Мы будем впредь предполагать, что $T > A$, $0 < M_0 < \infty$,

$$\Delta_0 \leqslant M_0^{-1}, \tag{7}$$

и произведем оценку $y(x)$ при $A \leqslant x < T$.

Теорема 7.

$$\sup_{(a_0,\, a_1)} |y(x)| \leqslant M_0 (a_1 - a_0) \sup_{E_0} |\varphi(x)|;$$

$$\sup_{(a_k,\, a_{k+1})} |y(x)| \leqslant M_0 (a_{k+1} - a_k) \sup_{(a_{k-1},\, a_k)} |y(x)| \tag{8}$$

при $A < a_k < T$.

Действительно, первое неравенство (8) сразу будет следовать из (1) и формулы конечных приращений, если мы покажем, что

$$\sup_{(a_0,\, a_1)} |y(x)| \leqslant \sup_{E_0} |\varphi(x)|; \tag{9}$$

второе неравенство (8) получится из (9) при помощи переноса начальной точки в a_k. Пусть (9) неверно и $\bar{a} \in (a_0, a_1)$ таково, что

$$|y(\bar{a})| > \sup_{E_0} |\varphi(x)|, \quad |y(\bar{a})| > |y(x)| \quad (A \leqslant x < \bar{a}); \tag{10}$$

причем, для определенности, $y(\bar{a}) > 0$. Пусть, далее, $\tilde{a}$ есть первый корень $y(x)$ на $[a_0, a_1]$ ($[a_0, a_1)$, если $a_1 = B$). Если $\tilde{a} > \bar{a}$, то найдется значение $\alpha \in (\bar{a}, \tilde{a})$, для которого (см. (7))

$$y'(\alpha) = \frac{y(\tilde{a}) - y(\bar{a})}{\tilde{a} - \bar{a}} \leqslant -\frac{y(\bar{a})}{a_1 - a_0} \leqslant -\frac{y(\bar{a})}{\Delta_0} \leqslant -M_0\, y(\bar{a});$$

этому противоречит (1) и (10), так как при $A \leqslant x \leqslant \tilde{a}$ будет $y(x) > -y(\bar{a})$. Аналогично рассматривается случай $\tilde{a} < \bar{a}$.

Теорема 8.

$$|y(x)| \leqslant \sup_{E_0} |\varphi(x)| \cdot (M_0\Delta_0)^{(x-A)/\Delta_0} \quad (A \leqslant x < T).$$

Действительно, это следует из (8), если учесть, что все $a_{k+1} - a_k \leqslant \Delta_0$.

5. Замечание. Все высказанные утверждения о поведении решений относятся к уравнениям вида (1), но в которых отставание Δ зависит не только от x. Действительно, например, если решение $y = \varphi(x)$ уравнения

$$y'(x) - M(x)\, y(x - \Delta(x, y(x))) = 0$$

существует, то $y(x)$ одновременно является решением уравнения

$$y'(x) - M(x)\, y(x - \Delta(x, \varphi(x))) \equiv y'(x) - M(x)\, y(x - \Delta_1(x)) = 0.$$

Нужно только, чтобы $\Delta(x, \varphi(x))$ удовлетворяла требованиям, наложенным на $\Delta(x)$.

Поступило
14 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 А. Мышкис, Усп. матем. наук, 4:5, 99 (1949).

Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 6

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. С. ПОНТРЯГИН

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ $(n+2)$-МЕРНОЙ СФЕРЫ В n-МЕРНУЮ

По этому вопросу мною уже была опубликована заметка ([1]). Однако в ней была допущена ошибка, приведшая к ошибочному результату. Здесь, пользуясь тем же методом, что и в ([1]), но исправляя ошибку, я прихожу к следующему результату:

Теорема. *Число классов отображений $(n+2)$-мерной сферы S^{n+2} в n-мерную сферу S^n равно двум* ($n \geqslant 2$).

