

# Nichtperiodische Pflasterungen mit ganzzahligem Inflationsfaktor

Dissertation zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
des Fachbereichs Mathematik der Universität Dortmund

vorgelegt von Dirk Frettlöh

Dortmund Juli 2002



*Alles Urdenken geschieht in Bildern.*  
Schopenhauer



Meinen Eltern gewidmet.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Pflasterungen und diskrete Punktmengen</b>	<b>12</b>
2.1	Steine, Cluster und Pflasterungen . . . . .	12
2.2	Eigenschaften von Pflasterungen . . . . .	16
2.3	Inflation . . . . .	19
2.4	Primitivität . . . . .	25
2.5	Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften . . . . .	39
2.6	Punktmengen . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Pflasterungen mit ganzzahligem Inflationsfaktor</b>	<b>47</b>
3.1	Lokal endliche Komplexität . . . . .	47
3.2	Pflasterungen auf Gittern . . . . .	56
<b>4</b>	<b>CPS für Pflasterungen auf Gittern</b>	<b>62</b>
4.1	Ein einführendes Beispiel . . . . .	65
4.2	Model Sets . . . . .	72
4.3	Wann ist eine Punktmenge kein Model Set? . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>Anhang: Der Ring der <math>p</math>-adischen Zahlen</b>	<b>87</b>
<b>7</b>	<b>Bezeichnungen</b>	<b>90</b>
	<b>Literatur</b>	<b>92</b>

# 1 Einleitung

Unter einer Pflasterung stellen sich die meisten Menschen wohl die lückenlose Überdeckung einer Fläche mit kleineren Elementen wie Fliesen oder eben Pflastersteinen vor. Die mathematische Abstraktion liegt auf der Hand: Eine Pflasterung<sup>1</sup> ist eine lückenlose Packung des  $\mathbb{R}^d$  mit Teilmengen desselben, den Steinen. Diese sollen nicht allzu exotisch sein, also einige Eigenschaften aufweisen wie etwa Kompaktheit oder Zusammenhang. Weiterhin sollte die Anordnung der Steine mathematisch zu beschreibenden Regeln gehorchen.

Es gibt in Kunst und Architektur schon seit langer Zeit ausgeklügelte Beispiele für Pflasterungen in diesem Sinne — man denke an römisch-hellenistische Mosaik oder die komplexen geometrischen Strukturen an den Wänden der Alhambra —, und es existieren auch einige wichtige mathematische Arbeiten, die sich in diesen Rahmen einordnen lassen. Zwei Beispiele sind die Arbeiten von KEPLER und die frühen Arbeiten von HEESCH (s. dazu [GS]). Diese sind insofern typisch für dieses Themengebiet, als sie isolierte Einzelleistungen darstellen, ohne direkte Vorgänger und Nachfolger zu haben. Noch 1987 beklagen GRÜNBAUM und SHEPHARD, die Autoren von 'Tilings and Patterns' [GS], dem mathematischen Standardwerk über Pflasterungen, im Vorwort zu demselben: *'Perhaps our biggest surprise when we started collecting material for the present work was that so little about tilings and patterns is known.'*

## 1. Quasikristalle

Heute hat sich die Situation geändert. Ein Grund ist sicherlich das eben genannte Buch, in dem eine riesige Menge alter und neuer Ergebnisse zusammengetragen und in konsistenter Weise dargestellt sind. Der andere, vielleicht ausschlaggebendere Grund ist aber die Entdeckung der Quasikristalle. Das sind Festkörper, die weder Kristalle sind noch Gläser: In Quasikristallen weisen die Positionen der Atome, anders als in Gläsern, eine hohe lokale und globale Ordnung auf, liegen aber nicht wie bei einem Kristall auf einem Gitter. Die ersten theoretischen Modelle, die diese Strukturen vorwegnahmen, gehen zurück auf PENROSE (für zwei Dimensionen, [PEN]), AMMANN, MACKAY (für zwei und drei Dimensionen, [GS],[MAC]) und KRAMER (für drei Dimensionen, [KRA]). Diese Modelle sind allesamt Pflasterungen im mathematischen Sinne, und zwar nicht-periodische<sup>2</sup> Pflasterungen. (Vollperiodischen Pflasterungen liegt ein Gitter zu Grunde, sie können also nur als Modelle für Kristalle dienen.)

Der erste Nachweis eines realen Quasikristalls gelang 1984 SHECHTMAN, BLECH, GRATIAS und CAHN ([SBGC]), und zwar mit Hilfe der Beugungsmuster der von ihnen hergestellten Proben. Durchleuchtet man einen — idealen — Kristall mit Röntgenstrahlen, so erhält man als Beugungsmuster ein Bild aus isolierten Punkten, den 'Bragg-peaks' (etwa auf Fotopapier, das von den gebeugten Röntgenstrahlen belichtet wird). Dieses Punktmuster spiegelt die Symmetrien des Kristalls wider. Festkörper ohne hohe Ord-

<sup>1</sup>In manchen Texten auch 'Parkett' oder 'Parkettierung', engl. 'tiling', selten 'tesselation' o. 'paving'

<sup>2</sup>Nichtperiodisch heißt eine Pflasterung  $\mathcal{P}$ , wenn aus  $\mathcal{P} = \mathcal{P} + t$  folgt  $t = 0$ .

nungsstruktur (ohne 'long range orientation order') dagegen liefern ein diffuses Bild ohne scharfe Punkte. SHECHTMAN et al. erhielten scharfe Beugungsmuster aus Bragg-peaks, ihre Probe besaß also einen hohen Grad an Ordnung. Die Muster aber ließen auf die für Kristalle unmögliche Ikosaedersymmetrie schließen, daher war der von ihnen entdeckte Festkörper auch kein Kristall: Eine neue Gruppe von Festkörpern war nachgewiesen, die Quasikristalle.

Mathematisch gesehen ist solch ein Beugungsexperiment nichts anderes als eine Fouriertransformation: Aus der Pflasterung erhält man durch geeignete Dekoration der Steine mit Punkten eine Punktmenge  $D$ . (Steine gleichen Typs erhalten dieselbe Dekoration. Aus physikalischer Sicht kann man diese Dekoration z.B. als Atompositionen auffassen.) Daraus bildet man die 'Autokorrelationsfunktion', die — zumindest unter einigen idealisierenden Voraussetzungen — folgende Form hat:

$$\mu = \sum_{x \in X_D} \nu(x) \delta_x \quad \left( \delta_x \text{ Dirac-Maß, also } \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases} \right) \quad (1)$$

Hierbei ist  $X_D = \{z \mid z = x - y, x \in D, y \in D\}$  und  $\nu(x)$  die Dichte der Punkte  $z \in D$ , so dass  $x + z \in D$ . Die Fouriertransformierte  $\hat{\mu}$  liefert dann das Beugungsmuster von  $D$ . Ist  $\hat{\mu}$  Summe von Diracmaßen, so zeigt das Beugungsmuster die oben angesprochenen 'Bragg-peaks'.

## 2. Quasiperiodische Pflasterungen

Diesen Pionierarbeiten folgten viele weitere Entdeckungen sowohl in Kristallographie, Chemie und Experimentalphysik als auch in theoretischer Physik und Mathematik, und in letzterer vor allem auf dem Gebiete der Pflasterungen. Unter anderem galt es, das Konzept einer nichtperiodischen, aber hochgeordneten Pflasterung präzise zu definieren. Ein wichtiger Begriff dafür ist 'repetitiv'. Damit ist im Wesentlichen lokale Ununterscheidbarkeit gemeint: Aus einem endlichen Ausschnitt der Pflasterung kann man nichts über dessen globale Position in der Pflasterung folgern. Eine weitere wichtige Eigenschaft, die hohe lokale Ordnung ausdrückt, ist 'lokal endliche Komplexität'. Eine Pflasterung  $\mathcal{P}$  ist von lokal endlicher Komplexität, wenn es — modulo Translationen — zu jedem  $r > 0$  nur endlich viele verschiedene Steinmengen  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$  gibt, die in eine Kugel vom Radius  $r$  passen. Auf diese Begriffe wird in Kapitel 2 ausführlich eingegangen. Obwohl nämlich diese beiden Eigenschaften eine natürliche und sinnvolle Abschwächung der Eigenschaft 'kristallographisch' darstellen, herrschte lange Zeit Unklarheit über genaue Definitionen und Bezeichnungen, ferner über die Zusammenhänge. Ein Teil dieser Arbeit ist diesem Problem gewidmet.

Untersuchungsgegenstand der meisten Arbeiten über nichtperiodische Pflasterungen sind nichtperiodische, repetitive Pflasterungen. Unter diesen wiederum sind die 'quasiperiodischen' Pflasterungen die am häufigsten behandelten. Dazu zählen z.B. die Penrosepflasterungen. Eine zufriedenstellende mathematische Definition für diesen Begriff steht noch aus (siehe dazu [BAA]), aber sie sollte unter anderem die folgenden Punkte abdecken:

**Q1** Die Pflasterung ist repetitiv.

**Q2** Die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion ist Summe von Punktmaßen; das Beugungsmuster besteht also aus 'Bragg-peaks'.

**Q3** Bildet man zur Pflasterung  $\mathcal{P}$  ähnlich wie oben  $X_{\mathcal{P}} = \{z \mid T \in \mathcal{P}, T + z \in \mathcal{P}\}$  und daraus den 'Translationsmodul'

$$\mathbb{T} = \langle X_{\mathcal{P}} \rangle_{\mathbb{Z}},$$

so existiert eine reelle Zahl  $\eta > 1$  mit  $\eta\mathbb{T} = \mathbb{T}$ .

Diese Punkte sind nicht hinreichend zur Beschreibung von Quasiperiodizität, sie sollten nur alle erfüllt sein. Weitere zu fordernde Eigenschaften sind sicherlich: Die Menge der Bragg-Peaks liegt dicht im Raum, der  $\mathbb{Z}$ -Spann dieser Menge — der 'Fouriermodul', vgl. [GK] — ist endlich erzeugt und für jedes  $\varepsilon > 0$  bilden diejenigen Bragg-Peaks, deren Intensität größer als  $\varepsilon$  ist, eine diskrete Punktmenge. Eine geeignete Definition von Quasiperiodizität könnte aber auch ganz anders aussehen; etwa indem Bedingungen an die Autokorrelationsfunktion (1) gestellt werden, oder über eine Beschreibung durch 'Model Sets' (s. Kapitel 4). Aus einer solchen Definition sollten dann alle hier genannten Eigenschaften folgen.

Die bekanntesten quasiperiodischen Pflasterungen, wie etwa die Penrose-Tilings, die Ammann-Beenker-Tilings oder die dreidimensionalen Pflasterungen mit Ikosaedersymmetrie von Ammann, Kramer oder Danzer ([MAC],[KRA],[DAN1]) weisen alle diese Eigenschaften auf. Ferner sind die quasiperiodischen Pflasterungen vielversprechende Kandidaten für reale Quasikristalle. Aus diesen und anderen Gründen sind die quasiperiodischen Pflasterungen von so hohem mathematischen Interesse.

### 3. Limesperiodische Pflasterungen, Pflasterungen auf Gittern

Es gibt eine weitere interessante Klasse von nichtperiodischen Pflasterungen, die viele Gemeinsamkeiten mit den quasiperiodischen Pflasterungen aufweist: Die 'limesperiodischen' Pflasterungen. Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt aus einer solchen. Der augenfälligste Unterschied zu den quasiperiodischen Pflasterungen ist, dass limesperiodische Pflasterungen, grob gesprochen, auf einem Gitter leben. Das kann z. B. heißen, dass die Eckpunkte der Steine auf einem Gitter liegen (siehe Abbildung 1). Exakt formuliert: Der Translationsmodul  $\mathbb{T}$  limesperiodischer Pflasterungen ist ein Gitter. Das ist für quasiperiodische Pflasterungen nicht möglich, denn **Q3** ist nicht erfüllt: Wenn  $\mathbb{T}$  ein Gitter ist, folgt aus  $\eta\mathbb{T} = \mathbb{T}$  sofort  $|\eta| = 1$ .

Ansonsten weisen limesperiodische Pflasterungen nahezu alle 'schönen' Eigenschaften auf wie quasiperiodische:

- **Q1** gilt: Sie sind repetitiv. Mit dem nötigen Rüstzeug ausgestattet kann man schnell zeigen, dass sie sogar linear repetitiv sind (Kap. 3). Lineare Repetitivität stellt — einer Vermutung von LAGARIAS und PLEASANTS zufolge — für

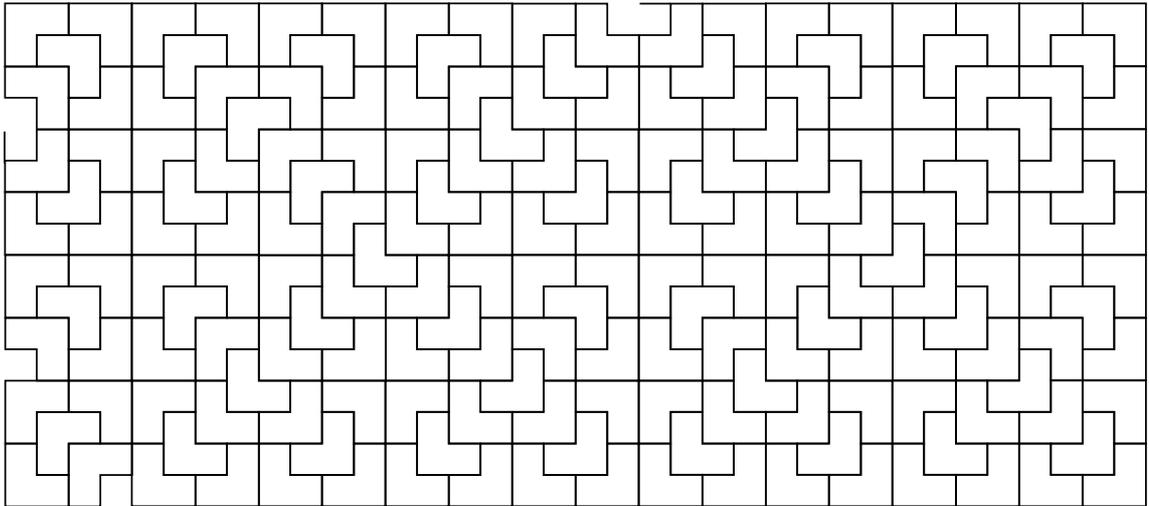


Abbildung 1: Teil eines Chair-Tilings. Alle Eckpunkte liegen im Gitter  $\mathbb{Z}^2$

nichtperiodische Pflasterungen den größtmöglichen Grad an 'Geordnetheit' dar, zumindest im Kontext lokaler Konfigurationen oder speziell bezüglich Inflationspflasterungen [LAP1].

- Man kann sie durch eine 'local matching rule' erzeugen ([G-S], die dortige 'mild condition' ist erfüllt). Genauer: Man kann sie aus einer durch eine local matching rule erzeugte Pflasterung lokal ableiten.
- Man kann sie durch eine 'Cut-and-Project'-Methode erzeugen. Grundlegend für dieses Ergebnis sind die Arbeiten von BAAKE, MOODY, SCHLOTTMANN und LEE ([BMS], [LM]). Aus diesem Grund folgt auch:
- **Q2** gilt: Sie besitzen ein Beugungsmuster aus 'Bragg-peaks'. (Zu den letzten beiden Punkten s. auch Kap. 4)
- Sie sind selbstähnlich. Das heißt, man kann die Steine so mit Punkten dekorieren, dass für die resultierende Punktmenge  $D$  (wie oben) gilt: Es gibt einen 'Ähnlichkeitsfaktor'  $\eta > 1$  mit  $\eta D \subset D$ . Sie erfüllen deshalb gleichzeitig eine abgeschwächte Form von **Q3**:

**Q3'** Zum Translationsmodul  $T$  wie in **Q3** existiert eine Zahl  $\eta > 1$  mit  $\eta T \subset T$ .

Das Besondere bei limesperiodischen Pflasterungen ist, dass dieses  $\eta$  ganzzahlig ist (s. dazu Kap. 3). Es gibt sehr viele Arbeiten über selbstähnliche Pflasterungen, aber nur wenige, die sich speziell mit nichtperiodischen selbstähnlichen Pflasterungen mit ganzzahligem Ähnlichkeitsfaktor beschäftigen. Dabei sollte nach dem soeben Geschilderten klar sein, dass diese Klasse von Pflasterungen es verdient, genauer untersucht zu werden.

#### 4. Anliegen der Arbeit

Die bislang publizierten Ergebnisse stehen entweder in einem allgemeineren Rahmen (alle Aussagen über selbstähnliche Pflasterungen sind selbstverständlich auch Aussagen über selbstähnliche Pflasterungen mit ganzzahligem Ähnlichkeitsfaktor), oder es sind sehr isolierte Aussagen, oft nur über einzelne Pflasterungen in dieser Klasse und nicht über ihre Gesamtheit.

Die vorliegende Arbeit soll daher zum einen die verstreuten Ergebnisse bezüglich Pflasterungen mit ganzzahligem Ähnlichkeitsfaktor in konsistenter Weise darstellen, vertiefen und, wo möglich, verallgemeinern<sup>3</sup>. Zum anderen werden viele neue Ergebnisse vorgestellt, hier vor allem im Zusammenhang mit lokal endlicher Komplexität und Cut-and-Project-Methoden. Aber auch schon bei der Formulierung der Grundlagen — so etwa im Zusammenhang mit Primitivität oder gegenseitig lokaler Ableitbarkeit — tauchen neue Fragen auf, die im Verlauf der Arbeit beantwortet werden können.

Es gibt in diesem Themenkreis etliche offene Fragen, und sogar viele bisher ungestellte Fragen. Ein Beispiel: Eine der mächtigsten Methoden zur Erzeugung von nichtperiodischen Pflasterungen ist die Inflationsmethode. Dabei wird ein Satz  $\mathcal{F}$  von Steinen vorgegeben sowie ein 'Inflationsfaktor'  $\eta$ , weiter eine Regel, wie die um  $\eta$  vergrößerten Steine zerlegt werden. Bei dieser Zerlegung sollen wieder Steine des ursprünglichen Typs entstehen. Beginnt man mit einem einzelnen Stein, so werden durch wiederholte Anwendung der Inflationsregel immer größere Teile des Raums mit Steinen überdeckt. Auf diese Weise erhält man eine Pflasterung. (Die Analogie zur Selbstähnlichkeit wird schnell deutlich. In der Regel ist eine so entstandene Pflasterung selbstähnlich zum Faktor  $\eta$ , vgl. Satz 2.12.) Primitiv heißt eine Inflation, wenn bei wiederholter Inflation eines beliebigen Steins aus  $\mathcal{F}$  irgendwann alle Steintypen aus  $\mathcal{F}$  auftreten.

Praktisch alle in der Literatur vorkommenden primitiven Inflationspflasterungen sind von lokal endlicher Komplexität. Erst im Jahre 2000 zeigte DANZER von einer ganzen Reihe von primitiven Inflationspflasterungen, dass sie nicht von lokal endlicher Komplexität sind ([DAN5]). In seiner Terminologie, die auch in der vorliegenden Arbeit Verwendung findet, lässt sich das wie folgt formulieren:

**Satz 1.1** (DANZER)  $(\mathbf{I}, \mathbf{P}) \setminus (\mathbf{LFC}) \neq \emptyset$

(In Worten: Die Menge aller primitiven Inflationspflasterungen ohne die Menge aller Pflasterungen von lokal endlicher Komplexität ist nicht leer.)

Erst jetzt stellt sich die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lokal endliche Komplexität. Eine umfassende Antwort ist nicht in Sicht. Für die in dieser Arbeit betrachtete Klasse von Pflasterungen soll diese Frage aber weitgehend beantwortet werden (Kap. 3).

Viele der in dieser Arbeit vorgestellten Begriffe und Aussagen werden an ausgewählten

---

<sup>3</sup>Ein wichtiger Schritt ist die Einsicht, dass jede selbstähnliche Pflasterung eine Inflationsspezies definiert und jede Inflationsspezies eine selbstähnliche Pflasterung enthält, s. Satz 2.12

Beispielen verdeutlicht. Diese sind so gewählt, dass sie ein möglichst breites Spektrum innerhalb der hier behandelten Klasse von Pflasterungen abdecken. Damit werden zum einen die 'typischen' Eigenschaften solcher Pflasterungen demonstriert, zum anderen wird dadurch aber auch deutlich, dass es sich keineswegs um eine enge und sehr spezielle Klasse von Objekten handelt, sondern im Gegenteil um eine sehr vielfältige und reichhaltige.

### 5. Gliederung der Arbeit

Konkret ist die Arbeit folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 werden der notwendige Begriffsapparat und einige grundlegende — alte wie neue — Sätze zur Arbeit mit Pflasterungen zusammengestellt. Es wird dort insbesondere auf Inflation und Primitivität eingegangen. Der letzte Abschnitt des Kapitels 2 ist dem Zusammenhang zwischen Pflasterungen und diskreten Punktmengen gewidmet. Alle Begriffe und Aussagen in dieser Arbeit gelten für Pflasterungen — oder Punktmengen — in beliebiger Dimension, also nicht nur für  $d = 2$  oder  $d \in \{2, 3\}$ . (Die einzige Ausnahme findet sich in Abschnitt 3.1, dort wird ausdrücklich auf diese Beschränkung hingewiesen.) Die Aussagen in Kapitel 2 beziehen sich dabei auf einen viel allgemeineren Rahmen als die in den folgenden Kapiteln, die sich ausschließlich mit Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor befassen.

In den wenigen wichtigen Sätzen über solche Pflasterungen (z.B. in [LM], [KEN]) wird vorausgesetzt, dass diese primitiv sind, von lokal endlicher Komplexität und dass sie 'auf einem Gitter leben', dass also der Translationsmodul ein Gitter ist. In Kapitel 3 werden die Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften untersucht. Dabei wird sich zeigen, wie man diese Forderungen abschwächen kann und welche Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften bestehen. Die Kernfrage ('Ist jede primitive Inflationspflasterung mit ganzzahligem Faktor von lokal endlicher Komplexität?') gibt dabei die Richtung vor, kann in dieser Arbeit aber nicht vollständig beantwortet werden.

In Kapitel 4 wird auf die neben der Inflation wichtigste Klasse von Verfahren zur Generierung von nichtperiodischen Pflasterungen eingegangen: Den 'Cut-and-Project'-Schemata (CPS). Für quasiperiodische Pflasterungen existieren CPS schon lange, sie gehen zurück auf DE BRUIJN [DEB] und KRAMER [KRA]. Ein CPS für eine limesperiodische Pflasterung wurde erst 1998 von BAAKE, MOODY und SCHLOTTMANN publiziert [BMS]. Ihre Methode wird in Abschnitt 4.1 umfassend dargestellt.

LEE und MOODY geben in [LM] ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines CPS zu einer gegebenen selbstähnlichen Punktmenge. Dieses wird in Abschnitt 4.2 geschildert und dabei der Zusammenhang zu Pflasterungen hergestellt.

Existiert zu einer gegebenen selbstähnlichen Punktmenge ein CPS, so liefert das Kriterium von LEE und MOODY einen einfach handzuhabenden Algorithmus mit endlicher Laufzeit. Im Falle der Nichtexistenz terminiert der Algorithmus jedoch nicht, das Kriterium ist in diesem Falle praktisch nicht nutzbar. In Abschnitt 4.3 werden daher zwei einfach zu berechnende hinreichende Kriterien für die Nichtexistenz eines CPS für eine gegebene Inflationspflasterung vorgestellt. Der Beweis dazu ist, anderes als die Beweise

in [LM], rein geometrischer Natur und kann dadurch das Verständnis des Kriteriums von LEE und MOODY vertiefen.

Kapitel 5 ist einer rückblickenden Zusammenfassung der Arbeit und der Schilderung der aus dieser erwachsenden Fragestellungen gewidmet.

Kapitel 6 ist lediglich ein kurzer Anhang, der grundlegende topologische Eigenschaften des Rings der  $p$ -adischen Zahlen enthält. Von diesen wird in Abschnitt 4.1 ausgiebig Gebrauch gemacht.

Die darauf folgenden Seiten (90f.) enthalten als Hilfe für den Leser eine Tabelle, in der die Bezeichnungen, Abkürzungen und Variablennamen, die in der Arbeit an mehr als einer Stelle eine Rolle spielen, aufgeführt sind.

### *6. Danksagung*

Ich möchte an dieser Stelle meinem Lehrer Herr Professor Ludwig Danzer für viele fruchtbare und erhellende Lehren und Diskussionen mathematischer und anderer Natur meinen herzlichsten Dank aussprechen. Auch Herrn Professor Michael Baake gegenüber bin ich für die wertvollen Anregungen und die Ermöglichung zahlreicher Kontakte zu anderen Wissenschaftlern zu besonderem Dank verpflichtet. Weiterhin danke ich den Herren Dipl. Math. Gerrit van Ophuysen und Dipl. Math. Jason Uhing sowie den Mitgliedern des Lehrstuhls für Diskrete Geometrie des Fachbereichs Mathematik der Universität Dortmund für ihre ständige und freudige Bereitschaft zur Diskussion mathematischer Probleme.

## 2 Pflasterungen und diskrete Punktmengen

In diesem Kapitel werden die notwendigen Definitionen und grundlegenden Aussagen zur Behandlung hochgeordneter, aber nicht notwendig periodischer Pflasterungen bzw. Punktmengen zusammengestellt. Alle Begriffe beziehen sich auf Pflasterungen in einem euklidischen Vektorraum  $\mathbb{R}^d$ . Die späteren Kapitel beschäftigen sich mit speziellen nichtperiodischen Inflationspflasterungen. Die in diesem Kapitel formulierten Begriffe und Ergebnisse beziehen sich aber auf einen sehr allgemeinen Rahmen.

Die kanonischen Pflasterungen aus  $d$ -dimensionalen Einheitswürfeln werden an einigen Stellen als Beispiel benutzt. Der Einfachheit halber werden sie daher kurz mit  $\mathcal{W}_d$  bezeichnet. Genauer: Mit  $E := [0, 1]^d$  ist

$$\mathcal{W}_d := \{E + v \mid v \in \mathbb{Z}^d\} = E + \mathbb{Z}^d$$

(Die einzige dem Autor bekannte Bezeichnung für diese Pflasterungen stammt von COXETER [COX], der sie als entartetes  $d + 1$ -dimensionales reguläres Polytop auffasst und mit  $\delta_{d+1}$  bezeichnet.)

### 2.1 Steine, Cluster und Pflasterungen

**Definition 2.1** (*Steine und Pflasterungen*)

1. Ein Stein ist eine kompakte Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^d$ , deren Inneres zusammenhängend<sup>4</sup> ist und für die gilt:  $\text{cl}(\text{int}(T)) = T \neq \emptyset$ . Insbesondere hat ein Stein positives Volumen.
2. Eine Pflasterung ist eine abzählbar unendliche Menge  $\{T_1, T_2, \dots\}$  von Steinen, für deren Vereinigung gilt:  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i = \mathbb{R}^d$  und die nicht überlappen, d.h. der Schnitt des Inneren je zweier Steine der Pflasterung ist leer.
3. Eine Pflasterung  $\mathcal{P}$  heißt  $k$ -periodisch, wenn es genau  $k$  linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  gibt mit  $\mathcal{P} + v_i = \mathcal{P}$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Im Falle  $k = d$  nennt man eine solche Pflasterung kristallographisch, im Falle  $k = 0$  nichtperiodisch.
4. Eine Musterfamilie  $\mathcal{F}$  einer Pflasterung  $\mathcal{P}$  ist eine Menge von Steinen mit der Eigenschaft, dass jeder Stein in  $\mathcal{P}$  Translat genau eines Steins in  $\mathcal{F}$  ist. Eventuelle Dekorationen der Steine der Pflasterung werden hierbei berücksichtigt.  $\mathcal{F}$  enthält also für jede Translationsklasse  $\overline{T_0} := \{T \mid T = T_0 + v, v \in \mathbb{R}^d\}$  von Steinen  $T_0 \in \mathcal{P}$  genau einen Vertreter. Ist  $\mathcal{F}$  endlich und Musterfamilie einer Pflasterung  $\mathcal{P}$ , so bezeichnen wir  $\mathcal{P}$  als  $\mathcal{F}$ -Pflasterung.

---

<sup>4</sup>Es kann sinnvoll sein, unzusammenhängende Steine zuzulassen (s. etwa [GS], [VIN]). Vieles in dieser Arbeit könnte auch für diesen größeren Rahmen formuliert werden, worauf wir aber der Klarheit wegen verzichten

5. Ist  $\mathcal{F} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ ,  $\mathcal{P}$  eine  $\mathcal{F}$ -Pflasterung und  $T \in \mathcal{P}$ , dann bedeutet die Schreibweise  $T \cong T_i$  oder auch  $T \in \overline{T_i}$ , dass  $T$  ein Translat von  $T_i$  ist, wieder unter Berücksichtigung eventueller Dekorationen.
6. Ist  $M$  eine Steinmenge und  $S$  ein Stein (eine Steinmenge), so heißt  $S \sqsubseteq M$ : Ein Translat des Steins (ein Translat der Steinmenge)  $S$  ist Element (Teilmenge) von  $M$ . Wieder werden dabei eventuelle Dekorationen der Steine berücksichtigt.

Wie in der Definition angedeutet ist es oft notwendig, sich Steine auf irgend eine Weise dekoriert zu denken, z.B. durch Färbung oder Markierung mit Punkten oder Pfeilen, so dass auch Steine mit derselben geometrischen Form unterschieden werden. Beispielsweise ist die Pflasterung  $\mathcal{W}_2$  mit dem Einheitsquadrat als einzigem Element der Musterfamilie  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{W}_2$  kristallographisch. Versieht man aber den Musterstein mit zwei verschiedenen Farben, so hat  $\mathcal{F}$  nun zwei Elemente und man kann recht einfach nichtperiodische Pflasterungen erhalten. (Etwa dadurch, dass man in der Pflasterung endlich viele Steine rot färbt und alle anderen grün.)

Man kann in der obigen Definition 'Translat' allgemeiner durch 'kongruentes Bild' ersetzen: In den Punkten 4., 5. und 6. wird 'Translationsklasse ( $\overline{T_0} := \{T \mid T = T_0 + v, v \in \mathbb{R}^d\}$ )' ersetzt durch 'Kongruenzklasse ( $\overline{T_0} := \{T \mid T = \varphi(T_0), \varphi \text{ Isometrie in } \mathbb{R}^d\}$ )'. Dementsprechend heißt dann  $T \cong T_i$ , dass  $T$  kongruent zu  $T_i$  ist.

In vielen Fällen macht das keinen großen Unterschied. Für spätere Zwecke ist die Unterscheidung von Steinen über ihre Translationsklasse aber zweckmäßiger als über ihre Kongruenzklasse. Ein wichtiges (Gegen-)Beispiel für die im Weiteren getroffenen Aussagen sind die bekannten *Pinwheeltilings* von CONWAY ([RAD], s. auch Abb. 2). Alle Steine in diesen Pflasterungen sind Dreiecke mit Seitenlängen 1, 2 und  $\sqrt{5}$ . Die Musterfamilie bzgl. *Kongruenzklassen* hat daher nur ein einziges Element, die *Pinwheeltilings* sind in diesem Kontext also  $\mathcal{F}$ -Pflasterungen. Die Steine treten aber in unendlich vielen verschiedenen Orientierungen auf, die Musterfamilie bzgl. *Translationsklassen* hat unendlich viele Elemente. Die *Pinwheeltilings* sind nach obiger Definition daher keine  $\mathcal{F}$ -Pflasterungen bzgl. Translation.

Für alle Aussagen in diesem Kapitel ist diese Einschränkung nicht nötig. Alles hier Formulierte gilt sowohl für Unterscheidung der Objekte (Pflasterungen, Steine etc.) bzgl. Translationsklassen als auch für Unterscheidung bzgl. Kongruenzklassen. Wir werden daher im Rest dieses Kapitels den Begriff 'Typ' benutzen. Dieser darf sowohl durch 'Translationsklasse' als auch durch 'Kongruenzklasse' ersetzt werden. Alle Aussagen sind in beiden Fällen gültig.

Wir benötigen zur Formulierung globaler Sachverhalte im weiteren einen Begriff für Mengen von Pflasterungen, die auf eine gewisse Weise miteinander verwandt sind. Dazu dient die Bezeichnung *Spezies*. Es wird bewusst zunächst keine allgemeine Definition gegeben und nur gefordert, dass zu gegebener Musterfamilie  $\mathcal{F}$  eine Spezies  $\mathbf{S}$  eine Menge von  $\mathcal{F}$ -Pflasterungen ist; und dass mit  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  auch jede Pflasterung vom Typ

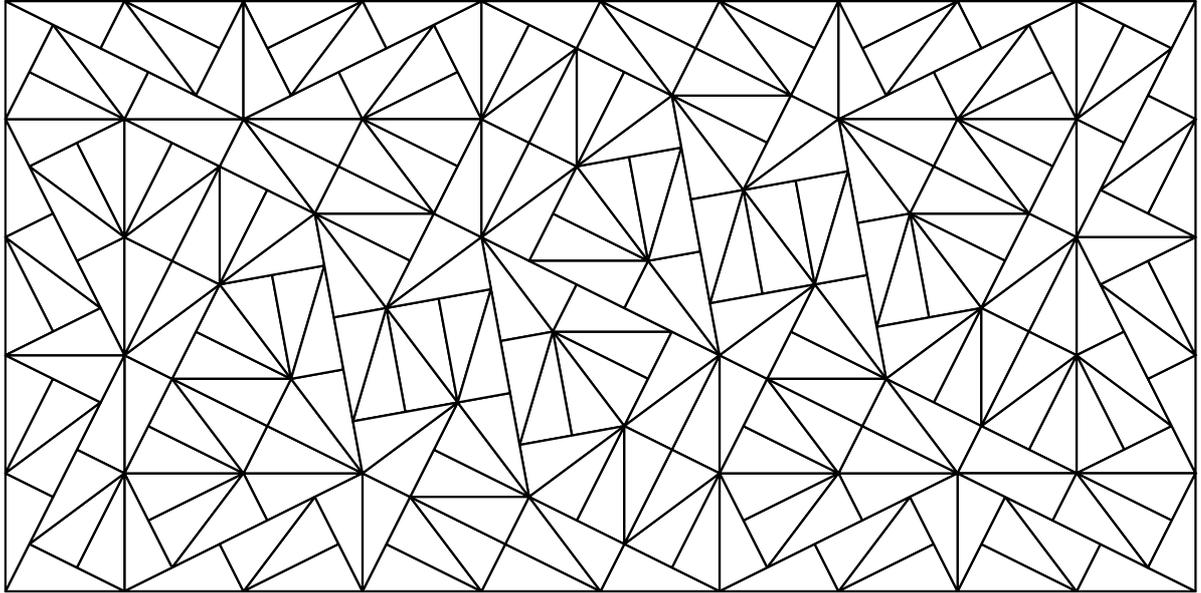


Abbildung 2: Ein Ausschnitt aus einem Pinweeltiling. Die Steine liegen alle in derselben Kongruenzklasse, aber in unendlich vielen verschiedenen Translationsklassen

$\mathcal{P}$  in  $\mathbf{S}$  liegt. Später werden bestimmte Arten von Spezies — wie Inflationsspezies — präzise definiert.

Desweiteren braucht man einen Begriff zur Formulierung lokaler Eigenschaften von Pflasterungen:

**Definition 2.2** Sei  $\mathcal{P}$  eine Pflasterung und  $r$  eine nichtnegative reelle Zahl. Ist  $r > 0$ , so ist der  $r$ -Cluster (um  $x$ )  $\mathcal{C}_r(x, \mathcal{P})$  die Steinmenge  $\{T \mid T \in \mathcal{P}, T \cap \text{int}(x + r\mathbb{B}^d) \neq \emptyset\}$ . Der 0-Cluster (um  $x$ ) ist  $\mathcal{C}_0(x, \mathcal{P}) := \{T \mid T \in \mathcal{P}, x \in T\}$ . Ist  $\mathcal{F}$  eine Musterfamilie, so heißt eine Steinmenge  $\mathcal{C}$   $\mathcal{F}$ -Cluster (oder einfach Cluster, wenn klar ist, welches  $\mathcal{F}$  gemeint ist), wenn  $\text{int}(\bigcup_{T \in \mathcal{C}} T)$  zusammenhängend und beschränkt ist und für alle Steine  $T \in \mathcal{C}$  gilt:  $T \sqsubseteq \mathcal{F}$ . (Also alle Steine aus  $\mathcal{C}$  Translate (bzw. kongruente Kopien) von Steinen aus  $\mathcal{F}$  sind).

$\mathbb{B}^d$  steht dabei für die abgeschlossene Einheitskugel. Die leere Menge ist laut Definition auch ein Cluster, aber kein Stein und auch kein  $r$ -Cluster: Selbst der 0-Cluster um  $x$  enthält mindestens einen Stein. Jede einelementige Steinmenge ist auch ein Cluster.

Man beachte, dass von einem  $\mathcal{F}$ -Cluster nicht gefordert wird, dass er Teilmenge einer Pflasterung ist. Ist etwa  $\mathcal{F} = \{ \diamond \}$ , so gibt es dazu keine  $\mathcal{F}$ -Pflasterung, aber es gibt unendlich viele  $\mathcal{F}$ -Cluster. Ein Cluster, der in einer Pflasterung einer Spezies  $\mathbf{S}$  auftaucht, heißt *korrekt* (bzgl.  $\mathbf{S}$ ).

Mit der Formulierung 'alle Cluster einer Spezies' ist im Folgenden immer gemeint: Alle Cluster aller Pflasterungen der Spezies.

Unter Umständen ist es günstiger, einen  $r$ -Cluster alternativ zu definieren als

$$\mathcal{C}'_r(x, \mathcal{P}) := \{T \mid T \in \mathcal{P}, T \subseteq \text{int}(x + r\mathbb{B}^d)\} \quad (2)$$

(s. dazu die Diskussion in [LAP1]). Elementarerweise gilt aber: Jeder  $r$ -Cluster nach Def. 2.2 in einer  $\mathcal{F}$ -Pflasterung überdeckt eine offene Kugel vom Radius  $r$  und wird überdeckt von einer offenen Kugel vom Radius  $r + s$  (dabei ist  $s$  das Maximum der Durchmesser der Steine in  $\mathcal{F}$ ). Diese Tatsache bewirkt, dass sich praktisch jede Aussage bzgl.  $r$ -Clustern in dem Kontext von Definition 2.2 sofort in den Kontext von (2) übertragen lässt und umgekehrt.

Später werden wir die 'lokale Ableitbarkeit' zweier Pflasterungen einführen, wofür die Definition 2.2 den passenden Rahmen bildet (speziell die Definition des 0-Clusters).

Andere Autoren bezeichnen endliche Steinmengen auch als 'Patches'. In den meisten Fällen wird es synonym zu Cluster benutzt, manchmal wird für Patches noch nicht einmal gefordert, dass sie zusammenhängend sind. Einige Autoren definieren aber *Patch* als Cluster  $\mathcal{C}$ , für den gilt:  $\text{int}(\bigcup_{T \in \mathcal{C}} T)$  ist homöomorph zu einer Kugel und beschränkt.

Für Pflasterungen in Räumen mit Dimensionen größer als zwei ist dieser Begriff ungeeignet. (Auch wenn man nur Steine zulässt, die homöomorph zu einer Kugel sind!) Das hat hauptsächlich zwei Gründe:

1. Ein Patch ist nicht immer *schälbar*, d.h. es gibt Patches, für die gilt: Entfernt man einen beliebigen Stein aus dem Patch, so ist die resultierende Steinmenge kein Patch mehr. Eine äquivalente Formulierung dafür ist: Es gibt Patches, die man nicht bilden kann, indem zu einem einzelnen Stein schrittweise weitere hinzugefügt werden, so dass die Steinmengen in jedem einzelnen Schritt Patches sind. Aus diesem Grund kann man für Patches i. Allg. keine Induktionsbeweise durchführen. Cluster dagegen sind schälbar, also sind Induktionsbeweise möglich.
2. Es gibt Pflasterungen, in denen die einzigen Patches aus einem einzelnen Stein bestehen. Kein Cluster in einer solchen Pflasterung mit mehr als einem Stein ist ein Patch.

Ein Beispiel zu 1. ist in [Z] als 'Danzer cube' beschrieben. Dieser geht auf eine Konstruktion zurück, mit der DANZER in [COP] eine ganz andere Frage von FEJES TÓTH durch ein Gegenbeispiel beantwortete. ('Prove or disprove: In a finite set of non-overlapping centrosymmetric convex bodies there always exists a body which can be removed without disturbing the other bodies.')

