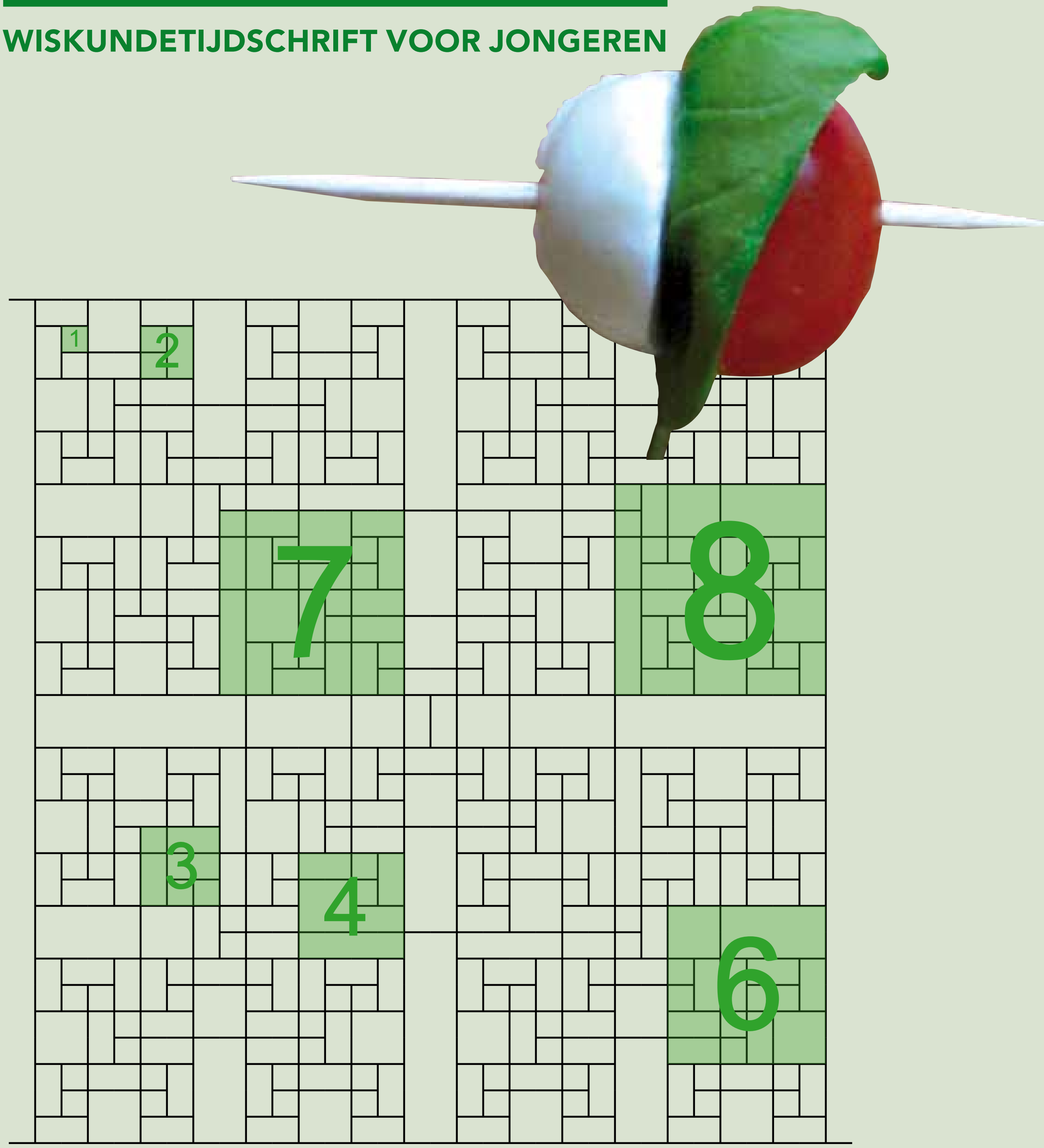
PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



55ste JAARGANG - NUMMER 6 - JUNI 2016

Wiskundetoernooi
Radboud Universiteit

Wiskunde doe je samen

Op vrijdag 23 september zal Nijmegen voor de 25e keer op rij overladen worden door gretige middelbare scholieren die vastberaden zijn het Wiskundetoernooi te winnen. Door in teams samen te werken krijgen de scholieren een voorproefje van wiskunde studeren. Samen tot een oplossing komen is het allerleukst!
Lijkt jou dit ook wat? Trek je wiskundedocent aan zijn jasje en meld je nog snel aan! Aanmelden kan tot 13 juni, via www.ru.nl/wiskundetoernooi.
Ben je nu ook enthousiast geworden over de studie Wiskunde, of wil je gewoon even een kijkje nemen in de keuken? Kijk op www.ru.nl/opleidingen/bachelor/wiskunde of scan de QR-code voor meer informatie over de studie Wiskunde.
Wie weet tot 23 september!

„Twee jaar geleden deed ik mee aan het Wiskundetoernooi en wonder boven wonder behaalden we met ons team de eerste plaats. Onder andere hierdoor en door mijn grote interesse in wiskunde ben ik wiskunde gaan studeren aan de Radboud Universiteit! Dit jaar is de cirkel helemaal rond en ben ik een van de organisatoren het toernooi.”

— Quinten Rutgers

IN DEI NOMINE FELICITER

Radboud Universiteit

INHOUD

Omslagillustratie: de tandenstokerconfiguratie na 32 zetten (lees het artikel op pagina 18).

NIVEAUBALKJES Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 5

Poes op muizenjacht. 12 sprongen.

Vierkant bedekken. Er zijn zes oplossingen: 9 van 1×1; 4 van 2×2; 3 van 2×2 en 1 van 1×1; 1 van 2×2 en 5 van 1×1; 2 van 2×2 naast elkaar en 3 van 1×1; 2 van 2×2 schuin tegenover elkaar en 2 van 1×1.

Muntenstapeltje. Als we met B, M en O achtereenvolgens de bovenste, middelste en onderste munt noteren, zijn er 14 volgordes die de stapel na vier keer ongewijzigd laten: BBBB, BBMM, BMBM, BMMB, BOOO, MBBM, MBMB, MMBB, MMMM, MOMO, OBOO, OMOM, OOOB, OOBO. In totaal zijn er $3^4 = 81$ mogelijke volgordes. De kans is dus $\frac{14}{81}$.

Tulpenboeket. Het grootste aantal boeketten dat de bloemist kan maken, is 6 (dit is de grootste gemene deler van 12, 30 en 42). Elk boeket bevat 12/6 = 2 witte, 30/6 = 5 gele en 42/6 = 7 roze tulpen.

Torentjes maken. Schrijf a_n voor het aantal torentjes dat je kunt maken met n vierkantjes. Er geldt: $a_4 = 8$, $a_5 = 16$ en $a_6 = 32$. Dit zijn allemaal machten van 2; in het algemeen geldt $a_n = 2^{n-1}$. Dat kun je als volgt begrijpen. We weten dat de formule geldt tot en met 6 vierkantjes. Bij 7 vierkantjes heb je als eerste een horizontale rij van 7 (dat is er 1). Vervolgens start je met een horizontale rij van 6 als onderste. Dan heb je er nog 1 over: dat geeft a_1 mogelijkheden erbovenop. Vervolgens zet je een rij van 6 op de grond. Dan heb je a_2 mogelijkheden voor de overige 2 erbovenop. Enzovoort. Dat geeft dus: $a_7 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64 = 2^6$. Zo vind je steeds, als je de vorige allemaal kent, bij de volgende een verdubbeling. Dit bewijsprincipe heet 'volledige inductie'.

DRIEHOEKIGE TOLLETJES

Neem drie tolletjes bestaande uit een gelijkzijdige driehoek van karton met een kaasprikkertje erdoorheen. Zet de getallen 1 tot en met 9 bij de zijden van de drie tolletjes. Dan spelen Ad, Bo en Co met elk hun eigen tolletje twee aan twee een spel. Ze draaien beiden hun tolletje en de kant die op de tafel eindigt, geeft aan wat ze gedraaid hebben. Wie het hoogste getal draait, wint. Kun je de 9 getallen zó op de tolletjes zetten dat Ad meer dan 50% kans heeft om te winnen van Bo, dat Bo meer dan 50% kans heeft om te winnen van Co, en dat Co meer dan 50% kans heeft om te winnen van Ad?

(Bron: Frans van Hoeve)

DRIE FAMILIES

In een huis woont een echtpaar met een nakomer. De zoon van dat echtpaar woont met hun schoondochter en twee kleine kinderen in het huis daarnaast. Daarnaast woont een weduwnaar in bij zijn zoon en schoondochter met hun twee kinderen. Een van deze twaalf mensen is 1 jaar oud, de leeftijden van de andere elf mensen zijn machten met een exponent groter dan 1 (bijvoorbeeld $16 = 4^2$ of 2^4, $27 = 3^3$, $32 = 2^5$). Alle machten kleiner dan 100 komen precies één keer voor. Wat zijn de waarschijnlijke leeftijden van deze twaalf mensen?

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

LETTERREKENEN

Gelijke letters zijn gelijke cijfers; verschillende letters zijn verschillende cijfers. Maak de volgende twee vermenigvuldigingen kloppend.

$$\text{A} \times \text{B} \times \text{AB} = \text{BBB}$$
$$\text{A} \times \text{BC} = \text{CBA}$$

(Bron: Henk Molster)

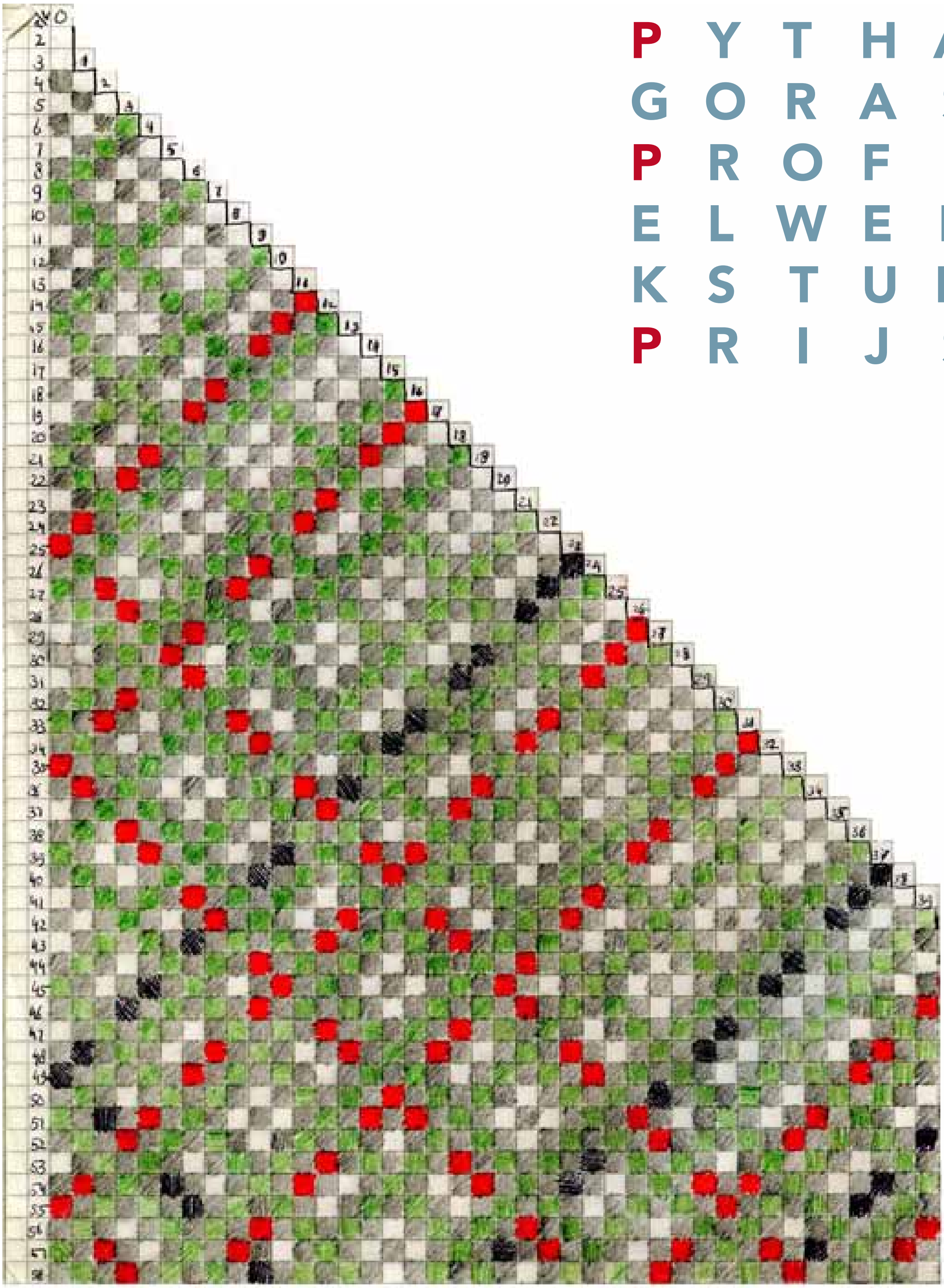
GENOEG BENZINE?

Met een auto waarmee je 10 kilometer op 1 liter benzine rijdt, wil je een ringweg van 100 kilometer helemaal rijden. Er zijn drie plekken waar tankjes met benzine staan: in totaal precies 10 liter. Je mag het tankstation kiezen waar je wilt starten met je lege tank. Daar tank je natuurlijk alles. Kun je altijd, waar de drie tankstations ook staan, de hele ringweg rijden, onderweg de twee andere tankjes tankend?

KUBUSJES PLAKKEN

Je hebt acht kubusjes van 1×1×1. Elk kubusje plak je met minstens 1 kant aan een van de andere kubusjes. Welke buitenoppervlaktes kun je minimaal en maximaal maken? En welke ertussenin?

PYTHAGORAS PROFIELWERKSTUKPRIJS



Figuur 1 Schema voor het Goldbachvermoeden door Mieke Wessel. We kijken of er bij het getal $2a = (a + v) + (a - v)$ een v bestaat zodat zowel $a + v$ als $a - v$ priem is. Langs de verticale as zetten we alle mogelijke waarden van a en langs de diagonaal de mogelijke waarden van v. Dit betekent dat de verticale as bij 2 begint en dat de horizontale as bij 0 begint en voor iedere a bij $a - 2$ stopt. Als de som of het verschil van a en v samengesteld is, kleuren we het hokje in. Zo blijven alleen de hokjes waarvoor $a + v$ en $a - v$ allebei priem zijn leeg. We gebruiken de volgende kleuring. Eerst kleuren we grijs als $a + v \equiv 0 \pmod 2$ en $a > 2$. De overgebleven vakjes kleuren we groen als $a + v \equiv 0 \pmod 3$ en $a > 3$. Wat er over is wordt rood als $a + v \equiv 0 \pmod 5$ en $a > 5$, en zwart als $a + v \equiv 0 \pmod 7$ en $a > 7$. Zo ga je voort.

Dinsdag 22 maart was de finale van de eerste Pythagoras Profielwerkstukprijs. Eytan Cortissos, Rainier van Es en het duo Romy Rouwendaal en Fleur Piers hielden elk een glasheldere presentatie over hun profielwerkstuk. Dat gebeurde op het Science Park in Amsterdam, tijdens het Benelux Mathematisch Congres. Het aanwezige publiek bepaalde de winnaar via een stemming.

■ door Derk Pik

VERBLUFFENDE KWALITEIT BIJ SCRIPTIEPRIJS

De vier finalisten van de Pythagoras Profielwerkstukprijs waren geselecteerd uit tien inzendingen van profielwerkstukken door een jury van de wiskundigen Ronald Meester, Willem Hoekstra en Matthijs Coster. Het was bijna onmogelijk om een goede keuze te maken. De inzendingen, niet veel in aantal maar allemaal van hoge kwaliteit, hadden uiteenlopende onderwerpen. Sommige leerlingen schreven essayistische stukken over bekende onderwerpen, anderen voerden een onderzoek uit.

MODELLEREN Een aantal leerlingen liet zich inspireren door problemen uit de realiteit. Frédérique Schellekens van het Stedelijk Gymnasium Breda was de eerste inzender. Ze deed statistisch onderzoek naar een verband tussen de eindcijfers van brugklassers en de slagingskans in de zesde klas. Behoedzaam en zeer goed onderbouwd analyseerde ze de resultaten. Onder meer het vak Nederlands kwam er uit als een voorspeller voor de slagingskans.