Доказательство. Так как число классов отображений S^{n+2} в S^n не больше двух ([2]), то я доказываю только, что оно не меньше двух.

a) Сферы S^n и S^{n+k} (начиная с c), $k = 2$) будем представлять себе как обыкновенные метрические сферы евклидовых пространств. Непрерывные отображения и деформации можно апроксимировать аналитическими; только такие и рассматриваются в дальнейшем. При аналитическом отображении некоторого многообразия в S^n точку многообразия будем называть правильной, если ранг функциональной матрицы отображения в этой точке равен n. Деформацию f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, будем трактовать как отображение F топологического произведения $T = S^{n+2} \times I$ (I — отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$) в S^n. Пусть $p \in S^n$; положим $f_t^{-1}(p) = P_t$, $F^{-1}(p) = Q$. Из аналитичности отображений f_0, f_1 и F следует существование точки p, для которой множества P_0, P_1 и Q состоят из одних правильных точек и, в частности, являются аналитическими многообразиями (Q имеет край $P_0 \times 0 \cup P_1 \times 1$). Пусть $y = (x, t) \in Q$ ($x \in S^{n+2}$, $t \in I$) и $\theta(y) = t$; $\theta(y)$ есть аналитическая функция на Q. Исправляя деформацию f_t, можно без изменения ее на концах $t = 0, 1$ добиться того, чтобы все критические точки функции $\theta(y)$ были невырожденными.

b) Обозначим через R^n касательную к S^n в точке p и через $d_1, \dots, d_n$ — некоторую линейно независимую последовательность ее векторов. Пусть t — фиксированное некритическое значение функции $\theta(y)$, R^{n+k} — касательная к сфере S^{n+k} в точке $x \in P_t$ и N^n_x — лежащая в R^{n+k} нормаль к P_t в точке x. Так как (x, t) есть правильная точка отображения F и t — некритическое значение функции $\theta(y)$, то x есть правильная точка отображения f_t, и соответствующее линейное отображение g пространства N^n_x в R^n не вырождается. Положим $g^{-1}(d_i) = e_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$).

c) Обозначим через M многообразие всех последовательностей $x; e_0, e_1, \dots, e_n$, где $x \in S^{n+2}$, а $e_0, e_1, \dots, e_n$ — линейно независимая система векторов, касательных к S^{n+2} в точке x. Одномерная группа Бетти многообразия M состоит из двух элементов 0 и 1.

d) Пусть $k = 2$ и t — фиксированное некритическое значение функции $\theta(y)$ (см. a)); тогда P_t есть замкнутая ориентируемая поверхность (может быть, несвязная). Кривой на P_t будем называть конечную совокупность попарно непересекающихся простых замкнутых ориентированных гладких кривых. Число компонент кривой C будем обозначать через $\nu(C)$. Пусть $x \in C$ и $e_0(x)$ — единичный вектор, касательный к кривой C в точке x. Положим $\omega(x) = \{x; e_0(x), e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ (см. b)). Этим определено отображение ω кривой C в многообразие M (см. c)), и вместе с ним определен класс гомологий $\varphi(C)$ кривой $\omega(C)$ в M, т. е. 0 или 1 (см. c)). Положим

$$\gamma(C) = \nu(C) + \varphi(C) \pmod 2. \tag{1}$$

Очевидно, что при деформации кривой C функции $\nu(C)$ и $\varphi(C)$, а следовательно, и $\gamma(C)$ не меняются. Оказывается даже, что $\gamma(C)$ определяется классом c гомологий mod 2 кривой C на P_t: $\gamma(C) = \gamma(c)$. Далее, если c_1 и c_2 — два класса гомологий, то

$$\gamma(c_1 + c_2) = \gamma(c_1) + \gamma(c_2) + I(c_1, c_2), \tag{2}$$

где $I(c_1, c_2)$ — индекс пересечения (mod 2) классов c_1 и c_2 *.

Для доказательства определим операцию сложения наших кривых, снова приводящую к кривой. Пусть C_1 и C_2 — две кривые на P_t, находящиеся в общем положении, т. е. имеющие лишь конечное число точек пересечения и нигде не касающиеся друг друга. Определяемая нами сумма $C_3 = C_1 + C_2$ отличается от теоретико-множественной суммы $C_1 \cup C_2$ ориентированных кривых C_1 и C_2 только в окрестности их пересечения. Переход от $C_1 \cup C_2$ к $C_3 = C_1 + C_2$ в окрестности отдельной точки пересечения показан на рис. 1. Очевидно, что классы гомологий (mod 2) c_1, c_2, c_3 кривых C_1, C_2, C_3 связаны соотношением

