{-2}\,(1 + 2z)^3 = 1 + 4z + \ldots$.

Um den Hauptsatz zu beweisen, braucht man nur zu zeigen, daß die $B^\lambda_{n\nu}$ den die $A^\lambda_{n\nu}$ eindeutig definierenden Formeln (3), (4), (5) genügen, daß also für die dort angegebenen Indexsysteme n, ν, λ

---

[3] Selbstverständlich hängt $B^\lambda_{n\nu}$ auch von k ab; wir wollen jedoch die natürliche Zahl k ein für allemal festhalten.

[4] Im Abschnitt $n = 1$, der ja den Anfang der Pascalschen Dreiecksmatrix darstellt, ist das trivialerweise der Fall.

$$(3^*) \qquad B^{\lambda}_{n,\,\nu+1} = B^{\lambda}_{n\nu} + B^{\lambda-1}_{n,\,\nu+1}$$

$$(4^*) \qquad B^{\lambda}_{n+1,\,1} = B^{\lambda}_{n,\,k+1-\lambda} + B^{\lambda-1}_{n+1,\,1}$$

$$(5^*) \qquad B^{0}_{n\nu} = 1 \qquad B^{\lambda}_{11} = 1$$

ist. Wir werden beweisen, daß diese Formeln sogar für alle Indexsysteme gelten, für die die auftretenden B definiert sind, also für natürliches λ und beliebige n, ν.

Nun ist die erste Formel (5*) nach (7) evident; ferner ist, wieder nach (7), für $n = 1$, $\nu = 1$

$$(1 + z)^{\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\infty} B^{\mu}_{1,\,\lambda+1-\mu}\, z^{\mu},$$

und indem man hier speziell die Koeffizienten von z^{λ} beiderseits einander gleichsetzt, ergibt sich die zweite Formel (5*).

Um (3*) zu beweisen, schreiben wir (7) speziell für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$:

$$(1 + z)^{\nu-1-k}\,(1 + nz)^{k} = \sum_{\mu=0}^{\infty} B^{\mu}_{n,\,\nu-\mu}\, z^{\mu},$$

$$(1 + z)^{\nu-k}\,(1 + nz)^{k} = \sum_{\mu=0}^{\infty} B^{\mu}_{n,\,1+\nu-\mu}\, z^{\mu}.$$

Daher ist

$$\sum B^{\mu}_{n,\,1+\nu-\mu}\, z^{\mu} = (1 + z) \sum B^{\mu}_{n,\,\nu-\mu}\, z^{\mu}.$$

Multipliziert man rechts aus und setzt sodann die Koeffizienten von z^{λ} $(\lambda \geqq 1)$ beiderseits einander gleich, so kommt

$$B^{\lambda}_{n,\,1+\nu-\lambda} = B^{\lambda}_{n,\,\nu-\lambda} + B^{\lambda-1}_{n,\,1+\nu-\lambda}.$$

Nach der Substitution $\nu \to \nu + \lambda$ wird das gerade Formel (3*).

Zum Beweis von (4*) schließlich setzen wir in (7) $\nu = 1$ und schreiben $n + 1$ statt n, also

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{\infty} B^{\mu}_{n+1,\,\lambda+1-\mu}\, z^{\mu} &= (1 + z)^{\lambda-k}\,(1 + z + nz)^{k} \\ &= (1 + z)^{\lambda-k} \sum_{\rho=0}^{k} \binom{k}{\rho} (1 + z)^{k-\rho}\,(nz)^{\rho} \\ &= \sum_{\rho=0}^{k} \binom{k}{\rho} n^{\rho}\,(1 + z)^{\lambda-\rho}\, z^{\rho}.\end{aligned}$$

Speziell der Koeffizient von z^λ ist links $B^\lambda_{n+1,1}$ und rechts, da z^λ in $(1+z)^{\lambda-\rho}\, z^\rho$ für $0 \leqq \rho \leqq \lambda$ den Koeffizienten 1, für $\rho > \lambda$ aber den Koeffizienten 0 hat, gleich

$$\sum_{\rho=0}^{\lambda} \binom{k}{\rho} n^\rho .$$

Somit ist

$$B^\lambda_{n+1,1} = \sum_{\rho=0}^{\lambda} \binom{k}{\rho} n^\rho .$$

Zieht man hiervon die entsprechende Formel für $\lambda - 1$ statt λ ab, so erhält man

$$B^\lambda_{n+1,1} - B^{\lambda-1}_{n+1,1} = \binom{k}{\lambda} n^\lambda .$$

Die rechte Seite ist aber nach (8) gleich $B^\lambda_{n,\,k+1-\lambda}$, womit auch Formel (4*) gewonnen ist. Der Hauptsatz ist damit bewiesen.

Aus (7) entnimmt man übrigens für $A^\lambda_{n\nu}$ die Darstellung

$$A^\lambda_{n\nu} = B^\lambda_{n\nu} = \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{\nu+\lambda-1-k}{\tau} \binom{k}{\lambda-\tau} n^{\lambda-\tau},$$

die also nichts anderes ist als die nach Potenzen von n umgeordnete Formel (5) a. a. O.:

$$A^{(\lambda)}_{n\nu} = \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{\nu+\tau-1}{\tau} \binom{k}{\lambda-\tau} (n-1)^{\lambda-\tau}.$$