Caya van der Sluis van het Bonhoeffer College in Castricum modelleerde de verspreiding van het ebolavirus door middel van differentiaalvergelijkingen, en vervolgens met behulp van kansrekening. Een moedige aanpak van een wel heel groot probleem.

DE CONSTANTE π Het profielwerkstuk van Luuk Goode van RGO Middelharnis ging over het benaderen van π met behulp van de methode van Buffon. Buffon benaderde π uit de kans waarmee een naald een naad treft wanneer deze op een plankenvloer valt. Door duidelijke zelfgetekende meetkundige illustraties begrijp je na lezing precies hoe het zit. Bovendien gaf Luuk mooie historische achtergrondinformatie.

Leanne van Dam en Saskia van der Hoeven van het Visser 't Hooft Lyceum te Leiden schreven een uitbundig geïllustreerd werkstuk in het Engels over allerlei benaderingen van π, waar de naalden van Buffon natuurlijk ook weer voorbijkwamen.

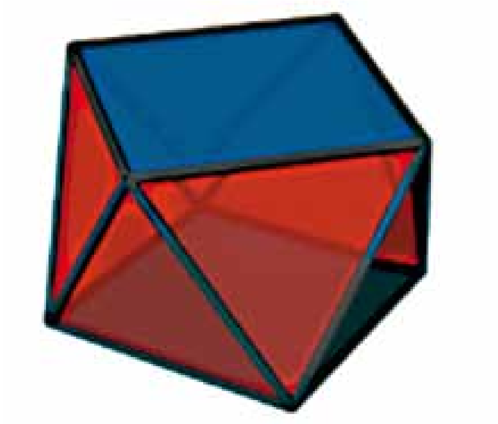
GETALLEN Mieke Wessel van het Cygnus Gymnasium te Amsterdam schreef een kort en origineel profielwerkstuk over het vermoeden van Goldbach. Dit vermoeden zegt dat elk even getal groter dan 2 te schrijven is als de som van twee priemgetallen. Mieke heeft zich vooral geconcentreerd op het vinden van patronen in grafische representaties. Zij komt hierbij tot een wonderlijk mooi diagram – je ziet het op de pagina hiernaast.

Pim Spelier van het Christelijk Gymnasium Sorghvliet in Den Haag heeft onderzoek gedaan naar de vergelijking van Pell: $x^2 - dy^2 = 1$. In deze vergelijking is d geheel, positief en geen kwadraat. Er wordt gezocht naar positieve geheeltallige oplossingen x en y. Pim heeft een diepgaand onderzoek gedaan naar de kleinste oplossing (x, y) bij gegeven d en het gedrag van deze kleinste oplossing als d varieert.

Rainier van Es van het Zwijsen College in Veg-

Figuur 2 Een tetra-antiprisma. Deze figuur past precies binnen de eenheidsbol en heeft zestien gelijke zijden. Op deze manier staan de acht punten op de eenheidsbol het verst van elkaar vandaan. Hun onderlinge afstand is gelijk aan

$$\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$



hel heeft zijn werkstuk aan de onoplosbaarheid van de algemene vijfdegraadsvergelijking gewijd. In zijn inleiding schrijft hij dat hij de theorie achter veeltermvergelijkingen overzichtelijk wil samenvatten en zonder een overmaat aan formalisering toegankelijk wil maken voor bovenbouwleerlingen. Daar is hij op een overtuigende manier in geslaagd. Als je bij elk hoofdstuk nog een stuk of tien opgaven bedenkt, is het zó een bruikbare tekst voor de vijfde of zesde klas van het vwo. Een grote prestatie!

COMPUTERS Leo Hendriks en Sjoerd Wiarda van het Minkema College te Woerden schreven een indrukwekkend, maar ook leesbaar en boeiend werkstuk over kunstmatige intelligentie. Zij programmeerden een zelflerend programma dat *Drie op een rij* speelde en een zelflerend Mario-spel.

Fleur Piers en Romy Rouwendaal van het Kennemer College te Beverwijk schreven een aantrekkelijk en goed gestructureerd profielwerkstuk over RSA-cryptografie en de veiligheid van informatienetwerken. Hun profielwerkstuk ging behoorlijk wat verder dan de standaard RSA-theorie en gaf breed uitwaaierende beschrijvingen van zowel de achtergronden als de toepassingen.

MEETKUNDE Eytan Cortissos van de JSG Maimonides in Amsterdam heeft onderzocht hoe je punten op een bol zo ver mogelijk van elkaar vandaan kan plaatsen. Preciezer geformuleerd: hoe kan je n punten op een bol plaatsen zodat de minimale afstand onder alle afstanden maximaal is? Neil Sloane en R.H. Hardin hebben hierover in 1995 een groot artikel gepubliceerd, waarin zij de benaderingen van de minimale afstand voor een groot aantal waarden van n hebben bepaald.

Voor 3 punten is de oplossing een gelijkzijdige driehoek op een grootcirkel, 4 punten geven een tetraëder, en vanaf 5 punten wordt het interessant. Met computersimulaties vond Eytan benaderingen waarna hij vaak ook exacte waarden kon berekenen. Hij heeft alle gevallen tot en met $n = 12$ geanalyseerd. De oplossingen lijken allemaal naar een relatief maximale symmetrie te convergeren.

Soms kunnen alle zijden gelijk gekozen worden, maar meestal niet. Verrassend is het geval $n = 8$. Dan komt er geen kubus uit, maar een zogenaamd 'tetra-antiprisma' (zie figuur 2).

Helaas te laat ingeleverd – de jury had haar keuze al gemaakt – maar eveneens erg mooi was het profielwerkstuk van Sanne en Rens Bakker (tweeling) en Roy Vorster van het Amstelveen College over betegelingen en vlakvullingen van Escher. De verschillende types meetkunde die hier aan ten grondslag liggen, werden helder gepresenteerd, met vaak indrukwekkende illustraties en uitgebreid bronnenapparaat.

DE UITSLAG Je ziet: uiteenlopende profielwerkstukken, maar allemaal van hoge kwaliteit. De presentatiemiddag was vooral leuk vanwege de interactie met het aanwezige publiek, dat niet schroomde om moeilijke technische vragen te stellen aan alle kandidaten.

De uiteindelijke winnaar is Eytan Cortissos geworden. Hij kreeg 250 euro en een trofee voor de prijzenkast van zijn school. Fleur Piers en Romy Rouwendaal werden tweede; zij deelden 125 euro. Rainier van Es tot slot kreeg 75 euro. ■

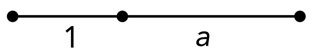
In het februarinummer hebben we een manier geleerd om wortels te construeren. De gulden snede is een verhouding die ook met een passer en een liniaal geconstrueerd kan worden. Dat is niet zo verbazingwekkend, want het gulden-snede-getal is te schrijven met een wortel. In dit artikel bekijken we twee gulden-snede-constructies.

■ door Jeanine Daems

DE GULDEN SNEDE CONSTRUEREN

Over de gulden snede wordt vaak een heleboel onzin verteld, bijvoorbeeld dat die verhouding in allerlei oude architectuur of kunst te vinden zou zijn, en dat mensen rechthoeken met zijden in die verhouding het allermooist zouden vinden. Maar het is wel een bijzondere verhouding in wiskundig opzicht: een lijnstuk is in twee delen verdeeld volgens de gulden snede als het kleinste deel tot het grootste deel dezelfde verhouding heeft als het grootste deel tot het hele lijnstuk (zie figuur 1).

We kunnen het kleinste deel zonder verlies van algemeenheid 1 noemen (we hebben het tenslotte niet over precieze lengtes, maar over verhoudingen). Dan zegt de definitie hierboven: wanneer a en 1 de gulden-snede-verhouding hebben, dan geldt $1 : a = a : (a + 1)$.



Figuur 1

Opgave 1. Gebruik de gelijkheid $1/a = a/(a + 1)$ en leid daaruit af dat $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. (Dit getal wordt vaak φ genoemd, de Griekse letter *phi*).

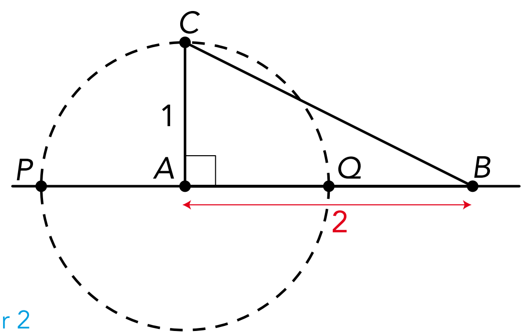
Opgave 2. Laat zien dat wanneer we aannemen dat juist het grootste deel van het lijnstuk 1 is, en het kleinste deel b noemen, het volgende geldt: $b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

De vraag naar de constructie kunnen we nu stellen als: stel dat een lijnstukje van lengte 1 gegeven is, construeer dan met passer en latje een lijnstuk van lengte $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

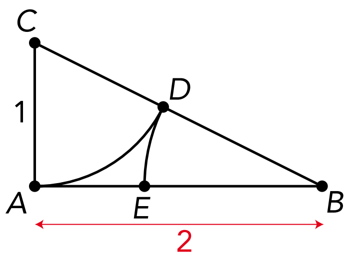
Opgave 3. In het artikel 'Wortels construeren' (*Pythagoras* 55-4, februari 2016, pagina 5-6) heb je geleerd om wortels te construeren. Gebruik die constructie om $\sqrt{5}$ te maken en maak daarmee vervolgens $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Dit is één manier om de gulden-snede-verhouding te construeren. Maar dat is niet de enige. De simpelste constructie komt neer op de vraag: gegeven een lijnstuk van lengte 2, kunnen we dat lijnstuk verdelen volgens de gulden-snede-verhouding? Die vraag is dus net een beetje anders: we gaan nu niet een lijnstukje van lengte $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ construeren, we gaan een lijnstuk van lengte 2 verdelen in twee stukken met verhouding (maar niet lengtes!) $1 : (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$.

Die constructie gaat als volgt (zie figuur 2). Je begint met een lijnstuk AB van lengte 2. Deel dat doormidden (met een middelloodlijn) en construeer vervolgens door A een loodlijn op AB met lengte 1. (Dat kan bijvoorbeeld door een cirkel met middelpunt A en straal 1 te tekenen, en dan op de twee snijpunten P en Q die die cirkel heeft met lijnstuk AB een middelloodlijn te construeren.) Het uiteinde van dat loodlijntje noemen we C.



Figuur 2



Figuur 3

Opgave 4. Voer deze constructie zelf uit met passer en latje, dus zonder te meten. Begin dus met een willekeurig lijnstuk AB en noem de lengte van dat lijnstuk 2.

Opgave 5. Hoe lang is BC dan?

De constructie gaat als volgt verder (zie figuur 3). Teken een cirkelboogje met midden C en straal CA. Het snijpunt met BC heet D. Teken nu een cirkelboogje met midden B en straal BD. Het snijpunt met AB heet E. De bewering is nu: E verdeelt het lijnstuk AB volgens de gulden-snede-verhouding. In de volgende opgave ga je uitzoeken waarom dat klopt.

Opgave 6. Hoe lang is BD? Hoe lang is AE dus? Toon aan dat $AE : EB = 1 : (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})$.

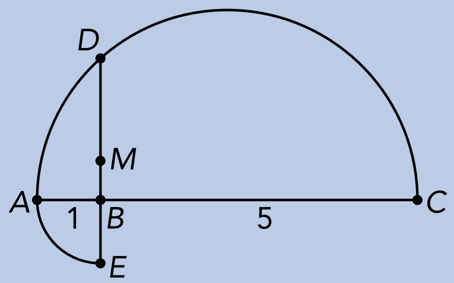
OPLOSSINGEN

Opgave 1. Kruislings vermenigvuldigen geeft $a^2 = a + 1$, dus $a^2 - a - 1 = 0$ en de abc-formule geeft ons dan twee oplossingen, waarvan $a = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ de enige positieve is.

Opgave 2. Dit kan op twee manieren. Analoog aan opgave 1 vinden we $b/1 = 1/(b + 1)$, wat leidt tot $b^2 + b = 1$. De positieve oplossing van deze vergelijking is $b = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
De andere methode gaat als volgt: blijkbaar is de verhouding $1 : a$ gelijk aan $b : 1$, ofwel $ab = 1$, en $1/(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})$ blijkt na wat rekenwerk (zie voor een idee de oplossing van opgave 6 hieronder) inderdaad gelijk te zijn aan $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Opgave 3. Voer de constructie uit het vorige nummer uit met lijnstukken van lengte 1 en lengte 5. Dat kwam neer op: verleng een lijnstuk van lengte 1 en pas met de passer daarop nog 5 af, dan krijgen we AB van lengte 1 en BC van lengte 5. Bepaal het midden van AC (bijvoorbeeld door de middelloodlijn te tekenen) en teken met dat midden als middelpunt een cirkel die door A en C gaat. Teken vanuit B een loodlijn omhoog tot hij de cirkel snijdt in D, dan heeft BD lengte $\sqrt{5}$. Door DB aan de kant van B met 1 te verlengen (dat kan eenvoudig door een cirkelboogje met straal AB om B te tekenen) krijgen we dus een lijnstuk van lengte $1+\sqrt{5}$. Dit lijnstuk doormidden delen (bijvoorbeeld weer met een middelloodlijn) levert het middelpunt M op, zodat $DM = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Opgave 3 (de constructie).



Opgave 5. De stelling van Pythagoras zegt nu dat $BC = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

Opgave 6. Omdat $CD = 1$, geldt $BD = \sqrt{5} - 1$. Dus ook $BE = \sqrt{5} - 1$. Dus $AE = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5}$. Nu moeten we dus aantonen dat $(\sqrt{5} - 1) : (3 - \sqrt{5}) = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}) : 1$. Dat gaat bijvoorbeeld door de deling uit te voeren en op een slimme manier met 1 te vermenigvuldigen om de wortels weg te werken uit de noemer:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

■

In het septembernummer hebben we een tetraëder binnenstebuiten gevouwen. Dat deden we door de tetraëdervlakken op een speciale manier te doorsnijden zodat er een lange band ontstond. Nu gaan we massieve figuren binnenstebuiten keren, zonder ze stuk te hoeven maken. Het is belangrijk om het zelf te doen: pas dan zul je alle bijzonderheden goed kunnen zien!

■ door William Verspaandonk

LOSSE EINDJES

De ruimtelijke figuren die we in de vorige artikelen binnenstebuiten keerden, bestonden uit een gesloten aaneenschakeling van gelijke meetkundige objecten: een gesloten band. De figuren in dit artikel zijn ingewikkelder en zullen we omkeren door middel van een band met een begin en een einde: een open band. Omdat de omgekeerde band weer dezelfde band is als de oorspronkelijke, noemen we deze band (waar we straks piramides op plakken) de *invariant*.

We beschrijven bijvoorbeeld hoe een rombendodecaëder (ruitvormig twaalfvlak) kan worden omgekeerd, zodat een gewone dodecaëder, een kubus of een octaëder ontstaat.

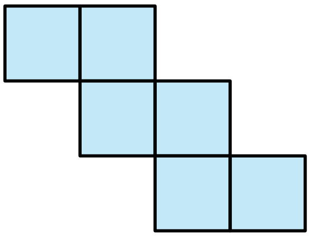
INVARIANT Stel je een ruimtelijke figuur voor en bekijk deze als een schil. We nemen aan dat van deze figuur een aaneengesloten uitslag is te maken. Een uitslag kan naar binnen of naar buiten worden gevouwd om een ruimtelijke figuur te krijgen. De ene figuur is dan de binnenstebuiten gekeerde vorm van de andere. Een dergelijke schil noemen we invariant als hij binnenstebuiten gekeerd dezelfde figuur oplevert.

Neem bijvoorbeeld een kubus. We kunnen die kubus op vele manieren snijden en uitklappen tot een uitslag. Voorbeelden zie je in de figuren 1, 2 en 3. Om de kubus te maken, kunnen we de uitslag op twee manieren vouwen. We krijgen dan twee keer dezelfde figuur. De kubusschil kan daarom worden beschouwd als een invariant.

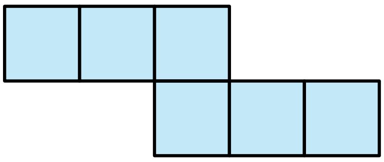
EXTRA EIS We stellen nog een extra eis aan de invariant. Het is niet echt noodzakelijk voor de constructie, maar het zorgt ervoor dat het geheel er mooier uitziet. De invarianten worden zó gesneden, dat de uitslagen een lint vormen en dat, als de uiteinden van het lint aan elkaar worden bevestigd, alle vlakken zoveel mogelijk op dezelfde manier aan elkaar vastzitten. De uiteinden mogen natuurlijk alleen aan elkaar worden bevestigd als zo nog steeds de ruimtelijke figuur kan worden gemaakt.