Ein Beispiel zu 2. liefert der in Abb. 3 links dargestellte Stein. Zwei solcher Steine lassen sich wie im Bild gezeigt zu einem eckigen Torus zusammenfügen (rechts oben). Aus diesen Tori kann man unendlich lange 'Stangen' mit kreuzförmigem Querschnitt bilden, indem man die Tori wie Kettenglieder aneinanderhängt (rechts Mitte). Mit diesen Stangen kann man den Raum füllen. Zwei nebeneinanderliegende Stangen können

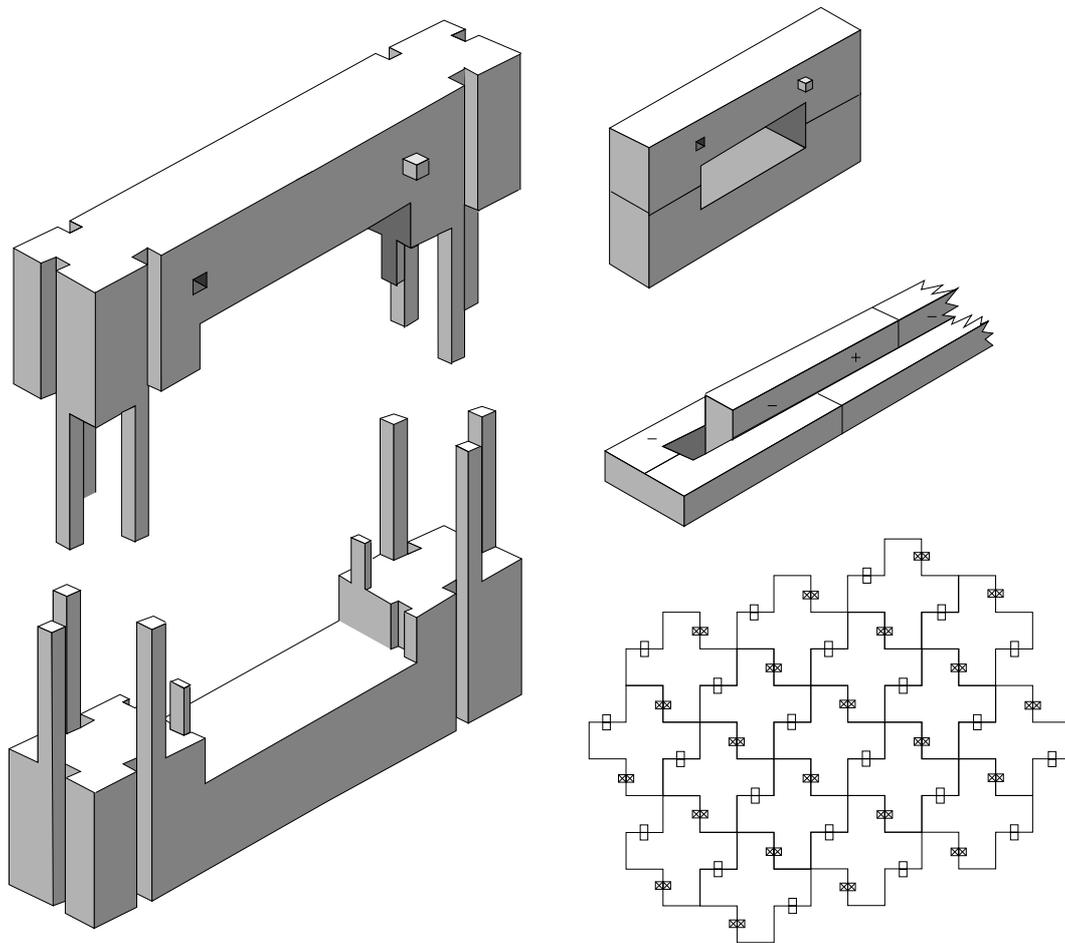


Abbildung 3: In Pflasterungen aus Steinen dieses Typs gibt es keine Patches, die mehr als einen Stein enthalten.

dabei nicht beliebig gegeneinander verschoben sein, da die würfelförmigen Zapfen ein entsprechendes Loch ausfüllen müssen. (Die Positionen der Zapfen und Löcher sind rechts in der Mitte durch + und – angedeutet.) Mit diesem Musterstein ist — bis auf Kongruenz — nur diese eine Pflasterung des  $\mathbb{R}^3$  möglich. Die Untersuchung aller lokalen Steinkonstellationen zeigt, dass in dieser Pflasterung jeder Cluster aus mehr als einem Stein nicht homöomorph zu einer Kugel ist, also kein Patch.

## 2.2 Eigenschaften von Pflasterungen

Jetzt können wir zwei wichtige Eigenschaften im Zusammenhang mit Pflasterungen formulieren: Repetitivität und lokal endliche Komplexität. Beide beschreiben in etwa die Situation, dass eine Pflasterung eine hohe lokale oder globale Ordnung aufweist. Jede kristallographische Pflasterung hat — wie man sich leicht klarmacht — diese zwei Eigenschaften. Sie können aber auch bei nichtperiodischen Pflasterungen auftreten.

Insofern stellen sie eine Art Abschwächung der Eigenschaft 'kristallographisch' (s. Def. 2.1) dar.

**Definition 2.3** Eine Pflasterung  $\mathcal{P}$  heißt von lokal endlicher Komplexität (engl. *locally finite complexity*, auch: *finite local complexity*, *FLC*), wenn es nur endlich viele verschiedene Typen von Clustern gibt, die aus genau zwei Steinen bestehen. Eine Spezies  $\mathbf{S}$  heißt von lokal endlicher Komplexität, wenn es in ganz  $\mathbf{S}$  nur endlich viele Typen von Clustern gibt, die aus genau zwei Steinen bestehen. Die Klasse aller Spezies von lokal endlicher Komplexität nennen wir (**LFC**).

Diese Definition stammt aus [DAN4]. Es ist unmittelbar klar, dass die Musterfamilie  $\mathcal{F}$  einer Pflasterung von lokal endlicher Komplexität endlich sein muss.

Ursprünglich definierte man lokal endliche Komplexität (etwa in [LUP] oder [DAN2]) wie im folgenden Lemma. Beide Definitionen sind äquivalent, die oben gegebene ist aber i. Allg. leichter handzuhaben.

**Lemma 2.1** Eine Pflasterung  $\mathcal{P}$  ist von lokal endlicher Komplexität genau dann, wenn gilt: Für jedes  $r > 0$  gibt es nur endlich viele Typen von  $r$ -Clustern in  $\mathcal{P}$ .

**Beweis:** "⇐" Der Durchmesser der Vereinigung zweier beliebiger Steine aus  $\mathcal{F}$ , die sich berühren, ist beschränkt. Sei  $r$  diese Schranke. Gibt es nur endlich viele Typen von  $r$ -Clustern, so auch nur endlich viele Typen von Clustern aus zwei Steinen.

"⇒" Diese Richtung ist genauso einfach. Allerdings muss man sich zunächst folgendes klarmachen: Beim Abzählen der verschiedenen Clustertypen muss die Symmetriegruppe eines Steins beachtet werden. Gibt es Steine mit einer nichttrivialen Symmetriegruppe, so sollte der Stein durch einen dekorierten Stein ersetzt werden, dessen Symmetriegruppe — unter Berücksichtigung der Dekoration — trivial ist. Anders formuliert: Ein Stein in einer Pflasterung ist erst hinreichend beschrieben, wenn man seinen Typ kennt und die Abbildung, die ihn auf seine Position in der Pflasterung abbildet.

Dann kann man den Beweis schnell vollenden: Sei  $r > 0$ . Die Musterfamilie  $\mathcal{F}$  ist endlich, also gibt es ein minimales Volumen  $v > 0$ , so dass jeder Stein  $T$  Volumen  $\text{vol}(T) \geq v$  hat. Daher gibt es eine obere Schranke  $n$  für die Anzahl der Steine in einem  $r$ -Cluster. Wenn es nur endlich viele Typen von Clustern aus  $n$  Steinen gibt, so erst recht endlich viele Typen von  $r$ -Clustern.

Sei  $\ell$  die Anzahl aller Typen von Zwei-Stein-Clustern. Beginnt man mit einem solchen Cluster  $\mathcal{C}$ , so gibt es maximal  $2\ell - 2$  Möglichkeiten, ihn zu einem Drei-Stein-Cluster zu erweitern (denn man kann an jeden der beiden Steine aus  $\mathcal{C}$  auf höchstens  $\ell - 1$  Weisen einen weiteren Stein anlegen), maximal  $(3\ell - 3)$  Möglichkeiten, diesen Drei-Stein-Cluster zu einem Vier-Stein-Cluster zu erweitern usw. bis: Es gibt maximal  $(2\ell - 2)(3\ell - 3) \cdots ((n - 1)\ell - (n - 1)) = (n - 1)!(\ell - 1)^{n-2}$  Möglichkeiten, einen 2-Stein-Cluster zu einem  $n$ -Stein-Cluster zu erweitern. Für jedes  $n$  ist die Anzahl aller  $n$ -Stein-Cluster somit endlich, die Behauptung ist damit bewiesen.  $\square$

**Definition 2.4** Eine Pflasterung  $\mathcal{P}$  heißt

1. schwach repetitiv, wenn es zu jedem Cluster  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$  ein  $R > 0$  gibt, für das gilt: In jedem  $R$ -Cluster in  $\mathcal{P}$  liegt ein Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$ . Eine Spezies  $\mathbf{S}$  heißt schwach repetitiv, wenn es zu jedem Cluster  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{S}$  ein  $R > 0$  gibt, für das gilt: In jedem  $R$ -Cluster aus  $\mathbf{S}$  liegt ein Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$ . Mit **(WR)** bezeichnen wir die Klasse aller schwach repetitiven Spezies.
2. repetitiv, wenn es zu jedem  $r > 0$  ein  $R > 0$  gibt mit: Für jeden  $r$ -Cluster  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{P}$  liegt in jedem  $R$ -Cluster von  $\mathcal{P}$  ein Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$ . Eine Spezies  $\mathbf{S}$  heißt dementsprechend repetitiv, wenn es zu jedem  $r > 0$  ein  $R > 0$  gibt, so dass gilt: Für jeden  $r$ -Cluster  $\mathcal{C}$  aus  $\mathbf{S}$  liegt in jedem  $R$ -Cluster aus  $\mathbf{S}$  ein Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$ . **(R)** ist die Klasse aller repetitiven Spezies.
3. linear repetitiv, wenn  $\mathcal{P}$  repetitiv ist und  $R$  aus 2. linear von  $r$  abhängt. Genauer: Es existieren reelle Zahlen  $\lambda, \mu$ , so dass für alle  $r > 0$  gilt:  $R = \lambda r + \mu$ . Genauso heißt eine Spezies  $\mathbf{S}$  linear repetitiv, wenn  $\mathbf{S}$  repetitiv ist und  $R$  aus 2. linear von  $r$  abhängt. Die Klasse aller linear repetitiven Spezies wird mit **(LR)** bezeichnet.

Man beachte: Auch wenn jede Pflasterungen in einer Spezies repetitiv ist, so folgt daraus nicht, dass die Spezies selbst repetitiv ist.

Repetitivität wurde von verschiedenen Autoren unterschiedlich definiert (vgl. [LUP], [LAP1], [DAN3], [SEN]). Alle Varianten entsprechen aber einem der drei hier definierten Begriffe. Man erhält unmittelbar die folgenden Aussagen:

**Lemma 2.2** (a) **(LR)**  $\subseteq$  **(R)**  $\subseteq$  **(WR)**  
 (b)  $\mathbf{S} \in \mathbf{(R)} \Rightarrow \mathbf{S} \in \mathbf{(LFC)}$   
 (c)  $\mathbf{S} \in \mathbf{(WR)} \cap \mathbf{(LFC)} \Rightarrow \mathbf{S} \in \mathbf{(R)}$

**Beweis:** (a) Das folgt direkt aus den Definitionen.

(b) Zu jedem  $r$  gibt es ein  $R$ , so dass in einem beliebigen  $R$ -Cluster  $\mathcal{C}$  aus  $\mathbf{S}$  alle Typen von  $r$ -Clustern aus  $\mathbf{S}$  vorkommen. Jeder Stein hat positives Volumen. Die Musterfamilie ist endlich, also sind all diese Volumina größer als eine positive Konstante  $c$ . Daher hat auch jeder  $r$ -Cluster  $\mathcal{C}_r$  positives Volumen  $\text{vol}(\mathcal{C}_r) > c > 0$ . Jeder  $R$ -Cluster hat endliches Volumen, daher gibt es nur endlich viele Typen von  $r$ -Clustern in  $\mathcal{C}$  und somit in  $\mathbf{S}$ .

(c) Sei  $r > 0$ . Aufgrund der lokal endlichen Komplexität gilt: Es gibt in  $\mathbf{S}$  nur endlich viele Typen  $\overline{\mathcal{C}}_1, \dots, \overline{\mathcal{C}}_n$  von  $r$ -Clustern. Wegen der schwachen Repetitivität gibt es zu jedem  $\overline{\mathcal{C}}_i$  ein  $R_i$ , so dass gilt: Jeder  $R_i$ -Cluster enthält einen Cluster vom Typ  $\overline{\mathcal{C}}_i$ . Sei  $R := \max_{1 \leq i \leq n} R_i$ . Dann enthält jeder  $R$ -Cluster alle Typen von  $r$ -Clustern aus  $\mathbf{S}$ . Also ist  $\mathbf{S} \in \mathbf{(R)}$ . □

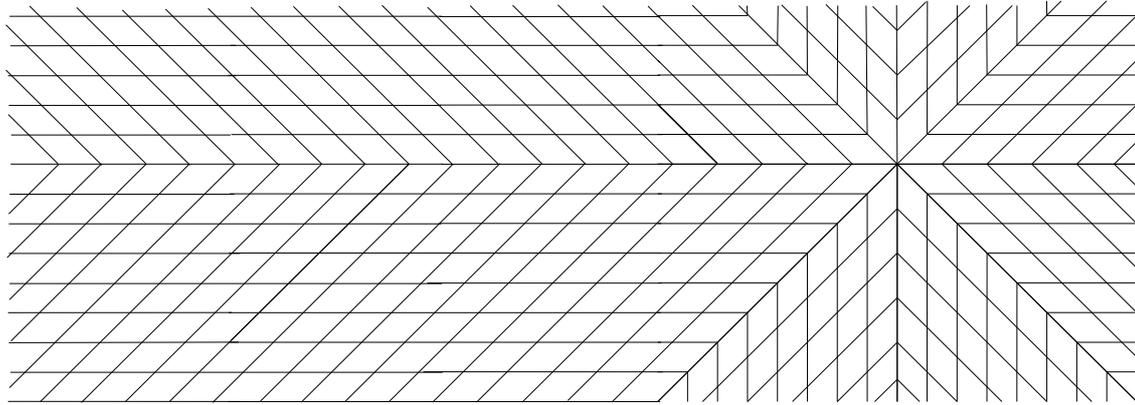


Abbildung 4: Eine triviale nichtperiodische Pflasterung.

Ist von nichtperiodischen Pflasterungen die Rede, sind oft repetitive nichtperiodische Pflasterungen gemeint. So ist z. B. die in Abb. 4 angedeutete Rhombenpflasterung  $\mathcal{P}$  nichtperiodisch (man überlegt sich schnell, wie die Pflasterung global aussehen muss; der zentrale Stern aus acht Rhomben kann nur einmal in der Pflasterung auftauchen), aber sie ist nicht repetitiv: Wählt man als  $r$ -Cluster  $\mathcal{C}$  diesen zentralen Stern, so kann man zu jedem  $R$  einen  $R$ -Cluster  $\mathcal{D}$  finden, der kein Translat von  $\mathcal{C}$  enthält. Dazu muss  $\mathcal{D}$  einen positiven Abstand von  $\mathcal{C}$  haben, also z.B.  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_R\left(\binom{3R}{0}, \mathcal{P}\right)$ . Es ist nicht schwierig, nach diesem Muster etliche andere nichtperiodische Pflasterungen zu konstruieren. Interessantere Beispiele nichtperiodischer nichtrepetitiver Pflasterungen sind die 'spiral tilings' von HEESCH in [GS], Kap. 9.

Weniger einfach ist es, eine nichtperiodische repetitive Pflasterung zu konstruieren. Die frühesten Beispiele dazu sind Pflasterungen aus Wang-Tiles [BER],[ROB] und die Penrosepflasterungen [PEN]. Keines wurde vor 1966 publiziert. (Die Fragestellung war dabei folgende: Gibt es einen Satz von Steinen, mit denen man die Ebene pflastern kann, aber nur nichtperiodisch? Die in Abb. 4 gezeigten Steine erlauben im Gegensatz dazu auch kristallographische Pflasterungen.) Eine der wichtigsten Konstruktionsmöglichkeiten ist die Inflationmethode.

## 2.3 Inflation

Für spätere Verweise ist es notwendig, Inflation zunächst nur bezüglich Translationen zu definieren.

**Definition 2.5** (*Inflation*)

1. Eine Inflation (zum Faktor  $\eta$ ) ist ein Tripel  $(\mathcal{F}, \eta, \mathcal{Q})$  mit den Eigenschaften:

- (a)  $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_m\}$  ist eine endliche Menge von Steinen, also eine Musterfamilie (vgl. Def. 2.1.4).

(b)  $\eta$  ist eine reelle Zahl mit  $\eta > 1$ .

(c)  $\mathcal{Q}$  ist eine Menge  $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$  von  $\mathcal{F}$ -Clustern, so dass für  $1 \leq i \leq m$  gilt:

$$\eta T_i = \bigcup_{T \in \mathcal{C}_i} T.$$

2. Dieses Tripel definiert einen Operator  $\text{infl}$ , der Steinmengen auf Steinmengen abbildet, insbesondere  $\mathcal{F}$ -Cluster auf  $\mathcal{F}$ -Cluster und  $\mathcal{F}$ -Pflasterungen auf  $\mathcal{F}$ -Pflasterungen. Ist  $\mathcal{M}$  die Menge aller  $\mathcal{F}$ -Steinmengen, also  $\mathcal{M} := \{M \mid M = \{T_{i_1} + t_1, T_{i_2} + t_2, \dots\}, T_{i_k} \in \mathcal{F}, t_i \in \mathbb{R}^d\}$ , so ist

$$\text{infl} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$\text{infl}(\{T_{i_1} + t_1, T_{i_2} + t_2, \dots\}) := (\mathcal{C}_{i_1} + \eta t_1) \cup (\mathcal{C}_{i_2} + \eta t_2) \cup \dots$$

Insbesondere gilt  $\text{infl}(\{T_i\}) = \mathcal{C}_i$ . Statt  $\text{infl}(\{T_i\})$  schreiben wir auch kurz  $\text{infl}(T_i)$ .

3.  $\text{infl}^k := \text{infl} \circ \text{infl}^{k-1}$  für  $k \geq 1$ ,  $\text{infl}^0 := \text{id}$ . (id ist die identische Abbildung.)
4. Ist  $T$  vom Typ  $T_i$ , so wird  $\text{infl}^k(T)$  als Superstein  $k$ -ter Ordnung von  $T$  bezeichnet.
5. Eine  $\mathcal{F}$ -Pflasterung  $\mathcal{P}$  ist eine Inflationspflasterung zum Operator  $\text{infl}$ , wenn für jedes  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$  gilt:  $\exists T_i \in \mathcal{F}, k \geq 0 : \mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^k(T_i)$ .  
Die Menge all dieser Pflasterungen ist die Inflationspezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$ .
6. Sei  $a_{ij}$  die Zahl der Steine vom Typ  $T_i$  in  $\text{infl}(T_j)$ . Die Inflationsmatrix zu  $\text{infl}$  ist  $M_{\text{infl}} := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ .
7. Die Klasse aller Inflationspezies bezeichnen wir mit  $(\mathbf{I})$ .

Oft wird eine Inflationsregel durch ein Diagramm skizziert, das jeden Musterstein mit seiner ersten Inflation zeigt (s. Abb. 5, S. 27). Dieses bestimmt i. Allg. die Inflationspezies eindeutig. Unterscheidet man aber Steine nicht bezüglich ihrer Translationsklasse, sondern ihrer Kongruenzklasse, so muss man solche Diagramme mit Vorsicht genießen: Hat ein Stein eine nichttriviale Symmetriegruppe, so sollte er — wie im Beweis zu Lemma 2.1 diskutiert — derart dekoriert werden, dass sie trivial wird.

Will man die obige Definition an diesen anderen Fall anpassen — Steine, Cluster etc. werden bezüglich ihrer Kongruenzklasse unterschieden — so muss in Punkt 2. folgende Änderung vorgenommen werden:

5. ... Ist  $\mathcal{M}$  die Menge aller  $\mathcal{F}$ -Steinmengen, also

$\mathcal{M} := \{M \mid M = \{\varphi_1(T_{i_1}), \varphi_2(T_{i_2}), \dots\}, T_{i_k} \in \mathcal{F}, \varphi_i \text{ Isometrie auf } \mathbb{R}^d\}$ , so ist

$$\text{infl} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$\text{infl}(\{\varphi_1(T_{i_1}), \varphi_2(T_{i_2}), \dots\}) := \eta \varphi_1(\eta^{-1} \mathcal{C}_{i_1}) \cup \eta \varphi_2(\eta^{-1} \mathcal{C}_{i_2}) \cup \dots$$

Alles andere bleibt unverändert. Diese Definitionen sind für unsere Zwecke allgemein genug. In diesem Begriffsgebäude lassen sich alle wesentlichen Aussagen über Inflationsspflasterungen und auch über selbstähnliche Pflasterungen darstellen. Eine Verallgemeinerung dieses Rahmens stellen 'selbstaffine' Pflasterungen dar. In obiger Definition würde sich das darin ausdrücken, dass statt einer Vergrößerung um den Faktor  $\eta$  — das entspricht einer Multiplikation mit der Matrix  $\eta I$  ( $I$  die  $d \times d$  Einheitsmatrix) — eine Multiplikation mit einer Matrix stattfindet, deren Eigenwerte vom Betrage her alle größer als 1 sind. Solche Fälle wollen wir hier ausschließen.

Mit Hilfe einer Inflation kann man nun eine Vielzahl von Pflasterungen bzw. Spezies definieren<sup>5</sup> und weitreichende Aussagen über sie treffen.

**Definition 2.6** *Eine Spezies, die ausschließlich aus nichtperiodischen Pflasterungen besteht, heißt aperiodisch.*

**Lemma 2.3** *Für  $\mathbf{S} \in (\mathbf{I})$  mit Inflationsfaktor  $\eta$ , Inflationsmatrix  $M_{\text{infl}}$  und Musterfamilie  $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_m\}$  gilt:  $\eta^d$  ist Eigenwert von  $M_{\text{infl}}$  und  $(\text{vol}(T_1), \dots, \text{vol}(T_m))$  ist linker Eigenvektor zum Eigenwert  $\eta^d$ .*

**Beweis:** Die Aussage ist unmittelbar klar, wenn man sich die Bedeutung der Inflationsmatrix vor Augen führt.  $\eta T_i$  setzt sich aus nichtüberlappenden Steinen zusammen. Diese entsprechen Steintypen aus  $\mathcal{F}$ . Bezeichnet  $\alpha_j$  die Zahl der in  $\text{infl}(T_i)$  vorkommenden Steine vom Typ  $T_j$ , so gilt  $\text{vol}(\eta T_i) = \eta^d \text{vol}(T_i) = \alpha_1 \text{vol}(T_1) + \dots + \alpha_m \text{vol}(T_m)$ , und die  $\alpha_j$  bilden die  $i$ -te Spalte von  $M_{\text{infl}}$ . Daraus folgt  $\eta^d (\text{vol}(T_1), \dots, \text{vol}(T_m)) = (\text{vol}(T_1), \dots, \text{vol}(T_m)) M_{\text{infl}}$ .  $\square$

Mit Hilfe des Unendlichkeitslemmas von DÉNES KÖNIG [KÖN] zeigt man (z.B. [DAN4]):

**Satz 2.4**  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \Rightarrow \exists \mathcal{Q} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) : \mathcal{P} = \text{infl}(\mathcal{Q})$

Damit ergibt sich auf natürliche Weise der folgende Begriff.

**Definition 2.7** *Sind  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  und ist  $\mathcal{P} = \text{infl}(\mathcal{Q})$ , so heißt  $\mathcal{Q}$  Deflation von  $\mathcal{P}$ . Ist  $\mathcal{Q}$  für jedes  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eindeutig bestimmt, so nennt man den Operator  $\text{defl} := \text{infl}^{-1}$  die eindeutige Deflation<sup>6</sup>.*

Interessant ist der Fall, dass der Operator  $\text{infl}$  eindeutig umkehrbar ist. Nach einem bekannten Argument (z.B. in [GS] für das Penrosetiling, in [GK] allgemein) folgt aus der Existenz einer eindeutigen Deflation die Aperiodizität der Spezies.

Für den umgekehrten Fall bewies SOLOMYAK 1996 die folgende Aussage ([SOL2]). Der Beweis benutzt allerdings lokal endliche Komplexität und die Unterscheidung von Steinen bzgl. ihrer Translationsklasse, der Satz gilt also (bisher) nur für diesen Fall.

<sup>5</sup>Auch die Pinwheeltilings (s. Abb. 2) erhält man durch eine Inflation. Diese muss natürlich im Kontext der Unterscheidung bzgl. Kongruenzklassen formuliert werden.

<sup>6</sup>In englischen Texten heißt es in diesem Fall: Die Spezies hat die *unique composition property*

**Satz 2.5** (SOLOMYAK) *Ist die Spezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{LFC})$  aperiodisch, so besitzt sie eine eindeutige Deflation.*

Eine äquivalente Formulierung ist: Ist  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$  aperiodisch, so lassen sich die Supersteine (s. Def.2.5) in jeder Pflasterung aus  $\mathbf{S}$  eindeutig bestimmen.

Der Rest dieses Abschnitts bezieht sich nur auf den Fall, dass die Steine Polytope sind. Das ist keineswegs selbstverständlich: Wir werden später sehen, dass es Pflasterungen gibt, die aus Steinen mit 'fraktalem' Rand bestehen. Polytop ist gemäß der folgenden Definition zu verstehen.

**Definition 2.8**  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt konvexes Polytop, wenn  $P$  konvexe Hülle endlich vieler Punkte  $w_i \in \mathbb{R}^d$  ist ( $1 \leq i \leq n$ ), also wenn gilt:

$$P = \{x \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i, \text{ wobei } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$$

$P \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt Polytop, wenn  $P$  Vereinigung endlich vieler konvexer Polytope ist und  $\text{int}(P)$  zusammenhängend ist.

Lassen sich in einer Inflationspflasterung die Supersteine eindeutig bestimmen, so auch alle *Superkanten*, *Superflächen*, ..., *Superfacetten*. Damit bezeichnet man die 1-, 2- ...  $(d-1)$ -dimensionalen Teile des Supersteins, die den Kanten, Flächen, ... und Facetten (=  $(d-1)$ -Seiten) des inflationierten Steines entsprechen. Genauso wie sich Supersteine aus Steinen zusammensetzen, setzen sich Superkanten (Superflächen, ...) aus Kanten (Flächen, ...) zusammen. Im Falle  $d = 2$  gibt es natürlich nur Superkanten; diese sind dann gleichzeitig Superfacetten.

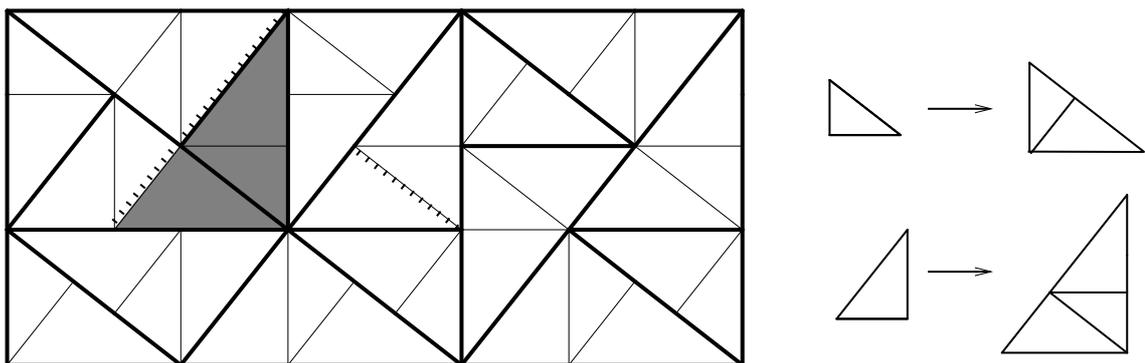


Abbildung 5: Ein Ausschnitt aus einer Pflasterung zum Inflationsfaktor  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  (Ausführlich behandelt in [DVO]). Der grau hinterlegte Cluster ist ein Pseudosuperstein. Die wirklichen Supersteine bzw. die Deflation dieses Ausschnitts sind durch die dickeren Linien dargestellt. Rechts ist die Inflationsregel skizziert.

Es kann allerdings vorkommen, dass in nichtperiodischen Inflationspflasterungen *Pseudosupersteine* auftauchen. Das sind Cluster, die aussehen wie ein Superstein, die aber keine sind. Ist etwa  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} = \text{infl}^k(\mathcal{Q})$ ,  $\mathcal{C} = \text{infl}^k(T_i) + t$  und ist  $\mathcal{C}$  ein (echter) Superstein, so ist  $T_i + \eta^{-k}t \in \mathcal{Q}$ . Im anderen Falle ist  $\mathcal{C}$  ein Pseudosuperstein. Ein Beispiel für einen solchen ist — zusammen mit der zugrundeliegenden Inflation — in Abb. 5 gezeigt.

Diese Unterscheidung ist für das nächste Lemma wichtig. In diesem Fall geht es um Superfacetten. Genauso wie es Pseudosupersteine gibt, gibt es Pseudosuperfacetten. Das ist eine Sequenz von Steinfacetten, die bzgl. ihrer Anordnung nicht von einer Superfacette zu unterscheiden ist, aber sie ist nicht Superfacette eines Supersteins (allenfalls eines Pseudosupersteins). Im Falle  $d = 2$  fallen die Begriffe Superfacette und Superkante zusammen. In Bild 5 sind zwei Pseudosuperkanten bzw. Pseudosuperfacetten gestrichelt hervorgehoben. Im wesentlichen besagt das folgende Lemma, dass es nur endlich viele 'unendlich lange' oder *infinite* Superfacetten in einer Pflasterung geben kann.

**Definition 2.9** *Eine Sequenz  $K = \{k_1, k_2, \dots\}$  von Facetten in einer Pflasterung  $\mathcal{P}$  heißt infinite Superfacette, wenn eine aufsteigende Folge  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  von Superfacetten existiert, so dass gilt:*

1.  $a_i \subseteq a_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und
2.  $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i$

Ist  $K = \{k_1, k_2, \dots\}$  eine infinite Superfacette, so liegen alle  $k_i$  in derselben Hyperebene. In jeder Deflation von  $\mathcal{P}$ , also in jeder Pflasterung  $\mathcal{Q}_n$  mit  $\mathcal{P} = \text{infl}^n(\mathcal{Q}_n)$ , ist  $\eta^{-n} \text{tr}(K) = \eta^{-n} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} k_i$  in  $\mathcal{Q}$  von Facetten überdeckt. In der Tat bildet die Menge dieser Facetten wiederum eine infinite Superfacette in  $\mathcal{Q}_n$ .

*Beispiel:* In Abb. 4 auf S. 19 sind die acht sternförmig aus dem Zentrum herauslaufenden Kantenzüge infinite Superfacetten, wenn man die Inflation aus Abb. 7b (S. 27) zugrunde legt.

**Lemma 2.6** *Sei  $\mathcal{F}$  eine Musterfamilie, deren Elemente Polytope sind. Jede Pflasterung  $\mathcal{P}$  einer Inflationsspezies  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  enthält nur endlich viele infinite Superfacetten. Ist  $\mathcal{P}$  von lokal endlicher Komplexität, so schneiden sich die Superfacetten alle in einem Punkt.*

**Beweis:** Angenommen, es gibt ein  $\mathcal{P}' \in \mathbf{S}$  mit unendlich vielen infiniten Superfacetten.

Sei  $r > 0$ . Aufgrund der Endlichkeit von  $\mathcal{F}$  gilt: Es existiert eine Schranke  $s'$ , so dass für jedes  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  und jede Kugel  $x + r\mathbb{B}^d$  die Anzahl der Steine, die mit der Kugel nichtleeren Schnitt haben, kleiner oder gleich  $s'$  ist. (Grob gesagt: Jede Kugel vom Radius  $r$  berührt höchstens  $s'$  Steine.)

Die Steine sind Polytope, daher ist auch die Zahl der Facetten, die mit einer Kugel vom Radius  $r$  nichtleeren Schnitt haben, begrenzt. Sei  $r = 1$  und  $s$  die (für alle  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  gültige) obere Schranke für die Anzahl der Facetten, die mit einer beliebigen Kugel vom Radius 1 nichtleeren Schnitt haben.

Ist  $K = \{k_1, k_2, \dots\}$  infinite Superfacette in  $\mathcal{P}'$  so gibt es in jedem  $\mathcal{Q}_n$  mit  $\text{infl}^n(\mathcal{Q}_n) = \mathcal{P}'$  eine entsprechende infinite Superfacette, und zwar an der Stelle  $\eta^{-n} \text{tr}(K)$  und somit näher am Nullpunkt. (Aufgrund von Satz 2.4 existieren diese  $\mathcal{Q}_n$  und liegen in  $\mathbf{S}$ .)

Wählen wir in  $\mathcal{P}'$   $s + 1$  infinite Superfacetten  $K_1, \dots, K_{s+1}$  in  $\mathcal{P}'$  aus, dann gibt es ein  $R > 0$ , so dass für  $1 \leq i \leq s + 1$  gilt:  $R\mathbb{B}^d \cap K_i \neq \emptyset$ .

Wähle  $n'$  so, dass  $R < \eta^{n'}$ , also  $\eta^{-n'} R < 1$ . Dann haben in jedem  $\mathcal{Q}_n$  je  $s + 1$  infinite Superfacetten nichtleeren Schnitt mit der Einheitskugel  $\mathbb{B}^d$ . Also haben auch — mindestens —  $s + 1$  Facetten nichtleeren Schnitt mit der Einheitskugel. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von  $s$ . Der erste Teil des Lemmas ist damit gezeigt.

Sei jetzt  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$ . Der Abstand zweier Facetten in einer beliebigen Pflasterung  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  ist entweder Null oder positiv. Wegen  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$  gibt es zu jedem  $R > 0$  nur endlich viele dieser positiven Abstände  $c_1, \dots, c_\ell$  mit  $c_i \leq R$ . Insbesondere gibt es einen minimalen Abstand  $c > 0$  für alle Paare sich nicht berührender Facetten in  $\mathbf{S}$ . Angenommen, zwei infinite Superfacetten  $K$  und  $L$  in  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  haben positiven Minimalabstand  $h$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es daher in jedem  $\mathcal{Q}_n$  mit  $\text{infl}^n(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$  die entsprechenden infiniten Superfacetten  $K_n, L_n$ , und zwar an den Stellen  $\eta^{-n} \text{tr}(K)$  und  $\eta^{-n} \text{tr}(L)$ . Der Abstand dieser Superfacetten in  $\mathcal{Q}_n$  beträgt dann  $\eta^{-n} h$ . Wähle  $n'$  so, dass  $\eta^{-n'} h < c$ . Damit haben zwei Facetten  $k_i \in K_{n'}, \ell_j \in L_{n'}$  ebenfalls Abstand  $h < c$ : Widerspruch. Also haben je zwei infinite Superfacetten einen Punkt gemeinsam.

Insbesondere können in diesem Fall zwei infinite Superfacetten nicht parallel zueinander sein, ohne auf derselben Hyperebene zu liegen.

Gäbe es in  $\mathcal{P}$  mehr als zwei Schnittpunkte solcher Superfacetten, so ergibt sich ähnlich wie oben ein Widerspruch: An jedem dieser Schnittpunkte liegt eine Ecke, oder eine Kante, ... oder eine  $(d - 2)$ -Seite eines Steins. Wegen  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$  gibt es für jede Kombination  $(A, B) — A, B \in \{\text{'Ecke'}, \text{'Kante'}, \dots, \text{'(d - 2)-Seite'}\} —$  eine untere Schranke  $c > 0$  für den minimalen positiven Abstand  $d(A, B)$ . Haben also zwei Schnittpunkte positiven Abstand, so gibt es für diesen eine positive untere Schranke. Diese wird in  $\mathcal{P}'_n$  für genügend hohes  $n$  unterschritten.

Wir stellen weiter fest: Da die Musterfamilie endlich ist, haben die Facetten aller Steine nur endlich viele verschiedene Richtungen. Unabhängig vom ersten Teil des Beweises ergibt sich (hier nur für  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$ ): Da die Facetten nur endlich viele Richtungen haben, können sich nur endlich viele Superfacetten in dem einzigen gemeinsamen Schnittpunkt treffen.  $\square$

Wichtig ist hierbei die Unterscheidung zwischen Superfacette und Pseudosuperfacette. Es kann in  $\mathcal{P}$  sehr viele Pseudosuperfacetten unbeschränkter Länge geben. (Ein Beispiel dazu ist wieder die triviale Würfelpflasterung  $\mathcal{W}_d$  für  $d \geq 2$ .) Solche Pseudo-

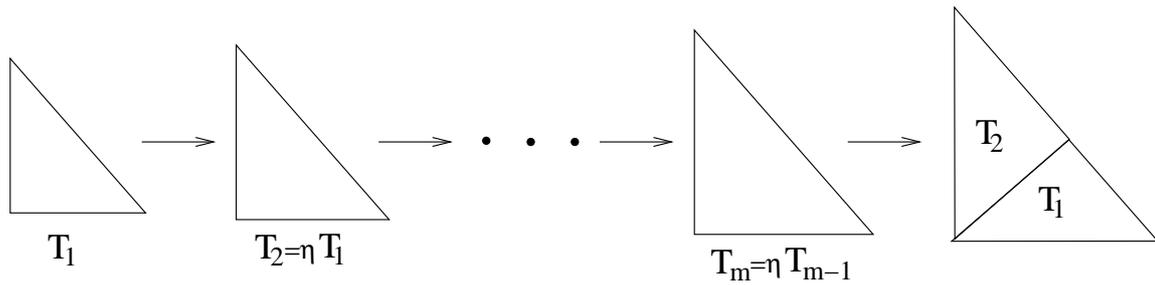


Abbildung 6: Eine primitive Inflation, deren Inflationsmatrix erst nach  $m^2 - 2m + 2$  Schritten rein positiv wird. Die Verhältnisse der Seitenlängen der Dreiecke sind  $1 : \eta : \eta^m$ .

superfacetten setzen sich aber aus Superfacetten endlicher Länge zusammen.

## 2.4 Primitivität

**Definition 2.10** Eine Matrix  $M$  mit nichtnegativen Einträgen heißt primitiv, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $M^n$  ausschliesslich positive Einträge hat. Eine Inflationsspezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  heißt primitiv, wenn die zugehörige Inflationsmatrix primitiv ist. Die Klasse aller primitiven Spezies heißt  $(\mathbf{I}, \mathbf{P})$

Primitivität ist nur für Spezies aus  $(\mathbf{I})$  erklärt. Um diesen Sachverhalt hervorzuheben, schreiben wir statt  $(\mathbf{P})$  lieber  $(\mathbf{I}, \mathbf{P})$ . Ist eine Inflationsspezies primitiv, so kommen für jedes  $T_i \in \mathcal{F}$  und für genügend hohes  $k \in \mathbb{N}$  — also  $k \geq n$  — alle Steintypen der Spezies in  $\text{infl}^k(T_i)$  vor.

Laut WIELANDT gilt: Ist  $M$  eine  $m \times m$ -Matrix, so ist  $n \leq m^2 - 2m + 2$  ([WIE]). Ist  $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_m\}$  Musterfamilie einer primitiven Inflationsspezies, so kommen also für jedes  $T_i \in \mathcal{F}$  in  $\text{infl}^{m^2 - 2m + 2}(T_i)$  alle Steintypen aus  $\mathcal{F}$  vor. Diese Abschätzung ist scharf, auch wenn man sich auf Inflationsmatrizen beschränkt: Es gibt für jedes  $m$  eine Inflationsspezies, bei der  $n$  nicht kleiner als  $m^2 - 2m + 2$  gewählt werden kann (s. Abb. 6).

Primitivität ist eine der zentralen Eigenschaften bei der Untersuchung von Inflationsspezies. In vielen wichtigen Sätzen wird sie vorausgesetzt. So kann man für primitive Matrizen beispielsweise den Satz von Perron [PER] anwenden, der in Bezug auf Inflationsmatrizen weitreichende Folgerungen erlaubt (vgl. [SOL1], [DAN4]).

Zunächst wollen wir jedoch der Frage nachgehen, wie man nichtprimitive Inflationsspezies klassifizieren und eventuell auf primitive Spezies zurückführen kann. Das erfordert einigen Aufwand. In den folgenden vier Unterabschnitten werden:

1. Drei Arten der Nichtprimitivität definiert und beschrieben,

2. den Inflationsmatrizen Graphen zugeordnet, mittels derer die Steine der Musterfamilie klassifiziert werden,
3. alle Inflationsmatrizen anhand ihrer 'kanonischen Form' klassifiziert und
4. die eingeführten Begriffe genutzt, um zu zeigen, dass alle nichtprimitiven Inflationsspezies auf eine der drei Arten nichtprimitiv sind; ferner, dass zwei dieser Arten irrelevant sind: Spezies dieser beiden Kategorien können als Vereinigung von Spezies der dritten Kategorie bzw. primitiver Spezies beschrieben werden.