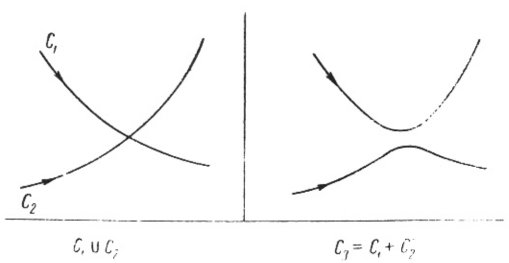

Рис. 1

$$c_3 = c_1 + c_2. \tag{3}$$

Легко видеть, далее, что

$$\varphi(C_1) + \varphi(C_2) = \varphi(C_1 + C_2), \quad \nu(C_1) + \nu(C_2) = \nu(C_1 + C_2) + I(C_1, C_2) \pmod 2$$

Отсюда и из (1) вытекает, что

$$\gamma(C_1 + C_2) = \gamma(C_1) + \gamma(C_2) + I(C_1, C_2). \tag{4}$$

Остается доказать гомологическую инвариантность функции $\gamma(C)$. Предположим, что $C_1 \sim C_2 \pmod 2$; тогда последний член в (4) исчезает, и нам достаточно показать, что $\gamma(C_3) = 0$, если $C_3 \sim 0 \pmod 2$ (см. (3)). Из соотношения $C_3 \sim 0 \pmod 2$ легко следует, что C_3 есть линия уровня некоторой гладкой действительной функции $\zeta(x)$, заданной на P_t, все критические точки которой невырождены и значения

* Ошибка в работе [1] состояла в том, что в соотношении (2) был упущен член $I(c_1, c_2)$.

в различных критических точках различны. Через $C(s)$ обозначим линию уровня этой функции, отвечающую некритическому значению s. Легко доказать, что $\gamma(C(s))$ не зависит от s; для этого достаточно проследить переход параметра s через критическое значение. Оказывается, что при таком переходе обе функции $\nu(C(s))$ и $\varphi(C(s))$ меняются на единицу, так что функция $\gamma(C(s))$ вовсе не меняется. Так как при достаточно больших s множество $C(s)$ пусто, то $\gamma(C_3) = \gamma(C(s)) = 0$.

e) Обозначим через $2q$ ранг одномерной группы Бетти B mod 2 поверхности P_t. Поставим перед собой вопрос: существует ли в B линейно независимая система элементов $c_1, \ldots, c_q$, удовлетворяющая условиям:

$$I(c_i, c_j) = 0, \quad \gamma(c_i) = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, q).$$

Определим функцию $\Gamma(f_t)$, полагая $\Gamma(f_t) = 0$, если такая система существует, и $\Gamma(f_t) = 1$, если такой системы не существует. Функция $\Gamma(f_t)$ определена лишь для некритических значений t; легко проверяется, что при переходе через критическое значение она не меняется, а постоянство ее в остальных интервалах изменения t очевидно. Далее, $\Gamma(f_t) = 0$, если поверхность P_t гомеоморфна сфере; поэтому для отображения f_0, гомотопного нулю, $\Gamma(f_0) = 0$. Итак, Γ есть инвариант гомотопического класса, обращающийся в нуль для нулевого класса.

f) Построим теперь отображение $f = f_0$ сферы S^{n+2} в сферу S^n, для которого $\Gamma(f) = 1$. Для этого достаточно в S^{n+2} задать поверхность $P = P_0$ и в каждой точке $x \in P$ — последовательность $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ линейно независимых и ортогональных к P векторов так, чтобы описанный выше процесс построения дал $\Gamma = 1$. Сферу S^{n+2} будем представлять себе как евклидово пространство R^{n+2} с бесконечно удаленной точкой. В R^{n+2} выберем подпространство R^3 и будем считать, что P есть обыкновенный метрический тор в R^3 с обычными циклическими координатами α и β. Пусть $u_1(x)$ — лежащая в R^3 единичная нормаль к P в точке $x = (\alpha, \beta) \in P$ и $u_2, \ldots, u_n$ — ортонормальная система векторов в R^{n+2}, ортогональных к R^3. Положим:

$$e_1(x) = u_1(x)\cos(\alpha - \beta) - u_2 \sin(\alpha - \beta),$$

$$e_2(x) = u_1(x)\sin(\alpha - \beta) + u_2 \cos(\alpha - \beta),$$

$$e_i(x) = u_i \quad (i = 3, \ldots, n).$$

Легко проверяется, что $\Gamma = 1$.