Neem de uitslagen van de kubus in de figuren 1, 2 en 3. In figuur 3 wordt het lint gevormd van het meest linkse naar het meest rechtse vierkant. Dit is een lint met twee flappen aan de zijkanten. Dus na het sluiten van het lint zijn er twee vierkanten die op een andere manier aan aan de andere vierkanten vastzitten (ze grenzen maar aan één ander vlak). In figuur 2 zien we een lint dat helemaal van links naar rechts loopt. Door het meest linkse vierkant aan de bovenzijde te bevestigen aan het meest rechtse vierkant aan de onderzijde, hebben deze twee vierkanten dezelfde begrenzing als de twee middelste vierkanten. De twee nog niet besproken vierkanten (de middelste van drie vierkanten op een rij) hebben echt andere buren. Ze grenzen op een andere manier aan twee vierkanten.

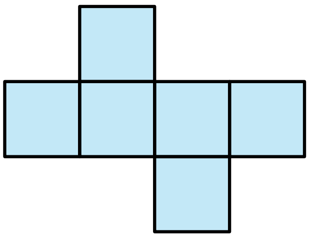
Door bij de uitslag van figuur 1 het meest linkse vierkant aan de bovenzijde te bevestigen aan het meest rechtse vierkant aan de onderzijde, krijgen alle vierkanten dezelfde begrenzing. Elk vierkant grenst op dezelfde manier aan twee andere vierkanten.



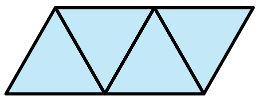
Figuur 1



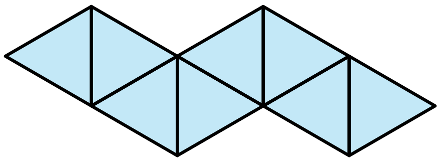
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

DE CONSTRUCTIEMETHODE De constructiemethode is opgebouwd rond de invariant van een ruimtelijk figuur. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de 'piramidemethode' (zie het januarinummer) of een variant hierop. We nemen een figuur en beschouwen die in eerste instantie als massief en opgedeeld in piramides met als grondvlak telkens één vlak uit de invariant. De piramides bevinden zich dus allemaal aan één zijde van de invariant. De invariant is omkeerbaar en hiermee is de combinatie ook omkeerbaar, omdat we weten dat de piramides de ruimtelijke figuur vormen en dus in de invariant passen.

Doordat de figuur invariant is en omdat de vlakken van de invariant de grondvlakken zijn van de piramides, zullen de piramides na het omkeren in precies de andere richting wijzen. Zaten de piramides eerst in de invariant, na het omkeren zitten ze aan de buitenzijde. Hiermee wordt de invariant leeg.

De constructiemethode kan dan zelfs worden uitgebreid met het opnieuw toepassen van de piramidemethode op dezelfde massieve figuur. Dit hoeft natuurlijk niet. Deze nieuwe piramides kunnen dan aan de andere zijde van de invariant worden bevestigd.

Als variatie op de constructiemethode kunnen de piramides minder hoog worden genomen. Dit past dan zeker binnen de invariant. Het is zelfs met bepaalde ruimtelijke figuren mogelijk om in plaats van piramides andere vormen te gebruiken.

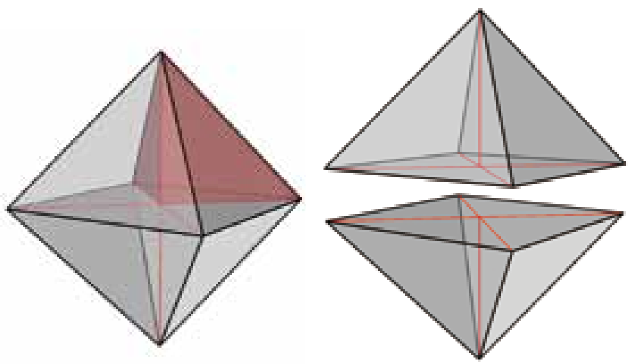
HET TRIAKIS-TETRAËDER Een *triakis-tetraëder* is een tetraëder waarbij aan elke zijde een driehoekige piramide is geplakt. Om dit object binnenstebuiten te kunnen keren, kunnen we gebruikmaken van de tetraëder als invariant. Hiertoe gebruiken we de uitslag in figuur 4. Als we het lint sluiten tot een band, dan zien we dat alle vlakken dezelfde begrenzing hebben. We passen vervolgens de piramidemethode slechts één keer toe op de (massieve) tetraëder. Op deze manier zien we voor het omkeren van de invariant de invariant zelf (tetraëder) en na het omkeren een figuur die erg lijkt op een triakis-tetraëder. Deze laatste figuur wordt door de piramides met de invariant samen gevormd. (Als we de piramides iets kleiner zouden nemen, krijgen we wel een echte triakis-tetraëder.)

Om de constructie te maken, hebben we de ribbenlengtes van de piramides nodig. De lengtes van de ribben in het grondvlak weten we al, omdat we die zelf hebben gekozen. Maar de lengtes van de ribben die samenkomen in de top van de piramide moeten we nog berekenen. Laten we deze ribben de 'topribben' noemen. Alle toppen van de piramides komen samen in het zwaartepunt van de tetraëder en het zwaartepunt ligt op alle hoogtelijnen van de tetraëder. Het zwaartepunt is dus het snijpunt van de hoogtelijnen. In het kader op pagina 11 berekenen we de ribbenlengtes.

VAN KUBUSSENOCTAËDER NAAR ROMBENDODECAËDER Ook voor deze constructie gebruiken we de piramidemethode; een keer op de gebruikelijke manier en een keer gebruiken we kleinere piramides. De grootte van deze laatste piramides is speciaal gekozen.

Laten we eerst naar de uitslag van de invariant (octaëder) kijken (zie figuur 5). Als de meest linkse driehoek wordt bevestigd aan de meest rechtse driehoek door de onderzijde van de linkerdriehoek te bevestigen aan de bovenzijde van de rechterdriehoek, krijgen alle driehoeken dezelfde begrenzing en zo kan de octaëder nog steeds worden gevormd.

Nu kijken we naar de piramides die ontstaan met de piramidemethode. Een ervan is in rood weergegeven in figuur 6. Voor deze gewone piramides hebben we ook hier de lengte van de topribben nodig. In dit geval is deze makkelijk uit te rekenen. De octaëder is opgebouwd uit twee tegen elkaar ge-



Figuur 6

DE RIBBENLENGTE VAN DE PIRAMIDES IN DE TETRAËDER

Als hulpmiddel voor het bepalen van de ribbenlengte van de piramides in de tetraëder gebruiken we de kubus. De tetraëder kan zó in een kubus worden geplaatst, dat de hoeken van de tetraëder samenvallen met vier hoeken van de kubus (zie figuur 16). In figuur 16 is verder in rood aangegeven hoe de piramides ontstaan. In figuur 17 zie je de doorsnede die is genomen over het vlak $ADBC$.

Trek een lijn van A naar B; dit is een van de hoofddiagonalen van de kubus. Deze lijn loopt precies door het zwaartepunt van het vlak V van de tetraëder. Dit kun je als volgt inzien. Alle drie de hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek V zijn ook hoekpunten van de kubus en zitten even ver van A. De afstand is namelijk de lengte van de diagonaal van de zijvlakken van de kubus. De hoekpunten zitten ook even ver van B. Deze afstand is gelijk aan de lengte van de ribben van de kubus. In feite zitten de drie hoekpunten even ver van elk willekeurig punt op de lijn AB, dus ook van het snijpunt van lijn AB met vlak V. Bij een gelijkzijdige driehoek betekent dit dat dit snijpunt samenvalt met het zwaartepunt van de driehoek.

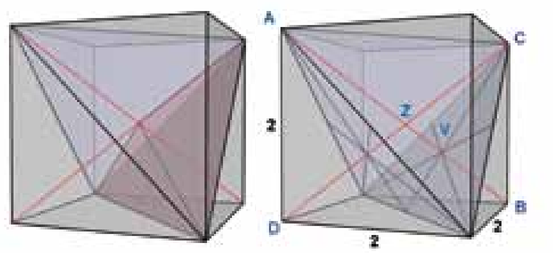
Dit betekent ook dat de lijn AB loodrecht op V staat. Daardoor valt deze lijn samen met de hoogtelijn van de tetraëder. De hoogtelijn loopt precies door het zwaartepunt van de tetraëder. Deze lijn hebben we dus nodig voor de constructie.

Neem nu nog een andere hoofddiagonaal van de kubus (CD). De twee hoofddiagonalen snijden de kubus precies in het zwaartepunt van de kubus. Omdat beide diagonalen samenvallen met twee hoogtelijnen van de tetraëder, is dit zwaartepunt ook het zwaartepunt Z van de tetraëder! Het is nu gemakkelijk om de lengte van AZ en CZ te bepalen. Deze lijnstukken zijn de topribben.

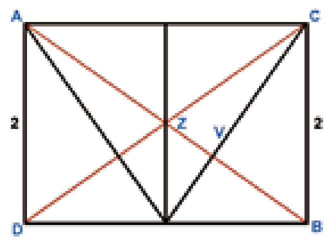
Neem aan dat de ribbenlengte van de kubus 2 is. De ribbenlengte van de tetraëder is dan $2\sqrt{2}$. En de lengte van de hoofddiagonaal van de kubus is $2\sqrt{3}$.

De twee diagonalen AB en CD snijden elkaar dus precies in het zwaartepunt van de kubus/tetraëder. Daarmee wordt de lengte van de ribben precies de helft van deze lengte: $\sqrt{3}$.

Omdat we uitgaan van de tetraëder met een vooraf bepaalde lengte van de ribben (bijvoorbeeld 2), kunnen we alle lengten van de ribben van de kubus, de tetraëder en van de piramides in de voorgaande berekening met dezelfde factor aanpassen zodat de ribbenlengte van de tetraëder 2 wordt. Deze factor is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. De lengte van de topribben wordt dan $\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.



Figuur 16



Figuur 17

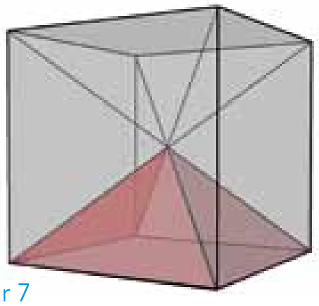
plaatste piramides met ieder een vierkant grondvlak (zie figuur 6). Het zwaartepunt van de octaëder valt precies in het zwaartepunt van het vierkant.

Veronderstel dat de ribbenlengtes van de octaëder (en dus ook de zijden van het vierkant) 2 zijn, dan kun je met behulp van de stelling van Pythagoras de diagonaal van het vierkant bepalen: $2\sqrt{2}$. Deze lengte is twee keer de ribbenlengte van de piramides. Dus $\sqrt{2}$ is de lengte van de topribben.

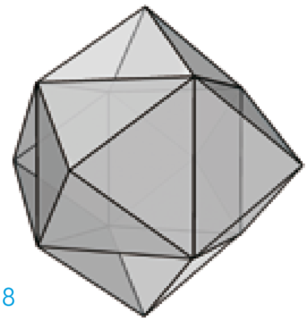
We kunnen de piramides vervolgens op de invariant bevestigen en omkeren. Met deze piramides aan de buitenzijde ontstaat een figuur die lijkt te zijn opgebouwd uit hoeken van kubussen. We noemen dit een *kubussenoctaëder*. Je ziet hem op de laatste foto die bij de bouwtekening voor deze constructie staat.

Aan de andere zijde van de invariant bevestigen we vervolgens minder hoge piramides. Dit zijn de piramides die bij de tetraëder zijn bepaald. De zijden van het grondvlak van deze piramides moeten lengte 2 hebben. Dit is de ribbenlengte van de octaëder, maar ook van de tetraëder. Zoals we hebben gezien bij de berekening bij de tetraëder, moet de lengte van de topribben $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ zijn.

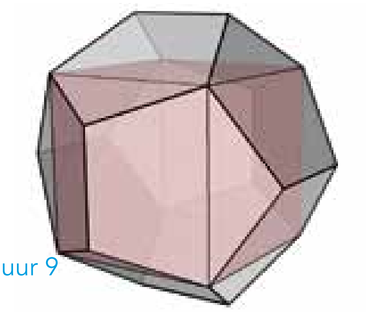
Als we deze piramides aan de nog niet gebruikte zijde van de invariant bevestigen en naar buiten keren, ontstaat een mooie ruimtelijke figuur. De vlakken van de piramides vormen ruiten; in totaal worden er twaalf ruiten gecreëerd. De zo ontstane figuur is een *rombendodecaëder*. Een leuke bij-



Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9

komstigheid van deze constructie is dat er twee aan elkaar vastzittende kubussen kunnen worden gevormd (zie foto bij de bouwtekening).

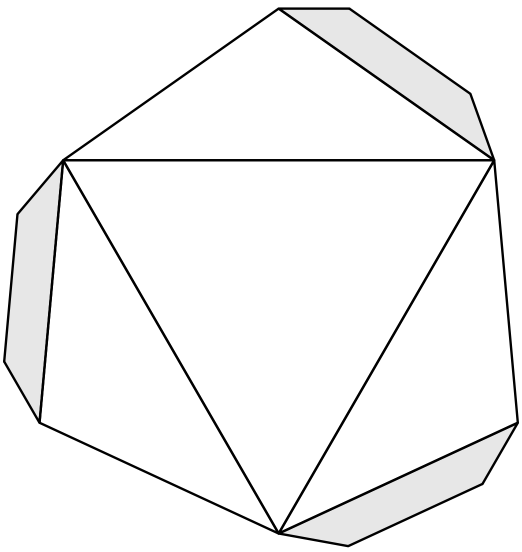
VAN KUBUS NAAR ROMBENDODECAËDER Bij deze constructie met de kubus als invariant maken we eveneens gebruik van de piramidemethode (zie figuur 7). Dit doen we maar één keer. Voor de uitslag van de invariant nemen we de uitslag van figuur 1. Als we de invariant omdraaien, met hieraan de piramides bevestigd, dan ontstaat ook hier de rombendodecaëder (zie figuur 8), net zoals bij de octaëder! Dit is eveneens te zien op de vierde foto in figuur 15. Na het omkeren van de invariant is deze natuurlijk leeg. Je kunt dit zo laten, zoals we hebben gedaan, of je kunt opnieuw de piramidemethode gebruiken, maar er zijn ook andere mogelijkheden, waarover straks meer.

We hebben opnieuw de lengtes van de topribben nodig. Dit is de helft van de lengte van de hoofddiagonaal van de kubus. Stel dat de ribbenlengte van de kubus 2 is. De hoofddiagonaal heeft dan lengte $2\sqrt{3}$ en de lengtes van de ribben van de piramides zijn dus $\sqrt{3}$.

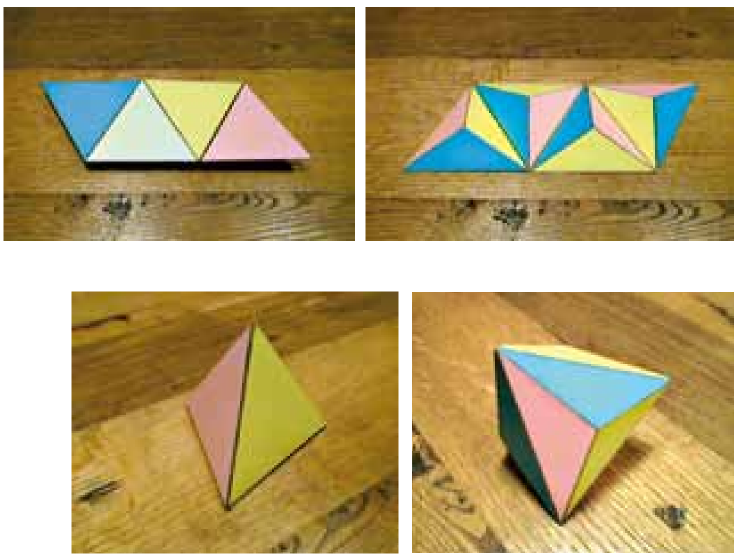
VAN KUBUS NAAR DODECAËDER Het is mogelijk om een dodecaëder te krijgen door een soort 'schilddakjes' op een kubus te plaatsen. In het januarinummer hebben we uitgelegd hoe de kubus als hulpmiddel kan worden gebruikt om de lengte van de hoofddiagonalen in een dodecaëder te bepalen. Dit deden we door een kubus in de dodecaëder te plaatsen (zie figuur 9). Nu kunnen alle stukjes die buiten de kubus vallen (de zogenaamde 'schilddakjes') worden gebruikt voor de constructie. Door de schilddakjes op de buitenzijde van de invariant te plaatsen, krijgen we dus de dodecaëder. En het is mogelijk om de invariant om te draaien met de schilddakjes inbegrepen. De vormen passen in de kubus! We werken dit hier niet verder uit.