Die Punkte 2. und 3. benutzen Methoden von SENETA [SE]. Neben dem Hauptergebnis (Satz 2.8) liefern die hier gemachten Überlegungen weitere nützliche Aussagen. Hervorgehoben sei dabei Satz 2.9, auf den auch in späteren Kapiteln zurückgegriffen wird.

### 1. Die drei Arten der Nichtprimitivität

Drei verschiedene Arten von Nichtprimitivität sind denkbar:

**NP.1** (Es gibt *echt unabhängige Steinklassen*)  $\mathcal{F}$  ist disjunkte Vereinigung von  $k$  Mengen  $\{T_i, \dots, T_j\}$ , so dass in  $\text{infl}(T_i), \dots, \text{infl}(T_j)$  nur Steine vom Typ  $T_i, \dots, T_j$  vorkommen. Diese Mengen heißen *unabhängige Steinklassen*. Die Matrix hat dann — eventuell nach Umnummerierung der Mustersteine — die Gestalt

$$M_{\text{infl}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Hier sind  $A_1, A_2, \dots, A_k$  quadratische Matrizen. Die Umnummerierung sei hierbei so erfolgt, dass keine weitere Verfeinerung möglich ist; dass also die Anzahl der Untermatrizen maximal ist.

**NP.2** (Es gibt *entbehrliche* Steine) **NP.1** gilt nicht und in allen Inflationen von  $T_1, \dots, T_i$  kommen — nach entsprechender Umnummerierung — keine Steine vom Typ  $T_{i+1}, \dots, T_m$  vor. Die letztgenannten Steine heißen dann *entbehrlich*. Die Inflationsmatrix hat in diesem Fall die Gestalt

$$M_{\text{infl}} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dabei sind  $A$  und  $B$  quadratische Untermatrizen.  $C$  soll in diesem Fall nicht nur aus Nullen bestehen, sonst wäre man im Fall **NP.1**.

**NP.3** (Es gibt *Zyklen*) **NP.1** und **NP.2** gelten nicht und in  $\text{infl}(T_1), \dots, \text{infl}(T_i)$  gibt es nur Steine vom Typ  $T_{i+1}, \dots, T_j$ , in  $\text{infl}(T_{i+1}), \dots, \text{infl}(T_j)$  nur welche vom Typ

$T_{j+1}, \dots, T_k$  usw. bis hin zu: In  $\text{infl}(T_{\ell+1}), \dots, \text{infl}(T_m)$  gibt es nur Steine vom Typ  $T_1, \dots, T_i$ . Die Matrix hat dann die Gestalt

$$M_{\text{infl}} = \left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_k \\ \hline A_1 & 0 & & & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & A_{k-1} & 0 \end{array} \right),$$

wobei die Blöcke aus Nullen auf der Hauptdiagonale quadratisch sind. Die Ummummerierung sei hierbei so erfolgt, dass keine weitere Verfeinerung möglich ist; dass also die Anzahl  $k$  der Untermatrizen maximal ist.

Diese Eigenschaften können auch gemischt auftreten. So kann etwa eine der Untermatrizen in **NP.1** die unter **NP.2** geschilderte Gestalt haben. In vielen Fällen kann man aber die Pflasterungen einer nichtprimitiven Spezies  $\mathbf{S}$  auf Pflasterungen einer primitiven Spezies zurückführen: Hat etwa eine Spezies  $\mathbf{S}$  die Eigenschaft **NP.1** und ist dabei jede der Untermatrizen  $A_i$  primitiv, so ist  $\mathbf{S}$  nichtprimitiv. Man findet aber recht einfach primitive Spezies  $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$  — mit Inflationsmatrizen  $A_1, \dots, A_k$  —, so dass jedes  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  in einem  $\mathbf{S}_i$  vorkommt. Später werden wir sehen, dass bei Spezies ohne entbehrliche Steine ihre Elemente immer auf diese Weise durch primitive Spezies beschrieben werden können. Zur Verdeutlichung werden zunächst drei typische Beispiele für die drei genannten Fälle gegeben.

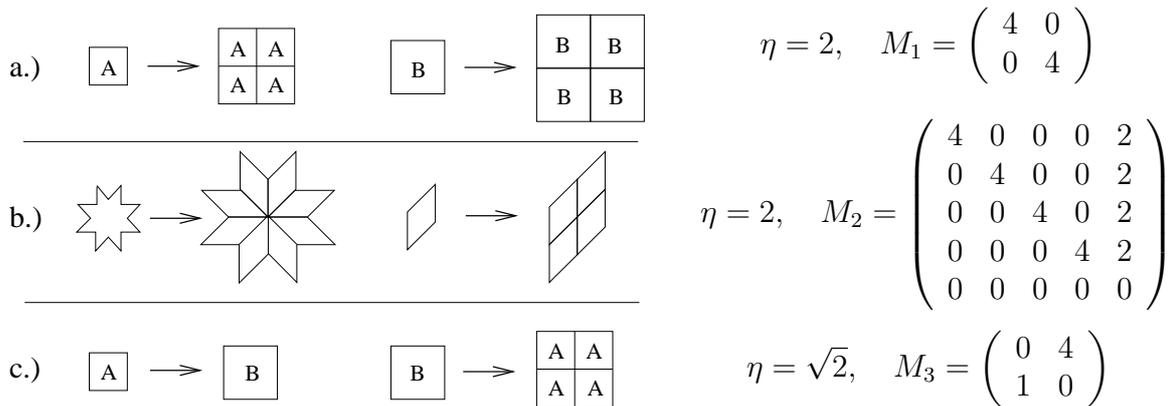


Abbildung 7: Drei Inflationsregeln für nichtprimitive Spezies

In Abb. 7a) ist eine Inflationsregel für eine Spezies  $\mathbf{S}$  mit der Eigenschaft **NP.1** dargestellt<sup>7</sup>. Ihre Musterfamilie  $\mathcal{F}$  besteht aus zwei Steinen,  $A$  und  $B := \sqrt{2}A$ .  $\mathbf{S}$  enthält nur

<sup>7</sup>Zur Beziehung zwischen Inflationsregel und graphischer Darstellung sei auf die Diskussion hinter Definition 2.5 verwiesen.

zwei bzgl. ihrer Translationsklasse verschiedene Pflasterungen: Die triviale Quadratpflasterung  $\mathcal{W}_2$  und  $\sqrt{2}\mathcal{W}_2$ , also dieselbe um den Faktor  $\sqrt{2}$  vergrößert. Jede Potenz der Inflationsmatrix hat außerhalb ihrer Hauptdiagonale nur Nullen als Einträge.  $\mathbf{S}$  ist also nicht primitiv. Man kann jede Pflasterung dieser Spezies aber auch als Element einer primitiven Spezies erhalten. Dazu bilden wir  $\mathcal{F}_1 := \{A\}$ ,  $\mathcal{F}_2 := \{B\}$  und  $\text{infl}_i$  sei die Inflation eingeschränkt auf  $\mathcal{F}_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ). Dann ist  $\mathbf{S}_i := \mathbf{S}(\mathcal{F}_i, \text{infl}_i)$  wohldefiniert und es gilt:  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$ . Jede Aussage, die für Pflasterungen primitiver Spezies zutrifft, gilt also auch für die Pflasterungen aus  $\mathbf{S}$ . (Zum Beispiel folgt aus Satz 2.13 auf S. 39 direkt:  $\mathbf{S}_1 \in (\mathbf{WR})$ ,  $\mathbf{S}_2 \in (\mathbf{WR})$ . Also gilt auch: Alle Pflasterungen in  $\mathbf{S}$  sind schwach repetitiv. Allerdings gilt nicht:  $\mathbf{S} \in (\mathbf{WR})$ , denn ein Cluster aus  $\mathbf{S}_1$  taucht nirgends in  $\mathbf{S}_2$  auf.)

Abb. 7b) zeigt eine Inflationsregel für eine Spezies mit einem entbehrlichen Stein, also mit Eigenschaft **NP.2**. Es gibt zwei Kongruenzklassen von Steinen, aber fünf Translationsklassen, da die Rhomben in vier verschiedenen Orientierungen vorkommen. Also hat die Musterfamilie fünf Elemente bezüglich Translation. Die vier Rhombentypen zerlegen sich unter der Inflationsregel alle nach demselben Muster: Jeder Rhombus wird zu vier Rhomben seines eigenen Typs, so wie es im Bild für einen Rhombentyp dargestellt ist. Der sternförmige Stein ist entbehrlich, überdies taucht er selbst in keiner Pflasterung dieser Spezies auf. (Das muss für entbehrliche Steine nicht unbedingt gelten. Stände in der Matrix  $M_2$  unten rechts eine positive Zahl, so hätte die dazugehörige Inflation ebenfalls die Eigenschaft **NP.2**.) Diese Spezies enthält nur fünf bezüglich ihrer Translationsklasse verschiedene Pflasterungen: Zum einen kristallographische — und somit repetitive — Rhombenpflasterungen isomorph zu  $\mathcal{W}_2$  (in vier verschiedenen Orientierungen), zum anderen die nichtrepetitive Pflasterung mit einem zentralen Stern aus acht Rhomben, wie sie auch in Bild 4 dargestellt ist. Diese Spezies läßt sich nicht als Vereinigung primitiver Spezies erhalten.

Die Spezies  $\mathbf{S}'$  zu der in Abb. 7c) angedeuteten Inflation hat, wie man an der Inflationsmatrix sieht, die Eigenschaft **NP.3**.  $\mathbf{S}'$  enthält, wie man schnell einsieht, dieselben Pflasterungen wie  $\mathbf{S}$  (Abb. 7a). Fasst man zwei Inflationsschritte zu einem zusammen, so ist die Inflation wohldefiniert und identisch mit der von  $\mathbf{S}$ . Man kann also auch hier die Pflasterungen der nichtprimitiven Spezies  $\mathbf{S}'$  auf Pflasterungen primitiver Spezies zurückführen.

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass jede nichtprimitive Spezies in eine der drei Gruppen fällt; ferner, dass sich jede Spezies der Art **NP.1** und **NP.3** auf andere Spezies zurückführen lässt. Dazu benutzen wir Begriffe und Methoden aus [SE]. Dort werden nichtnegative Matrizen klassifiziert, um Aussagen der Perron–Frobenius–Theorie über nichtnegative primitive Matrizen auf eine größere Klasse von nichtnegativen Matrizen auszudehnen. SENETAS Vorgehen wird in den folgenden zwei Unterabschnitten 2. und 3. geschildert und an unsere Zwecke angepasst.

## 2. Der Inflationsgraph und die Klassifikation der Knoten

Eine Inflationsmatrix  $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  definiert einen gerichteten Graphen  $G = G_{\text{infl}} =$

$(V, E)$  durch folgende Zuordnung:  $V := \{1, \dots, m\}$  ist die Knotenmenge und  $E = \{(i, j) \mid a_{ji} > 0\}$  die Kantenmenge. (Achtung: In [SE] wird abweichend von der hier gegebenen Definition eine Kante von  $i$  nach  $j$  gezogen, wenn  $a_{ij} > 0$ . In unserem Rahmen bedeutet eine Kante  $(i, j)$ , dass  $T_j \sqsubseteq \text{infl}(T_i)$ ; also  $a_{ji} > 0$ . Die Aussagen aus [SE] bleiben aber unverändert gültig.) Im folgenden Absatz wird SENETAS Klassifikation der Knoten des Graphen beschrieben. Die von ihm eingeführten Begriffe wie 'essential class', 'self-communicating' etc. haben jeweils eine naheliegende deutsche Übersetzung, von der hier Gebrauch gemacht wird.

Wir schreiben  $i \rightarrow j$  (und sagen:  $i$  führt zu  $j$ ), falls es in  $G$  einen Weg von  $i$  nach  $j$  gibt, also eine Sequenz von Kanten  $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{\ell-1}, i_\ell), (i_\ell, j)$ . (Genau dann gilt:  $T_j \sqsubseteq \text{infl}^\ell(T_i)$  oder auch: In  $M_{\text{infl}}^\ell$  ist der Eintrag an der Stelle  $(j, i)$  ungleich 0.) Offenbar ist  $\rightarrow$  transitiv:  $i \rightarrow j \wedge j \rightarrow k \Rightarrow i \rightarrow k$ .

Gibt es zu  $i, j$  keine solche Kantensequenz, so schreiben wir  $i \not\rightarrow j$ .

Gilt  $i \rightarrow j$  und  $j \rightarrow i$ , so schreiben wir  $i \leftrightarrow j$  und sagen, dass  $i$  und  $j$  *kommunizieren*.

Die Knoten in  $G$  werden dann wie folgt klassifiziert:

1. Falls es zu  $i \in V$  ein  $j$  gibt mit  $i \rightarrow j$  und  $j \not\rightarrow i$ , dann heißt  $i$  *unwesentlich*.
2. Anderenfalls heißt  $i$  *wesentlich*. Wenn also  $i$  wesentlich ist, folgt aus  $i \rightarrow j$  sofort  $i \leftrightarrow j$ ; und es existiert mindestens ein solches  $j$  (evtl.  $i$  selbst)
3. Daher können alle wesentlichen Knoten in *wesentliche Klassen* eingeteilt werden: Alle Knoten einer wesentlichen Klasse kommunizieren untereinander, und kein Knoten einer solchen Klasse führt zu einem Knoten außerhalb dieser Klasse.
4. Alle unwesentlichen Knoten, die mit anderen kommunizieren, können in *unwesentliche Klassen* eingeteilt werden: Alle Knoten einer unwesentlichen Klasse kommunizieren untereinander, und sie kommunizieren mit keinem Knoten außerhalb dieser Klasse.  
Die in 3. und 4. beschriebenen Klassen heißen *selbstkommunizierende Klassen*.
5. Weitere unwesentliche Knoten, die mit keinem anderen Knoten kommunizieren, bilden *unwesentliche Klassen*, die nur aus einem einzigen Knoten bestehen.
6. Die Relation  $\rightarrow$  setzt sich auf natürliche Weise auf die Klassen fort:  $I \rightarrow J$ , falls ein Knoten aus  $I$  zu einem Knoten aus  $J$  führt.

Dass mit dieser Klassifikation alle Knoten erfasst werden, ist offensichtlich. Den einzig weiteren denkbaren Fall, nämlich ein Knoten, der zu keinem anderen Knoten führt, können wir hier ausschließen: Weil nur Inflationsmatrizen behandelt werden, führt jeder Knoten zu mindestens einem anderen, denn  $\text{infl}(T)$  enthält für jedes  $T$  mindestens einen Stein. An dieser Stelle erhalten wir schon die Aussage:



### 3. Kanonische Form der Inflationsmatrix

Jetzt bildet man mit Hilfe der Einteilung der Knoten von  $G_{\text{infl}}$  die *kanonische Form* der Inflationsmatrix. Das geschieht durch Ummummerierung der Knoten bzw. der Mustersteine nach folgenden Regeln: (Die Spezies verändert sich durch diese Ummummerierung nicht)

- Wähle eine wesentliche Klasse aus und weise ihren Mitgliedern der Reihe nach die niedrigsten verbliebenen Nummern zu. (Beim ersten Mal also 1,...) Wiederhole das solange, bis alle wesentlichen Klassen erfasst sind.
- Wähle eine unwesentliche Klasse aus und weise ihren Mitgliedern die niedrigsten verbliebenen Nummern zu; solange, bis alle Knoten erfasst sind. Das geschehe in der Weise, dass eine unwesentliche Klasse nicht zu einer mit höheren Nummern führt. Jede Klasse führt nur zu Klassen mit niedrigeren Nummern.

Die letztgenannte Situation lässt sich aufgrund der Halbordnungsstruktur auf den Klassen stets realisieren. Durch diese Ummummerierung der Knoten in  $V$  (bzw. der Steine in  $\mathcal{F}$ ) erhält man die *kanonische Form* der Inflationsmatrix:

$$M_{\text{infl}} = \left( \begin{array}{ccc|c} A_1 & 0 & 0 & C \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & A_k \\ \hline 0 & \dots & 0 & B \end{array} \right)$$

Die  $A_\kappa$  sind dabei quadratische Untermatrizen und gehören jeweils zu einer der wesentlichen Klassen. Die Matrizen  $B$  und  $C$  sind vorhanden, falls es in  $G$  unwesentliche Klassen gibt.  $C$  besteht dann nicht ausschließlich aus Nullen.  $B$  hat dann die folgende Form:

$$B = \left( \begin{array}{ccc} B_1 & & D \\ 0 & B_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 & B_\ell \end{array} \right)$$

Die  $B_\lambda$  sind dabei ebenfalls quadratische Untermatrizen und gehören jeweils zu einer der unwesentlichen Klassen. Oberhalb der  $B_\lambda$  stehen nicht nur Nullen.  $C$  und  $D$  zusammen haben mindestens  $\ell$  Einträge ungleich 0. (Man beachte:  $D$  ist natürlich keine wirkliche Teilmatrix, sondern einfach die Gesamtheit der Einträge oberhalb der  $B_\lambda$ .)

Die *Periode*  $d(i)$  eines Knotens  $i$  ist definiert als der größte gemeinsame Teiler aller Längen von Wegen  $(i, j), \dots, (k, i)$ ; also von Kreisen, die  $i$  enthalten. (Die Länge eines Weges ist die Anzahl seiner Kanten.) Gibt es keinen solchen Weg, hat der Knoten keine Periode. Gibt es in  $G$  eine Kante  $(i, i)$ , so ist  $d(i) = 1$ .

Man kann schnell zeigen, dass alle Knoten einer selbstkommunizierenden Klasse dieselbe Periode haben (Lemma 1.2 in [SE]). Der Begriff Periode überträgt sich so in

natürlicher Weise auf Klassen. (Nichtselbstkommunizierende Klassen bestehen aus nur einem Knoten ohne Periode.)

#### 4. Beschreibung der Nichtprimitivität

Bildet man nun anhand einer Inflationsspezies  $\mathbf{S}$  den Graphen  $G = G_{\text{infl}}$  und die kanonische Form der Inflationmatrix, so kann man an diesen ablesen, ob die zugehörige Inflationsspezies primitiv ist oder auf welche Art sie nichtprimitiv ist:

- (a)  $G$  ist nicht schwach zusammenhängend (i.e., es existieren  $i, j$  mit  $i \not\leftrightarrow j$  und  $j \not\leftrightarrow i$ )  $\Leftrightarrow \mathbf{S}$  hat die Eigenschaft **NP.1**.
- (b)  $G$  ist schwach zusammenhängend und es gibt unwesentliche Klassen ( $B$  ist also vorhanden)  $\Leftrightarrow \mathbf{S}$  hat die Eigenschaft **NP.2**.
- (c)  $G$  ist schwach zusammenhängend, es gibt keine unwesentlichen Klassen ( $B$  verschwindet also) und die einzige wesentliche Klasse hat die Periode  $d > 1$   $\Leftrightarrow \mathbf{S}$  hat die Eigenschaft **NP.3**.
- (d)  $G$  ist schwach zusammenhängend, es gibt keine unwesentlichen Klassen und die einzige wesentliche Klasse hat die Periode  $d = 1$   $\Leftrightarrow \mathbf{S}$  ist primitiv.

**Beweis:** Die vier Fälle links der Äquivalenzzeichen decken alle Möglichkeiten ab, das ist offensichtlich. (In (c) und (d) kann es tatsächlich nur eine wesentliche Klasse geben, denn: Gäbe es mehrere wesentliche Klassen und keine unwesentlichen, so wäre der Graph nicht schwach zusammenhängend.)

zu (a): Ist  $G$  nicht schwach zusammenhängend, so gibt es eine Klasse  $I$  mit  $I \not\leftrightarrow J$  und  $J \not\leftrightarrow I$  für alle anderen Klassen  $J$ . Durch Ummummerierung erhält man  $I = \{1, \dots, i\}$ . Die Matrix hat dann die in **NP.1** geforderte Gestalt. Umgekehrt liest man aus dieser Gestalt sofort die Existenz einer solcher Klasse  $I$  ab.

zu (b): Ist  $G$  nicht schwach zusammenhängend, so ist **NP.1** nicht erfüllt. Ist zudem  $B$  vorhanden, so hat die kanonische Form die in **NP.2** geforderte Gestalt.

Wird umgekehrt **NP.2** vorausgesetzt, so gilt **NP.1** nicht.  $G$  ist also schwach zusammenhängend. Weil **NP.1** nicht gilt und aufgrund der in **NP.2** geforderten Gestalt der Matrix ist  $B$  in der kanonischen Form vorhanden; es gibt also unwesentliche Klassen. In diesen liegen genau die entbehrlichen Steine.

zu (c): Gibt es keine unwesentlichen Klassen, also keine entbehrlichen Steine, so gilt **NP.2** nicht. Sei  $d > 1$  die Periode der einzigen wesentlichen Klasse. Für alle Knoten  $i, j$  in dieser Klasse gibt es Wege von  $i$  nach  $j$ .

Betrachte den Knoten 1. Jeder Weg von 1 nach 1 hat Länge  $kd$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Die weiteren von 1 aus in  $kd$  Schritten erreichbaren Knoten — falls es solche gibt — erhalten nun die Nummern  $2, \dots, \ell_1$ . Nun gilt: Jeder Weg von  $i$  nach  $j$  für  $1 \leq i, j \leq \ell_1$  hat die Länge  $kd$  für irgendein  $k \in \mathbb{N}$ . Denn:

1.: Angenommen es gibt einen Weg von  $j$  nach 1 ( $1 \leq j \leq \ell_1$ ), dessen Länge  $a$  kein

Vielfaches von  $d$  ist. Dann gibt es einen Weg von 1 über  $j$  zurück nach 1, dessen Länge  $kd + a$  kein Vielfaches von  $d$  ist. Das ist ein Widerspruch zu 'd ist Periode von 1'. Also hat jeder Weg von  $j$  nach 1 Länge  $kd$ .

2.: Gäbe es nun einen Weg von  $i$  nach  $j$  ( $1 \leq i, j \leq \ell_1$ ), dessen Länge  $b$  kein Vielfaches von  $d$  ist, so gäbe es auch einen Weg von 1 über  $i$  nach  $j$  und zurück nach 1, dessen Länge  $kd + b$  kein Vielfaches von  $d$  ist. Auch das ist ein Widerspruch zu 'd ist Periode von 1'.

Betrachte nun alle Knoten, die von 1 aus durch Wege der Länge  $kd + 1, kd + 2, \dots, kd + (d-1)$  erreicht werden können, und nummeriere diese entsprechend mit  $\ell_1 + 1, \dots, \ell_2; \ell_2 + 1, \dots, \ell_3; \dots; \ell_{d-1} + 1, \dots, \ell_d$ . Seien  $M_i := \{\ell_i + 1, \dots, \ell_{i+1}\}$  ( $0 \leq i \leq d-1; \ell_0 := 0$ ) die durch diese Einteilung entstandenen Klassen. Jeder Weg von  $M_i$  nach 1 hat Länge  $kd - i$ . (Ansonsten ergibt sich ähnlich wie oben: Hat ein solcher Weg von  $j$  nach 1 für  $j \in M_i$  die Länge  $a \neq kd - i$ , so gibt es einen Weg von 1 über  $j$  zurück nach 1, der kein Vielfaches von  $d$  ist. Widerspruch zu 'd ist Periode von 1'.) Weiter hat jeder Weg von  $M_i$  nach  $M_i$  Länge  $kd$ . Für die Inflation heißt das: In  $\text{infl}(T_1), \dots, \text{infl}(T_{\ell_1})$  kommen nur Steine vom Typ  $T_{\ell_1+1}, \dots, T_{\ell_2}$  vor, in  $\text{infl}(T_{\ell_1+1}), \dots, \text{infl}(T_{\ell_2})$  kommen nur Steine vom Typ  $T_{\ell_2+1}, \dots, T_{\ell_3}$  vor usw. bis: In  $\text{infl}(T_{\ell_{d-1}+1}), \dots, \text{infl}(T_{\ell_d})$  kommen nur Steine vom Typ  $T_1, \dots, T_{\ell_1}$  vor. Also gilt **NP.3**.

Wird umgekehrt **NP.3** vorausgesetzt, so gilt **NP.2** nicht, es gibt also keine entbehrlichen Steine. Nach Punkt 2. gibt es daher im Graphen  $G$  keine unwesentlichen Klassen. Außerdem gilt **NP.1** nicht, also ist  $G$  — nach Punkt 1. — schwach zusammenhängend. Es gibt also eine einzige wesentliche Klasse. Aus der Definition lässt sich auch ablesen: Es existiert ein  $k > 1$ , so dass für jedes  $T_i \in \mathcal{F}$  ein Stein vom Typ  $T_i$  ausschließlich in  $\text{infl}^{nk}(T_i)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) auftaucht. Jeder Weg von  $i$  nach  $i$  hat also Länge  $nk$ , daher ist die Periode  $d$  der einzigen wesentlichen Klasse ein Vielfaches von  $k$ , also auch  $d > 1$ . (Da in **NP.3** vorausgesetzt wird, dass keine weitere Verfeinerung möglich ist, gilt sogar  $k = d$ .)

zu (d): Besteht  $G$  aus einer einzigen wesentlichen Klasse mit Periode 1, so ist die Inflationsmatrix primitiv (die Spezies also primitiv) und umgekehrt. Das ist Theorem 1.4 aus [SE]: 'An irreducible acyclic matrix  $T$  is primitive and conversely.' (*irreducible* heißt, der Graph besteht aus nur einer wesentlichen Klasse, *acyclic* heißt, deren Periode ist 1.)  $\square$

##### 5. Reduktion auf eine Art der Nichtprimitivität

Wie man sich an Hand der Beispiele in Abbildung 7 (S. 27) und den hier getroffenen Überlegungen klarmachen kann, lassen sich Inflationsspezies mit der Eigenschaft **NP.1** als Vereinigung von kleineren Spezies darstellen. Es gilt noch allgemeiner:

**Satz 2.8** 1. Jede Inflationsspezies ist Vereinigung von Spezies, die entweder primitiv sind oder die die Eigenschaft **NP.2** aufweisen.

2. Jede Spezies besitzt eine primitive Teilspezies.

Für den Beweis brauchen wir zunächst folgenden Satz:

**Satz 2.9** *Für jede Inflationsspezies und jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}^k) = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$ .*

**Beweis:** "⊆"  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}^k) \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  gilt trivialerweise: Jeder Superstein  $\ell$ -ter Ordnung von  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}^k)$  ist Superstein  $k\ell$ -ter Ordnung von  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  (s. Punkt 5 in Def. 2.5).

"⊇" Sei  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$ , weiter  $k \in \mathbb{N}$ . Es ist zu zeigen:

$$\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \exists T_i \in \mathcal{F}, r' \in \mathbb{N} : \mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^{r'k}(T_i) \quad (3)$$

Wir unterteilen die Mustersteine in 2 Klassen: *U-Steine* (für 'unsichtbare Steine') und *S-Steine* (für 'sichtbare Steine'). U-Steine sind solche, für deren Knoten  $i$  in  $G_{\text{infl}}$  gilt: Für die Längen aller Wege in  $G_{\text{infl}}$  mit Endpunkt  $i$  existiert eine obere Schranke. Das ist genau dann der Fall, wenn  $i$  nicht in einer selbstkommunizierenden Klasse liegt (anderenfalls gäbe es Wege von  $i$  nach  $i$  beliebig hoher Länge) und für alle  $j$  mit  $j \rightarrow i$  dasselbe gilt. Alle anderen Steine sind S-Steine.

*Beispiele:* Der Knoten ganz links in Abb. 8 ist der einzige Knoten in  $G_{\text{infl}}$ , der zu einem U-Stein gehört. Auch der sternförmige Stein in Abb. 7b) ist ein U-Stein.

U-Steine tauchen in Inflationspflasterungen nicht auf.

Denn: Ist  $T$  ein U-Stein, so existiert  $k \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k' \geq k$ ,  $T_i \in \mathcal{F}$  gilt:  $\text{infl}^{k'}(T_i)$  enthält keinen Stein vom Typ  $T$ . Angenommen,  $T$  taucht in einer Pflasterung  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  auf. Dann findet man einen beliebig großen Cluster  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$  mit  $T \sqsubseteq \mathcal{C}$ . Man kann  $\mathcal{C}$  so groß wählen, dass er mehr Steine enthält als alle Supersteine  $\text{infl}^k(T_i)$ ,  $T_i \in \mathcal{F}$ . Dann gilt:  $\mathcal{C} \not\sqsubseteq \text{infl}^\ell(T_i)$ ,  $\ell \leq k$ . Aufgrund von Def. 2.5 Punkt 5 kommt aber  $\mathcal{C}$  in einem größeren Superstein  $\text{infl}^{k'}(T_i)$ ,  $k' > k$  vor. Damit liegt auch  $T$  in diesem größeren Superstein. Widerspruch.

Aus dem gleichen Grund tauchen auch keine Supersteine  $k$ -ter Ordnung ( $k \in \mathbb{N}$ ) von U-Steinen in der Pflasterung auf. Ansonsten enthielte nämlich jedes  $\mathcal{Q} \in \mathbf{S}$  mit  $\text{infl}^k(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$  einen U-Stein. Das ist nach dem eben Festgestellten unmöglich. Ein Pseudosuperstein  $\mathcal{C}_U \cong \text{infl}^k(T_U)$  ( $T_U$  U-Stein) kann allerdings in der Pflasterung vorkommen.

Sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$  ein beliebiger Cluster einer beliebigen Pflasterung  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$ . Nun gilt:

$$\forall \mathcal{C} \in \mathcal{P} \exists T_i \in \mathcal{F}, \ell \in \mathbb{N} : \mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^\ell(T_i) \quad (4)$$

(s. Def. 2.5, Punkt 5).

Fall 1: Mindestens einer der  $T_i$  ist S-Stein. Dann gibt es Wege beliebiger Länge mit Endpunkt  $i$ .

Sei  $s := \ell \bmod k$ ,  $r := (\ell - s)/k$ , also  $\ell = rk + s$ . Wähle  $j$  so, dass ein Weg der Länge  $k - s$  von  $j$  nach  $i$  existiert. Dann gilt  $T_i \sqsubseteq \text{infl}^{k-s}(T_j)$ . Es folgt:

$$\mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^\ell(T_i) = \text{infl}^{rk+s}(T_i) = \text{infl}^{rk}(\text{infl}^s(T_i)) \sqsubseteq \text{infl}^{rk}(\text{infl}^s(\text{infl}^{k-s}(T_j))) = \text{infl}^{(r+1)k}(T_j)$$

Mit  $r' = r + 1$  also:  $\mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^{r'k}(T_j)$ . Daher gilt (3).

Fall 2: All die  $T_i$  aus (4) sind U–Steine. D.h.: Der Cluster  $\mathcal{C}$  taucht nur in Inflationen von U–Steinen auf, also in Supersteinen  $k$ –ter Ordnung von U–Steinen. (Solche tauchen in den Pflasterungen nicht als echte Supersteine auf, sondern nur als Pseudosupersteine.) Also taucht  $\mathcal{C}$  in keinem echten Superstein auf.

Betrachte  $\text{tr}(\mathcal{C}) = \{x \mid x \in T, T \in \mathcal{C}\}$ . In keiner Deflation  $\mathcal{P}_n := \text{deff}^n(\mathcal{P})$  von  $\mathcal{P}$  ist  $\eta^{-n} \text{tr}(\mathcal{C})$  Teilmenge eines einzelnen Steins  $T$ . (Ansonsten wäre  $\mathcal{C} \subseteq \text{infl}^n(T)$ , und  $T$  ist ein S–Stein.) Weiter hat jeder Cluster  $\mathcal{C}_n$  in  $\mathcal{P}_n$  mit  $\eta^{-n} \text{tr}(\mathcal{C}) \subseteq \text{tr}(\mathcal{C}_n)$  dieselbe Eigenschaft wie  $\mathcal{C}$ : Er liegt in keinem Superstein, aber er liegt in allen  $\mathcal{P}_n$  in Pseudosupersteinen von U–Steinen. (Läge  $\mathcal{C}_n$  in einem Superstein  $\text{infl}^k(T)$ , so wäre  $\mathcal{C} \subseteq \text{infl}^{k+n}(T)$ .) Sei  $c \in \mathbb{N}$  das kleinste  $c$  mit  $\mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^c(T_i)$ ,  $T_i \in \mathcal{F}$ . Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists T_i \in \mathcal{F} : T_i \text{ ist U–Stein und } \mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^{c+n}(T_i)$$

Wähle  $n$  so, dass  $c + n \equiv 0 \pmod{k}$ . Dann ist  $\mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^{c+n}(T_i) = \text{infl}^{rk}(T_i)$ , und (3) ist bewiesen.  $\square$

Bevor wir Satz 2.8 beweisen, stellen wir fest: Führt man die Überlegungen aus Fall 2 des obigen Beweises weiter, so liefern sie ein Kriterium dafür, ob eine Inflationspflasterung (schwach) repetitiv ist oder nicht. Dazu brauchen wir zunächst ein geometrisches Argument. (Das genannte Kriterium — Satz 2.11) — wird nicht zum Beweis von Satz 2.8 benötigt.)

**Lemma 2.10** *Seien  $H_1, \dots, H_n$  affine Hyperebenen in  $\mathbb{R}^d$ . Zu jedem  $R > 0$  existiert eine Kugel  $B = x + R\mathbb{B}^d$  mit  $H_i \cap B = \emptyset$  ( $1 \leq i \leq n$ ).*

**Beweis:** Bilde zu  $H_1, \dots, H_n$  die Hyperebenen  $H'_1, \dots, H'_n$  mit  $0 \in H'_i$  und  $H'_i \parallel H_i$ . Die Schnitte dieser Hyperebenen mit der  $(d-1)$ –Sphäre, also die Mengen  $H'_i \cap \partial(\mathbb{B}^d)$ , unterteilen die Sphäre in endlich viele Gebiete. Ist  $x$  ein — bezüglich der Sphäre — innerer Punkt eines solchen Gebiets, so wächst für jedes  $i$  der Abstand zwischen  $H'_i$  und  $\lambda x$  linear mit  $\lambda$ . Der Abstand zwischen  $H'_i$  und  $H_i$  ist konstant, also wird der Abstand zwischen  $H_i$  und  $\lambda x$  beliebig groß. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.11** *Gibt es in  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  einen Cluster  $\mathcal{C}$ , der nur in Supersteinen von U–Steinen auftaucht, dann enthält  $\mathbf{S}$  eine nicht schwach repetitive Pflasterung. Die Repetitivität wird dabei zerstört von 'singulären' Clustern, die entlang endlich vieler Hyperebenen gelagert sind.*

Im Zusammenhang mit diesem Satz sei wieder auf das Beispiel in Abb. 4 und 7b hingewiesen.

Enthält  $\mathbf{S}$  eine nicht schwach repetitive Pflasterung, dann gilt selbstverständlich auch:  $\mathbf{S} \notin (\mathbf{WR})$  (und erst recht  $\mathbf{S} \notin (\mathbf{R})$ ). Umgekehrt folgt aus  $\mathbf{S} \notin (\mathbf{WR})$  nicht, dass  $\mathbf{S}$  eine

nichtrepetitive Pflasterung enthält. (Siehe dazu die Diskussion des Beispiels in Abb. 7a und Def. 2.4.)

**Beweis:** In Fall 2 im Beweis zu Satz 2.9 ( $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}_n$  bedeuten hier dasselbe wie dort) sahen wir:  $\mathcal{C}$  taucht in keinem echten Superstein auf.  $\mathcal{P}$  besteht aber aus echten Supersteinen.  $\mathcal{C}$  liegt also für jedes  $k \in \mathbb{N}$  in mehr als einem Superstein  $k$ -ter Ordnung.  $\eta^{-n} \text{tr}(\mathcal{C})$  trifft daher in  $\mathcal{P}_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Facette. Außerdem gilt: Bei den Deflationen von  $\mathcal{P}$  entstehen keine 'neuen' Facetten.

Das heißt: Ist  $F_{\mathcal{C}}$  die Vereinigung aller — endlich vielen — Facetten in  $\mathcal{C}$ , so können in den Deflationen  $\mathcal{P}_n$  bei  $\eta^{-n} \text{tr}(\mathcal{C})$  nur in den Punktmenge  $\eta^{-n} F_{\mathcal{C}}$  Facetten liegen. Bezeichnen wir die Vereinigung der Facetten, die darin wirklich vorkommen, mit  $F_n$ , so erhält man die unendliche Sequenz:

$$F_{\mathcal{C}} \supseteq \eta F_1 \supseteq \cdots \supseteq \eta^{n-1} F_{n-1} \supseteq \eta^n F_n \cdots .$$

Jede dieser Menge wird von mindestens einer Facette geschnitten, sonst wäre  $\mathcal{C}$  in einem Superstein  $n$ -ter Ordnung enthalten. Schneidet die Facette  $a_n$  in  $\mathcal{P}_n$  die Menge  $F_n$ , so ist  $\text{infl}^n(a_n)$  eine Superfacette  $n$ -ter Ordnung in  $\mathcal{P}$ , die  $F_{\mathcal{C}}$  schneidet. Da unter der Inflation aus Facetten Mengen von Facetten entstehen, kann man die  $a_n$  überdies so wählen, dass gilt: für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $a_{n-1} \in \text{infl}(a_n)$  in  $\mathcal{P}_{n-1}$  und somit  $\text{infl}^{n-1}(a_{n-1}) \subseteq \text{infl}^n(a_n)$  in  $\mathcal{P}$ .

Die Menge  $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{infl}^n(a_n)$  ist daher infinite Superfacette.

Zusammengefasst heißt das: Wenn in  $\mathbf{S}$  ein Cluster  $\mathcal{C}$  existiert, der nur in Supersteinen von  $U$ -Steinen auftaucht, so schneidet  $\mathcal{C}$  eine infinite Superfacette. Das gilt für jeden Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$ . Aufgrund von Lemma 2.6 gibt es in jedem  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  nur endlich viele infinite Superfacetten. Nach Lemma 2.10 kann man daher eine Kugel beliebiger Größe finden, die keine der infiniten Superfacetten schneidet.

Annahme:  $\mathcal{P}$  ist schwach repetitiv. Dann gibt es  $r > 0$ , so dass in  $\mathcal{P}$  in jeder Kugel vom Radius  $r$  Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$  auftauchen. Sei also  $x + r\mathbb{B}^d$  eine Kugel, die keine infinite Superfacette berührt. Sie enthält aber einen Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$  und schneidet daher eine infinite Superfacette: Widerspruch. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Man erhält sofort auch den zweiten Teil, denn die infiniten Superfacetten liegen nach Lemma 2.6 auf endlich vielen Hyperebenen.  $\square$

Nun zum Beweis von Satz 2.8:

**Beweis:** zu Teil 1: Fall 1:  $M$  ist eine Inflationsmatrix von der Gestalt aus **NP.3**. Dann hat eine Potenz  $M^k$  die Gestalt aus **NP.1**. Hat also eine Inflationsspezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  die Eigenschaft **NP.3**, so hat  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}^k)$  die Eigenschaft **NP.1**. Wegen Satz 2.9 ist  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}^k) = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$ . Daher lassen sich Spezies mit der Eigenschaft **NP.3** immer als Spezies mit der Eigenschaft **NP.1** darstellen: Sie enthalten dieselben Pflasterungen und sind als Mengen identisch. Die Inflationsfaktoren sind allerdings  $\eta$  bzw.  $\eta^k$ .

Fall 2: Hat  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  die Eigenschaft **NP.1**, so enthält die Spezies  $\mathbf{S}$  nur Pflasterungen, deren Steine jeweils genau einer der Untermatrizen  $A_1, A_2, \dots, A_k$  entsprechen:

Beschreibt  $A_1$  die Inflation der Steine in  $\mathcal{F}_1 = \{T_1, \dots, T_{i_1}\}$ ,  $A_2$  die der Steine in  $\mathcal{F}_2 = \{T_{i_1+1}, \dots, T_{i_2}\}$  usw., so gehen Steintypen aus  $\mathcal{F}_j$  unter Inflation in sich über. Daher besteht jede Pflasterung der Spezies ausschließlich aus Steinen, deren Typ in genau einem  $\mathcal{F}_j$  auftaucht.

Denn: Würden in einer Pflasterung der Spezies Steine  $T_1$  und  $T_2$  aus zwei verschiedenen Steinklassen auftauchen, so wäre Bedingung 5 aus Def. 2.5 verletzt: Jeder Clustertyp taucht in einem Superstein auf, also auch der Typ eines Clusters, der  $T_1$  und  $T_2$  enthält. Aber alle Supersteine beliebiger Ordnung bestehen hier aus Steinen derselben Steinklasse.

Die Spezies lässt sich dann als disjunkte Vereinigung von  $k$  Inflationsspezies  $\mathbf{S}_j = \mathbf{S}(\mathcal{F}_j, \text{infl}_j)$  —  $\text{infl}_j := \text{infl}$  eingeschränkt auf  $\mathcal{F}_j$  — darstellen. Diese Spezies kann man nun auch getrennt untersuchen. Keine von ihnen hat nun noch die Eigenschaft **NP.1**.