Поступило
4 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, ДАН, 19, № 5 (1938). [2] H. Freudenthal, Comp. Math., 5, 299 (1937).

MR0042121 (13,57b) 56.0X

Pontryagin, L. S.

Homotopy classification of the mappings of an $(n+2)$-dimensional sphere on an n-dimensional one. (Russian)

Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **70,** (1950). 957–959

In dieser Note wird gezeigt, dass für $n \geq 3$ die $(n+2)$te Homotopiegruppe $\pi_{n+2}(S^n)$ der n-Sphäre S^n die Ordnung 2 hat, d.h. dass es zwei Homotopieklassen von Abbildungen der S^{n+2} in die S^n gibt. Damit wird ein vom Verfasser früher [C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **19**, 361–363 (1938)] formuliertes irrtümliches Ergebnis richtiggestellt. Auf Grund der Sätze von Freudenthal [Compositio Math. **5**, 299–314 (1937)] genügt zum Beweis des Satzes der Nachweis einer wesentlichen Abbildung von S^{n+2} auf S^n für $n = 3$. Dieser Nachweis wird in folgender Weise erbracht (der Gedankengang ist ausführlich dargelegt, die Beweise einzelner Schritte jedoch nur angedeutet). Es sei f eine analytische Abbildung von S^{n+2} in S^n. Es gibt einen Punkt $b \in S^n$, für welchen $f^{-1}(b)$ ein System von zueinander fremden geschlossenen orientierbaren Flächen ist, und derart dass die Abbildung f in der Umgebung von F betrachtet in naheliegender Weise eine Abbildung von F in $V_{n+3,n+1}$ (die Mannigfaltigkeit aller Systeme von $n+1$ linear unabhängigen Vektoren im $(n+3)$-dimensionalen Raum) definiert. Ist W ein "Weg" auf F, d.h. ein System von zueinander fremden einfach geschlossenen glatten Kurven, so erhält man hieraus eine Abbildung φ von W in $V_{n+3,n+2}$, somit in die eigentliche orthogonale Gruppe Ω_{n+3} in $n+3$ Variablen. φ definiert ein Element $a(W)$ der Fundamental-gruppe von Ω_{n+3}, also eine ganze Zahl mod. 2. Für $a(W)$ gilt (alle Gleichungen zwischen ganzen Zahlen sind mod. 2 zu verstehen): 1) Ist W, als ganzzahliger Zyklus aufgefasst, homolog 0 auf F, so ist $a(W)$ gleich der Komponentenzahl $b(W)$ von W; somit, wenn $c(W) = a(W) + b(W)$ gesetzt wird, $c(W) = 0$.2) Für 3 Wege W, W_1, W_2 sei im Sinne ganzzahliger Zyklen W_2 homolog zu $W + W_1$; dann gilt

$$a(W_2) = a(W) + a(W_1),$$

und $b(W_2) = b(W) + b(W_1) + I(W, W_1)$, wo I die Schnittzahl bedeutet; somit ist $c(W_2) = c(W) + c(W_1) + I(W, W_1)$. Für homologe Wege W, W_1 gilt also $c(W) = c(W_1)$. Ist $W_1, \cdots, W_q$, $W_1', \cdots, W_q'$ eine kanonische Homologiebasis von F, so wird $\Gamma = \sum_{i=1}^q a(W_i)a(W_i')$ gesetzt; diese Zahl (mod. 2) ist von der Basis unabhängig und erweist sich als eine Homotopieinvariante $\Gamma(f)$ der Abbildung f von S^{n+2} in S^n. Zum Beweis der Invarianz bei Deformation von f ist eine geeignete analytische Approximation der Deformation erforderlich. Für eine nullhomotope Abbildung f ist $\Gamma(f) = 0$. Für die bekannte Abbildung g von S^5 auf S^3, für welche in der Freudenthalschen Theorie [loc. cit.] die Entscheidung der Wesentlichkeit offen blieb (Einhängung der Faserprojektion von S^3 auf S^2, gefolgt von derselben Projektion und von nochmaliger Einhängung) findet man durch explizite Konstruktion $\Gamma(g) = 1$; g ist also wesentlich.

Reviewed by *B. Eckmann*