Je kunt je misschien wel voorstellen dat er zo een combinatie is te maken waarbij de rombendodecaëder, na het omdraaien, overgaat in de dodecaeder, met als invariant de kubus. Of de combinatie van kubus naar dodecaëder.

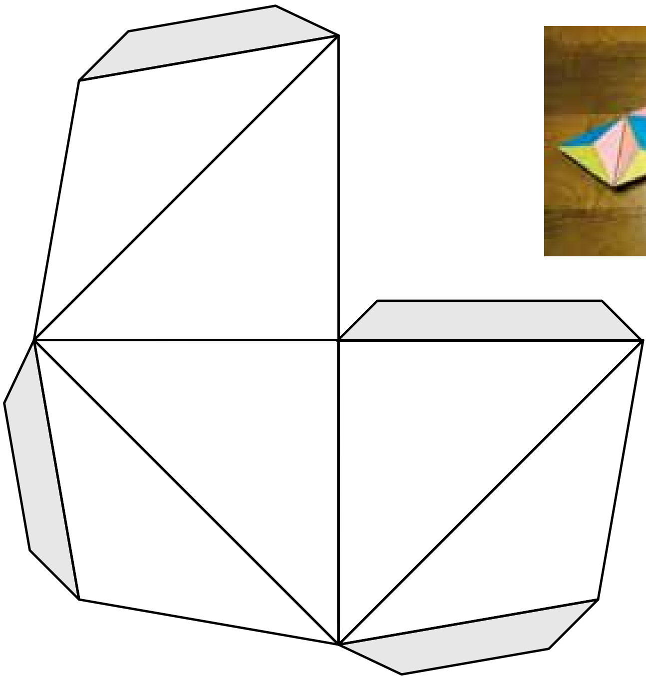
BOUWTEKENINGEN De bouwtekeningen voor de tetraëder en de kubus als invariant bestaan uit



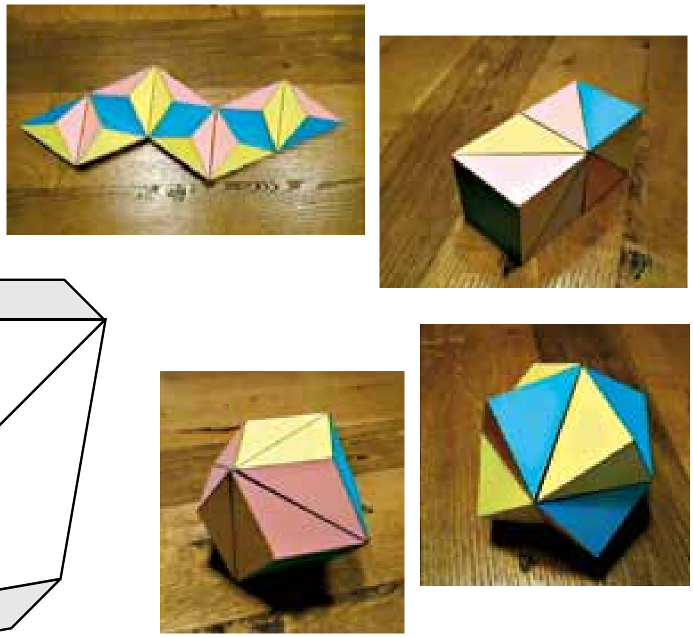
Figuur 10 Bouwtekening invariant tetraëder; 4 keer nodig



Figuur 11



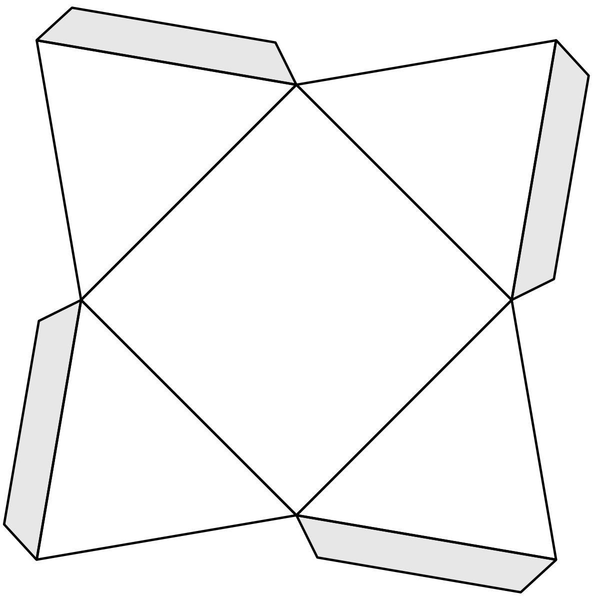
Figuur 12 Bouwtekening invariant octaëder; 8 keer nodig



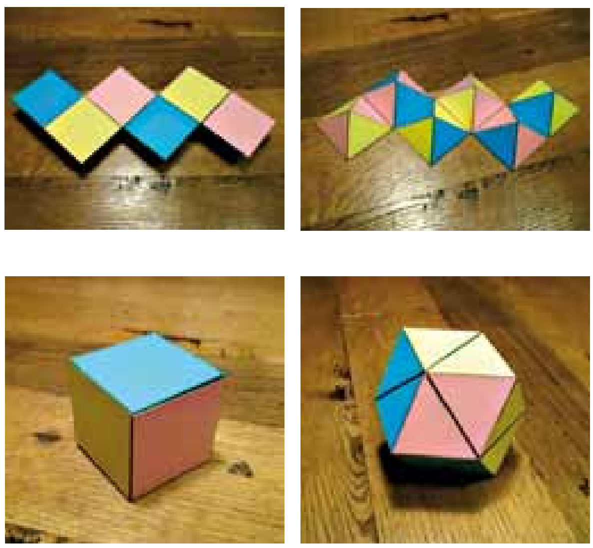
Figuur 13

een (grond)vlak van deze invarianten en de driehoekszijden van de piramides (zie figuur 10 en 14). De bouwtekening voor de octaëder als invariant is opgebouwd uit de driehoekszijden van twee piramides (zie figuur 12). Hier komt dus geen vlak van de octaëder in terug. Het vlak valt geheel in de constructie van de piramides.

Nadat je de bouwtekeningen hebt gekopieerd (ze staan ook op www.pyth.eu) en in elkaar hebt geplakt, kun je de onderdelen aan elkaar bevestigen zoals in de foto's is te zien. Voor het kunnen omkeren van de ruimtelijke figuren, moet er voldoende ruimte tussen de onderdelen zitten, zo'n 1 à 1,5 millimeter. De onderdelen kun je bijvoorbeeld met plakband aan elkaar bevestigen. Om de randen van het plakband vervolgens weg te werken, kun je een laagje papier op de oppervlakken plakken. In verschillende kleuren is dat het leukst! ■



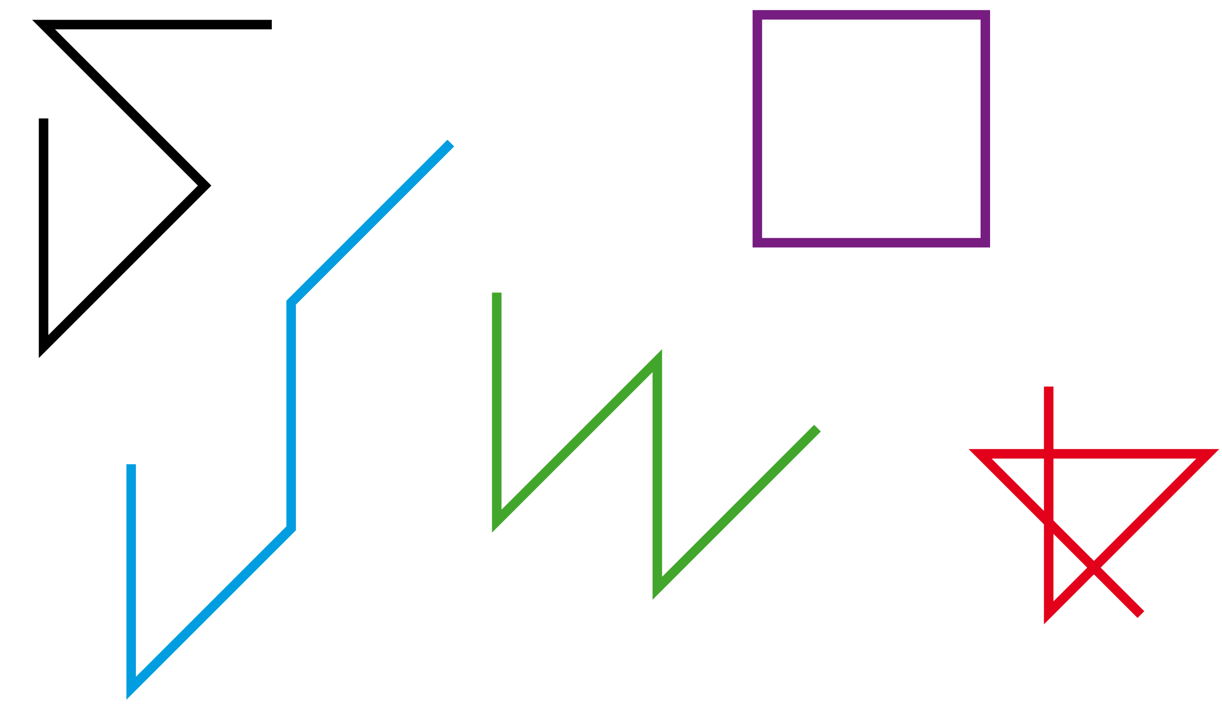
Figuur 14 Bouwtekening invariant kubus; 6 keer nodig



Figuur 15

SIERAADVORMEN

■ door Jaap Klouwen



Vorig jaar bezocht ik CODA: een bibliotheek, museum en archief onder één dak in Apeldoorn. Een van de tentoonstellingen ging over de goudsmid en sieraadontwerper Nicolaas Thuys (1927-1989). De tentoonstelling *Veranderende vormen* liet zien hoe deze kunstenaar rond het jaar 1965 zijn stijl van rijkelijk gedecoreerde bloem- en diervormen transformeerde in geometrische en meer abstracte vormen.

In een van de vitrines lag een A4'tje met getekende vormen van vier achter elkaar geplaatste staafjes. De vier staafjes scharnierden in de lengte achter elkaar en mochten alleen hoeken van een veelvoud van 45 graden met elkaar maken. Op deze pagina staan een paar voorbeelden van deze vormen.

Thuys telde overlappende vormen met de vier staafjes, zoals die in het rood, niet mee. Ook spiegelbeelden en draaiingen gaven geen nieuwe vormen, vond hij. Op het A4'tje tekende Thuys vijftig ontwerpen van dit type, en schreef erbij: 'Er zijn gemakkelijk minstens vijftig verschillende ontwerpen te maken met deze voorwaarden'. Dat klopt. Wij gaan uitzoeken hoeveel het er precies zijn.

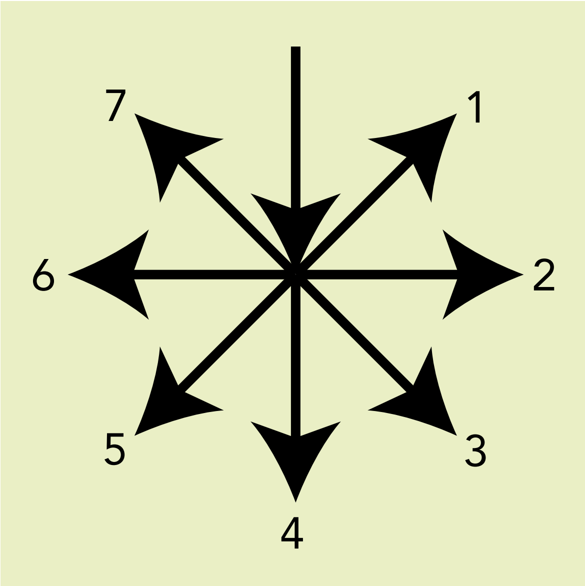
In de volgende opdrachten wordt met 'hoek' steeds de kleinst mogelijke hoek tussen twee staafjes bedoeld.

Opdracht 1. Zoek drie nog niet gegeven vormen met precies twee hoeken van 90 graden tussen de staafjes.

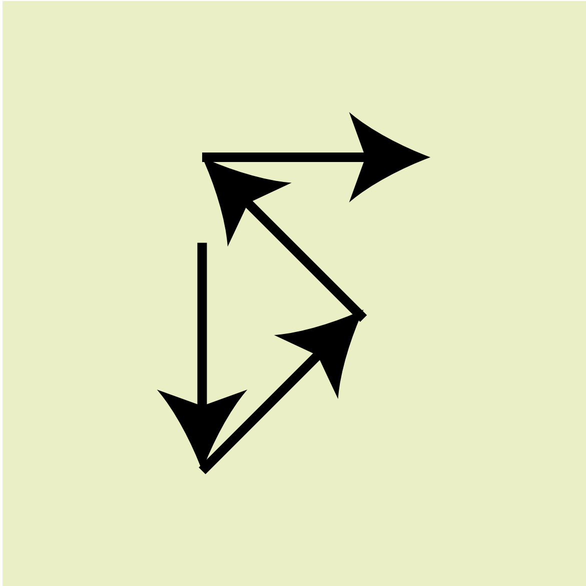
Opdracht 2. Zoek vijf nog niet gegeven vormen met (drie) gelijke hoeken.

Opdracht 3. Zoek zeven nog niet gegeven vormen met ongelijke hoeken, maar niet die van 180 graden.

SYSTEMATISCH ZOEKEN Om het aantal vormen te bepalen, moeten we natuurlijk systematisch te werk gaan. Uitgaande van het eerste staafje en een richting (we nemen: verticaal naar beneden), kunnen we daarna voor het tweede staafje



Figuur 1 De zeven richtingen voor een staafje



Figuur 2 Deze vorm heeft code 127

uit zeven mogelijkheden kiezen: het aantal graden 45, 90, 135, 180, 225, 270 en 315. We noteren dit met de cijfers 1 tot en met 7 (zie figuur 1). Ook de richting van het derde en vierde staafje associëren we met een van de cijfers 1 tot en met 7.

De zwarte vorm krijgt daarmee code 127 (zie figuur 2). Let op: om de richting van een staafje te bepalen, gaan we altijd uit van de situatie waarbij het staafje ervóór verticaal naar beneden wijst. De zwarte vorm heeft dus *niet* code 172.

De codes van de blauwe, groene en paarse vorm zijn achtereenvolgens 135, 171 en 222. De code van de rode vorm (die niet is toegestaan) is 111.

Nu hoeven we 'alleen' nog maar alle $7^3 = 243$ codes langs te lopen en te kijken welke vormen er bij horen. Gelukkig zijn er codes equivalent. Zo is bijvoorbeeld de vorm van code 761 (maar ook die van 167 en 721) dezelfde als de vorm die bij 127 hoort, op basis van spiegeling en rotatie.

Na een grondige inventarisatie kom ik tot 99 verschillende vormen, waarvan er 11 overlappend (en dus niet toegestaan) zijn. Inderdaad: meer dan vijftig vormen!

Op de volgende twee pagina's staan alle 99 sieraadvormen met bijbehorende codes. Van de elf die niet meetellen, is de code rood gedrukt.