Jede Spezies mit der Eigenschaft **NP.1** ist also Vereinigung von Spezies, die diese Eigenschaft nicht mehr haben. Ebenso ist jede Spezies mit der Eigenschaft **NP.3** Vereinigung von Spezies, die Eigenschaft **NP.3** nicht mehr haben. Diese Prozesse können ineinandergeschachtelt sein — eine Teilspezies aus Fall 2 kann z.B. wieder die Eigenschaft **NP.3** haben —, nach endlich vielen Schritten gelangt man aber zu Spezies, die entweder primitiv sind oder die Eigenschaft **NP.2** haben.

zu Teil 2: Die Aussage folgt direkt aus der Klassifizierung der Nichtprimitivität und Lemma 2.7: Jeder Graph zu einer Inflationmatrix weist mindestens eine wesentliche Klasse auf. Die zu den Knoten dieser Klasse gehörenden Steine bilden eine Teilmenge  $\mathcal{F}'$  der Musterfamilie. Diese, zusammen mit der auf  $\mathcal{F}'$  eingeschränkten Inflation liefert die primitive Teilspezies.  $\square$

Satz 2.8 erlaubt eine weitere wichtige Aussage im Zusammenhang mit Selbstähnlichkeit. Selbstähnlichkeit ist eine Eigenschaft von Pflasterungen, die im engen Zusammenhang mit Inflation steht. Dieser Zusammenhang wurde aber in der Literatur bisher nicht zufriedenstellend präzisiert, obwohl er vielen Autoren durchaus bewusst sein muss. Man findet beide Begriffe in der Literatur, aber die Definitionen weichen in verschiedenen Punkten voneinander ab, sowohl die von Selbstähnlichkeit, wie auch die von Inflation. Der für diese Arbeit gewählte Rahmen erlaubt die Versöhnung der beiden Begriffe.

**Definition 2.11** *Eine Pflasterung  $\mathcal{P}$  heißt selbstähnlich (zum Faktor  $\eta$ ), wenn gilt:*

1. Für jeden Stein  $T \in \mathcal{P}$  existiert ein Cluster  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$  mit  $\eta T = \text{tr}(\mathcal{C})$ , und
2. Falls  $T_1 \cong T_2$ , so gilt für die Cluster  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  mit  $\eta(T_i) = \text{tr}(\mathcal{C}_i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ):  $\mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_2$ .

Gemeinhin betrachtet man nur selbstähnliche Pflasterungen mit endlicher Musterfamilie. Oft wird in der Definition von Selbstähnlichkeit zusätzlich lokal endliche Komplexität und Repetitivität verlangt (vgl. [SOL1]). Dadurch wird die Endlichkeit der Musterfamilie erzwungen, und ist letzteres der Fall, so liefert eine selbstähnliche Pflasterung  $\mathcal{P}$  eine Inflationsspezies, wie man sich leicht überlegt: Der Inflationfaktor ist

offensichtlich  $\eta$ , die Musterfamilie der Pflasterung  $\mathcal{P}$  ist auch die Musterfamilie der Spezies, und aus Punkt 1. der obigen Definition ergibt sich die Zerlegungsregel. Punkt 2. besagt, dass Steine vom selben Typ auf dieselbe Weise inflationiert werden. Damit folgt der zweite Teil des folgenden Satzes. Es gilt allerdings nicht immer, dass die selbstähnliche Pflasterung in der von ihr determinierten Inflationsspezies vorkommt: Die Pflasterung in Abbildung 4 (S. 19) ist selbstähnlich zum Faktor 2, wenn man den Nullpunkt in den Mittelpunkt des zentralen Sterns aus acht Rhomben legt. Die durch diese Pflasterung auf die eben geschilderte Art gewonnene Inflationsspezies enthält, wie man sich leicht überlegt, nur triviale Rhombenpflasterungen, die isomorph sind zur trivialen Quadratpflasterung  $\mathcal{W}_2$ . Sie enthält nicht die ursprüngliche Pflasterung, aus der die Spezies abgeleitet wurde.

**Satz 2.12** *Jede Inflationsspezies  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  mit Faktor  $\eta$  enthält eine zum Faktor  $\eta$  selbstähnliche Pflasterung. Jede zum Faktor  $\eta$  selbstähnliche Pflasterung mit endlicher Musterfamilie definiert eine Inflationsspezies mit Faktor  $\eta$ .*

**Beweis:** Es ist nur noch der erste Teil des Satzes zu zeigen. Nach Satz 2.8 enthält jede Spezies eine primitive Teilspezies  $\mathbf{S}'$ . Sei  $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{S}'$  und  $T \subseteq \mathcal{P}$  ein Stein, in dessen Innerem der Ursprung liegt. (Liegt der Ursprung nicht im Inneren eines Steines, so können wir  $\mathcal{P}$  um einen geringen Betrag verschieben. Auch die verschobene Pflasterung liegt in  $\mathbf{S}'$ .) Da  $\mathbf{S}'$  primitiv ist gibt es  $k \in \mathbb{N}$ , so dass in  $\text{infl}^k(\mathcal{P})$  ein Stein vom Typ  $T$  im Inneren von  $\text{infl}^k(T)$  liegt, etwa  $T + t$ . Wir verschieben  $\mathcal{P}$  — und damit indirekt auch  $\text{infl}^k(\mathcal{P})$  — nun so, dass diese beiden Steine zur Deckung kommen: Es sei  $v := 1/(1 - \eta^k)t$ . Wird  $\mathcal{P}$  um den Vektor  $v$  verschoben, so ist  $\text{infl}^k(\mathcal{P} + v)$  gegen  $\text{infl}^k(\mathcal{P})$  um  $\eta^k v$  verschoben. Die Steine  $T' = T + v$  (in  $\mathcal{P} + v$ ) und der Stein vom Typ  $T$  im Inneren von  $\text{infl}^k(T')$  (in  $\text{infl}^k(\mathcal{P} + v)$ ) — nennen wir ihn  $T''$  — liegen dann an derselben Stelle:

$$T' = T + v = T + 1/(1 - \eta^k)t = T + (1 + \eta^k/(1 - \eta^k))t = T + t + \eta^k v = T''$$

Das heißt:  $\{T'\} \subseteq \text{infl}^k(T')$ . Daraus folgt  $\text{infl}^{ik}(T') \subseteq \text{infl}^{(i+1)k}(T')$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Daher ist die Menge

$$\mathcal{P} := \{T'\} \cup \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\text{infl}^{ik}(T') \setminus \text{infl}^{(i-1)k}(T')) \right)$$

eine Pflasterung aus  $\mathbf{S}$ . Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \text{infl}^k(\mathcal{P}) &= \text{infl}^k(T') \cup \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\text{infl}^{(i+1)k}(T') \setminus \text{infl}^{ik}(T')) \right) \\ &= T' \cup (\text{infl}^k(T') \setminus \{T'\}) \cup \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\text{infl}^{(i+1)k}(T') \setminus \text{infl}^{ik}(T')) \right) = \mathcal{P} \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$  eine selbstähnliche Pflasterung. □

Der Beweis ist für die Unterscheidung bezüglich Translationsklassen formuliert. Er lässt sich aber einfach auf den Fall der Unterscheidung bezüglich Kongruenzklassen übertragen<sup>8</sup>.

## 2.5 Zusammenhänge zwischen Repetitivität, lokal endlicher Komplexität und Primitivität

Der folgende Satz findet sich schon in [DAN3], Teile davon auch in [LUP], [GK]. In dieser umfassenden Form ist er vermutlich noch nicht publiziert worden, daher geben wir ihn hier mit Beweis wieder.

**Satz 2.13** (a)  $(\mathbf{I}, \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{WR})$   
 (b)  $(\mathbf{I}, \mathbf{P}) \cap (\mathbf{LFC}) \subseteq (\mathbf{LR})$

In Worten: Jede primitive Inflationsspezies ist schwach repetitiv; und jede primitive Inflationsspezies von lokal endlicher Komplexität ist linear repetitiv.

**Beweis:** (a) Seien  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$ ,  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \in \mathbf{S}$  und  $n$  wie in Definition 2.10. ( $n$  ist also das kleinste  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $M_{\text{infl}}^n$  nur positive Einträge besitzt.)

Sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \in \mathbf{S}$  ein Cluster und  $s = \max\{\text{diam}(T) \mid T \in \mathcal{F}\}$  der maximale Durchmesser der Mustersteine. Wegen  $\mathbf{S} \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$  existieren zu  $\mathcal{C}$  geeignete  $i$  und  $N$  mit  $\mathcal{C} \sqsubseteq \text{infl}^N(T_i)$ . Für jedes  $1 \leq j \leq m$  enthält der Superstein  $\text{infl}^{N+n}(T_j)$  ein Translat des Supersteins  $\text{infl}^N(T_i)$ . In jedem Superstein  $(N+n)$ -ter Ordnung liegt also ein Translat von  $\mathcal{C}$ . Für den Durchmesser  $\text{diam}(S)$  eines solchen Supersteins  $S$  gilt:  $\text{diam}(S) \leq \eta^{N+n}s =: R$ . Dabei hängt  $R$  nur von  $\mathcal{C}$  ab. Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  liegt dann ein Superstein  $(N+n)$ -ter Ordnung ganz in  $x + R\mathbb{B}^d$ , also auch ein Translat von  $\mathcal{C}$ . Damit gilt  $\mathbf{S} \in (\mathbf{WR})$ .

(b) Es seien  $\mathbf{S} \in (\mathbf{I}, \mathbf{P}) \cap (\mathbf{LFC})$ ,  $R > 0$  und  $s$  wie in (a). Durch Skalierung kann man O.B.d.A. erreichen:  $s < \frac{1}{2}$ . In  $\mathbf{S}$  gibt es nach Lemma 2.1 nur endlich viele Typen  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_\mu$  von 1-Clustern. Jeder dieser endlich vielen Clustertypen findet sich in einem Superstein  $\text{infl}^k(T_i)$  wieder. Es sei  $K$  das Maximum all dieser  $k$ . Außerdem liegt jeder  $\frac{1}{2}$ -Cluster ganz in einem 1-Cluster  $\mathcal{C}_i$ . Damit liegt auch jeder  $\frac{1}{2}\eta^\ell$ -Cluster ganz in einem  $\eta^\ell$ -Cluster, und dieser ist wiederum Teil eines Supersteins  $\text{infl}^{K+\ell}(T_i)$ . Sei nun  $\ell \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass gilt  $\frac{1}{2}\eta^{\ell-1} \leq r+1 < \frac{1}{2}\eta^\ell$ . Dann liegt auch jeder  $r$ -Cluster ganz in einem  $\eta^\ell$ -Cluster, somit auch in einem Superstein  $\text{infl}^{K+\ell}(T_i)$ . Aufgrund der Primitivität kommt ein solcher Superstein in jedem Superstein  $\text{infl}^{K+\ell+n}(T_j)$  vor ( $n$  wie in (a)).  $K$  und  $n$  hängen hierbei nicht von  $r$  ab. Insgesamt gilt: In jedem Superstein  $\text{infl}^{K+\ell+n}(T_j)$  sind alle Typen von  $r$ -Clustern vertreten.

Setze  $R := \eta^{K+n+1}r + \eta^{K+n+1}$ . Wegen  $R = \eta^{K+n+1}(r+1) \geq \eta^{K+n+1}\frac{1}{2}\eta^{\ell-1}$  liegt in jedem  $R$ -Cluster ein Superstein  $\text{infl}^{K+\ell+n}(T_i)$  und in diesem sind alle Typen von  $r$ -Clustern

<sup>8</sup>Das ist für manche Beispiele notwendig, wie etwa für das Pinwheel-Tiling (Abb. 2, S. 14).

vertreten. Offenbar hängt  $R$  linear von  $r$  ab, also ist  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LR})$ . (Im Falle  $r > 1$  würde  $R := \eta^{K+n+1}r$  genügen. Nur für kleinere  $r$  benötigt man den zusätzlichen Summanden, vgl. Def. 2.4.)  $\square$

Es gilt außerdem:

**Korollar 2.14** (a)  $(\mathbf{I}, \mathbf{P}) \cap (\mathbf{LFC}) = (\mathbf{I}, \mathbf{P}) \cap (\mathbf{LR})$   
 (b)  $(\mathbf{I}, \mathbf{P}) \cap (\mathbf{R}) = (\mathbf{I}, \mathbf{P}) \cap (\mathbf{LR})$

In Worten: Eine primitive Inflationsspezies ist genau dann von lokal endlicher Komplexität, wenn sie linear repetitiv ist. Und: Jede repetitive primitive Inflationsspezies ist sogar linear repetitiv.

Beide Aussagen folgen unmittelbar aus dem obigen Satz zusammen mit Lemma 2.2.  $\square$

Bis zum Jahr 2000 kannte man nur wenige primitive Inflationsspezies, die nicht von lokal endlicher Komplexität sind. Diese Spezies sind in einem gewissen Sinne untypisch. Ein Beispiel in drei Dimensionen etwa — das *Pinwheelsandwich* — benutzt Schichten von Pinwheeltilings (s. Abb. 2, S. 14). Die unendlich vielen Orientierungen der Steine führen zu unendlich vielen Typen von Clustern aus zwei Steinen, die in benachbarten Schichten liegen. (Dieses Beispiel von RADIN wird erwähnt in [G-S].) In unserer Terminologie sind diese Pflasterungen, genau wie die Pinwheeltilings, keine  $\mathcal{F}$ -Pflasterungen bezüglich Translationen, denn die Steine tauchen in unendlich vielen Orientierungen auf. Insofern ist es ein 'exotisches' und kein typisches Beispiel.

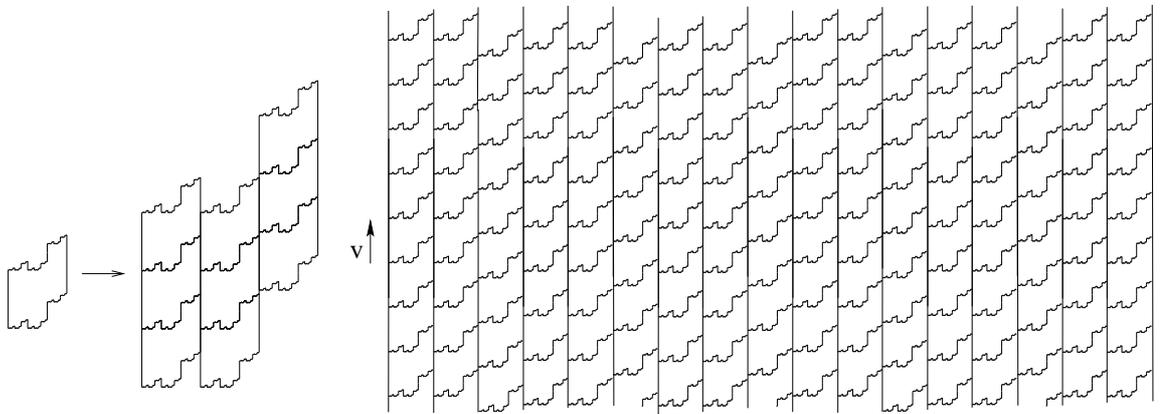


Abbildung 9: Die Inflationsregel für eine primitive Spezies  $\mathbf{S} \notin (\mathbf{LFC})$  mit Inflationsfaktor 3 sowie ein Ausschnitt aus einer Pflasterung aus  $\mathbf{S}$ .

Eine weitere primitive Inflationsspezies  $\mathbf{S}$ , die nicht in  $(\mathbf{LFC})$  liegt, ist in Abb. 9 dargestellt. Dieses Beispiel stammt von KENYON [KEN]. Die Musterfamilie besteht aus nur einem Stein. Der Rand dieses Steins besteht aus zwei gleichlangen geraden Strecken und zwei 'fraktalen' Kurven. Die Inflationsmatrix ist (9), der Inflationsfaktor 3. Unter der Inflationsvorschrift zerlegt sich der Stein in drei 'Türme' aus je drei Steinen. Der

rechte Turm ist gegenüber den beiden anderen um einen inkommensurablen Betrag  $a$  nach oben verschoben. Die Länge der geraden Seite sei 1. Dann kann  $a$  beispielsweise als  $\sqrt{2}$  gewählt werden. Die Pflasterungen in dieser Spezies sind weder nichtperiodisch noch kristallographisch: Es gibt keine zwei linear unabhängigen Periodenvektoren. Aber für die im Bild angedeutete Pflasterung  $\mathcal{P}$  und den dort dargestellten Vektor  $v$  gilt:  $\mathcal{P} = \mathcal{P} + \lambda v$ , ( $\lambda \in \mathbb{Z}$ ). Die Pflasterungen in  $\mathbf{S}$  sind somit alle 1-periodisch.

Man kann sich leicht überlegen, dass zwei nebeneinanderliegende Steine — soll heißen, zwei Steine, deren gerade Seiten teilweise aufeinanderliegen — in Richtung  $v$  um die folgenden Werte  $s_k, s'_k$  gegeneinander verschoben sein können:

Sei  $c_k = \sum_{i=0}^k 3^i = (3^{k+1} - 1)/2$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) und  $\bar{c}_k = 3^k - c_{k-1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Dann sind diese Werte  $s_k = c_k\sqrt{2} - \lfloor c_k\sqrt{2} \rfloor$  und zusätzlich auch  $s'_k = \bar{c}_k\sqrt{2} - \lfloor \bar{c}_k\sqrt{2} \rfloor$ . (Dabei bezeichnet  $\lfloor a \rfloor$  den ganzzahligen Anteil von  $a$ .)

Aufgrund der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  sind die  $s_k$  paarweise verschieden. Also gibt es unendlich viele Cluster aus zwei Steinen in  $\mathbf{S}$ . Das bedeutet:  $\mathbf{S} \notin (\mathbf{LFC})$ .

Auch dieses Beispiel ist untypisch, aus zwei Gründen: Erstens ist  $\mathbf{S}$  weder nichtperiodisch noch kristallographisch, zweitens sind die Steine weder Polytope, noch haben sie einen Rand, der nirgendwo differenzierbar ist. Letzteres ist bei den meisten der von BANDT und GELBRICH untersuchten Pflasterungen der Fall ([BAN] und die dort zitierten Arbeiten).

Bis hierher könnte man immer noch die Vermutung aufstellen:  $(\mathbf{I}, \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{LFC})$ , wenn man zusätzliche Forderungen an die Musterfamilie stellt. (Z.B.:  $\mathcal{F}$  endlich bzgl. Translation,  $\mathcal{F}$  enthält nur Polytope.) Aber auch das führt zu nichts. DANZER konnte von einer ganzen Reihe von primitiven Inflationsspezies nachweisen, dass sie nicht von lokal endlicher Komplexität sind (s. Satz 1.1, S. 9 bzw. [DAN5], oder auch Abb. 6, S. 25, etwa für  $m = 5$ ). Die von ihm untersuchten Spezies sind in vieler Hinsicht sehr typisch: Die Musterfamilie besteht aus wenigen Dreiecken, die Inflationsfaktoren sind algebraische Zahlen von niedrigem Grad (Grad 4,5,6) und in den ersten Inflationen der Mustersteine liegen alle Steine Ecke an Ecke. Trotzdem scheint es so zu sein, dass unter allen Spezies mit den letztgenannten drei Eigenschaften lokal endliche Komplexität eher selten vorkommt.

Liegen in allen Pflasterungen einer Spezies  $\mathbf{S}$  alle Steine Ecke an Ecke (nicht nur in den ersten Inflationen der Mustersteine), so hat  $\mathbf{S}$  die Eigenschaft *vertex-to-vertex* oder kurz *vtv*. Mit dieser Eigenschaft beweist man oft die lokal endliche Komplexität einer Pflasterung, denn es gilt:

**Satz 2.15** *Ist eine Spezies vtv, so ist sie von lokal endlicher Komplexität. Diese Aussage bleibt richtig, wenn man endlich viele 'künstliche' Eckpunkte hinzunimmt.*  $\square$

*Beispiel:* Die Pflasterung in Abb. 1 auf Seite 8 ist nicht *vtv*: Einige Ecken treffen auf die Mittelpunkte der langen Seiten der Steine. Erklärt man die Mittelpunkte der langen

Seiten zu künstlichen Eckpunkten, so ist die Spezies  $vtv$  und liegt somit auch in **(LFC)**.

Von vielen Spezies kann man so oder ähnlich entscheiden, dass sie in **(LFC)** liegen. Der Nachweis, dass eine Spezies nicht in **(LFC)** liegt, ist im Allgemeinen sehr viel aufwändiger. Die allgemeine Frage 'Wann liegt eine Spezies in **(LFC)**, wann nicht?' ist bisher offen. In Kapitel 3 wird diese Frage für Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor untersucht.

Nach Satz 2.8 2. besitzt jede Spezies mindestens eine primitive Teilspezies. Für den Fall, dass eine Spezies genau eine primitive Teilspezies besitzt, erhält man Folgendes:

**Lemma 2.16** *Es sei  $\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eine Spezies mit Inflationsfaktor  $\eta$  und nur einer primitiven Teilspezies. Sei weiter  $T_1 \in \mathcal{F}$  und O.B.d.A.  $\text{vol}(T_1) = 1$ . Dann gilt für alle  $T_i \in \mathcal{F}$  :  $\text{vol}(T_i) \in \mathbb{Q}(\eta^d)$ .*

**Beweis:** Betrachte zunächst die primitive Teilspezies  $\mathbf{S}'$  von  $\mathbf{S}$ . Nach Lemma 2.3 ist  $\eta^d$  Eigenwert von  $M_{\text{infl}}$  und  $v := (\text{vol}(T_1), \dots, \text{vol}(T_m))$  linker Eigenvektor zu diesem Eigenwert, also gilt  $v(M_{\text{infl}} - \eta^d I) = 0$ . Da die Spezies primitiv ist, treten in einem Superstein  $\text{infl}^k(T_1)$  alle Steintypen auf. Das Volumen eines einzigen Steins legt die Volumina der anderen Steine eindeutig fest. Daraus folgt für das zugehörige lineare Gleichungssystem  $vM_{\text{infl}} = \eta^d v$  :

$$\text{Rang}(M_{\text{infl}} - \eta^d I) = m - 1.$$

Also existiert eine nichttriviale Lösung  $x = (1, \text{vol}(T_2), \dots, \text{vol}(T_m))$  und die  $\text{vol}(T_i)$  entstehen durch Gaußsche Umformungen aus  $\text{vol}(T_1) = 1$ . Die Koeffizienten des Gleichungssystems sind dabei alle aus  $\mathbb{N} \cup \{\eta^d\}$ , die resultierenden Zahlen liegen demnach in  $\mathbb{Q}(\eta^d)$ . Für minimale Spezies ist die Aussage damit bewiesen.

Die Steine einer primitiven Teilspezies  $\mathbf{S}'$  bilden — in der Terminologie aus Abschnitt 2.4 — eine wesentliche Klasse. Umgekehrt entspricht eine wesentliche Klassen genau einer primitiven Teilspezies. Laut Voraussetzung gibt es daher in dem Inflationsgraphen zur betrachteten Spezies nur eine einzige wesentliche Klasse  $I$ . Gibt es Steine, die nicht in der primitiven Teilspezies liegen, so sind diese also Element einer unwesentlichen Klasse. Von jedem dieser Steine existiert ein Weg im Graphen zu einem Stein aus  $I$ .

Denn: Ist das nicht der Fall, dann gibt es  $T_i, T_j \in \mathcal{F}$  mit  $i \not\rightarrow j \wedge j \not\rightarrow i$ . Also zerfällt der Graph in zwei schwache Zusammenhangskomponenten. Damit hat  $\mathbf{S}$  die Eigenschaft **NP.1**.  $\mathbf{S}$  läßt sich also als Vereinigung zweier Spezies auffassen und enthält folglich zwei primitive Teilspezies, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher gilt für jedes  $T_i \in \mathcal{F}$  : Für ein geeignetes  $k \in \mathbb{N}$  liegt in  $\text{infl}^k(T_i)$  ein Stein  $T_j$  aus  $I$ . Ähnlich wie oben gilt daher: Ist das Volumen eines einzigen Steins bekannt, ergeben sich daraus die Volumina der Steine aus  $I$  eindeutig. Damit sind auch die Volumina aller Steine bekannt, in deren Inflation irgendwann ein Stein aus  $I$  auftaucht. Andere Steine gibt es in  $\mathbf{S}$  nicht, also liegt damit das Volumen aller Steine fest. Mit demselben Argument wie oben folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 2.17** *Ist  $\mathbf{S}$  primitiv und  $\eta^d \in \mathbb{N}$ , so stehen alle Steinvolumina in rationalem Verhältnis zueinander. Durch Skalierung kann man dann erreichen, dass alle Steine ein ganzzahliges Volumen haben.  $\square$*

## 2.6 Punktmengen

Hochgeordnete, nichtperiodische Pflasterungen sind *ein* Modell zur Beschreibung von nichtkristallographischen Festkörpern. Eine andere Möglichkeit zur Modellbildung bieten *Delonemengen*.

**Definition 2.12** *Delonemengen oder  $(r,R)$ -Mengen sind Punktmengen  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ , für die gilt: Es gibt positive Konstanten  $r$  und  $R$ , so dass jede Kugel vom Radius  $r$  höchstens einen Punkt aus  $D$  enthält und jede Kugel vom Radius  $R$  mindestens einen.*

Beide Modelle haben Vor- und Nachteile. Delonemengen sind einfacher durch *Cut-and-Project-Schemata* zu beschreiben, wie später deutlich wird; Pflasterungen dagegen sind besser an die Inflationsmethode angepasst. Glücklicherweise jedoch lassen sich die meisten Begriffe und Aussagen, die sich auf Pflasterungen beziehen, auf Delonemengen übertragen und umgekehrt. So kann man etwa aus einer  $\mathcal{F}$ -Pflasterung auf einfache Weise eine Delonemenge gewinnen: Dekoriere jeden Stein aus  $\mathcal{F}$  mit einem Punkt, der in seinem Inneren liegt. Übertrage diese Dekoration auf die Pflasterung. (D.h.: Ist  $x \in \text{int}(T_i)$  die Dekoration von  $T_i \in \mathcal{F}$ , so wird jeder Stein  $T_i + t \in \mathcal{P}$  — bzw.  $\varphi(T)$  — an der Stelle  $t + x$  — bzw.  $\varphi(x)$  — dekoriert.) Dann liefern die Punkte einer jeden solchen  $\mathcal{F}$ -Pflasterung eine Delonemenge  $D$ .

Um aus  $D$  die Pflasterung  $\mathcal{P}$  zurückzugewinnen, kann es sinnvoll sein, verschiedene Typen von Punkten zu unterscheiden. Versieht man etwa die Punkte mit einem zusätzlichen Attribut (durch Färbung, Nummerierung etc.), so erhält man eine Einteilung der Punkte aus  $D$  in verschiedene Klassen. Ein geeigneter Begriff zur Beschreibung von solchen 'gefärbten' Punktmengen ist die *Delone-Multimenge* (engl. *Delone-multiset*, vgl. [LMS]).

**Definition 2.13**  $V = V_1 \times \cdots \times V_m \subseteq \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d$  heißt Delone-Multimenge, wenn  $V_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$   $V_i$  eine Delonemenge ist und  $\bigcup_{i=1}^m V_i$  eine Delonemenge ist. Wir schreiben auch  $V = (V_1, \dots, V_m)$ .

Offenbar ist eine Delone-Multimenge eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d$ . Trotzdem ist es für unsere Zwecke angemessen, sich eine Delone-Multimenge als ein Objekt vorzustellen, das im  $\mathbb{R}^d$  lebt, wobei die einzelnen Elemente — die Punkte — mit einem Attribut versehen sind, also etwa mit einer Farbe oder einer Nummer.

Laut Definition ist nicht ausgeschlossen, dass  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  für  $i \neq j$ . Übertragen auf die eben geschilderte Sichtweise — 'gefärbte Punktmengen' — hieße das: Ein Punkt

kann mehrere Farben haben. Solche Fälle werden wir aber hier nicht betrachten; im Folgenden gilt immer: Ist  $V = (V_1, \dots, V_m)$ , so ist  $V_i \cap V_j = \emptyset$ .

**Bezeichnung:** Ein Element einer  $\mathcal{F}$ -Pflasterung, also ein Stein  $T + t$  (bzw.  $\varphi(T)$ ), wird beschrieben durch die Angabe des Mustersteines  $T$  und eines Translationsvektors  $t$  (bzw. einer Isometrie  $\varphi$ ). Übertragen auf Punkte ist eine solche Notation — etwa  $v_1 + t$ ,  $v_1$  der 'Musterpunkt',  $t$  der Translationsvektor — nicht günstig. Ein endlicher Ausschnitt aus einer Delone-Multimenge schreibt sich mit Definition 2.13 einfacher folgendermaßen:

$$(\{t_1^{(1)}, \dots, t_k^{(1)}\}, \{t_1^{(2)}, \dots, t_\ell^{(2)}\}, \dots, \{t_1^{(m)}, \dots, t_s^{(m)}\}).$$

Zur Darstellung von Punktmengen ist das gut geeignet, zur Beschreibung einzelner Punkte weniger gut: Anstelle von  $T_2 + t$  hieße es  $(\emptyset, \{t\}, \emptyset, \dots, \emptyset)$ . Stattdessen benutzen wir für einzelne Punkte alternativ die Bezeichnung  $(t, i)$ . Der erste Eintrag  $t \in \mathbb{R}^d$  bezeichnet die Position des Punktes, die zweite Eintrag  $i \in \{1, \dots, m\}$  den Typ. Es ist also  $(\emptyset, \{t\}, \emptyset, \dots, \emptyset) = (t, 2)$ .

Bezüglich einer Delone-Multimenge  $V = (V_1, \dots, V_m)$  ist ein Cluster  $C$  definiert als  $m$ -Tupel endlicher Teilmengen der  $V_i$ , also  $C = (C_1, \dots, C_m)$  mit  $C_i \subseteq V_i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $C_i$  endlich). Formal ist ein Cluster im Zusammenhang mit Delone-Multimengen — als Tupel von Punktmengen — also etwas anderes als ein Cluster im Zusammenhang mit Pflasterungen — eine Menge von Steinen. Beide beschreiben aber endliche Ausschnitte aus der jeweils betrachteten Struktur. Wir werden beide Objekte als Cluster bezeichnen und den Unterschied dadurch hervorheben, dass wir Cluster bezüglich Pflasterungen mit kalligraphischen Buchstaben bezeichnen ( $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$ ) und Cluster bezüglich Delone-Multimengen mit lateinischen Großbuchstaben ( $C, D, \dots$ ).

Ein  $r$ -Cluster um  $x$  ist die Menge  $(C_1, \dots, C_m)$  mit  $C_i = V_i \cap (x + r\mathbb{B}^d)$ . Die Begriffe Inflation, Periodizität, lokal endliche Komplexität, Repetitivität und Primitivität übertragen sich damit direkt auf Punktmengen. Zur Definition der lokal endlichen Komplexität nutzt man dazu die Beschreibung in Lemma 2.1. Zur Definition der Inflation für Punktmengen gilt Definition 2.5 unter Berücksichtigung der folgenden Änderungen: Als Musterfamilie hat man nun eine Punktmenge  $(\{t_1\}, \dots, \{t_m\})$ . Den Steinmengen

$$\{T_1 + t_1^{(1)}, \dots, T_1 + t_k^{(1)}, T_2 + t_1^{(2)}, \dots, T_2 + t_\ell^{(2)}, \dots, T_m + t_1^{(m)}, \dots, T_m + t_s^{(m)}\}$$

entsprechen  $m$ -Tupel von Punktmengen

$$(\{t_1^{(1)}, \dots, t_k^{(1)}\}, \{t_1^{(2)}, \dots, t_\ell^{(2)}\}, \dots, \{t_1^{(m)}, \dots, t_s^{(m)}\}). \quad (5)$$

Der Typ (die Farbe, die Nummer etc.) der jeweiligen Punkte ist durch die Zugehörigkeit zum  $i$ -ten Eintrag des Tupels beschrieben.

Die Definition von Inflation ändert sich nicht, bis auf Punkt 1.(c) von Definition 2.5. Dieser wird abgeschwächt zu:

1.(c)  $Q$  ist eine Menge  $\{C_1, \dots, C_m\}$  von  $\mathcal{F}$ -Clustern.

Alle anderen Definitionen für Pflasterungen gelten unverändert für Delone–Multimengen. Für Delone–Multimengen, die aus einer Inflation gewonnen wurden, kann man daher auch von Inflationsmatrix und Supersteinen sprechen. 'Superstein' ist allerdings kein sinnvoller Begriff im Zusammenhang mit Punktmengen, daher reden wir in diesem Fall von *Superelementen*.

Die Begriffe Steinvolumen, Superkante oder Superfacette haben im Bezug auf Punktmengen keine sinnvolle Bedeutung. Die Sätze, in denen diese vorkommen, lassen sich nicht auf Punktmengen übertragen. Alle anderen Sätze dieses Kapitels gelten auch für Punktmengen, insbesondere die Sätze 1.1, 2.4, 2.5, 2.8, 2.9, 2.12, 2.13 und die Lemmata 2.2 und 2.3 (ohne die Aussage über die Volumina).

In der Beschreibung der Konstruktion einer (gefärbten) Delonemenge aus einer Pflasterung am Anfang dieses Abschnitts wurde schon implizit der Begriff der 'lokalen Ableitbarkeit' benutzt (s. [BSJ],[SCH1]). Die präzise Formulierung ist die folgende:

**Definition 2.14** *Es seien  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  zwei Pflasterungen in  $\mathbb{R}^d$ , oder zwei Delone–Multimengen in  $\mathbb{R}^d$ , oder auch eine Pflasterung und eine Delone–Multimenge. Wir nennen  $\mathcal{Q}$  lokal ableitbar (zum Radius  $r$ ) aus  $\mathcal{P}$ , wenn für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gilt:*

$$\mathcal{C}_r(x, \mathcal{P}) = \mathcal{C}_r(y, \mathcal{P}) + (x - y) \Rightarrow \mathcal{C}_0(x, \mathcal{Q}) = \mathcal{C}_0(y, \mathcal{Q}) + (x - y)$$

*Ist  $\mathcal{P}$  lokal ableitbar aus  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{Q}$  lokal ableitbar aus  $\mathcal{P}$ , so heißen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  gegenseitig lokal ableitbar.*

Sind also in  $\mathcal{P}$  die  $r$ –Cluster um  $x$  und um  $y$  vom selben Typ, und sind sie genau um  $x - y$  gegeneinander verschoben, so stimmen in  $\mathcal{Q}$  die Typen der 0–Cluster um  $x$  und um  $y$  überein.

Tatsächlich bildet die Beziehung gegenseitig lokal ableitbar zu sein eine Äquivalenzrelation. Insbesondere ist sie also transitiv (s. [BSJ]).

Geschieht die eingangs dieses Abschnitts geschilderte Ersetzung der Steine einer  $\mathcal{F}$ –Pflasterung  $\mathcal{P}$  durch Punkte derart, dass alle Steine vom Typ  $T_i$ , also alle Steine der Gestalt  $T_i + t$ , durch Punkte  $(t, i)$  ersetzt werden, so ist die so gewonnene 'Multimenge'  $V = (\{(t, 1) \mid T_1 + t \in \mathcal{P}\}, \dots, \{(t, m) \mid T_m + t \in \mathcal{P}\})$  aus der Pflasterung  $\mathcal{P}$  lokal ableitbar. Auch lässt sich  $\mathcal{P}$  auf eindeutige lokale Weise aus  $V$  zurückgewinnen — jeder Punkt  $(t, i) \in V$  wird durch den Stein  $T_i + t$  ersetzt —, also sind  $\mathcal{P}$  und  $V$  gegenseitig lokal ableitbar. (Man überlegt sich schnell, dass bei dieser Konstruktion  $\mathcal{P}$  und  $V$  gegenseitig lokal ableitbar zum Radius 0 sind.) Wenn  $\mathcal{P}$  schwach repetitiv ist, so gibt es ein  $R > 0$ , so dass in jeder Kugel vom Radius  $R$  mindestens ein Stein eines jeden Typs liegt. Dann ist  $V$  tatsächlich eine Delone–Multimenge. Es folgt:

**Lemma 2.18** *Zu jeder schwach repetitiven  $\mathcal{F}$ –Pflasterung  $\mathcal{P}$  existiert eine Delone–Multimenge  $V$ , so dass  $\mathcal{P}$  und  $V$  gegenseitig lokal ableitbar sind.*

Man beachte, dass wir hierbei von einer gegebenen Pflasterung ausgehen. In umgekehrter Richtung gilt nur: Zu jeder Delone–Multimenge  $V$  existiert eine Pflasterung  $\mathcal{P}$ , so dass  $V$  und  $\mathcal{P}$  gegenseitig lokal ableitbar sind.  $\mathcal{P}$  hat dann im Allgemeinen keine endliche Musterfamilie, ist also keine  $\mathcal{F}$ –Pflasterung.

Die obige Konstruktion lässt sich auch an den Fall der Unterscheidung bezüglich Kongruenzklassen anpassen. Bei der Übertragung auf ganze Spezies ergeben sich jedoch Probleme. In den folgenden Kapiteln benötigen wir die Definitionen und Aussagen dieses Abschnitts nur für den Fall der Unterscheidung bezüglich Translationsklassen, daher beschränken wir uns hier auf diese.

Es sollte klar sein, dass gegenseitig lokal ableitbare Strukturen viele Eigenschaften miteinander teilen. Unter anderem wird das klar, wenn man sich mit einem der am meisten bemühten Beispiele für gegenseitig lokale Ableitbarkeit beschäftigt: Den Penrosepflasterungen, einmal in der Form mit Rhomben als Mustersteinen, daneben mit Dreiecken oder mit jenen Vierecken, die als 'dart' und 'kite' bezeichnet werden (s. [GS]). Tatsächlich gelten die folgenden Aussagen:

**Satz 2.19** (SCHLOTTMANN,F.) *Sind  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  gegenseitig lokal ableitbar und hat  $\mathcal{P}$  eine der folgenden Eigenschaften, so hat auch  $\mathcal{Q}$  diese Eigenschaft.*

1. Schwache Repetitivität
2. Repetitivität
3. lineare Repetitivität
4.  $d$ –Periodizität
5. lokal endliche Komplexität

**Beweis:** Die Punkte 2. und 4. sind [SCH1] entnommen. Der darin geführte Beweis zu Punkt 2. überträgt sich unmittelbar auf die Punkte 1. und 3. (Bei letzterem muss man beachten, dass der Radius  $r$  aus Definition 2.14 konstant ist. Die lineare Abhängigkeit zwischen den Radien aus Definition 2.4 bleibt somit erhalten.)

Zu 5.: Sei  $\mathcal{Q}$  eine Pflasterung und  $\mathcal{P}$  von lokal endlicher Komplexität. Nach Lemma 2.1 (falls  $\mathcal{P}$  eine Pflasterung ist, ansonsten auf Grund der Definition von lokal endlicher Komplexität für Delone–Multimengen) gibt es in  $\mathcal{P}$  nur endlich viele Typen von  $r$ –Clustern. Daher gibt es in  $\mathcal{Q}$  nur endlich viele Typen von 0–Clustern. Jeder 2–Stein–Cluster  $\{A, B\}$  in  $\mathcal{Q}$  ist ein 0–Cluster  $\mathcal{C}_0(x, \mathcal{Q})$  für ein  $x \in \text{tr}(A) \cap \text{tr}(B)$ . Somit gibt es in  $\mathcal{Q}$  nur endlich viele 2–Stein–Cluster,  $\mathcal{Q}$  ist also nach Definition 2.3 von lokal endlicher Komplexität.

Ist  $\mathcal{Q}$  eine Delone–Multimenge, so betrachten wir eine zu ihr gegenseitig lokal ableitbare Pflasterung  $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}}$ . Sind  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{P}$  gegenseitig lokal ableitbar, so auch  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}}$ . Ist  $\mathcal{P}$  von lokal endlicher Komplexität, so auch  $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}}$  und nach dem ersten Teil des Beweises auch  $\mathcal{Q}$ .  $\square$

### 3 Pflasterungen mit ganzzahligem Inflationsfaktor

In diesem und dem nächsten Kapitel werden alle Objekte — Steine, Cluster, Pflasterungen etc. — anders als im letzten Kapitel ausschließlich bezüglich ihrer Translationsklasse unterschieden. Ausserdem werden im Folgenden nur noch Inflationspezies mit ganzzahligem Faktor betrachtet. Nach Satz 2.9 fallen darunter auch solche, deren Faktor von der Form  $n^{1/k}$  ( $n, k \in \mathbb{N}$ ) ist. Man geht dann einfach zur  $k$ -fach iterierten Inflation über, die Spezies bleiben gleich.

Gibt es auch Spezies mit einem rationalen, aber nicht ganzzahligen Inflationsfaktor? Man kann sich schnell überlegen, dass das unmöglich ist:

Gegeben sei eine Inflationspezies mit rationalem Inflationsfaktor  $p$ . Dann ist  $p^d$  Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $\chi$  der Inflationsmatrix;  $\chi$  zerfällt also über  $\mathbb{Q}[x]$ . Die Inflationsmatrix hat ganzzahlige nichtnegative Einträge, daher ist  $\chi \in \mathbb{Z}[x]$ . Aus allgemeinen Aussagen der Algebra folgt, dass  $\chi$  dann auch über  $\mathbb{Z}[x]$  zerfällt. (z.B. [VDW], S.95: Ist  $\mathcal{S}$  ein Integritätsbereich und  $\Sigma$  der Quotientenkörper von  $\mathcal{S}$ , so gilt: Ist ein Polynom  $F$  aus  $\mathcal{S}[x]$  zerlegbar in  $\Sigma[x]$ , so ist es schon in  $\mathcal{S}[x]$  zerlegbar.) Daher ist  $p^d \in \mathbb{Z}$ , und weil  $p$  rational ist, ist auch  $p \in \mathbb{Z}$ . Ein Inflationsfaktor ist generell größer als 1. Insgesamt erhält man so die folgende Aussage:

**Lemma 3.1** *Ist der Inflationsfaktor  $p$  einer Spezies rational, so ist  $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .  $\square$*

Alle Inflationspezies lassen sich also erfassen, indem man alle Spezies betrachtet, deren Inflationsfaktor entweder eine natürliche Zahl ungleich 1 ist; oder eine irrationale algebraische Zahl, deren Potenzen auch alle irrational sind. Im Folgenden werden wir für die erstgenannten Spezies die Zusammenhänge zwischen den zentralen Eigenschaften — vor allem Primitivität, lokal endlicher Komplexität und Repetitivität — untersuchen, die über die im letzten Kapitel getroffenen (für allgemeine Inflationspezies gültigen) Aussagen hinausgehen. Weiterhin werden wir auf eine weitere Eigenschaft, die nur im Falle ganzzahliger Inflationsfaktoren auftreten kann, intensiv eingehen; eine 'Gittereigenschaft'. Dabei wird sich zeigen, dass die entscheidende Eigenschaft die lokal endliche Komplexität ist: Ist sie gesichert, so folgen fast alle weiteren Eigenschaften direkt.

#### 3.1 Lokal endliche Komplexität

Wir sahen schon, dass aus  $\mathbf{S} \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$  nicht folgt  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$  (s. Satz 1.1, S. 9 und KENYONS Pflasterungen, Abb 9, S. 40). In DANZERS Arbeit sind die Inflationsfaktoren (und all ihre Potenzen) keine natürlichen Zahlen, in KENYONS Arbeit sind die Steine keine Polytope.

In diesem Abschnitt werden möglichst umfassende Bedingungen angegeben, die unter der Voraussetzung, dass alle Steine Polytope sind und die Spezies einen ganzzahligen Inflationsfaktor haben, lokal endliche Komplexität garantieren.

Eine eindimensionale  $\mathcal{F}$ -Pflasterung ist immer von lokal endlicher Komplexität. Die folgenden Aussagen beziehen sich daher alle auf die Fälle  $d \geq 2$ .

**Vermutung 3.1** Sei  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$  mit Inflationsfaktor  $p \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{F}$  bestehe aus Polytopen. Dann ist  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{LFC})$ .

'Polytop' ist hier gemäß Definition 2.8 zu verstehen.

**Definition 3.1** Die Steine in einer Pflasterung  $\mathcal{P}$  seien Polytope. Zwei Facetten  $a$  und  $b$  zweier Steine  $A$  und  $B$  liegen direkt nebeneinander, wenn gilt:

1.  $a \cup b$  ist Teilmenge einer Hyperebene  $H$ ,
2.  $a \cap b$  ist  $(d - 2)$ -dimensional und
3. die zugehörigen Steine liegen auf derselben Seite von  $H$ .

Zwei Facetten  $a$  und  $b$  liegen nebeneinander, wenn es eine Sequenz  $S$  paarweise direkt nebeneinander liegender Steine gibt, die  $a$  und  $b$  verbindet, also:

$$S := \{a =: a_0, a_1, \dots, a_n := b\} \text{ mit } a_{i-1} \text{ und } a_i \text{ liegen direkt nebeneinander } (1 \leq i \leq n)$$

Zwei Facetten  $a$  und  $b$  liegen gegenüber, wenn gilt:

1.  $a \cap b$  ist  $(d - 1)$ -dimensionale Teilmenge einer Hyperebene  $H$ ,
2. die zugehörigen Steine liegen auf verschiedenen Seiten von  $H$ .

Zunächst benötigen wir die folgenden Sätze 3.2 und 3.3. (Die Aussagen gelten für beliebige Dimension, nicht nur für  $d = 2$ .) Dabei bezeichnet  $\text{vol}(A)$  das relative Volumen von  $A$ . Ist  $A$  ein  $n$ -dimensionales Polytop, so ist  $\text{vol}(A)$  sein  $n$ -dimensionales Volumen, unabhängig, ob  $A$  im jeweiligen Kontext als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  aufgefasst wird oder als Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > n$ . Weiterhin heißen zwei Zahlen  $a, b$  *kommensurabel*, wenn gilt:  $a/b \in \mathbb{Q}$ .

**Satz 3.2** Die Steine in einer Spezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$  seien Polytope. Haben je zwei direkt nebeneinanderliegende Facetten in  $\mathbf{S}$  kommensurables Volumen, so haben auch je zwei gegenüberliegende Facetten in  $\mathbf{S}$  kommensurables Volumen.

**Beweis:** Sei  $\mathcal{C} = \{A, B\} \subseteq \mathcal{P}$  ein 2-Stein-Cluster. Dann ist  $A \cap B$  Vereinigung des Schnittes von Facetten  $a_i \subseteq A$  und  $b_i \subseteq B$ , also  $A \cap B = \bigcup a_i \cap b_i$ . (Im konvexen Falle ist  $A \cap B$  einfach der Schnitt zweier Facetten  $a \subseteq A$  und  $b \subseteq B$ .) Jedes  $a_i \cap b_i$  ist ein  $(d - 1)$ -dimensionales Polytop. Betrachten wir diese Schnitte — und bezeichnen die beteiligten Facetten einfach mit  $a$  und  $b$  — so ist entweder  $a = a \cap b = b$ , dann sind

die Volumina gleich und somit kommensurabel. Oder es ist  $a \neq b$ , es 'ragt etwas über'. An den überragenden Stücken  $a \setminus b, b \setminus a$  liegen nun weitere Steine, somit auch weitere Facetten in der von  $a$  (oder  $b$ ) aufgespannten Hyperebene.

'(Direkt) neben  $a$  liegend' heiße im Folgenden eine Facette, wenn sie und  $a$  (direkt) nebeneinanderliegen. Laut Voraussetzung haben alle direkt neben  $a$  liegenden Facetten ein zu  $\text{vol}(a)$  kommensurables Volumen. Das gilt offensichtlich dann auch für alle neben  $a$  liegenden Facetten.

*Annahme:*  $\text{vol}(a)/\text{vol}(b) \notin \mathbb{Q}$ . Die neben  $a$  liegenden Facetten haben nach Voraussetzung zu  $\text{vol}(a)$  kommensurable Volumina. Die neben  $b$  liegenden Steine haben entsprechend zu  $\text{vol}(b)$  kommensurable Volumina.

*Behauptung 1:* Zu  $a$  und  $b$  existieren keine Mengen  $\{a_i\}_{i \in I}, \{b_j\}_{j \in J}$  mit:

- $I$  endlich
- $J$  endlich
- $a \cup \left(\bigcup_{i \in I} a_i\right) = b \cup \left(\bigcup_{j \in J} b_j\right)$

(Anschaulich: Egal, wie lange man von  $a$  und  $b$  aus auf beiden Seiten der Hyperebene weiterbaut, immer ragt auf einer Seite etwas über.)

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es  $\{a_i\}_{i \in I}, \{b_j\}_{j \in J}$  mit endlichem  $I$ , endlichem  $J$  und:

$$\text{vol}\left(a \cup \left(\bigcup_{i \in I} a_i\right)\right) = \text{vol}\left(b \cup \left(\bigcup_{j \in J} b_j\right)\right)$$

Die linke Seite ist kommensurabel zu  $\text{vol}(a)$ , die rechte zu  $\text{vol}(b)$ . Daraus folgt weiter:

$$\exists r, s \in \mathbb{Q} : r \text{vol}(a) = s \text{vol}(b), \text{ also}$$

$$\frac{\text{vol}(a)}{\text{vol}(b)} = \frac{s}{r} \in \mathbb{Q}$$

Widerspruch, also ist die obige Behauptung wahr.

Jeder Cluster vom Typ  $\mathcal{C} = \{A, B\}$  forciert also eine Sequenz  $S = \{a_i\}_{i \in I}$  von unendlich vielen nebeneinanderliegenden Facetten. Diese liegen alle in einer Hyperebene, und weil die Volumina aller Facetten durch eine positive Zahl nach unten beschränkt sind, hat  $\bigcup_{i \in I} a_i$  kein endliches Volumen.

*Behauptung 2:*  $S$  liegt auf einer infiniten Superfacette. Genauer: Es existiert eine infinite Superfacette  $K$ , so dass der Schnitt  $\text{tr}(S) \cap \text{tr}(K)$   $(d - 1)$ -dimensional ist.

Nehmen wir an, dass sei nicht der Fall. Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $S$  teilweise in jeder Deflation  $\mathcal{Q}_n$  mit  $\text{infl}^n(\mathcal{Q}_n) = \mathcal{P}$  'verschwindet', d.h. es gibt ein  $n$ , so dass  $\eta^{-n} \text{tr}(S)$  in jeder Deflation  $\mathcal{Q}_n$  nicht mehr von Facetten überdeckt wird. Also teilt  $\eta^{-n} \text{tr}(S)$  einen Stein  $T \in \mathcal{Q}_n$  in zwei Halfen; und zwar genauso, wie der entsprechende Superstein von  $\text{infl}^n(T)$  in  $\mathcal{P}$  von Facetten aus  $S$  zerteilt wird.

Sei zunächst  $T$  konvex: Dann ergibt sich sofort ein Widerspruch zu Behauptung 1: In  $\text{infl}^n(T)$  liegen dann auf den beiden Seiten von  $\text{tr}(S)$  die Vereinigungen der Facetten genau deckungsgleich. Genauer: Sind  $a_i \in S$  die Facetten, die zu Steinen auf der Seite von  $S$  liegen, auf der  $A$  liegt (sagen wir, 'rechts' von  $S$ ) und  $b_j \in S$  die Facetten, die zu Steinen auf der anderen Seite gehören ('links' von  $S$ ), dann ist

$$\bigcup_{\text{tr}(a_i) \in \text{infl}^n(T)} a_i = \bigcup_{\text{tr}(b_j) \in \text{infl}^n(T)} b_j$$

Ist  $T$  nicht konvex, wird er aber von  $\eta^{-n} \text{tr}(S)$  so zerteilt wie eben (also so, dass die oberen und unteren Schnittflächen identisch sind), ergibt sich auf dieselbe Weise ein Widerspruch.

$\eta^{-n} \text{tr}(S)$  wird also in jeder Deflation von Facetten überdeckt. Wie im Beweis zu Satz 2.11 erhalten wir so eine Sequenz von Facetten  $c_n \in \mathcal{Q}_n$  mit  $\text{tr}(c_n) \cap \eta^{-n} \text{tr}(S) \neq \emptyset$  und  $c_n \in \text{infl}(c_{n+1})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\{\text{infl}^n(c_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  infinite Superfacette in  $\mathcal{P}$  ist.

In diesen Fällen liegt die Sequenz  $S$  in einer Hyperebene, die von einer unendlichen Superfacette  $K$  in  $\mathcal{P}$  aufgespannt wird, und  $\text{tr}(S)$  hat mit  $\text{tr}(K)$  einen  $(d-1)$ -dimensionalen Schnitt. Das Argument gilt für alle Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$ : Jeder bewirkt eine solche Sequenz und somit eine solche infinite Superfacette.

Nun nutzen wir die Primitivität von  $\mathbf{S}$ : Wegen Satz 2.13 sind die Pflasterungen in  $\mathbf{S}$  schwach repetitiv. Zu  $\mathcal{C}$  gibt es also ein  $R > 0$ , so dass in jeder Kugel vom Radius  $R$  ein Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$  liegt. Es gibt also unendlich viele Cluster diesen Typs in der Pflasterung (und zwar gleichmäßig dicht; nicht nur entlang endlich vieler Hyperebenen, wie man sich an Hand von Lemma 2.10 klarmacht) und jeder bewirkt eine infinite Superfacette. Daher gibt es in  $\mathcal{P}$  unendlich viele infinite Superfacetten. Das ist ein Widerspruch zu Lemma 2.6. Daher kann es — in den betrachteten Fällen — keinen solchen Cluster  $\mathcal{C}$  geben. Die obige Annahme ist also falsch, und für Pflasterungen aus konvexen Steinen ist das Lemma bewiesen.

Nehmen wir jetzt an,  $T$  wird von  $\eta^{-n} \text{tr}(S)$  so zerteilt, dass die Hälften nicht genau aufeinanderpassen. Dann ist  $\text{infl}^n(T) = A_1 \cup \dots \cup A_k \cup B_1 \cup \dots \cup B_\ell$ , wobei die  $A_i$  rechts von  $S$  liegen und die  $B_i$  links. Wir modifizieren nun die Inflationsregel folgendermaßen: Ersetze  $T$  durch all die Steine  $A'_1 := \eta^{-n} A_1, \dots, A'_k := \eta^{-n} A_k, B'_1 := \eta^{-n} B_1, \dots, B'_\ell := \eta^{-n} B_\ell$  und setze  $\text{infl}'(A'_i) = \text{infl}(T) \cap \eta A'_i$  bzw.  $\text{infl}'(B'_i) = \text{infl}(T) \cap \eta B'_i$ . Überall, wo vorher ein Stein vom Typ  $T$  lag, liegen nun welche der Typen  $A'_i$  und  $B'_i$ . Es ist leicht einzusehen, dass die alten und die neuen Spezies gegenseitig lokal ableitbar sind: Wo in den alten Pflasterungen ein Stein vom Typ  $T$  liegt, wird er durch die Steine der Typen  $A'_i$  und  $B'_i$  ersetzt. Wo in der neuen Pflasterung Steine der Typen  $A'_1, \dots, A'_k, B'_1, \dots, B'_\ell$  liegen, werden sie durch einen Stein vom Typ  $T$  ersetzt. (Da die  $A'_i, B'_i$  wirklich neue Typen darstellen, die in der alten Pflasterung nicht vorkommen, sind sie eindeutig dem  $T$  zuzuordnen. Das lässt sich nötigenfalls durch Färbung erreichen.)

Da die Steine Polytope sind, gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, sie so zu zerteilen, dass die Schnittflächen rechts von  $S$  und links von  $S$  nicht identisch sind. Zu jeder

einzelnen betrachteten Sequenz  $S$  konstruieren wir daher nur endlich viele Teilungen auf die beschriebene Weise. Die Musterfamilie der lokal abgeleiteten Pflasterung bleibt auf jeden Fall endlich.

Wann immer die Situation auftaucht, dass in  $\mathcal{Q}_n$  ein  $T$  von  $\eta^{-n} \text{tr}(S)$  zerteilt wird, können wir eine Pflasterung  $\mathcal{P}'$  angeben, die zu  $\mathcal{P}$  gegenseitig lokal ableitbar ist und in der  $S$  bei einer unendlichen Superfacette liegt. Ist  $\mathcal{P}$  schwach repetitiv, so auch  $\mathcal{P}'$ . Also bewirkt der dem Cluster  $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$  entsprechende Cluster  $\mathcal{C}' \in \mathcal{P}'$  eine unendliche Superfacette in  $\mathcal{P}'$ . Das Argument gilt auch für alle anderen Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$ . Genau wie oben erhalten wir: In  $\mathcal{P}'$  gibt es unendlich viele unendliche Superfacetten. Das ist ein Widerspruch zu Lemma 2.6. Die letzte Annahme war daher falsch; somit gibt es keinen Stein  $T \in \mathcal{P}$ , der von  $\eta^{-n}S$  in irgendeiner Deflation zerteilt wird.

Daher liegen auf  $\eta^{-n}S$  in allen Deflationen von  $\mathcal{P}$  Facetten. Also bewirkt  $S$  wie oben eine unendliche Superfacette. Damit ist Behauptung 2 bewiesen. Aber wieder gilt: Da  $\mathcal{P}$  repetitiv ist und jeder der unendlich vielen Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$  eine unendliche Superfacette erzwingt, gibt es in  $\mathcal{P}$  unendlich viele unendliche Superfacetten, im Widerspruch zu Lemma 2.6. Also kann ein solches  $\mathcal{C}$  nicht existieren. Daher ist auch in diesem Fall die erste Annahme falsch und der Satz ist bewiesen.  $\square$

Die Argumentation benutzt hier die 'überragenden Stücke', also die Zusammenhangskomponenten von  $a \setminus b$  und  $b \setminus a$ . Nennen wir diese im Folgenden *Überstände*. Aus dem obigen Beweis folgt sofort, dass — unter den Voraussetzungen des Satzes — auch die Volumina eines jeden Überstandes zweier Facetten  $a$  und  $b$  kommensurabel zu den Volumina von  $a$  und  $b$  sein müssen. Ansonsten käme man auf die gleiche Weise zu einem Widerspruch: Egal, wie lange man von diesem Überstand aus weiterbaut, immer entstehen neue Überstände. Das liefert eine unendliche Superfacette, und die schwache Repetitivität bedingt dann unendlich viele unendliche Superfacetten, was unmöglich ist. Es gilt sogar noch stärker:

**Satz 3.3** *Die Steine in einer Spezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$  seien Polytope. Haben alle direkt nebeneinanderliegenden Facetten in  $\mathbf{S}$  kommensurables Volumen, so nehmen die Volumina der Überstände nur endlich viele Werte an.*

**Beweis:** Zu einer gegebenen Orientierung der Facetten sind nach Satz 3.2 die Volumina eines jeden Paares gegenüberliegender Facetten, die diese Orientierung aufweisen, kommensurabel. Da die Musterfamilie  $\mathcal{F}$  endlich ist, nehmen die Volumina dieser Facetten nur endlich viele Werte an, sagen wir, O.B.d.A.  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$ . Sie lassen sich also durch Skalierung sogar alle ganzzahlig machen:  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $Na_1, \dots, Na_k \in \mathbb{N}$ . Alle ganzzahligen Linearkombinationen dieser Werte sind somit wieder ganzzahlig, also

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^d : \sum_{i=1}^k \alpha_i Na_i \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^d : \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i = \ell/N \quad (\ell \in \mathbb{N})$$

Hat ein Überstand also ein Volumen ungleich  $\ell/N$  (für irgendein  $\ell \in \mathbb{N}$ ), so ist es keine Linearkombination der Volumina der beteiligten Facetten. Weiteres Anbauen an diesem Überstand führt somit wie oben immer zu neuen Überständen mit Volumen, deren Wert nicht die Gestalt  $\ell/N$  hat, und somit letztlich auch zu einer infiniten Superfacette. Genau wie im letzten Beweis führt das zum Widerspruch.

Alle Überstände haben also Volumenwerte der Form  $\ell/N$  für ein  $\ell \in \mathbb{N}$ . Diese Werte sind aber durch den Wert  $a$  des Volumens der größten Facette beschränkt. Es kommen daher nur endlich viele Werte  $1/N, 2/N, \dots, Na/N$  in Frage.

Damit ist die Behauptung für eine Orientierung gezeigt. Da es nur endlich viele Mustersteine gibt, gibt es auch nur endlich viele Orientierungen der Facetten.  $\square$

Die beiden letzten Sätze bilden wichtige Werkzeuge zum Nachweis lokal endlicher Komplexität im ebenen Fall. Im Folgenden geben wir zwei Kriterien, die mittels dieser Sätze für primitive 2–dimensionale Spezies mit ganzzahligem Inflationsfaktor und polytopaler Musterfamilie die Frage nach der lokal endlichen Komplexität beantworten.

Die obigen Beweise sind bewusst so formuliert, dass sie für beliebige Dimension gelten. Später werden wir nämlich einen Ansatz vorstellen, die Aussagen auf höhere Dimensionen zu übertragen.

**Satz 3.4** *Die Steine in einer 2–dimensionalen Spezies  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$  seien Polygone. Haben alle parallelen Facetten der Steine aus  $\mathcal{F}$  kommensurables Volumen, so ist  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$ .*

**Beweis:** Da alle parallelen Facetten kommensurables Volumen haben, ist die Voraussetzung aus Satz 3.3 erfüllt. Daher haben die Volumina aller Überstände nur endlich viele Werte. Die Überstände sind hier Geradenstücke, also gibt es für die Form der Überstände auch nur endlich viele Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es aufgrund der Endlichkeit der Musterfamilie nur endlich viele Möglichkeiten, wie zwei Facetten sich gegenüberliegen können — wie also zwei Steine sich berühren können—, ohne dass ein Überstand entsteht. (Die Steine liegen dann 'Facette–an–Facette'.)

Da die Anzahl der Formen der Überstände begrenzt ist, gibt es auch nur endlich viele Möglichkeiten, wie zwei Steine sich berühren können, so dass ein Überstand entsteht (so dass also die Steine nicht 'Facette–an–Facette' liegen). Insgesamt gibt es also nur endlich viele Möglichkeiten, wie zwei Steine aneinanderliegen können. Es gibt daher in der Spezies  $\mathbf{S}$  nur endlich viele Typen von 2–Stein–Clustern, also ist  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$ .  $\square$

Man kann mittels der Sätze 3.2 und 3.3 noch weitere Kriterien für lokal endliche Komplexität formulieren. Bei den bekannten Beispielen von Inflationsspezies mit ganzzahli-

gem Faktor ist es jedoch eigentlich immer der Fall, dass jeweils alle parallelen Facetten der Steine der Musterfamilie kommensurables Volumen haben. Der letzte Satz zeigt daher schon für alle dem Autor bekannten Beispiele die lokal endliche Komplexität. Der folgende Satz ist daher — bislang — höchstens von theoretischem Interesse. Er benutzt die folgende Tatsache:

Eine Inflation zu einer Musterfamilie  $\mathcal{F}$ , die aus  $d$ -dimensionalen Polytopen besteht, liefert gleichzeitig eine Inflation für die Facetten, also für  $(d-1)$ -dimensionale Polytope. Das ist offensichtlich: Unter Inflation wird aus einer Facette  $F$  eine Menge von Facetten, deren Träger gleich  $\eta F$  ist. Jede  $d$ -dimensionale Inflationsspezies — wobei  $\mathcal{F}$  aus Polytopen besteht — liefert also gleichzeitig eine  $(d-1)$ -dimensionale Inflationsspezies zum selben Inflationsfaktor.

Dabei können aus Facetten einer bestimmten Orientierung selbstverständlich nur Facetten derselben Orientierung entstehen. Die neue Spezies ist also nichtprimitiv von der Art **NP.1**. Selbst wenn man die Facetten alle auf geeignete Weise in den  $\mathbb{R}^{d-1}$  einbettet, ist die neue Spezies im Allgemeinen nichtprimitiv. Sie ist allerdings nach Satz 2.8 Vereinigung von Teilspezies, die entweder primitiv sind oder die Eigenschaft **NP.2** aufweisen.

Wir verlangen daher für den folgenden Satz nur: Die gesamte  $(d-1)$ -dimensionale Spezies soll aus Teilspezies — die nun entweder primitiv sind oder Eigenschaft **NP.2** haben — bestehen, die jeweils genau eine primitive Teilspezies enthalten. (Nach Satz 2.8 2. enthält jede Spezies mindestens eine primitive Teilspezies.)

**Satz 3.5** *Die Steine in einer 2-dimensionalen Spezies  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$  seien Polytope. Gilt:*

1. *Alle Teilspezies der durch  $\mathbf{S}$  erzeugten 1-dimensionalen Spezies enthalten genau eine primitive Teilspezies, und*
2. *alle parallelen Facetten, die im Inneren von Supersteinen erster Ordnung auftauchen, haben kommensurables Volumen,*

so ist  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$ .

**Beweis:** Nach Lemma 2.16 bestehen die Musterfamilien der Teilspezies der durch  $\mathbf{S}$  erzeugten 1-dimensionalen Spezies  $\mathbf{S}'$  jeweils aus Steinen — hier also Kanten — mit untereinander kommensurabilem Volumen. (Dies gilt nur für die Teilspezies, die Musterfamilie von  $\mathbf{S}'$  kann durchaus Steine mit nichtkommensurabilem Volumen enthalten.)

Wir zeigen nun, dass unter den Voraussetzungen dieses Satzes die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt sind.

Angenommen, es gibt in  $\mathbf{S}$  zwei nebeneinanderliegende Facetten  $a$  und  $b$  mit nichtkommensurabilem Volumen.  $\{a, b\}$  ist nicht Teil einer Superfacette (auch keiner Pseu-

dosuperfacette), denn dann liegen  $a$  und  $b$  in derselben Teilspezies und ihre Volumina wären kommensurabel.

Sie liegen auch nicht beide jeweils im Inneren eines Supersteines erster Ordnung, sonst ist Punkt 2. der Voraussetzungen verletzt.

Liegt O.B.d.A.  $a$  auf einer Superfacette  $S$ ,  $b$  im Inneren eines Supersteines erster Ordnung, so gibt es zwei Möglichkeiten: In der Deflation — oder den Deflationen, falls die Pflasterung periodisch ist und somit keine eindeutige Deflation existiert — der entsprechenden Pflasterung liegt die Facette  $\text{defl}^k(S)$  im Inneren eines Supersteines erster Ordnung. Dann ist das Volumen der Facette  $\text{defl}^k(S)$  kommensurabel zum Volumen von  $b$ .  $a$  ist aber Teil der Inflation von  $\text{defl}^k(S)$ , liegt also in derselben Spezies. Daher ist auch das Volumen von  $a$  kommensurabel zu dem von  $b$ . Auch dieser Fall kann also nicht eintreten.

Damit muss aber nun für alle  $k \in \mathbb{N}$  in der  $k$ . Deflation — oder den  $k$ . Deflationen — der Pflasterung  $\eta^{-k}a$  auf einer Superfacette liegen. Also liegt  $\eta^{-k}a$  auf einer infiniten Superfacette. Von diesen gibt es nach Satz 2.6 nur endlich viele. Da  $\mathbf{S}$  primitiv ist, ist  $\mathbf{S}$  schwach repetitiv. Der Cluster  $\{a, b\}$  muss daher auch an anderen Stellen — außerhalb einer infiniten Superfacette — auftauchen. Wir können daher diesen letzten Fall auf einen der vorigen zurückführen. All diese haben wir schon zum Widerspruch geführt. Somit ist die Annahme falsch und in  $\mathbf{S}$  haben je zwei nebeneinanderliegende Facetten kommensurables Volumen. Nach Satz 3.2 haben dann auch je zwei gegenüberliegende Facetten kommensurables Volumen. Nach Satz 3.3 nehmen die Volumina aller Überstände in  $\mathbf{S}$  daher nur endlich viele Werte an. Also folgt, da  $\mathbf{S}$  zweidimensional ist, wie im letzten Satz:  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$ .  $\square$

Die einzige Stelle, an der in den Beweisen zu den Sätzen 3.4 und 3.5 die Einschränkung auf Dimension 2 benutzt wird, ist das letzte Argument: 'Endlich viele Überstände bedingen endlich viele Typen von 2-Stein-Clustern.' Daraus entsteht auf natürliche Weise das folgende Problem:

**Vermutung 3.2** *Gegeben sei ein  $d$ -dimensionales konvexes Polytop  $P$  mit ganzzahligem Volumen, eine Liste  $L = \{n_1, \dots, n_k\} \subseteq \mathbb{N}$  und eine Liste  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  von Vektoren. Dann gibt es nur endlich viele Möglichkeiten,  $P$  in konvexe Polytope  $P_1, \dots, P_\ell$  zu zerlegen, so dass jede vorkommende Facette einen Normalenvektor aus  $V$  hat und jedes  $P_i$  als Volumen einen Wert aus  $L$ .*

Ein Beispiel hierzu ist in Abbildung 10 gezeigt.

Für  $d = 1$  ist diese Aussage trivialerweise wahr; diese Tatsache haben wir in den letzten beiden Beweisen benutzt.

In obiger Form ist das Problem kontextfrei formuliert, ohne Bezugnahme auf den hier interessanten Rahmen, nämlich Pflasterungen. Als solches ist es von allgemeinem Interesse im Bereich der Geometrie konvexer Polytope.

Falls die Aussage, so wie sie oben formuliert ist, falsch ist, können wir aus unserem

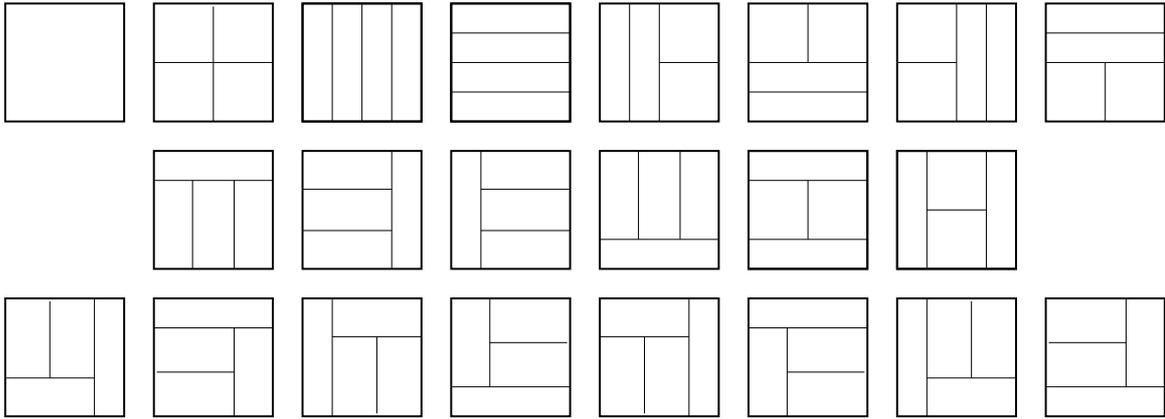


Abbildung 10: Ein Beispiel zu Vermutung 3.2:  $P$  ein Quadrat mit Seitenlänge 2,  $L := \{1, 4\}$ ,  $V := \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ . Es gibt 22 Möglichkeiten,  $P$  unter den gegebenen Bedingungen zu zerteilen.

speziellen Rahmen stärkere Bedingungen ableiten, unter denen sie eventuell wahr ist. Das sind im Wesentlichen:

- Zusätzlich ist eine Liste von Polytopen gegeben:  $S := \{S_1, \dots, S_r\}$ . Die  $P_i$ , die ganz im Inneren von  $P$  liegen, müssen Translate eines  $S_i \in S$  sein. Oder
- Zusätzlich ist eine Liste von Polytopen gegeben:  $S := \{S_1, \dots, S_r\}$ . Die  $P_i$ , die mit dem Rand von  $P$   $(d - 2)$ -dimensionalen Schnitt haben, müssen Translate eines  $S_i \in S$  sein. Oder
- Zusätzlich ist eine Liste von Polytopen gegeben:  $S := \{S_1, \dots, S_r\}$ . Alle  $k$ -Seiten der  $P_i$  ( $1 \leq k \leq d$ ) die mit dem Rand von  $P$   $(d - 2)$ -dimensionalen Schnitt haben, müssen Translate einer  $k$ -Seite aus  $S$  sein. (Das ist eine Verschärfung der vorigen Bedingung.)

Jede dieser Bedingung ist eine Verschärfung der vorherigen. Alle drei folgen daraus, dass es nur endlich viele Mustersteine in der Pflasterung gibt. Die Möglichkeiten, wie die zerlegenden Polytope aussehen, werden dadurch stark eingeschränkt. Trotzdem könnte der Beweis der Aussage extrem schwierig werden, und es ist nicht klar, ob sie für höhere Dimensionen gilt, nur für Dimension 2 oder überhaupt nicht [SCHU].

Falls es jedoch gelingt, die Aussage für eine Dimension  $d \geq 2$  zu zeigen, so gelten als direkte Folge daraus alle in diesem Abschnitt getroffenen Aussagen über ebene Spezies auch für  $(d + 1)$ -dimensionale Spezies. Daher wurden die Sätze 3.2 und 3.3 für beliebige Dimension formuliert und bewiesen.

### 3.2 Pflasterungen auf Gittern

Nahezu sämtliche Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor, die in der Literatur zu finden sind, haben eine auffällige Gemeinsamkeit: Sie 'leben' auf einem Gitter. Betrachtet man etwa ein Chair-Tiling (Abb. 1, S. 8), so sieht man, dass alle Eckpunkte der Steine im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  liegen. In einem Half-Hex-Tiling (Abb. 13, S. 65) bilden die Steine eine Art Wabenmuster, alle Eckpunkte liegen im hexagonalen Gitter  $A_2$ . Um diese Eigenschaft zu präzisieren, brauchen wir den Begriff des *Translationsmoduls*.

**Definition 3.2** Sei  $\mathcal{P}$  eine Pflasterung und  $X_{\mathcal{P}} := \{t \mid t \in \mathbb{R}^d, \exists T \in \mathcal{P} : T + t \in \mathcal{P}\}$ , also die Menge aller Translationen, die Steine aus  $\mathcal{P}$  auf Steine desselben Typs in  $\mathcal{P}$  abbilden. Dann ist  $\mathbb{T} = \langle X_{\mathcal{P}} \rangle_{\mathbb{Z}}$  der Translationsmodul von  $\mathcal{P}$ . Haben alle Pflasterungen einer Spezies  $\mathbf{S}$  denselben Translationsmodul  $\mathbb{T}$ , so heißt  $\mathbb{T}$  Translationsmodul von  $\mathbf{S}$ .

Ganz allgemein, also für beliebigen Inflationsfaktor, gilt die folgende Aussage.

**Satz 3.6** Ist  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{I}, \mathbf{P})$ , so haben alle Pflasterungen in  $\mathbf{S}$  denselben Translationsmodul  $\mathbb{T}$ .  $\mathbb{T}$  ist dann also Translationsmodul von  $\mathbf{S}$ .

**Beweis:** Seien  $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbf{S}$ . Zu jedem  $t \in X_{\mathcal{P}}$ , also  $t \in \mathbb{R}^d$ , so dass es ein  $T$  gibt  $T \in \mathcal{P}$  und  $T + t \in \mathcal{P}$  betrachte einen Cluster  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ , der  $T$  und  $T + t$  enthält. Nach Satz 2.13 ist  $\mathbf{S}$  schwach repetitiv. Daher enthält  $\mathcal{P}'$  ein Translat von  $\mathcal{C}$ , sagen wir  $\mathcal{C} + v$ . Dieser Cluster enthält  $T + v$  und  $T + t + v$ . Also ist  $t + v - v = t \in X_{\mathcal{P}'}$ , somit  $X_{\mathcal{P}} \subseteq X_{\mathcal{P}'}$ . Ebenso erhält man  $X_{\mathcal{P}'} \subseteq X_{\mathcal{P}}$ , also  $X_{\mathcal{P}'} = X_{\mathcal{P}}$ . Also ist auch der Translationsmodul beider Pflasterungen gleich.  $\square$

**Definition 3.3** Ist der Translationsmodul  $\mathbb{T}$  einer Pflasterung  $\mathcal{P}$  ein Gitter, so heißt  $\mathcal{P}$  Pflasterung auf einem Gitter oder Pflasterung auf (dem Gitter)  $\mathbb{T}$ . Ist der Translationsmodul  $\mathbb{T}$  einer Spezies  $\mathbf{S}$  ein Gitter, so heißt  $\mathbf{S}$  Spezies auf einem Gitter oder Spezies auf (dem Gitter)  $\mathbb{T}$ . Die Menge aller Spezies auf einem Gitter bezeichnen wir mit  $(\mathbf{G})$ .

*Beispiele:* 1. Der Translationsmodul der Würfelpflasterungen  $\mathcal{W}_d$  ist einfach  $\mathbb{Z}^d$ . Denn es ist  $\mathcal{W}_d := \{E + v \mid v \in \mathbb{Z}^d\}$  (mit  $E := [0, 1]^d$ ), also ist  $X_{\mathcal{W}_d} = \mathbb{Z}^d$  und  $\langle \mathbb{Z}^d \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^d$ . 2. Der Translationsmodul eines Chairtilings  $CT$  ist das Gitter  $D_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \pmod{2}\}$ . Denn es ist  $\{(1, 1), (-1, 1)\} \subseteq X_{CT}$ ,  $\langle \{(1, 1), (-1, 1)\} \rangle_{\mathbb{Z}} = D_2$ , und mit wenig Mühe kann man zeigen, dass  $X_{CT} \setminus D_2 = \emptyset$  gilt. (Man nutzt die Inflationsregel aus und die Lage der Eckpunkte, an denen der Innenwinkel  $270^\circ$  beträgt, innerhalb der Supersteine.) 3. Der Translationsmodul einer Pflasterung nach KENYON (Abb. 9) ist kein Gitter. Führt man die Überlegungen von S. 40 weiter, so erhält man  $\mathbb{T} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

**Satz 3.7** Ist  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl}) \in (\mathbf{G})$  mit Inflationsfaktor  $\eta$ , so ist  $\eta^d \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Der Translationsmodul  $\mathbb{T}$  von  $\mathbf{S}$  enthält alle Translationsvektoren, die Steine auf Steine gleichen Typs abbilden. Also enthält  $\mathbb{T}$  auch alle Translationsvektoren, die Supersteine auf Supersteine abbilden. Daher ist  $\eta\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}$ .  $\mathbb{T}$  und  $\eta\mathbb{T}$  sind Gitter, also ist  $\eta\mathbb{T}$  Teilgitter von  $\mathbb{T}$ . Daher ist der Index  $[\mathbb{T} : \eta\mathbb{T}] \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\eta^d \in \mathbb{N}$ . Mit Satz 2.9 folgt:  $\mathbf{S}$  ist eine Spezies mit ganzzahligem Inflationsfaktor. (Die Inflationsregel ist gegebenenfalls durch  $\text{infl}^d$  zu ersetzen.  $\mathbf{S}$  bleibt dadurch unverändert.)  $\square$

Der letzte Beweis ist so formuliert, dass er auch im Rahmen der Unterscheidung von Steinen bezüglich ihrer Kongruenzklasse gilt, nicht nur bezüglich Translationsklassen. Dieser Satz gilt also in beiden der im 2. Kapitel behandelten Fälle. Die nächste Aussage bezieht sich wie der Rest dieses Kapitels auf den engeren Rahmen der Unterscheidung bzgl. Translationsklassen.

**Satz 3.8** *Ist  $\mathcal{P}$  eine  $\mathcal{F}$ -Pflasterung auf einem Gitter  $\Gamma$ , so ist  $\mathcal{P}$  von lokal endlicher Komplexität. Ist  $\mathbf{S} \in (\mathbf{G})$ , so ist  $\mathbf{S} \in (\mathbf{LFC})$ .*

**Beweis:** Es sei  $\Gamma = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Angenommen, es gäbe unendlich viele verschiedene Typen von 2-Stein-Clustern aus Steinen verschiedenen Typs. Dann gibt es auch ein Paar von Steintypen — nennen wir die dazugehörigen Steine  $A$  und  $B$  — so dass es unendlich viele Typen von 2-Stein-Clustern aus Steinen vom Typ  $A$  und  $B$  gibt. Es gibt also Cluster vom Typ  $\{A, B\}, \{A, B + t_1\}, \{A, B + t_2\}, \dots$  mit  $t_j \in \mathbb{R}^d$ ,  $\|t_j\| \leq r$  für  $j \in \mathbb{N}$  und  $t_j \neq t_k$  für  $j \neq k$ . Alle Steine vom Typ  $A$  sind um Translationsvektoren der Gestalt  $\sum_{i=1}^d \lambda_i u_i$  gegeneinander verschoben. Die Steine vom Typ  $B$  sind daher um

Vektoren der Gestalt  $t_j + \sum_{i=1}^d \lambda_i u_i$  gegeneinander verschoben. Wegen  $\|t_j\| \leq r$  können höchstens endlich viele  $t_i$  Gittervektoren sein, also als ganzzahlige Linearkombination von  $u_1, \dots, u_d$  dargestellt werden. Es gibt daher mindestens zwei Steine vom Typ  $B$ , die um einen Vektor verschoben sind, der keine Darstellung der Gestalt  $\sum_{i=1}^d \lambda_i u_i$  besitzt.

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass jeder solche Vektor diese Darstellung besitzt. Es kann also nur endlich viele Typen von 2-Stein-Clustern geben, also ist die Pflasterung (bzw. die Spezies) von lokal endlicher Komplexität.  $\square$

Satz 3.8 gibt uns ein weiteres Hilfsmittel an die Hand, um die Frage nach der lokal endlichen Komplexität zu beantworten.

**Satz 3.9** *Sei  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eine Spezies mit Faktor  $p \in \mathbb{N}$ , seien die Elemente von  $\mathcal{F}$  Polytope und habe o.B.d.A. jedes  $T \in \mathcal{F}$  einen Eckpunkt in  $0$ . Ist dann für jedes  $T \in \mathcal{F}$  der  $\mathbb{Z}$ -Spann aller Eckpunkte aller Steine in  $\text{infl}(T)$  ein Gitter  $\Gamma$ , so ist  $\mathbf{S}$  Spezies auf einem Gitter  $\Gamma'$  mit  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  und somit von lokal endlicher Komplexität.*

**Beweis:** Sei  $T \in \mathcal{F}$ . Eine Eckpunkt von  $T$  liegt in  $0 \in \Gamma$ , alle Eckpunkte der Steine in  $\text{infl}(T)$  liegen in  $\Gamma$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt daher: Die Eckpunkte der Supersteine  $(k-1)$ -ter Ordnung in  $\text{infl}^k(T)$  liegen in  $p^k \Gamma \subseteq \Gamma$ .