Opdracht 4. Zoek alle vormen bij een keuze van drie staafjes. ■

ANTWOORDEN

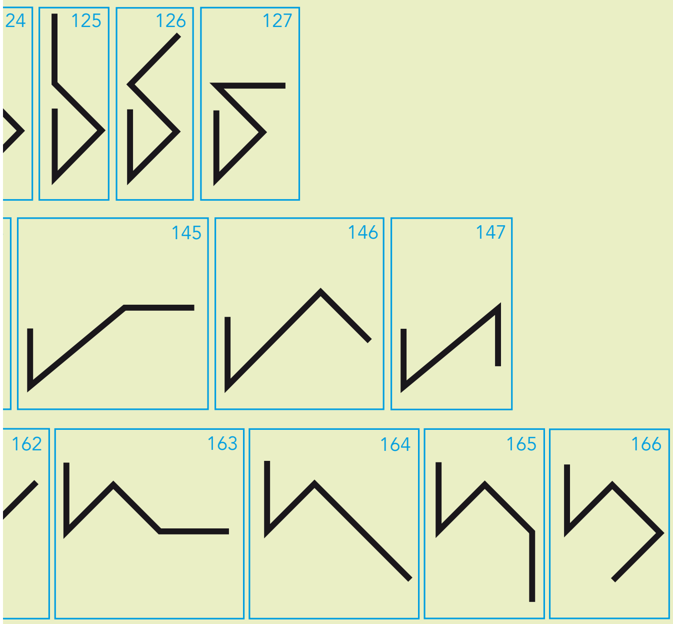
Opdracht 1. Sieraadvormen met precies twee hoeken van 90 graden (en dus één andere hoek) zijn bijvoorbeeld, in codevorm, 162, 216, 223, 242 en 272.

Opdracht 2. Vormen met drie gelijke hoeken zijn, behalve de al gegeven 111, 171 en 222: 117 (maar die is wel overlappend), 226, 262, 335, 353 en de 'rechte' 444.

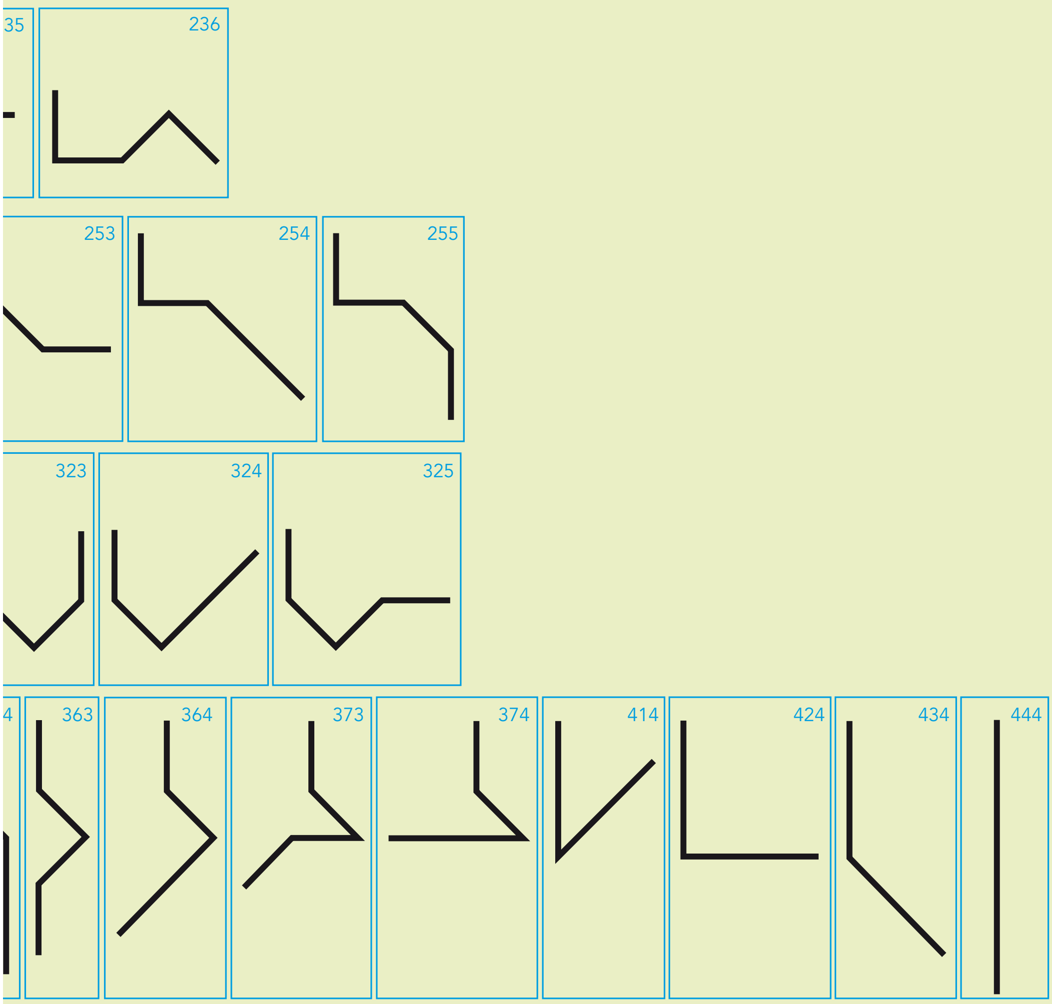
Opdracht 3. Voorbeelden van vormen met drie ongelijke hoeken, maar niet 180 graden, zijn in code 123, 132, 136, 163, 165, 215, 273 en 275. Ze hebben alle op verschillende wijze hoeken van 45, 90 en 135 graden. Het zijn de drietallen codes zonder dubbel cijfer, geen 4 en geen tweetal cijfers samen 8.

Opdracht 4. Er zijn 16 vormen met drie staafjes. Ze hebben codes 11 (overlappend), 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 44.


111
112
113
114
115
116
117
121
122
123
131
132
133
134
135
136
137
141
142
143
151
152
153
154
155
156
161
171
172
173
174
175
176
212
213
214
215
216
222
223
224
225
226
232
233
234
242
243
244
245
246
252
262
263
264
265
272
273
274
275
314
315
333
334
335
343
344
345
353

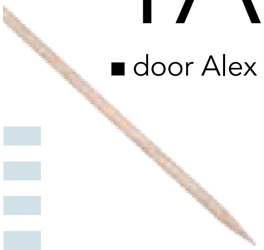


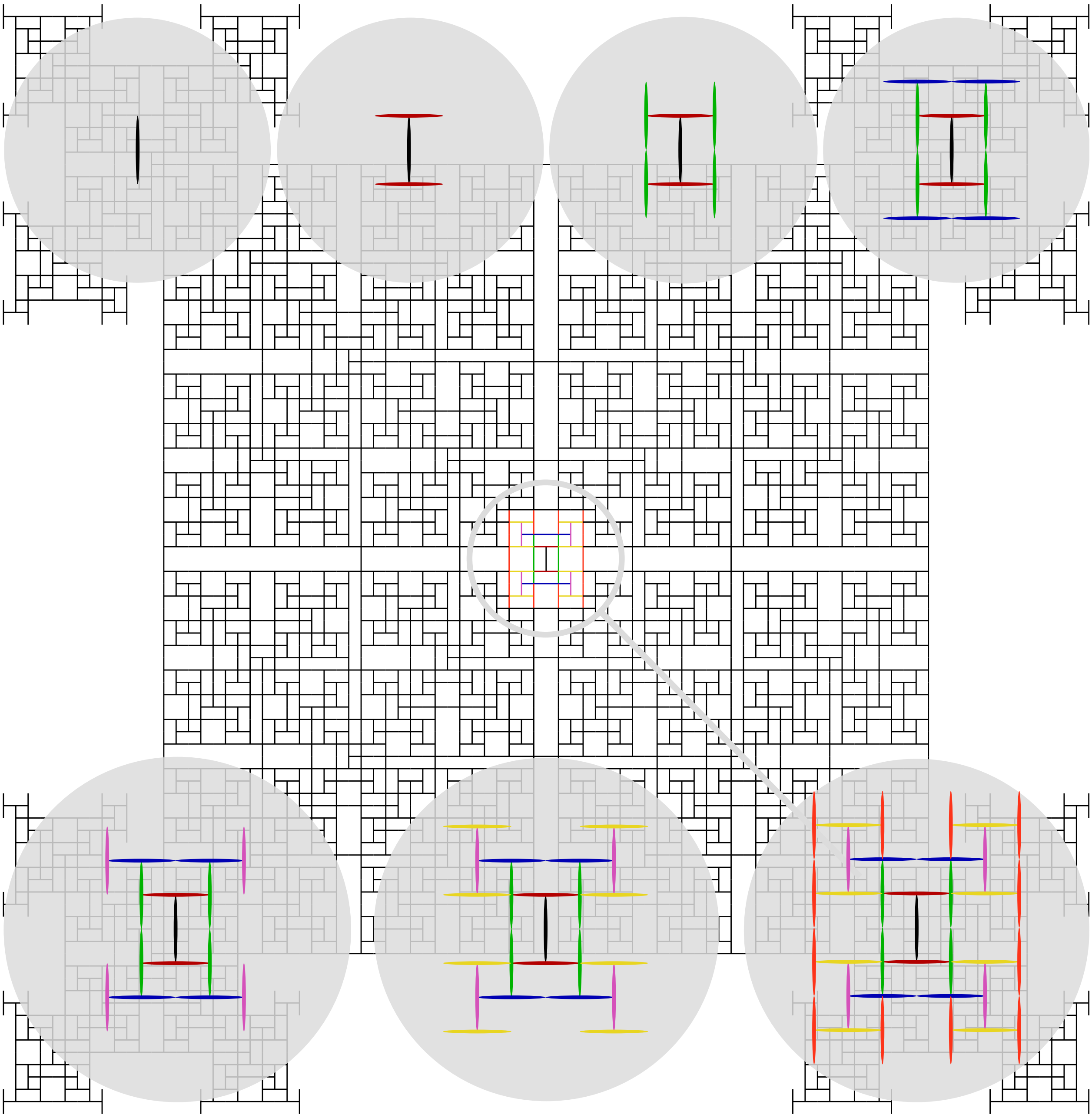
Alle 99 sieraadvormen



TANDENSTOKERRIJ

■ door Alex van den Brandhof en Paul Levrie





Veel onschuldige wiskundige puzzels blijken diepe wiskundige structuren te bezitten. Zo ook de tandenstokerpuzzel. Begin met een tandenstoker en leg die verticaal voor je neer (dit is zet 1). Vervolgens leg je aan elk uiteinde van deze tandenstoker een nieuwe tandenstoker, horizontaal en met het middelpunt van de nieuwe tandenstoker rakend aan zo'n uiteinde (dit is zet 2). Dan komen zet 3, zet 4, enzovoorts, waarbij je in elke zet zoveel mogelijk tandenstokers moet neerleggen onder de volgende voorwaarden:

- elke nieuwe tandenstoker moet horizontaal of verticaal liggen;
- twee tandenstokers mogen niet over elkaar heen liggen;
- het middelpunt van elke nieuwe tandenstoker moet raken aan een eindpunt van precies één tandenstoker die er al lag.

Op de linkerpagina zijn de eerste zeven zetten geïllustreerd; op de achtergrond zie je de situatie na 89 zetten. Het aantal tandenstokers na n zetten kunnen we noteren als $T(n)$. De eerste zeven waarden van $T(n)$ kun je tellen met behulp van de illustratie:

$$1, 3, 7, 11, 15, 23, 35.$$

De rij gaat zo verder: 43, 47, 55, 67, 79, 95, … In de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) is de rij te vinden onder nummer A139250. Hij werd in 2008 aan de encyclopedie toegevoegd door de Argentijn Omar Pol. In de OEIS vind je onder andere links naar prachtige animaties die de eerste zoveel zetten in beeld brengen.

FORMULES Samen met OEIS-vader Neil Sloane en David Applegate schreef Omar Pol een artikel over de wiskundige eigenschappen van de tandenstokerrij. Wie dat artikel leest (het is gratis beschikbaar op internet, googel maar: "The Toothpick Sequence and Other Sequences from Cellular Automata"), komt er al gauw achter dat de wiskunde achter de tandenstokers niet makkelijk is. Pol en zijn collega's leiden een formule voor $T(n)$ af. Ze onderscheiden daarbij het geval waarbij n een macht van 2 is, en alle andere gevallen. Als $n = 2^k$, dan geldt

$$T(2^k) = (2^{2k+1} + 1)/3. \qquad (*)$$

Na 8 zetten ($k = 3$) bestaat de configuratie dus uit $(2^7 + 1)/3 = 43$ tandenstokers.

Als n géén macht van 2 is, dan geldt het volgende recursieve verband:

$$T(2^k + i) = T(2^k) + 2T(i) + T(i + 1) - 1, \qquad (**)$$

waarbij $i = 1, \ldots, 2^k - 1$. Dus na 12 zetten ($k = 3$ en $i = 4$) is het aantal tandenstokers gelijk aan

$$T(8) + 2T(4) + T(5) - 1 = 43 + 2 \cdot 11 + 15 - 1 = 79.$$

Om $(*)$ en $(**)$ te bewijzen, is niet de allerhoogste wiskunde nodig, maar doorzettingsvermogen is wel essentieel. Wie goed voor het bewijs van Pol, Sloane en Applegate gaat zitten, wordt beloond met een fraai staaltje redeneerkunst. Bekijk ook eens de animatie op oeis.org/A139250/a139250.anim.html en probeer dan vooral $T(n)$ met n een macht van 2 eens uit; dan zie je waarom de machten van 2 een speciale rol spelen in de formule voor $T(n)$.

Je vraagt je misschien af, of er geen eenvoudigere formule dan $(**)$ voor $T(n)$ bestaat. Dat is een open probleem in de wiskunde; een andere formule dan $(**)$ is tot nog toe niet gevonden!

VERDER ONDERZOEK Op de tandenstokerpuzzel kun je eindeloos variëren. Bijvoorbeeld: wat gebeurt er als de tandenstokers de vorm van bijvoorbeeld een 'T', 'V' of 'Y' hebben (zie oeis.org/A139250/a139250.anim.html)? Of: wat als de tandenstokers niet op een plat vlak worden neergelegd, maar in de (driedimensionale) ruimte (OEIS: A160160)? Op de achterkant van deze *Pythagoras* zie je een plaatje van de driedimensionale tandenstokerpuzzel (de tandenstokers zijn zwart, de drie rode lijnen vormen een driedimensionaal coördinatenstelsel; de eerste tandenstoker ligt in de z-richting, en dan gaan we verder zoals in het tweedimensionale geval, waarbij we de tandenstokers in zet 2 in de x-richting leggen, in zet 3 in de y-richting, in zet 4 in de z-richting, in zet 5 opnieuw in de x-richting, enzovoort).

Een heel andere vraag gaat over vierkanten binnen een tandenstokerconfiguratie. Op het omslag van deze *Pythagoras* zie je de configuratie na 32 zetten. Daarin zijn vierkanten met zijden 1, 2, 3, 4, 6, 7 en 8 groen gekleurd (aangenomen dat de tandenstokers lengte 2 hebben). De configuratie bevat geen vierkant met zijde 5. Lukt het na méér dan 32 zetten om wél een vierkant met zijde 5 te vinden? Uiteraard moet de rand van het vierkant helemaal met tandenstokers bedekt zijn.

Kortom: er valt veel te experimenteren en te ontdekken. Zet je tanden er maar eens in! ■

In het septembernummer schreven we een prijsvraag uit in het kader van onze serie over getallenrijen. In dit laatste nummer van jaargang 55 geven we de uitslag.
■ door Matthijs Coster

EEN EIGEN RIJ

UITSLAG PRIJSVRAAG

Bedenk een zo origineel mogelijke getallenrij die nog niet voorkomt in de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS). Zo luidde de opdracht van de prijsvraag die we in september uitschreven. Ook was er een nieuwjaarsopgave: bedenk een rij waarin het getal 2016 voorkomt. Over deze bonusvraag schreven we al in het februarinummer.