Wendet man das Argument sukzessive an auf  $k = n, k = n - 1, \dots, k = 2$ , so folgt: Alle Eckpunkte der Steine in  $\text{infl}^k(T)$  liegen in  $\Gamma$ . Damit liegen auch alle Differenzen der in  $\text{infl}^k(T)$  vorkommenden Eckpunkte in  $\Gamma$ , und somit erst recht alle Translationsvektoren  $t$  mit  $T' = T + t$  für  $T, T' \in \text{infl}^k(T)$ .

Jeder Cluster in  $\mathbf{S}$  ist Translat einer Teilmenge eines Supersteins  $\text{infl}^k(T)$  (für geeignetes  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T \in \mathcal{F}$ ). Also ist der Translationsmodul von  $\mathbf{S}$  Teilmenge von  $\Gamma$ , und als  $\mathbb{Z}$ -Spann somit ein Gitter  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ .  $\square$

Insbesondere gilt:

**Korollar 3.10** *Sei  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eine Spezies mit Faktor  $p \in \mathbb{N}$  und seien die Elemente von  $\mathcal{F}$  Polytope. Sind dann für jedes  $T \in \mathcal{F}$  die Koordinaten aller Eckpunkte aller Steine in  $\text{infl}(T)$  rational, so ist  $\mathbf{S}$  Spezies auf einem Gitter und somit von lokal endlicher Komplexität.*

**Beweis:** Es gibt nur endlich viele verschiedene Eckpunkte in  $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_m\}$  und somit in  $\{\text{infl}(T_1), \dots, \text{infl}(T_m)\}$ . Daher existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass die Eckpunkte in  $\{N \text{infl}(T_1), \dots, N \text{infl}(T_m)\}$  alle ganzzahlig sind und somit in einem Gitter liegen. Die um  $N$  vergrößerten Pflasterungen bilden daher eine Spezies auf einem Gitter, also auch die ursprünglichen.  $\square$

Insgesamt haben wir nun vier Kriterien, um die lokal endliche Komplexität einer Spezies auf einem Gitter nachzuweisen, hier nun auch zwei für beliebige Dimension. Alle dem Autor bekannten Beispiele für die in Frage stehenden Spezies — Inflationsspezies mit ganzzahligem Faktor,  $\mathcal{F}$  besteht aus Polytopen — erfüllen die Voraussetzungen von Satz 3.9.

Sind die hier betrachteten Spezies zusätzlich primitiv, so folgt aus der lokal endlichen Komplexität nach Korollar 2.14 jeweils sofort auch lineare Repetitivität.

In Kapitel 5 werden weitere Punkte und mögliche Fortführungen der hier vorgestellten Methoden zur Behandlung der Frage nach lokal endlicher Komplexität von Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor diskutiert.

Die im Vorherigen gemachten Überlegungen beziehen sich alle auf Inflationspflasterungen aus Polytopen. Zur Übertragung der Ergebnisse auf Punktmenge bzw. Delone-Multimengen bedient man sich der gegenseitig lokalen Ableitbarkeit, unter Verwendung von Lemma 2.18.

In diesem Lemma 2.18 wurde bereits gezeigt, dass es zu jeder repetitiven Pflasterung  $\mathcal{P}$  eine dazu gegenseitig lokal ableitbare Delone-Multimenge  $V$  gibt. In Kapitel 4 nutzen wir intensiv die Sichtweise, dass man jede Pflasterung im Sinne gegenseitiger lokaler Ableitbarkeit auch als Delone-Multimenge darstellen kann. Dazu müssen wir den Zusammenhang im Falle von Pflasterungen auf Gittern verschärfen. Es folgen zwei Aussagen, die dieses leisten.

Der folgende Satz 3.11 besagt: Ist  $\mathcal{P}$  eine Pflasterung auf dem Gitter  $\Gamma$ , so kann die zu  $\mathcal{P}$  gegenseitig lokal ableitbare Delone–Multimenge  $V$  so gewählt werden, dass gilt:  $\text{tr}(V) = \Gamma$ . Der darauffolgende Satz 3.12 beinhaltet im Wesentlichen die Aussage, dass, wenn  $\mathcal{P}$  eine Inflationspflasterung auf einem Gitter ist (und  $p$  der zwangsläufig ganzzahlige Inflationsfaktor), so gibt es eine zu  $\mathcal{P}$  gegenseitig lokal ableitbare Delone–Multimenge  $V$ , die sich durch eine Inflation erzeugen lässt, und zwar durch eine, die einem Punkt ein 'Parallelotop' von  $p^d$  Punkten zuordnet.

**Satz 3.11** *Ist  $\mathcal{P}$  eine schwach repetitive  $\mathcal{F}$ –Pflasterung auf einem Gitter  $\Gamma$ , so gibt es eine Delone–Multimenge  $V$ , so dass  $\mathcal{P}$  und  $V$  gegenseitig lokal ableitbar sind und  $\text{tr}(V)$  ein Translat von  $\Gamma$  ist.*

**Beweis:** Ist  $\mathcal{P}$  eine Pflasterung auf einem Gitter  $\Gamma$ , so ist laut Definition der Translationsmodul  $\mathbb{T} = \langle X_{\mathcal{P}} \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \{t \in \mathbb{R}^d \mid \exists S \in \mathcal{P} : S + t \in \mathcal{P}\} \rangle_{\mathbb{Z}} = \Gamma$ . Mittels der Musterfamilie  $\mathcal{F} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  schreibt sich  $X_{\mathcal{P}}$  als Vereinigung der Mengen  $X_i = \{t \in \mathbb{R}^d \mid \exists T \cong T_i, T \in \mathcal{P} : T + t \in \mathcal{P}\}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Wir zeichnen nun einen Punkt  $x_1 \in \text{int}(T_1)$  aus. Dekoriert man alle Steine der Pflasterung  $\mathcal{P}$ , die vom Typ  $T_1$  sind — also alle Steine der Menge  $M := \{T \in \mathcal{P} \mid T \cong T_1\}$  — auf dieselbe Weise mit einem Punkt (ist  $T = T_1 + t$ , so dekoriert man  $T$  durch den Punkt  $x_1 + t$ ), so erhält man eine Punktmenge  $D$ , die gegenseitig lokal ableitbar zu  $M$  ist.  $\mathcal{P}$  ist schwach repetitiv, also existiert zu  $T_1$  ein Radius  $r$ , so dass in jeder Kugel vom Radius  $r + \text{diam}(T_1)$  ein Stein vom Typ  $T_1$  liegt. Der Abstand zweier Punkte in  $D$  ist nach unten durch den maximalen Inkreisradius von  $T_1$  beschränkt. Daher ist  $D$  eine Delone–Menge; und nach Satz 3.8 ist  $\mathcal{P}$  überdies von lokal endlicher Komplexität. Zu jedem  $R > 0$  gibt es daher nur endlich viele Typen von  $R$ –Clustern  $\mathcal{C}_R(x, \mathcal{P})$  mit  $x \in D$ . Nummerieren wir diese  $n$  Möglichkeiten durch, so können wir jedem Punkt in  $D$  eine Nummer  $i$  zuordnen, je nach dem, in welchem dieser Typen von  $R$ –Clustern der entsprechende Stein liegt. Durch die Zuordnung  $V_i := \{x \in D \mid x \text{ hat Nummer } i\}$  liefert diese Nummerierung die Delone–Multimenge  $V' = (V_1, \dots, V_n)$ .

Ist das  $R$  so gewählt, dass es die zweite definierende Eigenschaft einer Delonemenge erfüllt ('Jede Kugel vom Radius  $R$  enthält mindestens einen Punkt aus  $D$ '), so überdeckt die Vereinigung aller Cluster  $\mathcal{C}_R(x, \mathcal{P})$  mit  $x \in D$  die Pflasterung; es ist also

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{x \in V_i} \mathcal{C}_R(x, \mathcal{P}).$$

Jedem Punkt aus  $V'$  kann man nun eindeutig einen  $R$ –Cluster zuordnen und erhält so  $\mathcal{P}$ . Aus  $\mathcal{P}$  kann man umgekehrt durch die beschriebene Konstruktion  $V'$  lokal ableiten, also sind  $\mathcal{P}$  und  $V'$  gegenseitig lokal ableitbar.

Es ist  $D = \text{tr}(V')$  Teilmenge eines Translats von  $X_1$  und somit auch Teilmenge eines Translats von  $\mathbb{T}$ .

Denn: Ist  $T \in \mathcal{P}$  und  $T = T_1 + v$ , also  $T \cong T_1$ , so ist

$$D = \{t + v \mid T = T + t, T + t \in \mathcal{P}\} = X_1 + v \subseteq X_{\mathcal{P}} + v \subseteq \mathbb{T} + v.$$

Erweitert man  $V'$  um eine Menge  $V_{n+1}$  von redundanten Punkten zu einer Delone-Multimenge  $V = (V_1, \dots, V_n, V_{n+1})$ , so dass  $\text{tr}(V)$  ein Translat von  $\mathbb{T}$  wird, so bleiben  $\mathcal{P}$  und  $V$  gegenseitig lokal ableitbar zueinander und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

**Satz 3.12** *Ist  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eine Inflationsspezies auf einem Gitter  $\Gamma = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}}$  zum Faktor  $p$  und ist  $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$ , so gibt es eine Spezies  $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'(\mathcal{F}', \text{infl}')$  von Delone-Multimengen auf  $\Gamma$ , so dass gilt:*

1. *Es gibt ein  $V \in \mathbf{S}'$  mit:  $\mathcal{P}$  ist gegenseitig lokal ableitbar zu  $V$ , und*
2. *Für jedes  $(t, i) \in \mathcal{F}'$  ist der Träger von  $\text{infl}'((t, i))$  ein Translat der Menge*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j, 0 \leq \lambda_j \leq p - 1, \lambda_j \in \mathbb{Z}\}.$$

**Beweis:** Laut Satz 3.11 finden wir zu  $\mathcal{P}$  eine gegenseitig lokal ableitbare Delone-Multimenge  $V$ , so dass  $\text{tr}(V) = \Gamma$ . Die Inflationsregel  $\text{infl}$  für  $\mathcal{P}$  liefert auch eine Inflationsregel  $\text{infl}''$  für die Delone-Multimenge (indem man betrachtet, wie die Punkte sich unter  $\text{infl}$  verhalten). Ist für jeden Punkttyp  $i$  Bedingung 2. schon erfüllt, so ist nichts weiter zu zeigen.

Ist Bedingung 2. nicht erfüllt, so gibt es vier Möglichkeiten für jeden einzelnen Punkttypen  $i$ :

- (a.) Es ist für Typ  $i$  Bedingung 2. erfüllt, oder
- (b.)  $\text{tr}(\text{infl}'((t, i)))$  ist Translat einer echten Obermenge von  $F$ , oder
- (c.)  $\text{tr}(\text{infl}'((t, i)))$  ist Translat einer echten Teilmenge von  $F$ , oder
- (d.) Nichts von dem, d.h. weder kann man aus  $\text{tr}(\text{infl}'((t, i)))$  Punkte entfernen, so dass dadurch ein Translat von  $F$  entsteht, noch kann man durch Hinzufügen von Punkten ein Translat von  $F$  erhalten.

Diese vier Möglichkeiten sind in Abbildung 11 beispielhaft für  $d = 2$  und  $p = 3$  dargestellt.

Wir konstruieren aus  $\text{infl}''$  nun die gesuchte Inflation  $\text{infl}'$ , und damit aus der Spezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}'', \text{infl}'')$  die Spezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}', \text{infl}')$ , die die Punkte 1. und 2. des Satzes erfüllt. Man beachte, dass die Konstruktion schrittweise erfolgt, so dass  $\text{infl}'$  sich im Weiteren immer wieder ändert. Am Ende der Konstruktion steht dann die Inflation mit den gesuchten Eigenschaften.

In Fall (a.) ist für den entsprechenden Punkt nichts zu tun. Wir übernehmen also für alle Typen  $i$ , für die (a.) gilt,  $(t, i) \in \mathcal{F}''$  in  $\mathcal{F}'$  und setzen  $\text{infl}'((t, i)) := \text{infl}''((t, i))$ .

In Fall (b.) ändern wir durch Wegnahme von Punkten  $(t_1, i_1), (t_2, i_2), \dots$  aus  $\text{infl}''((t, i))$  die Inflationsregel  $\text{infl}''$  zu  $\text{infl}'$  derart, dass (a.) erfüllt ist, also  $\text{infl}'((t, i)) := \text{infl}''((t, i)) \setminus \{(t_1, i_1), (t_2, i_2), \dots\}$ .

Die überschüssigen Punkte ergänzen einige der Mengen  $\text{infl}''((t, j))$ , wobei für den Punkttyp  $j$  (c.) oder (d.) gilt.

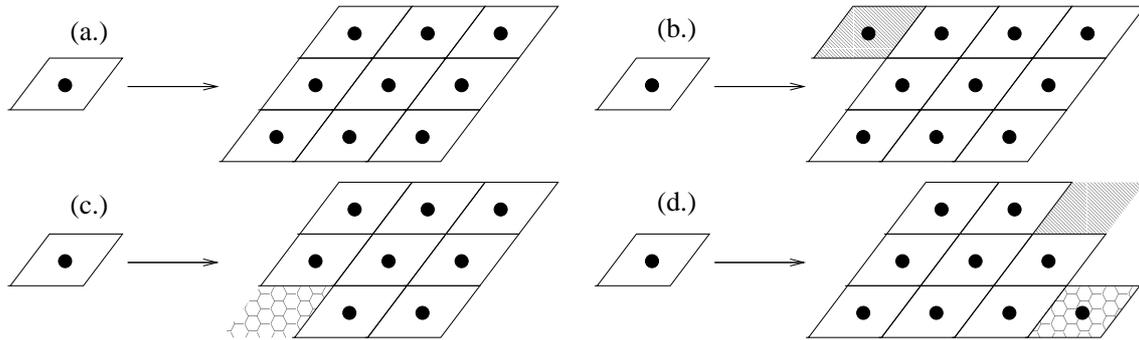


Abbildung 11: Schematische Darstellung einer Inflation für eine Delone-Multimenge. Die Punkttypen sind nicht berücksichtigt.

Diese Zuordnung kann eindeutig sein — die Punkte, die  $\text{infl}''((t, j))$  an den  $t_1, t_2, \dots$  entsprechenden Stellen zugeschlagen werden, stammen in jedem Falle aus  $\text{infl}''((t, i))$  — oder nicht — dann gibt es noch andere Typen von Punkten, aus deren Inflation Punkte die  $t_1, t_2, \dots$  entsprechenden Stellen in  $\text{infl}''((t, j))$  auffüllen.

Auf jeden Fall bilden wir zu jedem  $j$  nun den neuen Typen  $j_i$ , so dass  $\text{infl}'((t, j_i)) = \text{infl}''((t, j)) \cup \{(t_1, i_1), (t_2, i_2), \dots\}$ .

Taucht in einer der Inflationen  $\text{infl}'((t, k))$  der Steine, für die  $\text{infl}'$  schon — vorläufig — definiert wurde, ein Stein vom Typ  $((t, j))$  auf, so muss dieser in  $\text{infl}'((t, k))$  nun durch einen Stein vom Typ  $((t, j_i))$  ersetzt werden.

Diese Schritte wiederholen wir für alle Steine, für die (b.) erfüllt ist. Auf dieselbe Weise verfahren wir mit Punkten, für die (d.) erfüllt ist. Wir erhalten so eine Musterfamilie  $\mathcal{F}'$ , so dass für jedes  $(t, i) \in \mathcal{F}'$  (a.) oder (c.) erfüllt ist.

Nach dieser Konstruktion kann nun aber auch Fall (c.) nicht mehr eintreten: Die 'fehlenden' Punkte in  $\text{infl}''((t, i))$  müssen, da alle 'überschüssigen' Punkte in jedem  $\text{infl}''((t, i))$  beseitigt sind, nun aufgefüllt sein. Die entsprechenden Delone-Multimengen hätten sonst Lücken, aber wir haben schon gesehen, dass ihr Träger das Gitter  $\Gamma$  ist, dass also solche Lücken nicht auftreten.  $\square$

## 4 CPS für Pflasterungen auf Gittern

Eine wesentliche Erkenntnis über quasiperiodische Pflasterungen war und ist der Umstand, dass diese nichtperiodischen Pflasterungen in  $\mathbb{R}^d$  aufgefasst werden können als ein Schnitt durch eine kristallographische Pflasterung in  $\mathbb{R}^{d+k}$  ( $k \geq 1$ ) (s. dazu [DEB], [KRN]). Damit erhält man eine weitere Methode — neben Inflation — zur Erzeugung nichtperiodischer Pflasterungen. Diese Methode wurde in vielen Varianten beschrieben, die in neueren Arbeiten alle unter dem Begriff 'Cut-and-Project-Scheme' (kurz CPS) zusammengefasst werden. (Eine umfassende Darstellung findet sich in [SCH2], die detaillierte Konstruktion eines CPS zu einer gegebenen Inflationspflasterung in [DVO].)

In diesem Kapitel wird vorab eine allgemeine Schilderung von Cut-and-Project-Schemata gegeben. Danach, im ersten Abschnitt dieses Kapitels, wird anhand einer bestimmten Pflasterung die Erstellung eines CPS für Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor detailliert beschrieben. Damit soll dem Leser eine Anleitung zum Erstellen eines CPS für beliebige solcher Pflasterungen zur Verfügung gestellt werden, falls denn überhaupt eines existiert.

Im zweiten Abschnitt wird die Frage behandelt, wann eine Inflationspflasterung mit ganzzahligem Faktor durch ein CPS generiert werden kann und wann nicht. Diese Frage wird im Wesentlichen durch einen Satz von LEE und MOODY (Satz 4.3) beantwortet. Unsere Aufgabe besteht hauptsächlich darin, zu zeigen, wie sich ihre Terminologie auch auf Inflationspflasterungen übertragen lässt. Weiterhin wird klar, dass das in Satz 4.3 gegebene Kriterium sich zwar theoretisch, aber nicht praktisch dazu benutzen lässt, um zu zeigen, dass eine gegebene Pflasterung kein Model Set ist. Im dritten Abschnitt werden daher zwei Sätze formuliert, die für genau diese Situation hinreichende Kriterien liefern. Ist also  $P$  kein Model Set, so kann man das im Allgemeinen mit Hilfe dieser Sätze in endlicher Zeit entscheiden.

Ein CPS wird heute im Allgemeinen so formuliert: Gegeben ist ein Gitter  $\Lambda$  in  $\mathbb{R}^{d+e}$ , zwei Projektionen  $\pi_1 : \mathbb{R}^{d+e} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\pi_2 : \mathbb{R}^{d+e} \rightarrow \mathbb{R}^e$  und eine kompakte Menge  $W \subseteq \mathbb{R}^e$  (Das 'Fenster') mit  $W = \text{cl}(\text{int}(W)) \neq \emptyset$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^{d+e} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R}^e \\ \cup & & \cup & & \cup \\ D & & \Lambda & & W \end{array}$$

Dabei wird gefordert:  $\pi_1|_{\Lambda}$  ist injektiv und  $\pi_2(\Lambda)$  liegt dicht in  $\mathbb{R}^e$ . Dann ist

$$D = \{\pi_1(x) \mid x \in \Lambda, \pi_2(x) \in W\}$$

eine diskrete Punktmenge. Aus dieser gewinnt man — mit einfachen Mitteln wie lokaler Ableitbarkeit oder Bildung der Voronoizellen — eine Pflasterung. Sind  $W$  und  $\Lambda$  geeignet gewählt, erhält man repetitive, quasiperiodische Pflasterungen. Abbildung 12 zeigt das Prinzip eines CPS: Es ist  $d = e = 1$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^e$  ein Intervall und  $\Lambda$  ist das Gitter

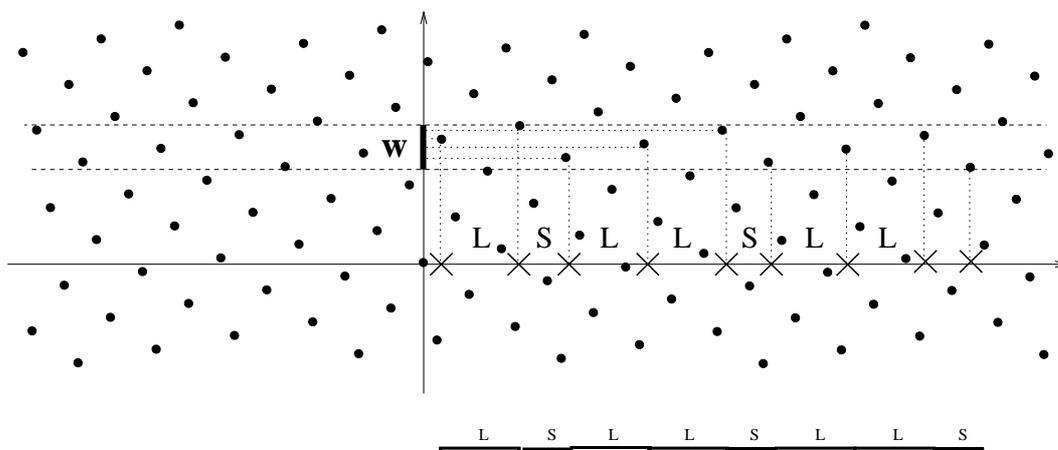


Abbildung 12: Darstellung eines CPS zur Erzeugung einer eindimensionalen nichtperiodischen Pflasterung aus einem zweidimensionalen Gitter: Wird ein Gitterpunkt unter  $\pi_2$  nach  $W$  projiziert — liegt er also in dem durch gestrichelte Linien angedeuteten Streifen — so wird er mittels  $\pi_1$  auf die  $x$ -Achse projiziert.

$\mathbb{Z}^2$ , gedreht um den Winkel  $\arcsin(1/\sqrt{\tau+2})$ , wobei  $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 = 2 \cos(\pi/5)$  die Zahl des goldenen Schnitts ist.

Genauer:  $\Lambda$  ist der  $\mathbb{Z}$ -Spann von  $\{c_{\tau}^{(1)}, c_{-1}^{(\tau)}\}$  ( $c = 1/(2 \cos(\pi/10)) = (\sqrt{2+\tau})^{-1}$ ).  $\pi_2$  ist in diesem Beispiel die orthogonale Projektion auf die vertikale Achse,  $\pi_1$  ist die orthogonale Projektion auf die horizontale Achse. Alle Punkte  $x \in \Lambda$  mit  $\pi_2(x) \in W$  werden durch  $\pi_1$  auf die horizontale Achse projiziert und bilden eine Delonemenge  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Der Abstand zweier benachbarter Punkte in  $D$  kann nur zwei verschiedene Werte annehmen (im Bild: S und L).

Interpretiert man die Intervalle zwischen benachbarten Punkten in  $D$  als Steine in  $\mathbb{R}$ , so erhält man eine nichtperiodische Pflasterung  $\mathcal{P}$  in  $\mathbb{R}$ . Die Musterfamilie besteht aus zwei Steinen  $T_S, T_L$ , nämlich Intervallen der Längen S und L. Dieselbe Pflasterung erhält man durch eine Inflation:  $\text{infl}(T_S) := \{T_L\}, \text{infl}(T_L) := \{T_S, T_L\}$ . Der zugehörige Inflationsfaktor ist  $\tau$ . Die so erzeugten eindimensionalen Pflasterungen werden oft als 'Fibonacciketten' bezeichnet und sind ausgiebig untersucht worden. Sie ist in gewisser Weise mit den Penrosepflasterungen verwandt: Diese haben ebenfalls den Inflationsfaktor  $\tau$ , und in ihnen findet man Steinsequenzen, die sich nach demselben Muster anordnen wie die beiden Steine in der Fibonaccikette (die 'Conwaywürmer', s. [GS]).

Fast alle 'prominenten' Pflasterungen, wie die Penrosepflasterungen, die Ammann-Beenker-Pflasterungen, Danzers  $ABCK$ -Pflasterungen und viele weitere Inflationspflasterungen lassen sich durch ein CPS erzeugen. Allen ist gemeinsam, dass der Inflationsfaktor eine irrationale algebraische Zahl ist.

Lange Zeit gab es kein CPS für Pflasterungen mit ganzzahligem Inflationsfaktor. Dazu ist das oben geschilderte Schema zu speziell. Die Arbeiten von MOODY und SCHLOTT-

MANN ([M],[SCH2]) zeigen, dass ein allgemeinerer Rahmen gewählt werden kann:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^d \times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\ \cup & & \cup & & \cup \\ D & & \Lambda & & W \end{array} \quad (6)$$

Hierbei ist  $G$  eine lokal kompakte abelsche Gruppe.  $\Lambda$  ist wieder ein Gitter, und an  $W$ ,  $\pi_1$  und  $\pi_2$  werden entsprechende Bedingungen gestellt wie oben. Dann ist auch hier  $D$  die Delonemenge, aus der man Pflasterung lokal ableitet (oder umgekehrt die Delonemenge aus der Pflasterung). Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , die sich auf diese Weise beschreiben lassen, heißen *Model Sets* (vgl. [M],[LM]).

**Definition 4.1** *Ist in (6)  $G$  eine lokal kompakte abelsche Gruppe,  $\Lambda$  diskrete Untergruppe von  $\mathbb{R}^d \times G$  — wobei die Faktorgruppe  $(\mathbb{R}^d \times G)/\Lambda$  kompakt ist —,  $\text{cl}(W)$  kompakt,  $\text{int}(W) \neq \emptyset$ ,  $\pi_1|_\Lambda$  injektiv und  $\pi_2(\Lambda)$  dicht in  $G$ , so heißt*

$$D = \{\pi_1(x) \mid x \in \Lambda, \pi_2(x) \in W\}$$

Model Set (in  $\mathbb{R}^d$ ). Ein Model Set heißt regulär, wenn der Rand des zugehörigen Fensters (Haar-)Maß 0 hat, wenn also gilt:  $\mu(\text{cl}(W) \setminus \text{int}(W)) = 0$  (dabei ist  $\mu$  das Haar-Maß in  $G$ ).

Insbesondere sei angemerkt: Jede kristallographische Delonemenge  $D$  ist ein Model Set zu  $\Lambda := D$  und  $G := \emptyset$ .

Dieser erweiterte Rahmen erlaubt nun CPS für Pflasterungen mit ganzzahligem Inflationsfaktor. BAAKE, MOODY und SCHLOTTMANN demonstrieren es in [BMS] anhand eines Chair-Tilings (s. Abbildung 1, S. 8) und einer eindimensionalen Pflasterung. Die zwei wesentlichen Ideen, die das ermöglichen, sind:

1. Repräsentation der Pflasterung nicht durch eine einzige Punktmenge  $D$ , sondern durch eine Delone-Multimenge  $V = (V_1, \dots, V_k)$ .
2. Statt  $G = R^e$  wählt man  $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \dots \times \widehat{\mathbb{Z}}_p$ , d.h.  $G$  ist das  $d$ -fache cartesische Produkt des Ringes der  $p$ -adischen Zahlen (siehe Anhang). Jedes einzelne der  $V_i$  ist ein Model Set, für jedes einzelne wird also ein CPS angegeben. Die verschiedenen CPS unterscheiden sich dabei nur durch die Wahl der Fenster.

Statt eines CPS hat man in diesem Fall also  $k$  verschiedene, die sich aber nur durch die Fenstermengen unterscheiden:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^d \times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\ \cup & & \cup & & \cup \\ V_i & & \Lambda & & W_i \end{array} \quad (7)$$

$G, \Lambda$  und  $\pi_i$  wie oben,  $V_i$  und  $W_i$  entsprechen  $D$  und  $W$ .

## 4.1 Ein einführendes Beispiel

Wir schildern das Verfahren hier zunächst anhand eines 'Half-Hex-Tilings'. Die entscheidende Eigenschaft, die ein CPS für eine Pflasterung erlaubt, ist 'Limesperiodizität'.

**Definition 4.2** Eine  $\mathcal{F}$ -Pflasterung  $\mathcal{P}$  heißt limesperiodisch, wenn gilt: Es existieren kristallographische Steinmengen  $U^{(i)}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) mit:

$$\mathcal{P} = \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} U^{(i)} \right) \cup \mathcal{N}$$

Dabei gelte für die Periodenvektoren  $u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(d)}$  von  $U^{(i)}$ :

$$\langle u_{i+1}^{(1)}, \dots, u_{i+1}^{(d)} \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \langle u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(d)} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

und  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}$  sei eine Steinmenge mit relativer Dichte 0 bzgl.  $\mathcal{P}$ , das heißt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\#\{x \in r\mathbb{B}^d \cap \mathcal{N}\}}{\#\{x \in r\mathbb{B}^d \cap \mathcal{P}\}} = 0.$$

Typischerweise — etwa, wenn  $\mathcal{N} = \emptyset$  — ist eine limesperiodische Pflasterung auch Pflasterung auf einem Gitter. Aber nicht jede Pflasterung auf einem Gitter ist limesperiodisch. Dazu werden wir später Beispiele kennenlernen.

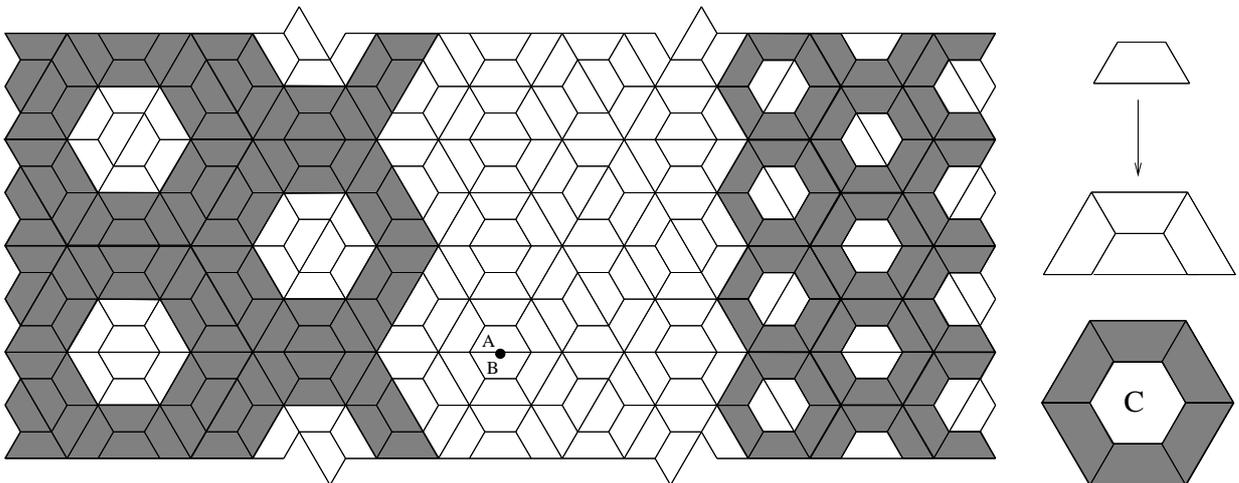


Abbildung 13: Ein Ausschnitt eines Half-Hex-Tilings. Rechts oben die Inflationsregel für einen Steintyp, die anderen fünf werden analog inflationiert.

Die in Abbildung 13 dargestellte Pflasterung  $\mathcal{P}$  ist eine nichtperiodische Inflationspflasterung zum Faktor 2. Die Inflationvorschrift ist oben rechts dargestellt. Wie man

leicht feststellt, handelt es sich um eine Pflasterung auf einem Gitter: Die Eckpunkte von  $\mathcal{P}$  liegen im hexagonalen Gitter  $A_2 = \langle (1, 0)^T, (1/2, \sqrt{3}/2)^T \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Überdies ist  $\mathcal{P}$  auch limesperiodisch: Man erkennt in der Pflasterung ein periodisches Wabenmuster. Die Cluster vom Typ  $\mathcal{C}$  (im Bild rechts unten) wiederholen sich periodisch in der Pflasterung. Das ist im rechten Teil des Ausschnitts der Pflasterung durch die grau hinterlegten Steine angedeutet. Es gilt:

$$U^{(0)} := \mathcal{C} + \Gamma := \left\{ \mathcal{C} + t \mid t = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathcal{P} \quad (8)$$

Dabei ist  $\Gamma$  ein Teilgitter von  $A_2$  vom Index 12.

Fasst man den Punkt in der Bildmitte als Ursprung auf, so ist die in Abbildung 13 gezeigte Pflasterung selbstähnlich, d.h. es gilt  $\text{infl}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ . Daher ist auch  $U^{(1)} := \text{infl}(U^{(0)})$  Teilmenge von  $\mathcal{P}$ . (Anschaulich heißt das: auch die Cluster vom Typ  $\text{infl}(\mathcal{C})$  bilden ein Wabenmuster in  $\mathcal{P}$ . Im Bild ist das im linken Teil dargestellt.) Es gilt ganz allgemein:

$$\forall k \in \mathbb{N} : U^{(k)} := \text{infl}^k(U^{(0)}) = \text{infl}(\mathcal{C}) + 2^k \Gamma \subseteq \mathcal{P} \quad (9)$$

Eine genauere Untersuchung zeigt:

$$\mathcal{P} = \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} U^{(i)} \right) \cup \{A, B\} \quad (10)$$

$A$  und  $B$  bezeichnen die beiden zentralen Steine in  $\mathcal{P}$  (s. Abb. 13). Somit erfüllt  $\mathcal{P}$  die Definition:  $\mathcal{P}$  ist, bis auf die Steine  $A$  und  $B$ , Vereinigung abzählbar vieler kristallographischer Teilmengen, also limesperiodisch.

*1. Erstellung einer Delone–Multimenge, die gegenseitig lokal ableitbar zur Pflasterung ist*

Ein CPS im obigen Sinne liefert eine Punktmenge. Um ein CPS für diese Pflasterung zu erhalten, müssen wir zu der Pflasterung eine Punktmenge  $D$  angeben, so dass  $D$  und  $\mathcal{P}$  gegenseitig lokal ableitbar sind. Da  $\mathcal{P}$  eine Pflasterung auf einem Gitter ist, wird  $D$  typischerweise auch ein Gitter sein. Aus einem Gitter kann man aber keine nichtperiodische Pflasterung in eindeutiger Weise lokal ableiten. Daher beschreiben wir  $\mathcal{P}$  durch eine Delone–Multimenge  $V = (V_1, V_2, V_3)^9$ . Die Punkte in  $V_i$  bilden eine nichtperiodische Punktmenge, die Vereinigung der Mengen  $V_i$  ist die kristallographische Punktmenge  $D$  (evtl. bis auf eine Menge der relativen Dichte 0).

Die Zuordnung geschieht wie in Abbildung 14 dargestellt. Sie genügt unseren Zwecken, denn: An der langen Seite eines jeden Trapezes in der Pflasterung liegt ein weiteres Trapez, so dass die Vereinigung der beiden ein reguläres Sechseck bildet. Die Pflasterung wird von solchen Sechsecken überdeckt. Auf diese Weise wird also jeder einzelne Stein erfasst.

<sup>9</sup>Im Falle quasiperiodischer Pflasterungen — wie den Penrosepflasterungen — genügt meistens eine einzige Punktmenge, um daraus die Pflasterung abzuleiten.

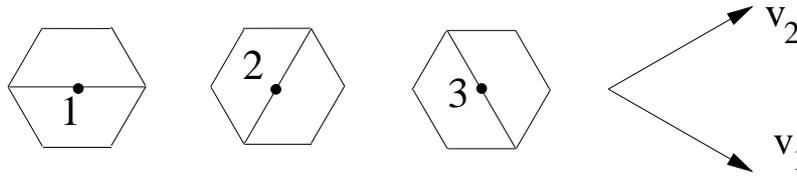


Abbildung 14: Die Regeln zur gegenseitigen lokalen Ableitbarkeit von Delone–Multimenge  $V = (V_1, V_2, V_3)$  und Half–Hex–Tilings

Die Sechsecke treten in drei verschiedenen Orientierungen auf. Ihren Mittelpunkten werden, je nach Orientierung, Punkte vom Typ 1,2 oder 3 zugeordnet. Alle Punkte vom Typ  $i$  bilden die Menge  $V_i$ . Aus der Pflasterung lässt sich somit die Delone–Multimenge  $V = (V_1, V_2, V_3)$  lokal ableiten; und umgekehrt kann man aus der Delone–Multimenge  $V$  die Pflasterung lokal ableiten. Dies gilt nicht nur für die im Bild dargestellte, sondern für jede Pflasterung der Spezies.

2. Konstruktion der Inflation für die Punkte

Wie in Abschnitt 3.2 geschildert lässt sich auch  $V = (V_1, V_2, V_3)$  durch eine Inflation gewinnen. Es ist  $\mathcal{F} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$ ,  $\eta = 2$  und die Ersetzungsregel  $\mathcal{Q}$  lässt sich aus der Inflationsregel für die Half–Hex–Tilings herleiten. ( $\mathcal{Q}$  ist in Abb. 15 gezeigt.) Bei wiederholter Anwendung der Inflation auf einen Punkt entstehen so Punktmenge, die immer größere Teile der Ebene bedecken und die angeordnet sind — wenn man die verschiedenen Typen ignoriert — wie die Punkte des hexagonalen Gitters  $A_2$ .

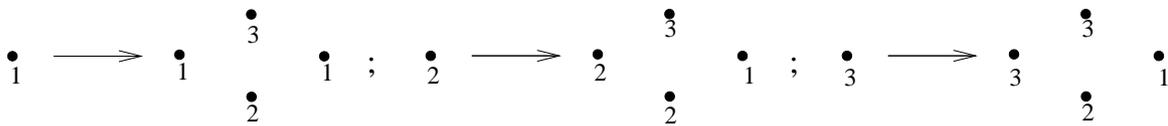


Abbildung 15: Die Inflationsregel für die drei Punkttypen

Es seien  $u_1 = (1, 0)^T$ ,  $u_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)^T$ , also  $A_2 = \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Als Translationsmodul der Pflasterung errechnet man

$$\mathbb{T} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad v_1 := 2u_1 - u_2, \quad v_2 = u_1 + u_2.$$

Das den kristallographischen Teilmengen zugrundeliegende Gitter ist

$$\Gamma = \langle 4u_1 - 2u_2, 2u_1 + 2u_2 \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle 2v_1, 2v_2 \rangle_{\mathbb{Z}}. \tag{11}$$

Die obige Ersetzungsregel (Abb. 14) erlaubt eine Beschreibung der Inflation für die Delone–Multimengen auf  $\Gamma$ ; der Träger dieser Delone–Multimengen ist gerade  $\Gamma$ . Es gilt:  $[\mathbb{T} : \Gamma] = 2$ . Wir werden später sehen, dass es praktisch ist, die Inflation auf einem Gitter  $\Gamma$  zu beschreiben, so dass der Index  $[\mathbb{T} : \Gamma]$  eine Potenz des Inflationsfaktors ist.

Die vollständige Beschreibung der Inflationsspezies für die Punkte lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\} \\
\eta &= 2 \\
\mathcal{Q} &= \{C_1, C_2, C_3\} \\
C_1 &= \{(0, 1), (v_1, 2), (v_1 + v_2, 1), (v_2, 3)\} \\
C_2 &= \{(0, 2), (v_1, 2), (v_1 + v_2, 1), (v_2, 3)\} \\
C_3 &= \{(0, 3), (v_1, 2), (v_1 + v_2, 1), (v_2, 3)\}
\end{aligned} \tag{12}$$

(Die Notation  $'(t, i)'$  ist dabei folgendermaßen zu lesen: Ein Punkt vom Typ  $i$  an der Stelle  $t$ , s. Abschnitt 2.6.)