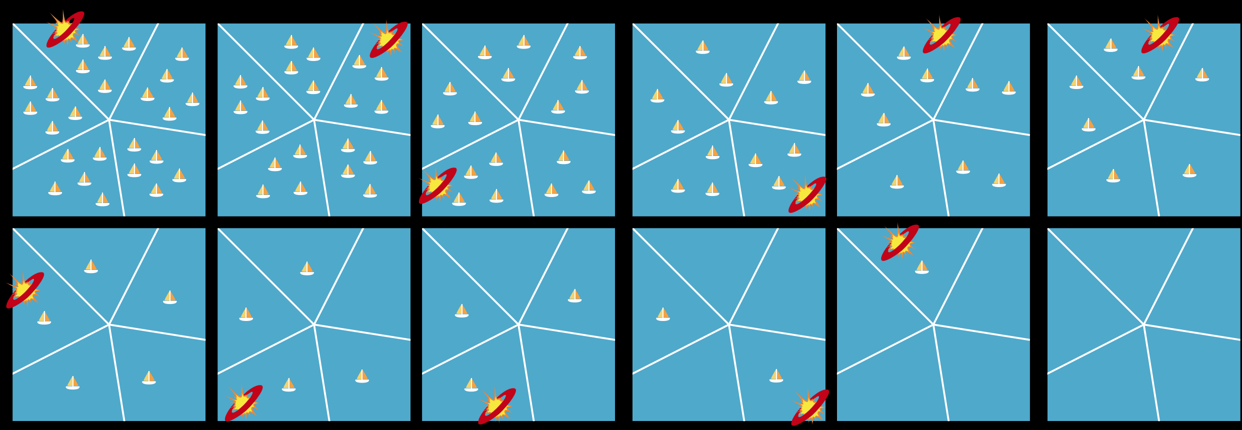
De fraaiste inzending – zonder de restrictie dat 2016 erin moet voorkomen – was volgens de jury een getallenrij van Pim Spelier (Gymnasium Sorghvliet, Den Haag). Het is de rij

1, 3, 5, 8, 11, 14, 17, 21, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 49, 53, 57, 62, 66, 71, 75, 80, 84, 90, 94, 99, …

Als je niet zo gauw ziet wat het systeem achter deze rij is, geeft dat niks, want wat Pim heeft bedacht, is beslist vindingrijk. Pim gaat uit van een variant op het spel *Zeeslag*. De zee is verdeeld in n gebieden. Je hebt n^2 schepen tot je beschikking die je over deze n gebieden kunt verdelen. De tegenpartij mag kijken hoe jij je schepen hebt verdeeld en vervolgens een besluit nemen om één gebied volledig te bombarderen. Alle schepen in dat deel worden dan vernietigd. Als je slim bent, probeer je de schepen zo goed mogelijk over alle n gebieden te verdelen. Desalniettemin ben je in je eerste zet n schepen kwijt. De resterende schepen verdeel je opnieuw over de n gebieden. Wat Pim zich afvroeg, was hoeveel bombardementen er nodig zijn om alle schepen te vernietigen.

We bekijken een voorbeeld met $n = 5$ (zie illustratie). De zee is dus verdeeld in 5 gebieden waarin je 25 schepen moet verdelen. De rij van resterende schepen ziet er als volgt uit: 25, 20, 16, 12, 9, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Na 11 bombardementen zijn alle schepen vernietigd. Zodoende geldt dat $a_5 = 11$.

HOGERE WISKUNDE Kunnen we de getallen in Pims rij voorspellen? Dat lukt vrij redelijk. We gaan er weer van uit dat er n gebieden zijn. Het is knap lastig om de exacte waarde van a_n te bepalen, maar een benadering kunnen we wel geven. Laten we eens niet met n^2 schepen, maar met n schepen beginnen. Het is duidelijk dat pas na n bombardementen alle schepen zijn vernietigd. Als we beginnen met $2n$ schepen, dan zullen na de eerste $\frac{1}{2}n$ bombardementen al n schepen zijn vernietigd.



Daarna volgen nog eens n bombardementen. In het totaal gaat het dan dus om $(1 + \frac{1}{2})n$ bombardementen. Evenzo vinden we uitgaande van $3n$ schepen $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})n$ bombardementen, enzovoorts. Beginnen we met n^2 schepen, dan is het aantal bombardementen bij benadering

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)n.$$

De som

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

is de zogeheten *harmonische reeks* en wordt vaak geschreven als H_n. De rij H_n bevat (op de eerste term na) geen gehele getallen; in de OEIS vind je de tellers onder nummer A001008 en de noemers onder A002805. De (naar beneden afgeronde) waarden van $n \cdot H_n$ vind je onder A052488. De eerste 26 termen zijn:

1, 3, 5, 8, 11, 14, 18, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 54, 58, 62, 67, 71, 76, 81, 85, 90, 95, 100, …

Je ziet dat deze rij maar weinig verschilt van die van Pim.

ANDERE RIJEN Pim stuurde ook nog een andere mooie rij in, gebaseerd op de 'krulgetallen' waarover we in het januarinummer schreven. Ook Arnout Jaspers, onze eigen voormalige hoofdredacteur, zond een leuke rij in. In de vorige *Pythagoras* schreef hij over 'megaperiodieke breuken'. Hij vermenigvuldigt twee breuken a_1/b_1 en a_2/b_2. Veronderstel dat dit repeterende breuken zijn met periode p_1 respectievelijk p_2. In een tabel (zie pagina 29 in het vorige nummer) geeft hij aan wat de maximale periode is van de repeterende breuk $a_1/b_1 \times a_2/b_2$. Als je de kolommen van die tabel achter elkaar plaatst, krijg je de volgende rij: 9, 18, 198, 27, 54, 2.997, 36, 396, 108, 39.996, …

Sommige inzenders vergaten af en toe een getal in hun rij. Inderdaad, hun rij kwam niet voor in de OEIS, maar de rij die ze bedoelden wél. Jammer, want het ging meestal om fraaie rijen. Bijvoorbeeld 21, 33, 57, 69, 77, 93, 129, 133, 161, … Dit zijn getallen van de vorm viervoud + 1, die het product zijn van twee priemgetallen en niet te schrijven zijn als som van twee kwadraten. Het getal 129 was vergeten. En kijk, dit is rij A016105. Een ander voorbeeld is 1.260, 1.440, 1.800, 1.980, 2.016, 2.100, 2.340, 2.400, 2.700, 2.772. Dit zijn getallen met precies 36 delers. De rij had een prijs kunnen winnen, maar helaas: 2.100 ontbrak. Met 2.100 blijkt de rij wel degelijk in de OEIS voor te komen als rij A175746.

PRIJS Pim Spelier krijgt 100 euro. Bovendien sturen we zijn 'zeeslag-rij' naar Neil Sloane, de voorman van de OEIS. Als we bericht hebben van hem, vermelden we dat natuurlijk in *Pythagoras*. ■

De spanning is te snijden. Een belangrijk examen is op komst. Studenten gaan nerveus naar hun plaatsen in de examenzaal, waar de tafeltjes al in slagorde staan opgesteld. Hoe beïnvloed je je kansen op een succesvolle afloop? Je kunt er hard voor studeren of gokken dat je je er wel weer doorheen rommelt. Duimen is ook een beproefd middel. Maar als je wat sociaal bent, helpt het ook als je elkaar succes wenst, al is het maar om het idee.

■ door Huub Odijk

HANDEN SCHUDDEN

Elkaar succes wensen middels een ferme handdruk: of het nou helpt of niet, het is een sympathiek gebaar. Over handen schudden voorafgaand aan een examen ging de slotopgave van de tweede ronde van de Wiskunde Olympiade die op 11 maart plaatsvond:

OPGAVE C2 (NWO, TWEEDE RONDE 2016)

Studenten zitten in een zaal met tafeltjes in examenopstelling. Er zijn n rijen van m tafeltjes en alle tafeltjes zijn bezet. We weten bovendien dat $m \geq 3$ en dat $n \geq 3$. Studenten die direct achter elkaar, naast elkaar of diagonaal van elkaar zitten zijn buren. Studenten in het midden van de zaal hebben dus 8 buren. Voor aanvang van het examen schudt iedere student eenmaal de hand van al zijn buren. In totaal wordt er 1020 keer handen geschud. Bepaal het aantal studenten.

Voordat we gaan rekenen, zetten we de grote lijn uit. De opgave bestaat uit drie stappen:

Stap 1. Maak een vergelijking, waarin je het verband tussen m, n en 1020 vastlegt. Krab daarbij even achter je oren, want er zit een beertje op de weg. Een vuistregel zegt namelijk dat je doorgaans bij twee onbekenden ook twee vergelijkingen nodig hebt, anders kan het gebeuren dat je oneindig veel oplossingen krijgt en dat is niet zo leuk. Een tweede vergelijking is dus misschien vereist.

Stap 2. Los deze vergelijking(en) op. Als het mee zit, levert dat m en n of eventueel alleen het product mn.

Stap 3. Geef antwoord op de gestelde vraag. Dat lijkt heel vanzelfsprekend, maar wordt helaas vaak vergeten.

STAP 1 We moeten ons eerst realiseren hoe handen schudden eigenlijk in zijn werk gaat. Je kunt iemand alleen een hand geven als de ander jou ook een hand geeft. Gelukkig maar, want anders zou je zomaar onthand kunnen raken. Als twee studenten elkaar een hand geven, wordt er één keer handen geschud. Verwar dit niet met 'de hand reiken', want dat is een eenzijdige actie, waarbij eigenlijk nog niets geschud wordt. Er wordt 1020 keer handen geschud. Dat betekent dat er 2040 keer door een kandidaat een hand wordt gegeven.

We laten nu twee manieren zien waarop het aantal keer handen schudden uitgedrukt kan worden in m en n.

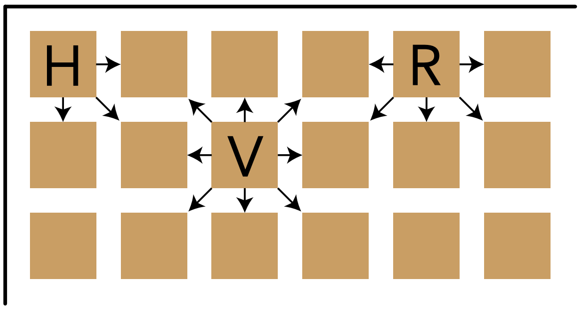
In figuur 1 zien we het handen schudden vanuit het gezichtspunt van de studenten. Er zijn hoekstudenten (H) die in de hoeken van de zaal zitten. Er zijn randstudenten (R) die aan de randen zitten, maar niet in de hoeken. En er zijn veldstudenten (V) die niet aan een rand zitten. In de tabel op pagina 23 zie je hoeveel er van deze soorten voorkomen en hoe vaak zij een hand geven. Een H-student geeft 3 keer een hand, een R-student 5 keer en een V-student 8 keer.

Zo komen we uit op $8mn - 6m - 6n + 4 = 2040$ en deze vergelijking is te herleiden tot

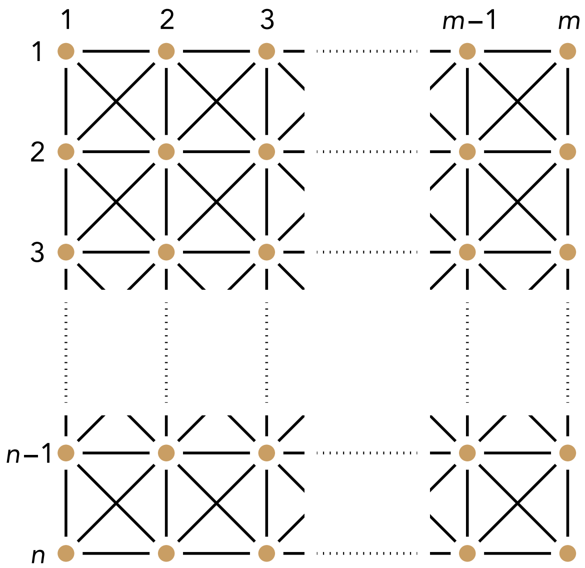
$$4mn - 3m - 3n = 1018. \qquad (1)$$

Maar we kunnen het ook bekijken vanuit de opstelling van de zaal. In figuur 2 zie je de tafeltjes als dikke stippen en elk verbindingslijntje stelt één keer handen schudden voor.

Er zijn n rijen met elk m tafeltjes. Elk verbindingslijntje tussen twee punten is één keer handen schudden. Er zijn $n(m-1)$ horizontale verbindingen en $m(n-1)$ verticale. Elk kruis betekent 2 verbindingen en er zijn $(m-1)(n-1)$ kruisen. Er zijn



Figuur 1



Figuur 2

dus $n(m-1)+m(n-1)+2(m-1)(n-1) =$ $4mn-3m-3n+2$ verbindingen in totaal, dus $4mn-3m-3n+2 = 1020$, oftewel $4mn-3m-3n = 1018$. Dat is (uiteraard) hetzelfde als wat we al eerder vonden.

DE PAPEGAAIENBEKMETHODE Met deze officieel geheten *distributieve eigenschap* kun je het product van twee tweetermen herleiden:

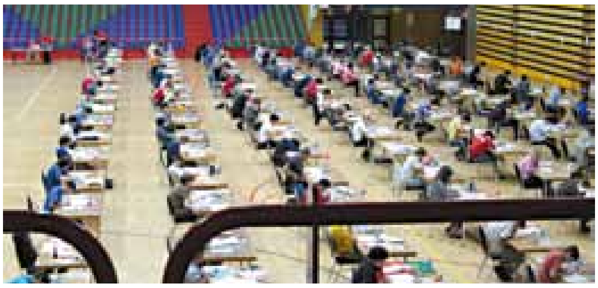
$$(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs$$

STAP 2 Nu gaan we de gevonden vergelijking proberen op te lossen. Zoals we boven al vreesden, hebben we maar één vergelijking en dat is misschien niet genoeg, want dan bestaat het risico op oneindig veel oplossingen. Dat is hier inderdaad het geval. Laten we willekeurig maar wat proberen. Kies bijvoorbeeld $m = 10$. Invullen levert $4 \times 10 \times n - 3 \times 10 - 3 \times n = 1018$ en als we dat oplossen, vinden we $n = 28\frac{12}{37}$.

Aha! Dat is wiskundig wel een correcte oplossing, maar er bestaan gelukkig geen $\frac{12}{37}$ studenten. En daarmee hebben we dus meteen onze tweede eis te pakken, waar we dankbaar gebruik van gaan maken: m en n moeten natuurlijk gehele getallen zijn!

We gaan nu aan de slag met de 'omgekeerde papegaaienbekmethode' (zie het bovenstaande kader) om de vergelijking $4mn - 3m - 3n = 1018$ om te schrijven tot een factorisering, een vergelijking van de vorm $(2m+a)(2n+b) = d$. (We hadden ook voor een andere vorm zoals $(m+a)(4n+b) = d$ of $4(m+a)(n+b) = d$ kunnen kiezen; dat leidt uiteindelijk net zo goed tot vergelijking (2) hieronder.) Als we $(2m+a)(2n+b) = d$ uitwerken met de papegaaienbekmethode, staat er $4mn + 2bm + 2an + ab = d$, oftewel $4mn + 2bm + 2an = d - ab$.

soort	aantal studenten	aantal handen per student	totaal aantal gegeven handen
H	4	3	12
R	$2(m-2)+2(n-2) =$ $2m+2n-8$	5	$10m+10n-40$
V	$(m-2)(n-2) =$ $mn-2m-2n+4$	8	$8mn-16m-16n+32$
totaal	mn		$8mn-6m-6n+4$



Examenzaal tijdens de Internationale Wiskunde Olympiade 2011 in Amsterdam

We willen a, b en d zodanig kiezen dat hier in feite gewoon de oorspronkelijke vergelijking $4mn - 3m - 3n = 1018$ staat. Dan moet er dus gelden dat $2b = -3$ en $2a = -3$ en $d - ab = 1018$. We vinden $a = -1\frac{1}{2}$ en $b = -1\frac{1}{2}$ en $d = 1018 + 2\frac{1}{4} = 1020\frac{1}{4}$. De op te lossen vergelijking wordt daarmee:

$$(2m - 1\tfrac{1}{2})(2n - 1\tfrac{1}{2}) = 1020\tfrac{1}{4},$$

waarbij n en m geheel zijn. Omdat we niet echt van breuken houden, vermenigvuldigen we beide kanten ten slotte met 4:

$$(4m - 3)(4n - 3) = 4081. \qquad (2)$$

Omdat we weten dat m en n gehele getallen zijn, komt het probleem er nu dus op neer om 4081 te schrijven als een product van twee gehele getallen. We leggen 4081 daarom even op de behandeltafel: we gaan hem ontbinden.

De ontbinding is handig te starten via de '1001-methode' (zie het onderstaande kader): $4081 - 4004 = 77$. Nu is 77 deelbaar door 7 en 11, dus hetzelfde geldt voor 4081. Na enig rekenwerk vinden we dat $4081 = 7 \times 11 \times 53$.

Omdat in dit probleem m en n verwisselbaar zijn, kunnen we ervoor kiezen dat $m \leq n$, zodat ook $4m - 3 \leq 4n - 3$. Daarmee blijven er vier opties over:

- $4m - 3 = 1$, dat levert $m = 1$ en $n = 1021$. Maar in het gegeven staat dat $m \geq 3$, dus die mogelijkheid vervalt.
- $4m - 3 = 7$ levert geen gehele m.
- $4m - 3 = 11$ levert ook geen gehele m.
- $4m - 3 = 53$, jawel dat levert $m = 14$.

(Het geval $4m - 3 = 77$ komt niet meer in aanmerking, want dan is $4m - 3 > 4n - 3$.)

Het geval $4m - 3 = 53$ komt overeen met $4n - 3 = 7 \times 11 = 77$ en dan is n gelukkig ook geheel, namelijk $n = 20$. Dus we hebben hem!

STAP 3 Vergeet nu niet het antwoord te geven: er zijn $mn = 14 \times 20 = 280$ studenten. En kijk eens terug: waarom staat er in de opgave eigenlijk dat $m \geq 3$? We zagen toch onderweg dat $m = 1$ en $n = 1021$ (en dus $mn = 1021$) ook een oplossing was? Dat is inderdaad het geval, maar zie het even voor je. Dan hebben we een examen-'zaal' waarin 1021 studenten in één rij achter of naast elkaar zitten. Het examen zou dan bijvoorbeeld op een ongebruikte startbaan van een vliegveld moeten plaatsvinden en door surveillanten op een e-bike in de gaten moeten worden gehouden! ■

DE 1001-METHODE OVER DEELBAARHEID DOOR 7, 11 EN 13

Als je wilt onderzoeken of een getal deelbaar is door 7, kun je er een (slim) veelvoud van 7 van aftrekken, want daarbij blijft de deelbaarheid behouden. Bijvoorbeeld: $203 - 63 = 140$, dus 203 is deelbaar door 7. Aan $682 - 42 = 640$ kun je zien dat 682 niet deelbaar is door 7.

Omdat $7 \times 11 \times 13 = 1001$, kun je met 1001 drie vliegen in één klap slaan, want met veelvouden van 1001 kun je gemakkelijk rekenen. Demonstratie: we gaan $n = 293.527.108$ onderzoeken op deelbaarheid door 7, 11 en 13 door n slim te verminderen (of eventueel te verhogen) met veelvouden van 1001.

Allereerst bekijken we $293.527.108 - 108.108 = 293.419.000$. Die nullen aan het eind laten we weg, want die hebben toch geen invloed. Dan bekijken we bijvoorbeeld $293.419 - 293.293 = 126$. Omdat 126 wel deelbaar is door 7 maar niet door 11 of 13, geldt datzelfde ook voor 293.527.108.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof en Marc Seijlhouwer

Speelfilm over wiskundegenie Ramanujan

Na films over de wiskundigen John Nash (*A Beautiful Mind*, 2001) en Alan Turing (*The Imitation Game*, 2014) is er nu een film over het Indiase wiskundegenie Srinivasa Ramanujan: *The Man Who Knew Infinity*. Veel meer dan over de persoon Ramanujan draait het in deze film om de relatie tussen hem en de Britse wiskundige Godfrey Hardy.

Ramanujan (1887-1920) en Hardy (1877-1947) zijn wiskundigen uit twee totaal verschillende werelden. In 1913 ontving de gevestigde Cambridge-professor Hardy een brief van de arme Ramanujan, vol met onbegrijpelijke formules en het verzoek hem te helpen om zijn wiskunde gepubliceerd te krijgen. 'Deze man is ofwel gek, ofwel een genie,' moet Hardy gedacht hebben. Het laatste bleek het geval en Hardy haalde het wiskundewonder naar Engeland.

De film over de relatie en de samenwerking tussen deze twee personen werd door Armando Martino en David Singerman van de University of Southampton beschreven als 'misschien wel de beste film over wiskunde ooit'. Een goede zet van regisseur Matthew Brown was inderdaad dat hij Ken Ono, een wiskundige die zich veel met het werk van Ramanujan heeft beziggehouden, vroeg als wiskundig adviseur. Daardoor zijn niet alleen alle formules die in beeld komen correct weergegeven, maar komen ook de conflicten en de passies van de hoofdpersonen realistisch over, anders dan bij bijvoorbeeld *A Beautiful Mind*, waar de regisseur wel erg vrij met de biografie van John Nash omging.

Filmrecensenten zijn kritischer: een te conventionele speelfilm, is kort gezegd het oordeel van veel van hen. Oordeel zelf, *The Man Who Knew Infinity* draait vanaf juli in de Nederlandse bioscopen. (AvdB)

Jeremy Irons en Dev Patel als Hardy en Ramanujan in *The Man Who Knew Infinity*

Computerstudie naar wiskundehistorie

Met een computerprogramma wist een groep Belgische wetenschappers onder leiding van Floriana Gargiulo de geschiedenis van de wiskunde na 1400 uit te pluizen. Het algoritme gebruikte zogenoemde *big data*, grote digitale archieven. De wetenschappers van de universiteit van Namen in België pakten in dit geval het *Mathematical Genealogy Project*, waarin ruim 200.000 wiskundigen staan sinds 1400. Al die wiskundigen hebben ook een lijst met studenten, mentoren en 'afstammelingen', wiskundigen die op de een of andere manier verwant zijn aan elkaar, bijvoorbeeld doordat ze ooit aan hetzelfde project werkten.

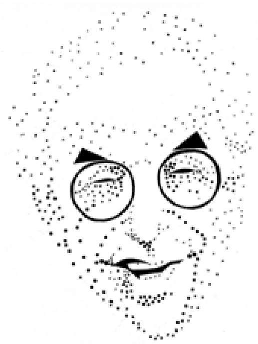
De onderzoekers ontdekten dat de wiskunde sinds 1400 bestaat uit 84 families, waarvan de grootste ruim 100.000 afstammelingen heeft. Die familie begon bij de verder onbekende medicus Sigismondo Polcastro, in 1415. Via via blijkt een groot deel van de Europese wiskundigen altijd naar hem terug te voeren. De op een na grootste familie werd gesticht door de Russische wiskundige Ivan Petrovich Dolby aan het eind van de negentiende eeuw.

Ook kon het programma de centra van wiskundig onderzoek in verschillende periodes ontdekken. Tijdens de Renaissance waren Italië en Frankrijk heel belangrijk, terwijl later Duitsland het koninkrijk van de wiskunde werd. Na de Tweede Wereldoorlog ging die eer naar de Verenigde Staten. Tegenwoordig zijn ook landen als Japan, China en Brazilië wiskundig erg productief.

Echt veel nieuws is er niet ontdekt, maar het is wel bijzonder dat door een slimme analyse van wiskundigen zoveel geschiedenis naar voren komt. (MS)

Van januari 2013 tot en met juni 2015 had *Pythagoras* een serie over de vermaarde Hongaarse wiskundige Paul Erdős. En sinds september 2015 loopt er een serie over getallenrijen in de OEIS. Dit artikel, over het kwadraatvrije vermoeden van Erdős, sluit beide series af.
■ door Matthijs Coster

HET KWADRAATVRIJE VERMOEDEN VAN ERDŐS



In dit artikel gaan we ervan uit dat je bekend bent met faculteiten en binomiaalcoëfficiënten. Per definitie is $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Voor $n = 1$ tot en met 7 vinden we $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$ en $7! = 5040$. In de OEIS vind je deze getallen onder nummer A000142.

Verder is de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ als volgt gedefinieerd:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Dit artikel gaat over de volgende speciale binomiaalcoëfficiënten:

$$B(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$$

voor $n \geq 1$ en $B(0) = 1$. Deze rij – 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, ... – vind je in de OEIS onder nummer A000984. Paul Erdős vermoedde dat op een enkele uitzondering (in het begin van de rij) na al deze binomiaalcoëfficiënten deelbaar zijn door een kwadraat (groter dan 1). Inderdaad zijn 1, 2, 6 en 70 de enige kwadraatvrije getallen (dus niet deelbaar door een kwadraat groter dan 1) in de rij $B(n)$.
In 1996 bewezen Andrew Granville en Olivier Ramaré dat er geen andere kwadraatvrije getallen van de vorm $\binom{2n}{n}$ zijn. Daarvoor hadden enkele andere wiskundigen al aangetoond dat áls er misschien toch nog kwadraatvrije getallen in de rij zouden zitten, die wel erg groot zouden moeten zijn.

FACULTEIT EN PRIMULTEIT Voor $n!$ bestaat een benaderingsformule:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Dit is de formule van Stirling. Verder definiëren we $n\#$ (spreek uit: *n primulteit*) als volgt:

$$n\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_n,$$

waarbij p_n het grootste priemgetal is dat nog kleiner is dan of gelijk is aan n. Achtereenvolgens vinden we $1\# = 1$, $2\# = 2$, $3\# = 6$, $5\# = 30$, $7\# = 210$, $11\# = 2310$ en $13\# = 30030$ (zie OEIS A034386). Een stuk ingewikkelder is het om een benadering van $n\#$ te vinden. Het aardige is dat dit juist met behulp van $\binom{2n}{n}$ weer goed lukt.

EEN SIMPELE OBSERVATIE We gaan $B(n+1)$ berekenen uit $B(n)$. Dat lijkt misschien lastig, maar het blijkt mee te vallen, want

$$\frac{B(n+1)}{B(n)}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\cdot\frac{n!^2}{(2n)!}$$
$$=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$
$$=\frac{2(2n+1)}{n+1}=4-\frac{2}{n+1}.$$

Deze observatie komen we verderop in het verhaal nog een aantal keren tegen.

AANTAL FACTOREN *P* We gaan $n!$ ontbinden in factoren. Bijvoorbeeld $6! = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. De vraag is: hoeveel factoren van de priemen 2, 3, 5, ... komen in $n!$ voor? We gaan er op twee manieren naar kijken, zonder in detail te treden.

Uitgaande van bovengenoemde observatie zien we dat het aantal priemfactoren p van $B(n + 1)$ niet zal veranderen ten opzichte van het aantal priemfactoren van $B(n)$ als $p \neq 2$ en p geen deler is van $n + 1$ (dus $p \nmid n + 1$) en van $2n + 1$ (dus $p \nmid 2n + 1$).

Opgave. Kun je zelf afleiden wat het gedrag is van het aantal factoren 2 in $B(n)$ op grond van bovengenoemde observatie?

$B(2n + 1)$ heeft een factor 2 meer dan $B(2n)$, en voor $n = 2m + 1$ geldt: $B(2^k(2m + 1))$ bevat $k - 1$ factoren 2 minder dan $B(2^k(2m + 1) - 1)$. Het aantal factoren 2 van $B(n)$ kun je terugvinden in de OEIS onder nummer A000120.

Hoeveel factoren $p > 2$ bevat $n!$? Om te beginnen bevatten $p, 2p, 3p, \ldots$ een factor p. Voor $n!$ gaat dat om $\lfloor n/p \rfloor$ factoren p. Hierbij is $\lfloor x \rfloor$ de *entier-functie*; de afrondfunctie naar het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x (bijvoorbeeld $\lfloor 4{,}7 \rfloor = 4$). Maar hiermee zijn we er nog niet, immers 6! bevat 4 factoren 2 en niet $6/2 = 3$ factoren 2. We moeten ook kijken hoeveel getallen een veelvoud zijn van p^2, vervolgens p^3, enzovoort.

Eenvoudig is te zien dat er $\lfloor n/p^2 \rfloor$ getallen zijn tussen 1 en n die een veelvoud zijn van p^2. Deze getallen bevatten 2 (of meer) factoren p. Maar door $\lfloor n/p \rfloor$ is één factor al geteld. De uiteindelijke formule voor het aantal priemfactoren p in $n!$ wordt

$$F_p(n)=\sum_{k=1}^{T}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor,$$

waarbij T de grootste macht is die kan voorkomen, dus $T = {}^p\log n$.

We zijn niet zozeer geïnteresseerd in het aantal priemfactoren van $n!$, maar vooral in dat van $B(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$. Voor het aantal priemfactoren p in $B(n)$ geldt:

$$B_p(n) = F_p(2n) - 2F_p(n) = \sum_{k=1}^{T}\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor.$$

Merk op dat $\lfloor 2n/p^k \rfloor$ en $2\lfloor n/p^k \rfloor$ niet gelijk hoeven te zijn. De tweede term is altijd even, maar de eerste term kan ook oneven zijn. Bijvoorbeeld $\lfloor 6/5 \rfloor = 1$, terwijl $2\lfloor 3/5 \rfloor = 0$. Maar ze kunnen nooit meer dan 1 verschillen. Dat geldt vervolgens voor iedere macht van p. Het aantal factoren p kan dus oplopen tot T. Dit maximum wordt ook daadwerkelijk bereikt. Op pagina 29 is een tabel weergegeven met n, $\binom{2n}{n}$, het aantal factoren 2, 3, 5, ..., 23. De keren dat het maximum wordt aangenomen zijn **vet** gedrukt. Maar ook kleinere waarden komen voor. Wanneer n een p-voud is, dan zal in bovengenoemde som $\lfloor 2n/p \rfloor - 2\lfloor n/p \rfloor = 0$ gelden. Er geldt zelfs dat het aantal priemfactoren p in $B(n)$ gelijk is aan het aantal priemfactoren in $B(pn)$. (Ga zelf na dat dit klopt in onderstaande tabel.) Ofwel: uitgaande van het aantal priemfactoren in $B(n)$, zal er niets veranderen aan de situatie voor $B(n + 1)$ als $p \neq 2$ en $p \nmid n + 1$ en $p \nmid 2n + 1$.

Verder nog een opmerking. Als je de rechterhelft van de tabel bekijkt, dan zie je dat er alleen nullen en enen staan. Dat is geen toeval. Als $n < p < 2n$, dan zal $p \nmid n!$, maar wél $p \mid (2n)!$. En dat betekent dat $B(n)$ precies één factor p heeft. Dus $B(n)$ bevat de factor $(2n)\# / n\#$. Hier komen we nog op terug.

BENADERINGEN We gaan op zoek naar een benadering van $B(n)$ en van $n\#$. We hadden al gezien dat

$$\frac{B(n+1)}{B(n)}=4-\frac{2}{n+1},$$

DE GETALLEN VAN CATALAN

■ door Paul Levrie (Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

De getallen $B(n)$ zijn nauw verwant met de *Catalan-getallen*. Het n-de Catalan-getal is als volgt gedefinieerd:

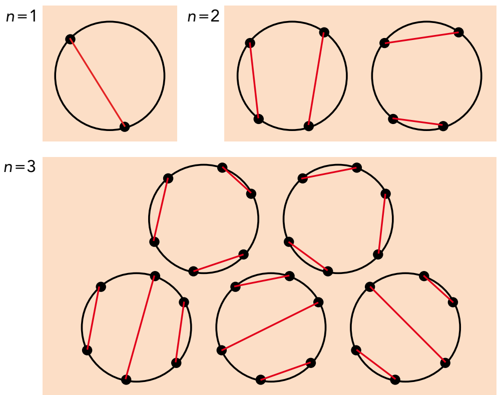
$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

voor $n \geq 1$. Per definitie is $C(0) = 1$. De rij Catalan-getallen begint dus zo:

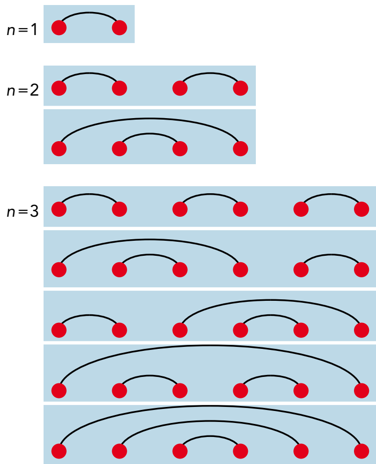
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ...

In de OEIS vind je deze rij onder nummer A000108. Hier staan vijf toepassingen van de Catalan-getallen.

$C(n)$ is het aantal manieren om munten te stapelen (zoals sinaasappels) als je onderaan begint met een rij met n munten.



$C(n)$ is het aantal manieren waarop $2n$ personen aan een ronde tafel simultaan elkaar de hand kunnen schudden (eventueel over de tafel heen) zonder kruisingen.



$C(n)$ is het aantal manieren om $2n$ punten gelegen op een horizontale lijn twee per twee te verbinden met boogjes die elkaar niet snijden (waarbij de boogjes boven de punten liggen).

$n = 4$ 1111, 1112, 1113, 1114, 1122, 1123, 1124, 1133, 1134, 1222, 1223, 1224, 1233, 1234

$C(n)$ is het aantal manieren om getallen met n cijfers te vormen van de vorm $a_1\, a_2 \ldots a_n$ met alle a_i's minstens gelijk aan 1, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ en $a_i \leq i$.