### 3. Darstellung der Punkte als Vereinigung von kristallographischen Punktmengen

Die Gleichungen (8), (9) und (10) besagen, dass sich  $\mathcal{P}$  — bis auf zwei Steine — als Vereinigung kristallographischer Steinmengen darstellen lässt. Das übertragen wir nun auf die Punkte. Zunächst bestimmen wir die Position je eines Punktes zu jedem der Typen 1, 2 und 3, der in der feinsten kristallographischen Steinmenge liegt:

$$t_1 = -v_1 + v_2, t_2 = v_1, t_3 = v_2 \tag{13}$$

Wir bezeichnen mit  $V_i^{(0)}$  die Menge aller Punkte vom Typ  $i$ , die zu den Steinen in  $U^{(0)}$  gehören. Aus (8) und (13) erhält man die folgende Darstellung der kristallographischen Punktmengen — also der Gitter — zu der feinsten kristallographischen Steinmenge  $U^{(0)} = \mathcal{C} + \Gamma \subseteq \mathcal{P}$ :

$$V_1^{(0)} = t_1 + \Gamma, V_2^{(0)} = t_2 + \Gamma, V_3^{(0)} = t_3 + \Gamma \tag{14}$$

Die Punkte der nächsten Stufe gehen durch Inflation aus diesen hervor. Alle Punkte in  $V_i^{(1)}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) entstehen also durch Inflation der Punkte in  $V_1^{(0)}, V_2^{(0)}$  und  $V_3^{(0)}$ ; oder allgemeiner: Alle Punkte in  $V_i^{(k+1)}$  entstehen durch Inflation der Punkte in  $V_1^{(k)}, V_2^{(k)}$  und  $V_3^{(k)}$ . Nach (12) gilt:

$$\begin{aligned}
V_1^{(k+1)} &= 2V_1^{(k)} \cup 2V_1^{(k)} + v_1 + v_2 \cup 2V_2^{(k)} + v_1 + v_2 \cup 2V_3^{(k)} + v_1 + v_2 \\
V_2^{(k+1)} &= 2V_1^{(k)} + v_1 \cup 2V_2^{(k)} \cup 2V_2^{(k)} + v_1 \cup 2V_3^{(k)} + v_1 \\
V_3^{(k+1)} &= 2V_1^{(k)} + v_2 \cup 2V_2^{(k)} + v_2 \cup 2V_3^{(k)} \cup 2V_3^{(k)} + v_2
\end{aligned} \tag{15}$$

Damit sind alle Punkte aller Typen erfasst, bis auf den Punkt vom Typ 1, der zu der zentralen Wabe  $A \cup B$  von  $\mathcal{P}$  gehört. Nennen wir diesen Punkt  $z$ , so ist

$$V_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} V_i^{(k)}$$

und

$$\mathbb{T} = \text{tr}(V_1 \cup \{z\}, V_2, V_3) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{z\}$$

Jedes  $V_i$  ist also Vereinigung von Gittern. Um Verwechslungen zu vermeiden, reden wir im Folgenden aber weiter von kristallographischen Steinmengen bzw. Punktmengen (und nicht von Gittern), wenn Teile der Delone–Multimenge gemeint sind, und von Gitter als dem Objekt, auf dem diese Delone–Multimenge lebt.

#### 4. Definition des Fensters $W$

Jedes (volldimensionale) Gitter in  $\mathbb{R}^d$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}^d$ . Mittels der Metrik der  $p$ -adischen Zahlen (s. Anhang) lässt sich eine Menge der Gestalt  $r + p^k\mathbb{Z}$  für  $r \in \mathbb{Z}$  darstellen als der Schnitt von  $\mathbb{Z}$  mit einer Kugel im Ring der  $p$ -adischen Zahlen  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ . Mit

$$\mathbb{B}_p(x, p^{-k}) := \{q \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \mid d_p(q, x) \leq p^{-k}\} \quad (x \in \widehat{\mathbb{Z}}_p)$$

ist  $r + p^k\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{B}_p(r, p^{-k})$ . Die Metrik lässt sich in kanonischer Weise auf  $\mathbb{Z}^d$  erweitern: Sind  $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ , so sei

$$d_p^d(x, y) := \max_{i \in \{1, \dots, d\}} d_p(x_i, y_i) \quad (16)$$

und

$$\mathbb{B}_p^d(x, p^{-k}) := \{q \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^d \mid d_p^d(q, x) \leq p^{-k}\} \quad (17)$$

Ganz analog gilt dann  $r + p^k\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d \cap \mathbb{B}_p^d(r, p^{-k})$  für  $r \in \mathbb{Z}^d$ . Ein Gitter  $\Gamma' \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma' = \langle x_1, \dots, x_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ , kann man dann mittels der Abbildung

$$\pi : \widehat{\mathbb{Z}}_p^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \pi(q_1, \dots, q_d) := q_1x_1 + \dots + q_dx_d$$

darstellen als  $\pi(\mathbb{Z}^d \cap \mathbb{B}_p^d(0, 1))$ . Eine Menge  $t + p^k\Gamma'$  mit  $t \in \Gamma'$  lässt sich daher darstellen als  $\pi(\mathbb{Z}^d \cap \mathbb{B}_p^d(t, p^{-k}))$ . Eine Menge der Form  $t + rp^k\Gamma'$ , wobei  $r$  keine Potenz von  $p$  ist, lässt sich dagegen nicht einfach darstellen. Daher ist es praktisch, dass der Index  $[\Gamma : \Gamma']$  eine Potenz des Inflationsfaktors ist.

In unserem Beispiel gilt  $d = 2$  und  $p = 2$ , und das den feinsten kristallographischen Punktmengen  $V_i^{(0)}$  zugehörige Gitter ist  $\Gamma = \langle 2v_1, 2v_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$  (siehe (11)). Also setzen wir

$$\sigma := \widehat{\mathbb{Z}}_2^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(q_1, q_2) := q_1v_1 + q_2v_2 \quad (18)$$

Damit wird aus (13) und (14)

$$\begin{aligned} V_1^{(0)} &= \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((-1, 1)^T, 1/2)) \\ V_2^{(0)} &= \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((1, 0)^T, 1/2)) \\ V_3^{(0)} &= \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((0, 1)^T, 1/2)) \end{aligned}$$

Mit (15) erhält man nun etwa für  $V_1^{(1)}$ :

$$\begin{aligned}
V_1^{(1)} &= 2\sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((-1, 1)^T, 1/2)) \cup (2\sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((-1, 1)^T, 1/2)) + v_1 + v_2) \cup \\
&\quad (2\sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((1, 0)^T, 1/2)) + v_1 + v_2) \cup (2\sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((0, 1)^T, 1/2)) + v_1 + v_2) \\
&= \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((-2, 2)^T, 1/4)) \cup \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((-1, 3)^T, 1/4)) \cup \\
&\quad \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((3, 1)^T, 1/4)) \cup \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{B}_2^2((1, 3)^T, 1/4)) \\
&= \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap (\mathbb{B}_2^2((-2, 2)^T, 1/4) \cup \mathbb{B}_2^2((-1, 3)^T, 1/4) \cup \mathbb{B}_2^2((3, 1)^T, 1/4) \\
&\quad \cup \mathbb{B}_2^2((1, 3)^T, 1/4)))
\end{aligned}$$

$V_1^{(1)}$  ist also das Bild des Schnittes von  $\mathbb{Z}^2$  mit der Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Kugeln in  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  unter  $\sigma$ . Dasselbe gilt für alle  $V_i^{(k)}$ . Setzt man

$$\begin{aligned}
M_1^{(0)} &:= \{(-1, 1)^T\}, \quad M_2^{(0)} := \{(1, 0)^T\}, \quad M_3^{(0)} := \{(0, 1)^T\} \\
M_1^{(k+1)} &:= (2M_1^{(k)}) \cup (2M_1^{(k)} + (1, 1)^T) \cup (2M_2^{(k)} + (1, 1)^T) \cup (2M_3^{(k)} + (1, 1)^T) \\
M_2^{(k+1)} &:= (2M_1^{(k)} + (1, 0)^T) \cup (2M_2^{(k)}) \cup (2M_2^{(k)} + (1, 0)^T) \cup (2M_3^{(k)} + (1, 0)^T) \\
M_3^{(k+1)} &:= (2M_1^{(k)} + (0, 1)^T) \cup (2M_2^{(k)} + (0, 1)^T) \cup (2M_3^{(k)}) \cup (2M_3^{(k)} + (0, 1)^T)
\end{aligned}$$

so ist

$$V_i^{(k)} = \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \bigcup_{t \in M_i^{(k)}} \mathbb{B}_2^2(t, 2^{-(k+1)}))$$

und daher

$$V_i = \sigma(\mathbb{Z}^2 \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{t \in M_i^{(k)}} \mathbb{B}_2^2(t, 2^{-(k+1)}))$$

$V_1, V_2$  und  $V_3$  sind also Bilder des Schnittes von  $\mathbb{Z}^2$  mit der Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Kugeln in  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  unter  $\sigma$ . Diese Vereinigung definieren wir als Fenster  $W_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

Der Abschluss dieser Mengen ist kompakt, denn:  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  ist kompakt (s. Anhang) und mit elementarer Topologie folgt dann aus  $\text{cl}(W_i)$  abgeschlossen,  $\text{cl}(W_i) \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  sofort:  $\text{cl}(W_i)$  ist kompakt. Weiterhin ist klar, dass das Innere der  $W_i$  nicht leer ist, denn jedes  $W_i$  enthält Kugeln  $\mathbb{B}_2^2(t, 2^{-k})$ . Diese Kugeln sind abgeschlossen und gleichzeitig offen, enthalten also innere Punkte. Also enthält auch jedes  $W_i$  innere Punkte. Die  $W_i$  erfüllen also die Bedingungen an die Fenstermengen eines CPS. Ausserdem ist jedes  $W_i$  als abzählbare Vereinigung offener Kugeln auch offen.

### 5. Erstellung des CPS

Es ist

$$W_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{t \in M_i^{(k)}} \mathbb{B}_2^2(t, 2^{-(k+1)})$$

und  $G = \widehat{\mathbb{Z}}_2^2$ . In [BMS] und [LM] wird als Gitter  $\Gamma$  einfach die diagonale Einbettung  $\Gamma := \{(q, q) \mid q \in \mathbb{Z}^2\}$  gewählt. Das ist möglich, weil die dort betrachteten Pflasterungen auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^2$  leben.

Unser Beispiel lebt auf  $\mathbb{T} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle (3/2, -\sqrt{3}/2)^T, (3/2, \sqrt{3}/2)^T \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Aus [SCH3] ist ersichtlich, dass man allgemeiner  $\Lambda := \{(q, \sigma(q)) \mid q \in \mathbb{T}\}$  setzt, wobei  $\sigma$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{T}$  auf  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  ist. Unser  $\sigma$  in (18) ist die kanonische Bijektion zwischen  $\mathbb{T}$  und  $\mathbb{Z}^2$ . Damit erhalten wir folgendes Schema:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \{(q, \sigma(q)) \mid q \in \mathbb{T}\}, \\ \sigma : \mathbb{T} &\rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2^2, \quad \sigma((q_1, q_2)^T) = (1/3(q_1 + q_2), 1/\sqrt{3}(-q_1 + q_2))^T \\ \pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \widehat{\mathbb{Z}}_2^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi_1((q_1, q_2, q_3, q_4)^T) := (q_1, q_2)^T, \\ \pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \widehat{\mathbb{Z}}_2^2 &\rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2^2, \quad \pi_2((q_1, q_2, q_3, q_4)^T) := (q_3, q_4)^T \end{aligned} \quad (19)$$

Ist  $(q_3, q_4)^T \in \mathbb{Z}^2$ , so ist  $\sigma^{-1}((q_3, q_4)^T) \in \mathbb{T}$ , wie man leicht nachrechnet. Wird ein Gitterpunkt von  $\Lambda$  also unter  $\pi_2$  in ein Fenster  $W_i \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  projiziert, so wird er unter  $\pi_1$  auf  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^2$  projiziert. Damit ist

$$V_i = \{\pi_1((q_1, q_2, q_3, q_4)^T) \mid (q_1, q_2, q_3, q_4)^T \in \Lambda, \pi_2((q_1, q_2, q_3, q_4)^T) \in W_i\}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

vollständig durch ein CPS beschrieben.  $V_1, V_2$  und  $V_3$  sind also Model Sets. Damit ist insgesamt die zur Pflasterung  $\mathcal{P}$  gegenseitig lokal ableitbare Delone–Multimenge  $V = (V_1 \cup \{z\}, V_2, V_3)$  vollständig beschrieben, und somit auch  $\mathcal{P}$  selbst.

Es gilt weiter, dass der Rand eines jeden  $W_i$  Maß 0 hat, daher ist jedes  $V_i$  sogar ein reguläres Model Set.

Denn (vgl. [BMS]): Sei  $\mu$  das Haar–Maß auf  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  mit  $\mu(\widehat{\mathbb{Z}}_2^2) = 1$ . Ist  $t \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^2$ , so ist  $\mathbb{B}_2^2(t, 2^{-k})$  eine Nebenklasse  $t + 2^k \widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  von  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  vom Index  $4^k$ . Jede dieser  $4^k$  Nebenklassen hat gleiches Haar–Maß, also  $4^{-k}$ .

Weiter gilt: Die Mengen  $V_1, V_2$  und  $V_3$  sind Vereinigungen von Mengen der Form  $r + 2^k \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ . Jede solche Menge hat relative Dichte  $4^{-k}$  bezüglich  $\mathbb{Z}^2$ . Die relative Dichte dieser Mengen ist daher dasselbe wie das Maß der Nebenklassen  $t + 2^k \widehat{\mathbb{Z}}_2^2$  von  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^2$ . Da die  $V_i$  paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung gleich  $\mathbb{Z}^2$  ist, ist auch  $\mu(W_i)$  gleich der relativen Dichte von  $V_i$  bezüglich  $\mathbb{Z}^2$ . Aus der Inflationsmatrix für die Punkte berechnet sich diese als jeweils  $1/3$ . Also ist  $\mu(W_i) = 1/3$  ( $1 \leq i \leq 3$ ).

Es ist  $W_i \cap W_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , denn die  $W_i$  wurden ja gerade aus den disjunkten Mengen  $V_i$  konstruiert. (Alle Kugeln sind offen. Läge O.B.d.A ein  $x$  in  $\mathbb{B}_2^2(t, 2^{-k}) \subseteq W_1$  und in  $\mathbb{B}_2^2(t', 2^{-k'}) \subseteq W_2$ ,  $k' \geq k$ , so wäre demnach eine Umgebung von  $x$  ganz in beiden Kugeln enthalten. Dann gäbe es auch ein Element aus  $\mathbb{Z}^2$ , das in beiden Kugeln liegt. Dieses würde dann sowohl nach  $V_1$  als auch nach  $V_2$  projiziert. Aber es ist  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .)

Nach Lemma 6.4 ist daher  $\text{cl}(W_1) \cap W_i = \emptyset$  ( $i \in \{2, 3\}$ ). Also ist  $1 = \mu(\widehat{\mathbb{Z}}_2^2) \geq \mu(\text{cl}(W_1) \cup W_2 \cup W_3) = \mu(\text{cl}(W_1)) + \mu(W_2) + \mu(W_3) \geq 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$ , folglich  $\mu(\text{cl}(W_1)) = 1/3 = \mu(W_1)$  und daher  $\mu(\text{cl}(W_1) \setminus W_1) = 0$ . Für  $W_2$  und  $W_3$  folgt die Aussage über den Rand in der gleichen Weise.  $\square$

Nun erhellt sich auch die Bedeutung der Menge  $\mathcal{N}$  in Definition 4.2: In unserem Beispiel ist es genau der zentrale Punkt  $z = ((0, 0)^T, 1)$ , der nicht durch das geschilderte CPS

erfasst wird ( $z$  entspricht den Steinen  $A$  und  $B$  in Abbildung 13). Dieser Punkt hat nach Konstruktion des Gitters  $\Lambda$  eine Entsprechung in  $\Lambda$ , d.h.: Es existiert ein  $z' \in \Lambda$  mit  $\pi_1(z') = z$ . Die Projektion  $\pi_2(z')$  dieses Punktes liegt aber in keiner der Mengen  $W_1, W_2$  und  $W_3$ . Es gilt  $\text{cl}(W_1) \cup \text{cl}(W_2) \cup \text{cl}(W_3) = \widehat{\mathbb{Z}_2^2}$ , also muss  $\pi_2(x)$  im Rand einer dieser Mengen liegen.

Ein solcher Punkt — in [SCH1] als 'singulärer' Punkt bezeichnet — muss nicht zwangsläufig auftreten. Andere Pflasterungen der betrachteten Spezies hätten zu einem CPS ohne singuläre Punkte geführt.

Es sei angemerkt, dass sich singuläre Punkte dadurch auszeichnen, dass man sie durch Punkte eines anderen Typs ersetzen kann und — bis auf 'wenige' Punkte — doch in derselben Inflationsspezies bleibt. Genauer: Ändert man den Typ eines singulären Punktes, so findet man eine Menge  $M$  von Punkten mit relativer Dichte Null in der betrachteten Delone-Multimenge, so dass man die Typen der Punkte aus  $M$  so ändern kann, dass man eine andere Delone-Multimenge derselben Inflationsspezies erhält.

In diesem Fall kann man sich leicht überlegen, dass der Typ des in Frage stehenden Punktes beliebig geändert werden — in diesem Fall also von Typ 1 in Typ 2 oder 3 — ohne dass eine Delone-Multimenge entsteht, die nicht in unserer Inflationsspezies liegt ( $M$  ist also leer). Bezogen auf die Pflasterungen heißt das: Der 2-Stein-Cluster  $\{A, B\}$  in Abbildung 13 kann um  $60^\circ$  oder  $120^\circ$  gedreht werden, die dargestellte Pflasterung liegt in derselben Inflationsspezies wie die ursprüngliche.

## 4.2 Model Sets

Nun stellt sich die Frage, welche Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor gegenseitig lokal ableitbar zu (regulären) Model Sets sind und welche nicht. Das beantwortet aufgrund des folgenden Satzes sofort die Frage, welche Pflasterungen ein Beugungsmuster aufweisen, das sich nur aus Bragg-Peaks zusammensetzt (also 'pure-point diffractive' ist) und welche nicht.

**Satz 4.1** (SCHLOTTMANN) *Ist  $D$  ein reguläres Model set, so ist  $D$  pure-point diffractive.*

Eine umfassende Antwort auf die obige Frage geben LEE und MOODY in [LM]. Sie betrachten darin Delone-Multimengen, die durch 'Gitter-Substitutionssysteme' auf einem Gitter beschrieben werden. Gitter-Substitutionssysteme sind eine kompakte Beschreibung von Punktinflationen für Spezies auf Gittern.

**Definition 4.3** *Seien  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Gitter,  $\eta > 1$  und  $\Phi_{ij}$  endliche Mengen von affinen Abbildungen  $\Gamma \rightarrow \Gamma$ ,  $x \mapsto \eta x + a$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ,  $a \in \Gamma$ ). Dann heißt  $\Phi := (\Phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  Matrix-Funktions-System (MFS) (mit Faktor  $\eta$ ) auf  $\Gamma$ .*

Das  $a$  hängt ab von  $i, j$  und der jeweiligen Abbildung aus  $\Phi_{ij}$ . Genauer müsste es also heißen:  $a_{ijk}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq \#\Phi_{ij}$ .

Ein MFS ist eine Matrix, deren Einträge Mengen von affinen Abbildungen sind. Der lineare Anteil all dieser Abbildungen ist derselbe, nämlich  $x \mapsto \eta x$ . Bezeichnen wir mit  $\mathbb{P}(\Gamma)^m$  das  $m$ -fache cartesische Produkt der Potenzmenge von  $\Gamma$ . Ein MFS auf einem Gitter  $\Gamma$  definiert dann eine Abbildung von  $\mathbb{P}(\Gamma)^m$  nach  $\mathbb{P}(\Gamma)^m$  durch

$$\Phi \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{f \in \Phi_{1j}} f(U_j) \\ \vdots \\ \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{f \in \Phi_{mj}} f(U_j) \end{pmatrix}$$

Der Zusammenhang mit Definition 2.5 und mit Delone-Multimengen wird sofort klar:  $\eta$  ist der Inflationsfaktor. Die verschiedenen Typen von Punkten in einer Delone-Multimenge entsprechen verschiedenen Positionen  $1, \dots, m$  in den Vektoren der obigen Gleichung. Die Menge  $U_j$  in dem linken Term dieser Gleichung enthält alle Punkte vom Typ  $j$ , die inflationiert werden. Die Menge  $U = (U_1, \dots, U_m)^T$  ist Teilmenge einer Delone-Multimenge.

Die  $j$ -te Spalte von  $\Phi$  beschreibt genau die Inflation des Punkttyps  $j$ .  $\Phi_{ij}$  beschreibt genau die Punkte vom Typ  $i$  in der Inflation eines Punktes vom Typ  $j$ . Die Matrix  $S = (\#\Phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  ist also die Inflationsmatrix.

Jede Inflation für Delone-Multimengen auf einem Gitter lässt sich somit in ein MFS übersetzen. Umgekehrt muss man noch zusätzliche Bedingungen stellen.

**Definition 4.4** *Es sei  $\Phi$  ein MFS auf einem Gitter  $\Gamma$ . Eine Menge  $U = (U_1, \dots, U_m)$  mit  $U_i \subseteq \Gamma$  für  $1 \leq i \leq m$  heißt Fixpunkt von  $\Phi$ , falls  $\Phi U = U$ , also falls gilt:*

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : U_i = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{f \in \Phi_{ij}} f(U_j) \quad (20)$$

*Ein Paar  $(U, \Phi)$  heißt (affines) Gitter-Substitutionssystem auf  $\Gamma$ , falls gilt:*

1.  $\Phi$  ist ein MFS auf  $\Gamma$ ,
2.  $U = (U_1, \dots, U_m)$  ist ein Fixpunkt von  $\Phi$ ,
3. die  $U_i$  sind paarweise disjunkt und
4. die Vereinigungen in (20) sind disjunkt.

Die Punkte 3. und 4. stellen sicher, dass jedem Gitterpunkt nur ein einziger Punkt (bzw. Stein) zugeordnet wird. Das  $U$  repräsentiert eine selbstähnliche Pflasterung (wie in Satz 2.12).

Die einmalige Anwendung eines MFS  $\Phi$  auf ein  $U \in \mathbb{P}(\Gamma)^m$  beschreibt genau einen Inflationsschritt. Durch die Forderung  $(\Phi \circ \Phi)U = \Phi(\Phi U)$  erhält man die Vorschrift

$$(\Phi \circ \Phi)_{ij} = \bigcup_{k=1}^m \Phi_{ik} \circ \Phi_{kj}, \text{ wobei } \Phi_{ik} \circ \Phi_{kj} := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \Phi_{ik} = \emptyset \text{ oder } \Phi_{kj} = \emptyset \\ \{g \circ f \mid g \in \Phi_{ik}, f \in \Phi_{kj}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Falle eines MFS, dessen Einträge Kardinalität 0 oder 1 haben, kann man sich das an Hand der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation folgendermaßen veranschaulichen: Statt zwei Einträge (etwa reelle Zahlen) zu multiplizieren muss man hier zwei Einträge (je eine Funktion) verknüpfen; und statt die Ergebnisse aufzuaddieren bildet man die Vereinigung.

Man weist schnell nach, dass gilt  $\Phi \circ (\Phi \circ \Phi) = (\Phi \circ \Phi) \circ \Phi$ . Daher kann man kurz schreiben:  $\Phi^n := \Phi \circ \Phi^{n-1}$  für  $n > 1$ ,  $\Phi^1 := \Phi$ . Ist  $(U, \Phi)$  ein Gittersubstitutionssystem, so auch  $(U, \Phi^n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 4.2** *Ist  $(U, \Phi)$  ein Gittersubstitutionssystem, so beschreibt  $\Phi$  eine Punktinflation für eine Spezies auf einem Gitter.*

*Ist  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eine Spezies von Delone–Multimengen auf einem Gitter, dann gibt es  $V \in \mathbf{S}$  und ein MFS  $\Phi$ , so dass  $(V, \Phi)$  ein Gittersubstitutionssystem ist.*

**Beweis:** Es ist eigentlich nichts zu zeigen. Ist  $(U, \Phi)$  ein Gittersubstitutionssystem und ist  $U = (U_1, \dots, U_m)$ , so ist  $\mathcal{F} = \{(0, 1), \dots, (0, m)\}$ . Die  $i$ -te Spalte von  $\Phi$  liefert  $\text{infl}(0, i)$ . Die Bedingungen aus Definition 4.4 garantieren, dass die so gewonnene Spezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  wohl definiert ist.

Umgekehrt enthält  $\mathbf{S}$  nach Satz 2.12 eine selbstähnliche Delone–Multimenge  $V$ . Aus  $\text{infl}((0, j))$  lassen sich  $\Phi_{1j}, \dots, \Phi_{mj}$  direkt ablesen □

Ein Gittersubstitutionssystem  $(U, \Phi)$  heißt *primitiv*, wenn die zugehörige Inflationsmatrix  $S = (\#\Phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  primitiv ist. Ein Gittersubstitutionssystem ist daher genau dann primitiv, wenn die zugehörige Spezies  $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  auf einem Gitter primitiv ist.

Damit kann man den folgenden Satz auf Delone–Multimengen und somit indirekt auf Pflasterungen übertragen. Dazu brauchen wir allerdings noch den Begriff der 'Koinzidenz'.

**Definition 4.5** *Ein MFS  $\Phi$  besitzt eine Koinzidenz, falls gilt:*

$$\exists i \in \{1, \dots, m\} : \bigcap_{j=1}^m \Phi_{ij} \neq \emptyset,$$

*also falls in einer Zeile des MFS eine Funktion  $f$  in allen Einträgen dieser Zeile vorkommt.*

**Satz 4.3** [LEE-MOODY] *Sei  $(U, \Phi)$  ein primitives Gittersubstitutionssystem auf dem Gitter  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $U = (U_1, \dots, U_m)$  mit  $\bigcup_{i=1}^m U_i = \Gamma$  und  $p \in \mathbb{N}$  der zugehörige Faktor. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\exists n \in \mathbb{N} : (U, \Phi^n)$  besitzt eine Koinzidenz.
- (ii) Die Mengen  $U_1, \dots, U_m$  sind Model Sets zu einem CPS (6) mit  $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ .
- (iii) Es existiert  $i \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}$ , so dass  $U_i$  ein Gittertranslat  $t + p^k \Gamma$  ( $t \in \Gamma$ ) enthält.

Es sei hier bemerkt, dass LEE und MOODY den Satz etwas allgemeiner formulieren: Als linearen Anteil der Funktionen in  $\Phi$  lassen sie beliebige Endomorphismen  $Q \in \text{End}(\Gamma)$  zu, für die gilt:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q^k \Gamma = \{0\}, \quad \det(Q) \neq 0$$

$Q$  kann also auch Spiegelungen, Drehungen oder Scherungen enthalten, und im Gegensatz zu unserer Forderung  $Q(x) = px$ , also  $\|Q(x)\| = p\|x\|$ , sind auch Abbildungen zugelassen, die je nach Richtung um verschiedene Werte expandieren. Beispielsweise ist  $Q(x) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x$  oder  $Q'(x) := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x$  in [LM] zugelassen, in dem hier behandelten Rahmen nicht. Das ist aber im Bezug auf Pflasterungen keine starke Einschränkung: Enthält  $Q$  etwa eine Drehung  $\sigma$ ,  $\det(\sigma) = 1$ , so gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\sigma^k = \text{id}$ , also  $\sigma^k x = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . (Wäre die Drehung nicht von endlicher Ordnung, so gäbe es unendlich viele Mustersteine bzgl. Translation.) Wegen Satz 2.9 und Lemma 4.2 kann man dann einfach die  $k$ -fach iterierte Inflation betrachten, die nun keine Drehung mehr enthält. Durch Zulassen von Drehanteilen wird die Klasse der betrachteten Inflationspflasterungen also nicht größer. Ebenso verhält es sich mit Spiegelungen: Diese sind von der Ordnung 2, also reicht es, zur 2-fach iterierten Inflation überzugehen.

Enthielte  $Q$  einen Scherungsanteil, so gäbe es eine Kante  $a$  in der Musterfamilie der Pflasterung, so dass die Superkanten  $\text{infl}^k(a)$  paarweise verschiedene Richtungen aufweisen. In den zugehörigen Pflasterungen gäbe es dann Kanten mit unendlich vielen Richtungen. Daher wäre die Musterfamilie nicht endlich bzgl. Translation. Scherungen können bei Inflationspflasterungen also gar nicht vorkommen. (Bei Punktinflationen dagegen kann man das nicht ausschließen.)

Expansive Abbildungen, die nicht in jede Richtung um denselben Faktor expandieren, können nicht ausgeschlossen werden. Solche werden tatsächlich in manchen Arbeiten in Betracht gezogen, z.B. in [PRI]. Auf diese kommen wir später noch zurück.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass in [LM] zusätzlich der Begriff der 'modularen Koinzidenz' auftaucht. Dieser ist für alles in der vorliegenden Arbeit Behandelte unwichtig, weshalb hier nicht weiter auf ihn eingegangen wird.

*Ein Beispiel*

Wir wissen schon, dass die zur Pflasterung  $\mathcal{P}$  aus Abschnitt 4.1 gehörenden Delone-Multimengen  $V = (V_1, V_2, V_3)$  aus Model Sets bestehen, denn jedes  $V_i$  lässt sich durch ein CPS erzeugen. Die Erstellung eines solchen ist aber offenbar recht aufwändig. Satz 4.3 liefert ein viel einfacher zu prüfendes Kriterium dazu: Erlaubt eine Potenz des zu  $\mathcal{P}$  gehörenden MFS eine Koinzidenz, so bestehen die zu  $\mathcal{P}$  gehörenden Delone-Multimengen aus Model Sets.

Aus der Gleichung (12) erhält man als MFS:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \{h_0, h_3\} & \{h_3\} & \{h_3\} \\ \{h_1\} & \{h_0, h_1\} & \{h_1\} \\ \{h_2\} & \{h_2\} & \{h_0, h_2\} \end{pmatrix},$$

wobei

$$h_0(x) := 2x, \quad h_1(x) := 2x + v_1, \quad h_2(x) := 2x + v_2, \quad h_3(x) := 2x + v_1 + v_2.$$

Jede der drei Zeilen von  $\Phi$  selbst weist schon eine Koinzidenz auf, man muss gar keine höheren Potenzen  $\Phi^k$  betrachten. In der ersten Zeile etwa erhält man

$$\{h_0, h_3\} \cap \{h_3\} \cap \{h_3\} = \{h_3\} \neq \emptyset,$$

also ist Bedingung (i) aus Satz 4.3 erfüllt. Daher sind die zu  $\mathcal{P}$  gehörenden Punktmen- gen Model Sets (wegen (ii)), und  $\mathcal{P}$  ist limesperiodisch (wegen (iii) und der Tatsache, dass das Gittersubstitutionssystem primitiv ist. Daraus folgt, dass  $\mathcal{P}$  Vereinigung kristallographischer Punktmen- gen ist, vgl. [LM], Thm. 4).

Betrachtet man nun eine Pflasterung, die nicht gegenseitig lokal ableitbar zu einer aus Model Sets bestehenden Delone-Multimenge ist, und will man dies mit Satz 4.3 beweisen, so muss man zeigen: Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $\Phi^k$  weist keine Koinzidenz auf. Das ist ohne Weiteres nicht in endlicher Zeit zu entscheiden.

Wir geben im nächsten Abschnitt einfach zu überprüfende, hinreichende Bedingungen dafür, dass eine durch eine Inflation gegebene Delone-Multimenge nicht aus Model Sets besteht.

### 4.3 Wann ist eine Punktmenge kein Model Set?

Im folgenden sei  $\mathcal{P}$  immer eine  $d$ -dimensionale Pflasterung aus einer primitiven In- flationsspezies auf einem Gitter  $\Gamma = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Mit  $p$  bezeichnen wir den — zwangsläufig ganzzahligen — Inflationsfaktor.  $\mathcal{P}$  sei gegenseitig lokal ableitbar zur Delone-Multimenge  $V = (V_1, \dots, V_m)$ . Diese kann so gewählt werden, dass  $V_i \cap V_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und — nach Satz 3.11 — gilt:  $\bigcup_{i=1}^m V_i = \Gamma$ .

Nach Satz 3.12 lässt sich  $V$  durch eine primitive Inflation beschreiben, die jedem Punkt eine Menge von  $p^d$  Punkten zuordnet. Stellt man sich den zu inflationierenden Punkt

$(t, i)$  als Mittelpunkt eines Fundamentalparallelotops  $F$  von  $\Gamma$  vor, so liegen die Punkte aus  $\text{infl}((t, i))$  in den Mittelpunkten von  $p^d$  Fundamentalparallelotopen, deren Vereinigung ein Translat von  $pF$  ist. Insbesondere sind die Inflationen aller Punkte paarweise kongruent, wenn man von den verschiedenen Punkttypen absieht.

**Definition 4.6** *Es seien  $A = (A_1, \dots, A_m)$  und  $B = (B_1, \dots, B_m)$  zwei Cluster einer Delone-Multimenge mit  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ .*

*Dann ist  $A \sqcap B := \{x \mid x \in \text{tr}(A) = \text{tr}(B), x \in A_i \wedge x \in B_i\}$ .*

$A \sqcap B$  liefert also die Menge der Punkte, bei denen das Attribut (also die 'Farbe') in  $A$  und  $B$  übereinstimmt. Man beachte:  $A$  und  $B$  sind Teilmengen von Delone-Multimengen — also Teilmengen von  $\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d$  —, aber  $A \sqcap B$  ist eine einfache Punktmenge in  $\mathbb{R}^d$ . Genau genommen ist diese Bezeichnung deshalb etwas inkonsistent. Vor dem Hintergrund, dass wir eine Delone-Multimenge als eine gefärbte Punktmenge in  $\mathbb{R}^d$  auffassen, ist diese Bezeichnung aber sinnvoll.

**Satz 4.4** *Sei  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eine primitive Spezies nichtperiodischer Delone-Multimengen auf einem Gitter  $\Gamma_0 = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ , und sei  $V = (V_1, \dots, V_m) \in \mathbf{S}$ .*

*Gilt für alle  $1 \leq i < j \leq m$ :  $\text{infl}((0, i)) \sqcap \text{infl}((0, j)) = \emptyset$ , so enthält kein  $V_i$  ein Translat eines  $d$ -dimensionalen Gitters.*

**Beweis:** Sei  $V = (V_1, \dots, V_m) \in \mathbf{S}$  und  $p$  der — nach Satz 3.7 ganzzahlige — Inflationsfaktor.

Annahme: Es gibt ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  und ein Translat eines  $d$ -dimensionalen Gitters  $\Gamma' + t \subseteq \Gamma_0$  mit  $\Gamma' \subseteq V_i$ . Wir können uns o.B.d.A. auf  $t = 0$  beschränken, und überdies auf  $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^d$ , denn: Sei  $\pi$  die Bijektion

$$\pi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \Gamma_0, \pi((\lambda_1, \dots, \lambda_d)^T) \mapsto \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d.$$

Es gibt ein Gitter  $\Gamma' \subseteq V_i$  genau dann, wenn es ein Gitter  $\pi^{-1}(\Gamma') \subseteq \pi^{-1}(V_i) \subseteq \mathbb{Z}^d$  gibt.

Dann gibt es auch ein Gitter  $\Gamma = \langle w_1, \dots, w_d \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \pi^{-1}(V_i)$  mit achsenparallelen Basisvektoren  $w_i = \mu_i e_i$  ( $\mu_i \in \mathbb{N}$ ,  $e_i$  die kanonischen Einheitsvektoren).

Denn: Die Erzeugermatrix  $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$  von  $\pi^{-1}(\Gamma')$  ist regulär und ganzzahlig. Daher gilt:  $M^{-1} \in \mathbb{Q}^{d \times d}$ . Sei  $z_i := M^{-1} e_i$ . Es ist  $z_i \in \mathbb{Q}^d$ , daher gibt es  $\mu_i \in \mathbb{N}$ , so dass  $\mu_i z_i \in \mathbb{Z}^d$ . Dann ist  $M \mu_i z_i \in \pi^{-1}(\Gamma)$ .  $\{M \mu_1 z_1, \dots, M \mu_d z_d\} = \{\mu_1 e_1, \dots, \mu_d e_d\}$  spannt dann das gesuchte Untergitter  $\Gamma \subseteq \pi^{-1}(\Gamma')$  auf.

Aus

$$\forall 1 \leq i < j \leq m : \text{infl}(\{\{0\}, i\}) \sqcap \text{infl}(\{\{0\}, j\}) = \emptyset$$

folgt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \forall 1 \leq i < j \leq m : \text{infl}^k(\{\{0\}, i\}) \sqcap \text{infl}^k(\{\{0\}, j\}) = \emptyset$$

Denn: Für  $k = 1$  gilt die Aussage. Gilt sie für ein  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt sie auch für  $k + 1$ : An den  $p^d$  verschiedenen Positionen der Superelemente<sup>10</sup>  $k$ -ter Ordnung in  $\text{infl}^{k+1}(0, i)$  und in  $\text{infl}^{k+1}(0, j)$  liegen jeweils verschiedene Superelemente vom Typ  $\text{infl}^k(0, i_\nu), \text{infl}^k(0, j_\nu)$ . Für all diese Paare gilt  $\text{infl}^k(0, i_\nu) \cap \text{infl}^k(0, j_\nu) = \emptyset$ , also auch für die Superelemente  $(k + 1)$ -ter Ordnung.

Anders formuliert: Kennt man den Typ eines einzigen Punktes  $z$  in  $V$ , zusätzlich aber auch die relative Lage der Superelemente zu ihm, so sind die Typen aller Superelemente, die  $z$  enthalten, eindeutig bestimmt.

$V$  ist nichtperiodisch und — als Delone-Multimenge auf einem Gitter — von lokal endlicher Komplexität, also liegt nach Satz 2.5 die Lage aller Superelemente eindeutig fest. Die obige Situation ist also gegeben: Kennt man den Typ eines Punktes  $z$ , so kennt man auch die Typen aller  $z$  enthaltenden Superelemente.

Daraus folgt:

(A): Gilt für zwei Superelemente  $k$ -ter Ordnung, sagen wir  $A$  und  $B$ , mit  $\text{tr}(A) + t = \text{tr}(B)$ :  $(A + t) \cap B \neq \emptyset$ , so sind  $A$  und  $B$  vom selben Typ.

Ist nun  $z^{(0)} \in \Gamma$ , so liegen alle Punkte  $z^{(0)} + \sum_{i=1}^d \lambda_i w_i$  ( $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ ) in  $\Gamma$ , also auch in  $\pi^{-1}(V_i)$ . Sie sind also alle vom selben Typ. Liegt  $z^{(0)} + \sum_{i=1}^d \lambda_i w_i$  in derselben relativen Position in Superelementen  $\text{infl}(t'_1, j'_1), \dots, \text{infl}^k(t'_k, j'_k)$  wie  $z^{(0)}$  in Superelementen  $\text{infl}(t_1, j_1), \dots, \text{infl}^k(t_k, j_k)$ , so sind wegen (A) die Typen dieser Superelemente identisch, d.h. es ist  $j'_i = j_i$  für  $1 \leq i \leq k$ . Die relative Position kann man beschreiben 'modulo  $p^k$ ': Zwei Punkte  $z = (z_1, \dots, z_d)^T, z' = (z'_1, \dots, z'_d)^T$  liegen in derselben relativen Position bzgl. der sie enthaltenden Superelemente  $k$ -ter Ordnung, falls gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} : z'_i \equiv z_i \pmod{p^k}$$

Sei  $w_{max} := \max_{1 \leq i \leq d} \{\|w_i\|\}$  die Länge des längsten Periodenvektors von  $\Gamma$ . Wähle  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $p^k > w_{max}$ . Dann liegt in jedem Superelement  $k$ -ter Ordnung in  $V$  ein Punkt  $z \in \Gamma$  und legt den Typ des Superelements somit fest.

Sei nun  $z \in \Gamma$ .  $z = (z_1, \dots, z_d)^T$  liegt in einem Superelement  $\text{infl}^k(t_z, j_z)$ . Für alle Punkte  $z' = (z'_1, \dots, z'_d)^T$  in  $z + p^k \Gamma = \{z \mid z = \sum_{i=1}^d \lambda_i p^k w_i, \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$  gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} : z'_i = z_i + \lambda_i p^k \|w_i\| \equiv z_i \pmod{p^k}$$

Alle Superelemente  $k$ -ter Ordnung, in denen ein  $z' \in z + p^k \Gamma$  liegt, sind somit vom selben Typ. Also ist  $K_1 := \text{infl}^k(t_z, j_z) + p^k \Gamma$  eine kristallographische Teilmenge von  $\pi^{-1}(V)$ <sup>11</sup>, und zwar mit relativer Häufigkeit  $1/(\|w_1\| \|w_2\| \cdots \|w_d\|)$  bzgl.  $\pi^{-1}(\text{tr}(V))$ , wie man leicht errechnet.