$n = 3$ $(((ab)c)d)$, $((a(bc))d)$, $(a((bc)d))$, $(a(b(cd)))$, $((ab)(cd))$

$C(n)$ is het aantal manieren om paren haakjes te plaatsen in een product met $n + 1$ factoren.

n	$B(n)$	B_2	B_3	B_5	B_7	B_{11}	B_{13}	B_{17}	B_{19}	B_{23}
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0
3	20	**2**	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4	70	1	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
5	252	2	**2**	0	**1**	0	0	0	0	0
6	924	2	1	0	**1**	**1**	0	0	0	0
7	3432	**3**	1	0	0	**1**	**1**	0	0	0
8	12870	1	**2**	1	0	**1**	**1**	0	0	0
9	48620	2	0	1	0	**1**	**1**	**1**	0	0
10	184756	2	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**	0
11	705432	3	1	0	1	0	**1**	**1**	**1**	0
12	2704156	2	0	0	1	0	**1**	**1**	**1**	**1**
13	10400600	3	0	**2**	1	0	0	**1**	**1**	**1**
14	40116600	3	**3**	**2**	0	0	0	**1**	**1**	**1**
15	155117520	**4**	2	1	0	0	0	**1**	**1**	**1**
16	601080390	1	2	1	0	0	0	**1**	**1**	**1**
17	2333606220	2	**3**	1	0	1	0	0	**1**	**1**
18	9075135300	2	1	**2**	1	1	0	0	**1**	**1**
19	35345263800	3	1	**2**	1	1	0	0	0	**1**
20	137846528820	2	2	1	1	1	1	0	0	**1**

dus

$$B(n+1) = \left(4 - \frac{2}{n+1}\right) B(n) < 4B(n).$$

Ofwel (met behulp van inductie):

$$B(n) < 4^n.$$

Met behulp van de formule van Stirling kun je een veel betere benadering krijgen, namelijk:

$$B(n) \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

We gaan nu kijken naar een benadering voor $n\#$. We kijken hoe ver we komen met de benadering voor $B(n)$, gebruikmakend van $(2n)\# \,/\, n\# < B(n)$. Er geldt:

$$(2^k)\# < B(2^{k-1}) \cdot B(2^{k-2}) \cdot \ldots \cdot B(1) < 4^{2^k}.$$

Eenvoudig valt te extrapoleren dat $n\# < 4^n$. Het blijkt dat $n\# \approx e^n$.

ERDÖS' VERMOEDEN Paul Erdős vermoedde dat alleen $B(1) = 2$, $B(2) = 6$ en $B(4) = 70$ kwadraatvrij zouden zijn. Omdat $B(n) \approx 4^n$ en $(2n)\# \,/\, n\# \approx e^n$, is er voor het product van de priemfactoren (met multipliciteit) tot n in $B(n)$ bij benadering een factor $(4/e)^n$ over. Als alle priemfactoren kleiner dan n in $B(n)$ zouden voorkomen, dan zou dit de veel grotere waarde e^n opleveren. Het is dus zeker niet vanzelfsprekend dat er een priemgetal vaker dan eenmaal voorkomt in $B(n)$.

Als je echter de kolom van B_2 in de tabel bekijkt, het aantal factoren 2 in $B(n)$, dan zie je dat dit aantal factoren meestal groter is dan 1, en alleen 1 is als $n = 1, 2, 4, 8$ en 16. Er geldt dat het aantal factoren 2 in $B(n)$ altijd groter is dan 1 als n niet een macht van 2 is.

Dit is weliswaar een stap in de richting van een bewijs, maar we zijn er nog lang niet. Voor dit tijdschrift is dit een mooi moment om te stoppen. Want het volledige bewijs dat Andrew Granville en Olivier Ramaré in 1996 gaven, zal de gemiddelde amateurwiskundige boven de pet gaan.

MEER WETEN? Weetjes over de rij $B(n)$ vind je onder meer op http://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/c/c178.htm ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit, Michelle Sweering en Bas Verseveldt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.
Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 september 2016.

DE GOEDE INZENDERS VAN FEBRUARI 2016

326: Sterre ter Beek (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Leanna van Dijk (klas 2), Picasso Lyceum, Zoetermeer; Jelmer Firet (klas 4), RSG de Borgen (Lindenborg), Leek; Roos van Herrewegen (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Rein Janssen Groesbeek (klas 5), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Lucia Komen (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Sietske Koolhof (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Dominique Titulaer (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Robert van der Waall, Huizen.
327: Leanna van Dijk (klas 2), Picasso Lyceum, Zoetermeer; Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Roos van Herrewegen (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Rein Janssen Groesbeek (klas 5), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Lucia Komen (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Sietske Koolhof (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Eva Teeling (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Dominique Titulaer (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Bruno Vermeer (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Robert van der Waall, Huizen; Eline Welling (klas 4), Goois Lyceum, Bussum.
328: Leanna van Dijk (klas 2), Picasso Lyceum, Zoetermeer; Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Dominique Titulaer (klas 3), Goois Lyceum, Bussum.
329: Rein Janssen Groesbeek (klas 5), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Pascal Kwanten, Almere; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Dominique Titulaer (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Robert van der Waall, Huizen.
Cadeaubonnen: Dominique Titulaer en Rein Janssen Groesbeek.
Stand laddercompetitie: Jelmer Firet (19 p), Corijn Rudrum (16 p), Eline Welling (16 p), Anton van Es (15 p), Sander Engelberts (14 p), Frenk Out (14 p), Oscar Heijdra (13 p), Levi van de Pol (12 p), Jan Bosma (10 p), Lisan ten Hove (10 p), Rainier van Es (7 p), Sebastiaan Ceuppens (6 p), Stef Rasing (6 p), Dominique Titulaer (6 p), Rinze Hallema (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Leanna van Dijk (4 p), Rein Janssen Groesbeek (4 p), Antonie Moes (4 p), Johan van der Marck (3 p), Maarten Stremler (3 p), Roos van Herrewegen (2 p), Lucia Komen (2 p), Sietske Koolhof (2 p), Matthijs Pool (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Stijn van Bemmel (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Boris Kloeg (1 p), Lotte Middelberg (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Bram Pel (1 p), Youri Pouw (1 p), Eva Teeling (1 p), Bruno Vermeer (1 p), Jan Willem de Waard (1 p), Senne Willems (1 p).

OPGAVE 334

Start met het getal 1. Vervolgens kies je of je er 2 bij optelt óf het met 3 vermenigvuldigt. Met het volgende getal heb je weer precies dezelfde keuze: 2 erbij optellen óf met 3 vermenigvuldigen. Zo ga je door, maar: je mag *niet* twee keer achter elkaar 2 erbij optellen. Dus nadat je er 2 bij hebt opgeteld, moet je met 3 vermenigvuldigen, of stoppen. Kun je op deze manier het getal 2016 verkrijgen?

OPGAVE 335

Boris en Laila maken een afspraakje om Otto te imponeren. Ze doen het volgende spelletje met 10 kaarten. Deze liggen blind op tafel met de cijfers 1 tot en met 10 op de onderkanten. Otto mag er 3 willekeurig uitkiezen en blind bij zich neerleggen. Boris pakt de andere 7 op en bekijkt ze. Otto mag er dan 3 uit de 7 trekken en blind bij Boris neerleggen. Dan zegt Boris: ‘De andere 4 kaarten zijn voor jou, Laila’ en geeft ze een voor een aan haar. Ze bekijkt ze en zegt vervolgens tegen Otto welke kaarten hij heeft. Dat zegt ze altijd goed, hoe vaak ze het spelletje ook doen. Otto snapt er eerst niets van, maar dan bedenkt hij wat Boris en Laila hebben afgesproken. Weet jij ook wat Boris en Laila hebben afgesproken?

OPGAVE 336

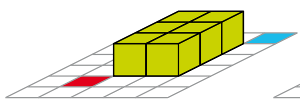
De twee koppels positieve gehele getallen (2, 2) en (2, 2) hebben de eigenschap dat de som van het eerste koppel gelijk is aan het product van het tweede koppel en het product van het eerste koppel gelijk is aan de som van het tweede koppel. Dit is natuurlijk een flauw voorbeeld. Zijn er nog andere geheeltallige koppels (a, b) en (c, d) met deze eigenschap? Zo ja, hoeveel?

OPGAVE 337

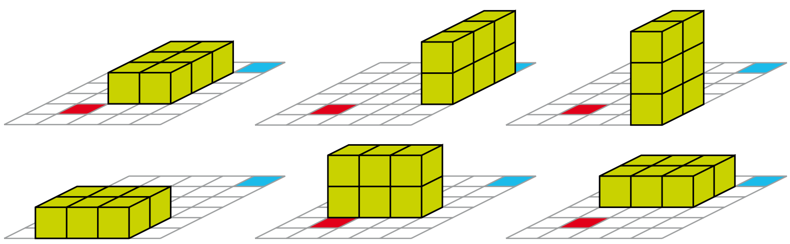
Aan weerszijden van een wandelpad is water. Dit is tevens het leefgebied van een bepaalde kikkersoort. Alle kikkers doen in het voorjaar een poging om aan de andere kant van het pad te komen. Ze springen uit het water op het pad. In principe kunnen ze in twee vervolgsprongen aan de andere zijde van het pad weer in het water springen, maar bij elke sprong kiest elke kikker of de kikker vooruit springt (met kans p) of achteruit springt (met kans $1 - p$). Als een kikker eenmaal in het water springt, onderneemt hij geen nieuwe poging. Nu blijkt precies de helft van de kikkers de andere kant van het pad te bereiken. Bepaal p.

OPLOSSING 326

Kun je uitgaande van de linkersituatie na een aantal bewegingen de rechtersituatie krijgen? Een beweging bestaat uit een draaiing van 90° van het groene blok over een ribbe die raakt aan het ruitjespapier.



Oplossing. Ja, dat kan:



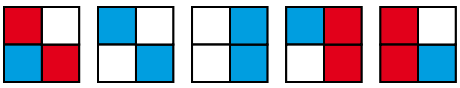
OPLOSSING 327

Gegeven zijn een geheel getal a van twee cijfers en een geheel getal b van vier cijfers. Alle cijfers in beide getallen zijn kleiner dan 9. Er geldt: $a^2 = b$. Indien alle cijfers met 1 verhoogd worden, klopt dit ook. Wat zijn de getallen a en b?

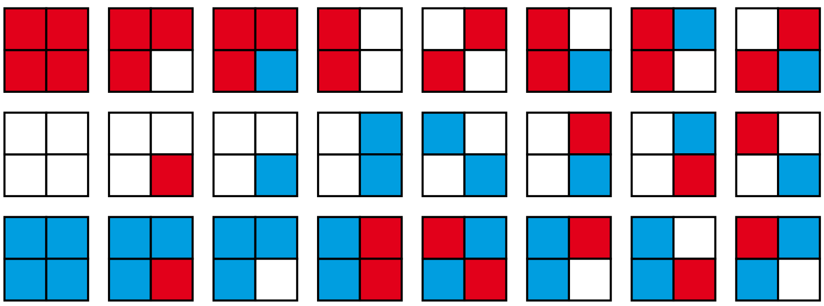
Oplossing. Het gestelde in de opgave kunnen we vertalen naar de vergelijking $a^2 + 1111 = (a + 11)^2$. We werken deze vergelijking uit: $a^2 + 1111 = a^2 + 22a + 121$, ofwel $990 = 22a$. De oplossing van deze vergelijking is $a = 45$. Dan is $b = 2025$. Inderdaad: $45^2 = 2025$ en $56^2 = 3136$.

OPLOSSING 328

Een puzzelfabrikant wil een alternatief dominospel ontwerpen, uitgaande van vierkante stenen waarbij elke hoek in één van de drie kleuren rood, wit en blauw wordt geschilderd. Hoeveel verschillende stenen kun je zo maken? Twee stenen zijn hetzelfde als de ene door een draaiing in de andere kan overgaan. De eerste vier stenen hieronder zijn allemaal verschillend. De twee meest rechtse stenen zijn identiek.

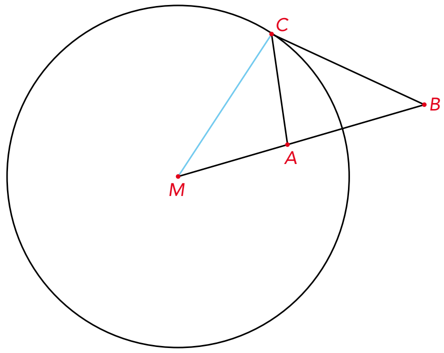


Oplossing. We maken een opsomming van alle mogelijke kleuringen. We kijken eerst naar hoe de kleuren kunnen worden verdeeld. Opeenvolgend hebben we de 15 kleurencombinaties RRRR, WWWW, BBBB (in de eerste kolom), RRRW, RRRB, RWWW, BWWW, RBBB, WBBB (in de tweede en derde kolom), RRWW, RRBB, WWBB (in de vierde en vijfde kolom), RRWB, RWWB, RWBB. Let op dat er voor RRWW, RRBB, WWBB steeds twee oplossingen zijn en voor RRWB, RWWB, RWBB zelfs drie oplossingen. Zo komen we uit op $9 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 24$ oplossingen. Al deze oplossingen zijn hieronder opgesomd.



OPLOSSING 329

Gegeven is een cirkel met middelpunt M en straal 1. Neem een willekeurig punt B *buiten* de cirkel. Noteer met r de lengte van het lijnstuk MB. Plaats op het lijnstuk MB het punt A met $MA = 1/r$. We noemen B en A elkaars *geometrische inverse* ten opzichte van de cirkel. Neem ten slotte een willekeurig punt C *op* de cirkel en bewijs dat geldt: $BC/AC = r$.



Oplossing. Teken het blauwe lijnstuk MC in het plaatje. Het bewijs verloopt in twee stappen. Eerst bewijzen we dat de driehoeken MAC en MCB gelijkvormig zijn. Vervolgens laten we zien dat driehoek MCB een factor r groter is dan driehoek MAC. Dan geldt in het bijzonder dat BC een factor r groter is dan AC.

(1) De driehoeken MAC en MCB hebben een overeenkomstige hoek: $\angle CMA = \angle BMC$. Bovendien geldt dat het quotiënt r van de zijden MB en MC in driehoek MCB gelijk is aan het quotiënt van de zijden MC en MA in driehoek MAC. De gelijkvormigheid volgt uit 'zijde-hoek-zijde'.

(2) De zijde MB van driehoek MCB is een factor r groter dan de zijde MC van driehoek MAC. Hieruit volgt dat driehoek MCB een factor r groter is dan driehoek MAC.

APP VAN DE MAAND: *QAMA CALCULATOR*

De revolutionaire QAMA-rekenmachine bestaat sinds kort ook als app. Deze rekenmachine laat het antwoord pas zien nadat je zelf een redelijke schatting hebt gegeven. De vereiste nauwkeurigheid is afhankelijk van de moeilijkheidsgraad van de berekening. De echte QAMA is natuurlijk wel veel leuker! Op je smartphone heb je namelijk ook een gewone rekenmachine waarmee je kunt valsspelen.

PYTHAGORAS

55ste jaargang nummer 6
juni 2016
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pyth.eu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie, Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG)

Management Pythagoras
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu.
Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon: 085 016 02 51
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs
(zes nummers per jaargang)
€ 35,00 (Nederland en België),
€ 37,00 (overige landen),
€ 20,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 35,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 37,00 (geschenkabonnement overige landen).
Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging.
Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
Alex van den Brandhof (alex@pyth.eu),
Matthijs Coster (matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems (jeanine@pyth.eu),
Jan Guichelaar (jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart (kp@pyth.eu),
Jaap Klouwen (j.klouwen@hva.nl),
Paul Levrie (paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt (eddie.nijholt@gmail.com),
Huub Odijk (h.odijk1@upcmail.nl),
Derk Pik (derk@pyth.eu),
Marc Seijlhouwer (marc@pyth.eu),
Harry Smit (h.j.smit@students.uu.nl),
Michelle Sweering (sweer108@planet.nl),
Bas Verseveldt (bas.verseveldt@hetnet.nl),
William Verspaandonk (william_verspaandonk@hotmail.com).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

OEIS A160160

0, 1, 3, 7, 15, 23, 31, 39, 55, 87,

143, 175, 191, 199, 215, 247,

303, 359, 423, 503, 655, ...

De rij hierboven geeft de getallen uit de zogeheten 'tandenstokerrij', waarbij tandenstokers volgens een aantal spelregels in een driedimensionaal rooster worden neergelegd: zie onderstaande afbeelding. Deze driedimensionale versie is een variant op de originele (tweedimensionale) tandenstokerpuzzel. Lees er meer over op pagina 18.