<sup>10</sup>Superelement heißt: Eine Menge der Form  $\text{infl}^k((t, i))$  (vgl. Erläuterung zu Def. 2.13, S. 43)

<sup>11</sup> $\pi^{-1}(V)$  soll hier wieder aufgefasst werden als gefärbte Punktmenge in  $\mathbb{R}^d$

Wählen wir nun einen weiteren Punkt  $\tilde{z} \in \Gamma$ , der nicht in  $K_1$  liegt. Dieser liegt auch in einem Superelement  $k$ -ter Ordnung, und genau wie eben erhält man eine weitere kristallographische Steinmenge  $K_2 := \text{infl}^k(t_{\tilde{z}}, j_{\tilde{z}}) + p^k\Gamma$ , wobei  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ . Wählen wir also nacheinander  $\ell = \|w_1\| \|w_2\| \cdots \|w_d\|$  verschiedene Punkte in  $\Gamma$ , die in keiner der bisher konstruierten Mengen  $K_i$  liegen, so erhalten wir paarweise disjunkte Mengen  $K_1, \dots, K_\ell$ . Jede hat relative Häufigkeit  $1/\ell$  bzgl.  $\text{tr}(V)$ , jede ist Vereinigung von Superelementen  $k$ -ter Ordnung. Jeder Punkt von  $V$  gehört zu irgendeinem Superelement  $k$ -ter Ordnung, also ist

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} K_i = V$$

Jedes einzelne  $K_i$  hat  $d$  Periodenvektoren:  $p^k w_1, \dots, p^k w_d$ . Also hat auch die Vereinigung  $V$  diese als Perioden, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $V$  nichtperiodisch ist.  $\square$

In der Terminologie von LEE und MOODY kann man das folgendermaßen ausdrücken:

**Korollar 4.5** *Sei  $(V, \Phi)$  ein primitives Gittersubstitutionssystem auf  $\Gamma_0 \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $V = (V_1, \dots, V_m)$ ,  $\bigcup_{i=1}^m V_i = \Gamma_0$ ,  $V$  nichtperiodisch und  $p \in \mathbb{N}$  der zugehörige Faktor. Dann gilt: Sind für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  die  $\Phi_{ij}$  paarweise disjunkt ( $1 \leq j \leq m$ ), so enthält kein  $V_i$  ein Translat eines Gitters. Kein  $V_i$  ist daher ein Model Set.*

Die Nichtperiodizität ist dabei eine entscheidende Voraussetzung. Betrachten wir das eindimensionale Beispiel  $a \rightarrow aba$ ,  $b \rightarrow bab$ . Es liefert periodische Pflasterungen der Form  $\dots abababab \dots$ . Der Inflationsfaktor ist 3. Eine dazu gegenseitig lokal ableitbare Delone–Multimenge ist etwa  $V := (V_1, V_2) := (2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1)$ . Als periodische Punkt-mengen sind  $V_1$  und  $V_2$  Model Sets.

Das zugehörige Matrixfunktionssystem ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \{h_0, h_2\} & \{h_1\} \\ \{h_1\} & \{h_0, h_2\} \end{pmatrix}, \quad h_i(x) := 3x + i \quad (i \in \{0, 1, 2\})$$

Die Elemente der beiden Zeilen haben jeweils leeren Schnitt. Würde im Korollar auf die Voraussetzung 'nichtperiodisch' verzichtet, so würde es besagen, dass weder  $V_1$  noch  $V_2$  ein Translat eines Gitters enthalten, und dass es keine Model Sets sind. Beides ist offenbar falsch.

Mit etwas Aufwand kann man nachweisen, dass keine Potenz dieses MFS eine Koinzidenz aufweist. Nach Satz 4.3 sind daher  $V_1$  und  $V_2$  nicht aus einem CPS der Form (6) zu erhalten mit  $G = \widehat{\mathbb{Z}}_3$ . Das heißt nicht, dass sie mit keinem CPS zu erzeugen sind: Für  $V_1$  genügt etwa  $G := \emptyset$ ,  $L := 2\mathbb{Z}$ .

Für nichtperiodische Pflasterungen liefert Satz 4.4 bzw. Korollar 4.5 nun ein einfaches hinreichendes Kriterium, um zu entscheiden, dass die zugehörigen Delone–Multimengen keine Model Sets sind. Zwei bekannte Beispiele, auf die dieses Kriterium anwendbar

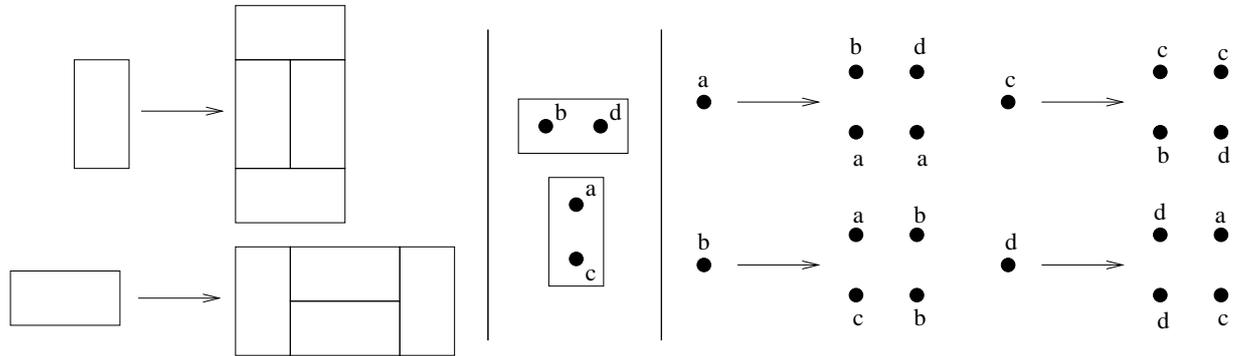


Abbildung 16: Die Inflationsregel für die Dominotilings, die Regel zur gegenseitig lokalen Ableitbarkeit sowie die Inflationsregel für die entsprechenden Delone–Multimengen

ist, sind die Thue–Morse–Sequenzen und die Dominotilings. (Von beiden ist bekannt, dass sie nicht aus Model sets bestehen, siehe etwa [SOL1], [GK]).

Die Thue–Morse–Sequenzen lassen sich auffassen als eine Spezies von eindimensionalen Pflasterungen oder auch von Delone–Multimengen auf dem Gitter  $\mathbb{Z}$ . Die zugrundeliegende Inflation ist gegeben durch  $\text{infl}(a) = ab$ ,  $\text{infl}(b) = ba$ . Dabei lassen sich  $a$  und  $b$  interpretieren als Intervalle der Länge 1 oder auch als farbige Punkte in  $\mathbb{Z}$ . Jedenfalls gilt offensichtlich  $\text{infl}(a) \cap \text{infl}(b) = \emptyset$ , also bestehen die Thue–Morse–Sequenzen nicht aus Model Sets.

Die Inflation für die Dominotilings ist in Abb. 16 dargestellt, zusammen mit einer Inflation für eine zu den Dominotilings gegenseitig lokal ableitbare Delone–Multimenge. Beide leben auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^2$ . Offensichtlich ist auch hier das Kriterium erfüllt, die Dominotilings bzw. die entsprechenden Delone–Multimengen bestehen nicht aus Model Sets.

Es gibt aber auch Pflasterungen, deren zugehörige Delone–Multimengen nicht aus Model Sets bestehen, auf die aber Satz 4.4 nicht anwendbar ist. Ein Beispiel sind die von N. PRIEBE in [PRI] untersuchten Gitterpflasterungen, die sich mittels Hadamardmatrizen definieren lassen. Eine Hadamardmatrix  $H$  ist eine  $n \times n$ –Matrix, in der jeder Eintrag entweder 1 oder  $-1$  ist und deren Zeilen paarweise orthogonal sind. Zum Beispiel ist

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Hadamardmatrix. Hadamardmatrizen existieren zu  $n = 2$  und  $n = 4k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Für die Inflation wählt man als Musterfamilie  $\mathcal{F} := \{1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$ . Die Gestalt der Inflationsvorschrift ist für jedes  $j \in \mathcal{F}$  — unter Vernachlässigung der Balken —  $\text{infl}(j) = 1 \ 2 \ \dots \ n$ .

Als Regel zum Setzen der Balken gilt: Für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  bekommt das Symbol an

der Stelle  $j$  in  $\text{infl}(i)$  einen Balken, falls der Eintrag  $H_{ij} = -1$  ist und keinen Balken, falls  $H_{ij} = 1$ . Für  $i \in \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$  gilt genau umgekehrt: das Symbol an der Stelle  $j$  in  $\text{infl}(\bar{i})$  hat einen Balken, falls der Eintrag  $H_{ij} = 1$  ist und keinen Balken, falls  $H_{ij} = -1$ . Die obige Matrix  $H_4$  etwa liefert als Inflationsvorschrift:

$$\begin{array}{ll}
 1 \rightarrow 123\bar{4} & \bar{1} \rightarrow \bar{1}\bar{2}\bar{3}4 \\
 2 \rightarrow 12\bar{3}4 & \bar{2} \rightarrow \bar{1}\bar{2}3\bar{4} \\
 3 \rightarrow 1\bar{2}34 & \bar{3} \rightarrow \bar{1}2\bar{3}\bar{4} \\
 4 \rightarrow \bar{1}234 & \bar{4} \rightarrow 1\bar{2}\bar{3}\bar{4}
 \end{array} \tag{21}$$

Diese Vorschrift liefert zunächst einmal eine eindimensionale nichtperiodische Pflasterung. Sie lässt sich nach dem folgenden Schema aber einfach auf 2 Dimensionen übertragen.

$$\boxed{i} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Ein jedes Symbol entspricht damit einem Quadrat. Unter der Inflation werden aus einem Quadrat vier Quadrate, die zusammen ein großes bilden. Die Ziffern entsprechen den Positionen in dem großen Quadrat. Die Balken werden aus (21) übernommen. Hier ist offensichtlich, wie die Inflation für die dazugehörige Delone–Multimenge aussieht.

Generell kann man auf ähnliche Weise die Pflasterungen von N. PRIEBE auf höhere Dimensionen übertragen: Ist  $n = k^d$ , so entspricht jedes Symbol einem  $d$ -dimensionalen Würfel der Kantenlänge 1, der unter der Inflation in  $k^d$  Würfel übergeht, die zusammen einen Würfel der Kantenlänge  $k$  bilden.

Noch allgemeiner kann man die Inflation derart formulieren, dass jedes Symbol einem  $d$ -dimensionalen Würfel der Kantenlänge 1 entspricht, der unter der Inflation in  $k^\ell$  Würfel übergeht, die zusammen einen Quader mit Kantenlängen  $k^{\ell_1}, \dots, k^{\ell_d}$  bilden. Damit verlässt man den hier behandelten Rahmen, in denen die Inflation in jede Richtung um denselben Faktor expandiert (vgl. die Diskussion hinter Satz 4.3).

Offenbar ist Satz 4.4 nicht auf diese Pflasterungen anwendbar. Es gilt zwar  $\text{infl}(1) \cap \text{infl}(\bar{1}) = \emptyset$ , aber beispielsweise  $\text{infl}(1) \cap \text{infl}(2) = \{1, 2\} \neq \emptyset$ . Der folgende Satz liefert aber ein Kriterium, mit dem man auch von diesen Pflasterungen — bzw. den entsprechenden Delone–Multimengen — zeigen kann, dass sie nicht aus Model Sets bestehen.

**Satz 4.6** Sei  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$  eine primitive Spezies von Delone–Multimengen auf einem Gitter  $\Gamma_0 = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ , und sei  $V = (V_1, \dots, V_m) \in \mathbf{S}$ .  $V$  enthalte eine 1-periodische Sequenz  $S$  aus Steinen der Typen  $A$  und  $B$  von folgender Gestalt:

$$\dots xAxBxAx \dots xAxBxAx \dots xAxBxAx \dots xAxBxAx \dots$$

und mit folgenden Eigenschaften:

1.  $x$  steht für einen Zwischenraum fester Länge aus  $r - 1$  Punkten beliebigen Typs, die nicht zu  $S$  gehören.
2. Die Richtung von  $S$  ist  $u_i$ . (Genauer: Der Träger von  $S$  ist eine äquidistante Punktmenge, wobei je zwei benachbarte Punkte in  $S$  Abstand  $r\|u_i\|$  haben und die konvexe Hülle von  $S$  ein Translat von  $\langle u_i \rangle_{\mathbb{R}}$  ist.)
3. Auf je  $\ell - 1$  Punkte vom Typ  $A$  folgt immer einer vom Typ  $B$ , wobei gelte:  $\text{infl}(A) \cap \text{infl}(B) = \emptyset$ .

Dann enthält kein  $V_i$  ein Translat eines  $d$ -dimensionalen Gitters, dessen Periode entlang dieser Sequenz eine Länge der Gestalt  $p^k nr\|u_i\|$ ; ( $k \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \ell\mathbb{N}$ ) hat. Auch keine andere Delone-Multimenge der Spezies  $\mathbf{S}$  zu dieser Punktinflation enthält ein solches Gitter.

Zur Verdeutlichung zunächst ein Beispiel: Ein Ausschnitt aus einer durch (21) erzeugten zweidimensionalen Pflasterung ist

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & 1 & 2 \\
 3 & 4 & \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{4} & 3 & 4 & \bar{3} & \bar{4} & 3 & 4 & 3 & 4 & \bar{3} & \bar{4} \\
 1 & \bar{2} & 1 & \bar{2} & \bar{1} & 2 & \bar{1} & 2 & 1 & \bar{2} & 1 & \bar{2} & \bar{1} & 2 & \bar{1} & 2 \\
 3 & \bar{4} & \bar{3} & 4 & 3 & \bar{4} & \bar{3} & 4 & 3 & \bar{4} & \bar{3} & 4 & 3 & \bar{4} & \bar{3} & 4 \\
 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2
 \end{array}$$

In der unteren Zeile sieht man eine Sequenz aus 1 und 2. In höheren Inflationen dieses Clusters entstehen in der untersten Zeile immer längere solcher periodischer Sequenzen aus 1 und 2. Es gibt daher in der Spezies eine Pflasterung mit einer unendlichen Sequenz dieser Form. Zwangsläufig hat die Zeile darüber die Form  $\dots 3\bar{4}\bar{3}4\bar{3}\bar{4}3\bar{4}\bar{3}4\dots$ . Diese Sequenz erfüllt die Voraussetzung des Satzes: Vernachlässigt man die Symbole 4 und  $\bar{4}$ , so ergibt sich die Form  $\dots 3x\bar{3}x3x\bar{3}x3x\bar{3}\dots$ . Die 3 entspricht dem  $A$ , die  $\bar{3}$  dem  $B$ , es ist  $r = 2$  und  $\ell = 2$ .

Es folgt: In der zur Pflasterung gehörende Delone-Multimenge  $V = (V_1, \dots, V_8)$  enthält kein  $V_i$  ein Gitter, dessen Periode in Richtung dieser Sequenz eine Länge der Gestalt  $2^k n 2$  ( $k \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ ) hat. Das heißt, die Periode hat keine Länge der Form  $n2^k$  ( $k \geq 1$ ,  $n \in 2\mathbb{N} - 1$ ). Kein  $V_i$  enthält also ein Gitter, das eine Periode gerader Länge in Richtung dieser Sequenz besitzt.

Daraus folgt, dass kein  $V_i$  ein Gitter enthält. Denn: Wäre das falsch, so hätte das entsprechende Gitter  $d$  linear unabhängige Perioden. Analog zur Argumentation im Beweis zu Satz 4.4 gäbe es dann auch ein Gitter mit achsenparallelen Perioden, also mit einer Periode in Richtung der genannten Sequenz. Aufgrund der speziellen Form der Inflationsvorschrift kann diese Periode aber nur gerade Länge haben. (Denn unter Vernachlässigung der Balken hat jede Zeile die Form  $\dots 121212\dots$  oder  $\dots 343434\dots$ , Perioden in dieser Richtung mit ungerader Länge sind also nicht möglich.) Das ist ein Widerspruch zur obigen Feststellung. Also sind die  $V_i$  nach Satz 4.3 keine Model Sets.

Satz 4.6 stellt also ein weiteres Kriterium bereit, das man nutzen kann, um von Pflasterungen bzw. den entsprechenden Delone–Multimengen zu zeigen, dass sie keine Model Sets sind.

**Beweis:** (des Satzes) Sei  $V = (V_1, \dots, V_m) \in \mathbf{S}$  und  $p$  der — nach Satz 3.7 ganzzahlige — Inflationsfaktor.

Annahme: Es gibt ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  und ein Translat eines  $d$ -dimensionalen Gitters  $\Gamma' + t \subseteq V_i$ . Wie im Beweis zu Satz 4.4 können wir uns auf  $t = 0$  und  $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^d$  beschränken. Dazu betrachten wir wieder die Bijektion

$$\pi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \Gamma_0, \pi((\lambda_1, \dots, \lambda_d)^T) \mapsto \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d.$$

Das Bild  $\pi^{-1}(S) \subseteq \mathbb{Z}^d$  ist wieder eine periodische Sequenz, und zwar von derselben Struktur wie  $S$ . Unter  $\pi$  wird  $u_i$  auf einen kanonischen Einheitsvektor abgebildet. Es ist also  $\|\pi(u_i)\| = 1$ .

Es gibt ein Gitter  $\Gamma' \subseteq V_i$  genau dann, wenn es ein Gitter  $\pi^{-1}(\Gamma') \subseteq \pi^{-1}(V_i) \subseteq \mathbb{Z}^d$  gibt.

Ist letzteres der Fall, so gibt es — aufgrund desselben Arguments wie im Beweis zu Satz 4.4 — auch ein Gitter  $\Gamma = \langle w_1, \dots, w_d \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \pi^{-1}(V_i)$  mit achsenparallelen Basisvektoren  $w_i = \mu_i e_i$  ( $\mu_i \in \mathbb{N}$ ,  $e_i$  die kanonischen Einheitsvektoren). Daher gibt es auch eine Periode von  $\Gamma$ , die dieselbe Richtung wie die 1-periodische Sequenz  $\pi^{-1}(S)$  hat. Diese Periode sei O.B.d.A.  $w_1$ . Wir werden zeigen, dass  $\Gamma$  keine solche Periode der Länge  $p^k n r$  — wobei  $k \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \ell\mathbb{N}$  — besitzt.

Es ist  $\pi^{-1}(S) \subseteq \mathbb{Z}^d$ , alle Punkte aus  $\pi^{-1}(S)$  liegen auf einer Geraden und der Abstand zweier benachbarter Punkte in  $\pi^{-1}(S)$  ist 1. Die Spezies  $\mathbf{S}$  zur Punktinflation ist primitiv, nach Satz 2.13 also auch schwach repetitiv. Da  $V$  die Sequenz  $S$  enthält, enthält jedes  $V'$  der Spezies jeden endlichen Abschnitt von  $S$ . Also enthält jedes  $V' \in \mathbf{S}$  eine endliche Sequenz der Gestalt  $\dots xAxBxAx \dots xAxBxAx \dots$  von beliebiger Länge, ebenso  $\pi^{-1}(V')$ .

Nach Satz 2.12 enthält  $\mathbf{S}$  auch eine selbstähnliche Delone–Multimenge. Diese enthält ebenfalls beliebig lange endliche Sequenzen  $S' \sqsubseteq S$ . Aufgrund der Selbstähnlichkeit somit auch beliebig lange Sequenzen  $\text{infl}(S'), \text{infl}^2(S'), \dots$ . Wegen der Repetitivität überträgt sich das auf jede Pflasterung in  $\mathbf{S}$ . Daher enthält auch jede zugehörige Delone–Multimenge  $\pi^{-1}(V)$  eine beliebig lange Sequenz dieser Gestalt, wobei der Abstand benachbarter Punkte genau  $p^k$  beträgt.

Angenommen, die Periode von  $\Gamma$ , die dieselbe Richtung wie  $S$  hat, hat Länge  $p^k n r$ , wobei  $k \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \ell\mathbb{N}$ .

Sei  $z \in \Gamma$  ein Gitterpunkt, der in einem Superelement  $\text{infl}^k(B)$  in einer Sequenz  $\text{infl}^k(S')$  liegt. (Ein solches  $z$  muss es auf Grund der Primitivität geben, wenn  $k$  groß genug ist.) Nun sind die Punkte  $z + \lambda p^k w_1$  ( $\lambda \in \mathbb{Z}$ ) auch in  $\Gamma$  enthalten, also sind sie alle vom selben Typ wie  $z$ . Alle Punkte  $z + \lambda p^k w_1$  ( $\lambda \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ ) liegen überdies in Superelementen  $k$ -ter Ordnung an der selben relativen Position wie  $z$ .

Weiterhin liegt  $z + \lambda p^k r w_1$  — wegen der Rolle von  $r$  — für jedes  $\lambda \in \mathbb{Z}$  in der Sequenz  $\text{infl}^k(S')$  auf jeden Fall in Superelementen vom Typ  $\text{infl}^k(A)$  oder  $\text{infl}^k(B)$ , jeweils an der selben relativen Position wie  $z$ . Wegen  $\text{infl}^k(A) \cap \text{infl}^k(B) = \emptyset$  und  $z \in \Gamma$  liegt  $z$  also in einem Superelement vom Typ  $\text{infl}^k(B)$ .

Andererseits gilt: Ist  $\|\lambda p^k w_1\| = |\lambda p^k \mu_1|$  nicht durch  $\ell p^k$  teilbar, so liegt  $z + \lambda p^k r w_1$  auf Grund der Gestalt von  $S$  — bzw. in diesem Falle  $\text{infl}^k(S')$  — und der Rolle von  $\ell$  in einem Superelement vom Typ  $\text{infl}^k(A)$ , und zwar an der selben relativen Position wie  $z$ . Damit wäre der Widerspruch vollendet. Man überlegt nur noch Folgendes:

Wenn  $\mu_1$  durch  $\ell$  teilbar ist, dann sind wir in dem Fall, dass die Periode von  $\Gamma$  in Richtung  $w_1 = \mu_1 e_1$  die Länge  $\nu p^k \ell r$ , ( $\nu \in \mathbb{Z}$ ) hat. Dieser Fall interessiert uns nicht.

Ist  $\mu_1$  nicht durch  $\ell$  teilbar, so kann  $\lambda$  auf jeden Fall so gewählt werden, dass  $\|\lambda p^k \mu_1\|$  nicht durch  $\ell p^k$  teilbar ist, also etwa  $\lambda$  teilerfremd zu  $\ell$ .

Somit ist tatsächlich ein Widerspruch konstruiert.  $\Gamma$  besitzt also in Richtung  $w_1 = \mu e_1$  keine Periode der Länge  $p^k n r$  — wobei  $k \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \ell \mathbb{N}$  —, also ist in keinem  $\pi^{-1}(V_i)$  ein Gitter mit einer solchen Periode enthalten.

Es sei noch angemerkt: Wir haben oben  $k$  so groß gewählt, dass ein Superstein  $k$ -ter Ordnung auf jeden Fall einen Gitterpunkt enthält. Das ist aber keine Einschränkung an  $k$ , wie es hier benutzt wird: Besitzt  $\Gamma$  eine Periode der Länge  $p^{k'} n r$  für irgendein  $0 \leq k' \leq k$ , so auf Grund der Inflation auch eine der Länge  $p^k n r$ .

Somit ist auch in  $V_i$  kein Gitter  $\Gamma'$  mit einer Periode in Richtung  $u_1$  der Länge  $p^k n r \|u_1\|$  — wobei  $k \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \ell \mathbb{N}$  — enthalten und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

An dieser Stelle sei es erlaubt, die wesentlichen Punkte dieser Arbeit zusammenzufassen und einige interessante aus ihr erwachsende Fragestellungen anzuführen.

Der Hauptgegenstand der hier gemachten Untersuchungen sind Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor. Durch die Sätze 2.12 und 2.18 und Lemma 4.2 wurde für diesen Kontext der Zusammenhang hergestellt zwischen selbstähnlichen Pflasterungen, Inflationspflasterungen, selbstähnlichen Punktmengen bzw. Delone–Multimengen, durch Inflation erzeugte Punktmengen bzw. Delone–Multimengen und Gittersubstitutionssystemen. Damit übertragen sich etliche Aussagen — sei es aus dieser oder aus anderen Arbeiten — die eines dieser Objekte betreffen, auf alle eben genannten Objekte. Das kann zur Bändigung der Begriffsvielfalt in den verschiedenen Arbeiten über nichtperiodische Pflasterungen seinen Teil beitragen.

Darüber hinaus gaben die beiden großen Fragen im Bezug auf nichtperiodische Strukturen — 'Wann ist eine Struktur von lokal endlicher Komplexität?' und 'Wann ist eine Struktur ein Model Set?' — die Richtung vor. Kapitel 3 ist der ersten dieser beiden Fragen gewidmet, in dem hier betrachteten engeren Kontext von Strukturen mit ganzzahligem Inflations- oder Ähnlichkeitsfaktor. Die dort benutzten geometrischen Argumente liefern, im Falle von polytopalen Mustersteinen, vier Kriterien für lokal endliche Komplexität (Sätze 3.4, 3.5, 3.9 und Korollar 3.10). Diese decken zwar alle bisher bekannten Beispiele ab, aber es kann nicht ausgeschlossen werden, dass zu Vermutung 3.1 ein Gegenbeispiel existiert. Es ist offen, ob die hier benutzten Methoden dazu eine Antwort liefern. Sie führen aber zu interessanten, rein geometrischen Problemen. Eines ist Vermutung 3.2. Ein weiteres ergibt sich im Zusammenhang mit Satz 3.9: Warum stellt man die Bedingung, dass die Eckpunkte der Steine in einem Gitter liegen, an die Steine in der ersten Inflation und nicht an die Mustersteine selbst? Das könnte man, wenn folgende Frage negativ beantwortet werden kann:

**Problem:** *Existiert eine aus Polytopen bestehende Pflasterung, in der es eine Steinecke gibt, an der keine weiteren Steinecken liegen?*

Dann nämlich kann man jede Steinecke im Inneren der ersten Inflation eines jeden Steins durch einen Weg, der sich aus kompletten Kanten zusammensetzt, mit jeder äußeren Ecke verbinden. Man überlegt sich schnell, dass dann, wenn die äußeren Ecken in einem Gitter liegen, die inneren Eckpunkte ebenfalls in diesem Gitter liegen.

Für Dimension 2 ist das Problem negativ zu beantworten, vermutlich auch für Dimension 3. In diesen Fällen können also die Voraussetzungen von Satz 3.9 und Korollar 3.10 auf die geschilderte Art abgeschwächt werden.

Die Frage 'Wann ist eine Struktur von lokal endlicher Komplexität?' wird für Inflationspflasterungen mit ganzzahligem Faktor vielleicht mit der Fortführung der hier benutzten Methoden zu beantworten sein. Für einen allgemeineren Kontext, also Pflasterungen mit beliebigem Inflations- bzw. Ähnlichkeitsfaktor, oder für Pflasterungen

ganz allgemein, ist eine umfassende Antwort nicht in Sicht (vgl. [LAP2], [DAN5]).

Die zweite große Frage, wann eine Struktur ein Model Set ist, ist in unserem Rahmen durch das notwendige und hinreichende Kriterium von LEE und MOODY (Satz 4.3) im Wesentlichen schon beantwortet. Die vorliegende Arbeit liefert zusätzlich zwei hinreichende Kriterien dafür, dass eine Struktur kein Model Set ist und ergänzt so das Kriterium von LEE und MOODY, welches eben, falls die betrachtete Struktur kein Model Set ist, einen nicht terminierenden Algorithmus liefert.

Es lassen sich aber immer noch Pflasterungen angeben, für die weder die beiden in dieser Arbeit vorgestellten Kriterien greifen, noch das Kriterium von LEE und MOODY in vernünftiger Zeit eine Antwort liefert. Die in Abbildung 17 dargestellte Pflasterung — bzw. die zugehörige Delone–Multimenge — erfüllt weder die Voraussetzungen von Satz 4.4 noch die von Satz 4.6. Auch eine zweiwöchige Rechnung auf einem PC, die die achte Potenz des zugehörigen MFS bestimmte, ergab keine Koinzidenz, so dass auch das Kriterium von LEE und MOODY in diesem Fall die Frage — noch — nicht beantwortet.

Es bleibt zu untersuchen, ob es für das Kriterium von LEE und MOODY eine obere Schranke gibt, abhängig von der Größe der Matrix, ab der man nicht mehr weitersuchen muss. Eine ähnliche Schranke haben wir im Zusammenhang mit primitiven Matrizen kennengelernt (s. Abbildung 6, S. 25 und nachfolgender Text).

Mit Satz 4.3 und Korollar 4.5 — somit indirekt mit den Sätzen 4.4 und 4.6 — lässt sich bisher lediglich entscheiden, ob eine gegebene Struktur ein Model Set bezüglich einem  $p$ -adischen inneren Raum  $G$  ist. Andere innere Räume sind zunächst nicht ausgeschlossen. Neueste Ergebnisse von LEE, MOODY und SOLOMYAK zeigen aber, dass für Strukturen auf einem Gitter keine anderen inneren Räume  $G$  in Frage kommen (s. [LMS], Thm. 3.10). Die hier vorgestellten Kriterien können daher tatsächlich ganz allgemein zur Beantwortung der Frage 'Model Set oder nicht' benutzt werden.

Es gibt viele Arbeiten, die sich mit dieser Frage im Falle allgemeinerer Strukturen beschäftigen. Dazu sei hier auf die Arbeiten [SCH2], [SCH3], [LMS] und [BAM] und die darin enthaltenen Quellen verwiesen. Es wurden in den letzten Jahren diesbezüglich viele Fortschritte gemacht; eine so umfassende Antwort wie im Falle von selbstähnlichen (oder durch Inflation erzeugten) Strukturen auf Gittern steht jedoch noch aus.

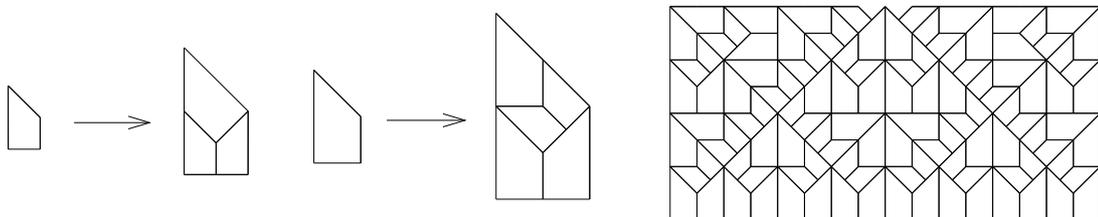


Abbildung 17: Inflationsregel und Ausschnitt einer Pflasterung zum Faktor 2, von der unbekannt ist, ob die zugehörige Delone–Multimenge aus Model Sets besteht.

## 6 Anhang: Der Ring der $p$ -adischen Zahlen

An dieser Stelle sind einige für Abschnitt 4.1 wichtige Fakten über die Topologie des Rings der  $p$ -adischen Zahlen aufgeführt, die der Vollständigkeit halber erwähnt werden sollten.

**Definition 6.1** *Es sei  $K$  ein kommutativer Ring mit Einselement. Eine Abbildung  $|\cdot|$  von  $K$  in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt Pseudobewertung, falls gilt:*

1.  $|0| = 0$ ,  $|a| > 0$  für  $a \in K \setminus \{0\}$ ,
2.  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ,  $|a - b| \leq |a| + |b|$  für  $a, b \in K$ , und
3.  $|ab| \leq |a||b|$  für  $a, b \in K$

Gilt in 3. Gleichheit, so spricht man von einer Bewertung. Falls statt 2. stärker gilt:

$$2'. \quad |a + b| \leq \max(|a|, |b|), \quad |a - b| \leq \max(|a|, |b|) \text{ für } a, b \in K$$

so heißt  $|\cdot|$  nichtarchimedische (Pseudo-)Bewertung.

Es sei  $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Die  $p$ -adische (Pseudo-)Bewertung auf  $\mathbb{Z}$  ist gegeben durch  $|z|_p := p^{-k}$ , wobei  $k$  die größte natürliche Zahl ist, für die gilt:  $p^k$  teilt  $z$  ohne Rest. Für  $z = 0$  setzt man  $|0|_p := 0$ . Ist  $p$  eine Primzahl, so erhält man so eine nichtarchimedische Bewertung, andernfalls eine nichtarchimedische Pseudobewertung. Das ist schnell einzusehen, bis auf die Eigenschaft 'nichtarchimedisch'. Darauf kommen wir noch zurück.

Mit  $d_p(y, z) := |y - z|_p$  ist  $(\mathbb{Z}, d_p)$  ein metrischer Raum mit einigen Eigenschaften, die jeglicher Intuition zuwiderlaufen: Offensichtlich bedeutet ein kleiner Abstand von 0 bzgl.  $d_p$ , dass die entsprechende Zahl oft durch  $p$  teilbar ist. Die Folge  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots$  konvergiert gegen Null bzgl.  $d_2$ . Für jedes andere  $p$  ist sie nicht konvergent bzgl.  $d_p$ . Da  $d_p(z, 2^i)$  aber maximal den Wert 1 annehmen kann, ist die Folge für jedes  $d_p$  beschränkt, enthält also eine konvergente Teilfolge.

Die Vervollständigung von  $\mathbb{Z}$  bzgl.  $d_p$  nennen wir den Ring der  $p$ -adischen Zahlen, kurz  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ . Er enthält neben den ganzen Zahlen auch Brüche der Form  $r/s$  — wobei  $\text{ggT}(r, s) = 1$  und  $\text{ggT}(p, s) = 1$  — sowie irrationale Zahlen. Es gibt für die Elemente von  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$  eine  $p$ -adische Darstellung, ähnlich der gewöhnlichen Dezimaldarstellung, mit der man jedes Element als unendliche Folge ganzer Zahlen darstellen kann. Die  $p$ -adische Darstellung einer ganzen Zahl enthält ab irgend einer Stelle nur noch Nullen. Ist die  $p$ -adische Darstellung einer Zahl  $z$  ab irgend einer Stelle periodisch, so ist  $z$  ein Bruch. Diese Darstellung ist für unsere Zwecke aber nicht weiter wichtig, wichtiger sind die Eigenschaften des metrischen Raumes  $(\widehat{\mathbb{Z}}_p, d_p)$ :

**Lemma 6.1** Die (Pseudo-)Bewertung  $|\cdot|_p$  auf dem Ring  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$  ist nichtarchimedisch.

**Beweis:** (vgl. [O'M]) Es ist  $|z|_p \leq 1$  für alle  $z \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ . Weiter gilt:  $|z|_p |z|_p = |z^2|_p$ . Für  $z \in \mathbb{Z}$  mit  $z = p^\ell r$ , also  $|z|_p = p^{-\ell}$ , ist das unmittelbar klar. Ist allgemein  $z \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ , so existiert eine Folge  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ , die gegen  $z$  konvergiert, also  $|z_n|_p \rightarrow |z|_p$  für  $n$  gegen unendlich. Es folgt  $|z^2|_p \leftarrow |z_n^2|_p = |z_n|_p |z_n|_p \rightarrow |z|_p |z|_p$ , also  $|z^2|_p = |z|_p |z|_p$ .

Also gilt für beliebige  $x, y \in \widehat{\mathbb{Z}}_p, n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} |x + y|_p^n &= |(x + y)^n|_p \\ &= |x^n + \binom{n}{1} x^{(n-1)} y + \dots + y^n|_p \\ &\leq |1|_p |x|^n + |\binom{n}{1}|_p |x|_p^{(n-1)} |y|_p + \dots + |1|_p |y|_p^n \\ &\leq 1 |x|_p^n + 1 |x|_p^{(n-1)} |y|_p + \dots + 1 |y|_p^n \\ &\leq (n + 1) (\max(|x|_p, |y|_p)^n) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|x + y|_p \leq (n + 1)^{1/n} (\max(|x|_p, |y|_p))$$

Mit  $n$  gegen unendlich folgt der erste Teil von Punkt 2' in Definition 6.1. Wegen  $|z|_p = |-z|_p$  auch der zweite Teil und somit die Behauptung.  $\square$

$d_p(y, z)$  nimmt offenbar nur Werte der Form  $p^{-k}$  an. Für die Kugeln (um  $z$  mit Radius  $\varepsilon$ )

$$\mathbb{B}_p(z, \varepsilon) := \{y \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \mid d_p(y, z) \leq \varepsilon\} \quad (z \in \widehat{\mathbb{Z}}_p, \varepsilon > 0)$$

gelten trivialerweise die folgenden drei Eigenschaften:

1. Ist  $\varepsilon < \varepsilon'$ , so ist  $\mathbb{B}_p(z, \varepsilon) \subseteq \mathbb{B}_p(z, \varepsilon')$ .
2. Sind  $\varepsilon, \varepsilon' \in [p^{-(k+1)}, p^{-k}[$ , so ist  $\mathbb{B}_p(z, \varepsilon) = \mathbb{B}_p(z, \varepsilon')$ .
3. Für alle  $y \in \mathbb{B}_p(z, \varepsilon)$  gilt:  $\mathbb{B}_p(y, \varepsilon) = \mathbb{B}_p(z, \varepsilon)$ .

Der dritte Punkt ergibt sich daraus, dass  $|\cdot|_p$  nichtarchimedisch ist: Für zwei beliebige Punkte  $x, y \in \mathbb{B}_p(z, \varepsilon)$  gilt:

$$d_p(x, y) = |x - y|_p = |x - z + z - y|_p \leq \max(|x - z|_p, |z - y|_p) \leq \varepsilon$$

Ist  $y \in B := \mathbb{B}_p(z, \varepsilon)$ , so gilt daher für alle  $x \in B$ :  $d_p(x, y) \leq \varepsilon$ , also  $x \in \mathbb{B}_p(y, \varepsilon)$ . Also hat jeder Punkt in einer Kugel  $B$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung, die ganz in  $B$  enthalten ist:  $B$  selbst. Daher ist jede dieser Kugeln offen.

Ist  $y$  Häufungspunkt von  $B := \mathbb{B}_p(z, \varepsilon)$ , so existiert eine Folge  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$  mit  $d_p(y_n, y) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Insbesondere gibt es  $y_n \in \mathbb{B}_p(z, \varepsilon)$  mit  $d_p(y_n, y) < \varepsilon$ . Mit 3.

folgt:  $y \in \mathbb{B}_p(y_n, \varepsilon) = \mathbb{B}_p(z, \varepsilon)$ . Jeder Häufungspunkt einer solchen Kugel ist also schon in ihr enthalten, jede Kugel ist also auch abgeschlossen.

Wegen  $B = \text{int}(B) = \text{cl}(B)$  gilt  $\text{cl}(B) \setminus \text{int}(B) = \emptyset$ . Die Kugeln haben also keinen Rand. In Kapitel 4 werden abzählbare Vereinigungen solcher Kugeln betrachtet. Diese sind offen, aber nicht notwendig abgeschlossen. Diese Mengen können daher durchaus einen Rand besitzen.

Wir benötigen für die im Abschnitt 4.1 behandelte Konstruktion zwei weitere Aussagen.

**Lemma 6.2**  $(\widehat{\mathbb{Z}}_p, d_p)$  ist kompakt.

Zum Beweis benötigen wir:

**Satz 6.3** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(Y, d')$  die Vervollständigung von  $X$  bzgl.  $d$  derart, dass  $d'$  die Fortsetzung von  $d$  ist (also  $d'|_X = d$ ).  $Y$  ist genau dann kompakt, wenn  $X$  totalbeschränkt ist, d.h., wenn gilt: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine endliche Menge  $\{U_0, \dots, U_n\}$  mit: Jedes  $U_i$  liegt in einer Kugel mit Radius  $\varepsilon' < \varepsilon$  und  $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$ .

(Die Aussagen dieses Satzes finden sich in jeder guten Topologiegrundvorlesung, z.B. in [ERL])

**Beweis:** (des Lemmas) Es ist  $(\widehat{\mathbb{Z}}_p, d_p)$  die Vervollständigung von  $\mathbb{Z}$  unter  $d_p$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $p^{-k} \leq \varepsilon < p^{-(k-1)}$  und  $\varepsilon'$  so, dass  $p^{-(k+1)} < \varepsilon' < \varepsilon$ . Dann überdecken die Kugeln  $U_i := \mathbb{B}_p(i, \varepsilon')$  ( $0 \leq i \leq p^{k+1} - 1$ ) ganz  $\mathbb{Z}$ . (Denn es ist  $U_i \cap \mathbb{Z} = \{\dots, i - p^{k+1}, i, i + p^{k+1}, i + 2p^{k+1}, \dots\} = i + p^{k+1}\mathbb{Z}$ .)

Damit ist die Bedingung des Satzes erfüllt.  $\square$

**Lemma 6.4** Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X, B \subseteq X$  zwei offene Teilmengen mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann gilt  $\text{cl}(A) \cap B = \emptyset$ .

**Beweis:** Angenommen,  $\text{cl}(A) \cap B \neq \emptyset$ . Dann existiert  $x$  mit  $x \in \text{cl}(A)$  und  $x \in B$ . Da  $B$  offen ist, gibt es eine Umgebung  $U_x$  von  $x$ , die ganz in  $B$  liegt. Da  $\text{cl}(A)$  abgeschlossen ist, ist  $U_x \cap A \neq \emptyset$ , daher auch  $A \cap B \neq \emptyset$ . Das ist ein Widerspruch, also folgt die Behauptung.  $\square$

In Kapitel 4 reden wir von  $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d = \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \dots \times \widehat{\mathbb{Z}}_p$  statt von  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ . Alle hier getroffenen Aussagen übertragen sich aber in natürlicher Weise auf  $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ .

## 7 Bezeichnungen

Es folgt eine Liste von Bezeichnungen, Abkürzungen und häufig benutzten Variablennamen. Die Bezeichnungen und Abkürzungen sind alle auch im Text erklärt; sie werden hier der besseren Lesbarkeit halber in tabellarischer Form zusammengestellt.

#	Kardinalität
$\cong$	$S \cong T$ heißt: $S$ ist Translat von $T$ , in Kap. 2 auch alternativ: $S$ ist kongruent zu $T$ , s. Def 2.1, S. 12
$\overline{\cdot}$	$\overline{A}$ ist die Translationsklasse von $A$ , in Kap. 2 auch alternativ: Kongruenzklasse von $A$ , s. Def 2.1, S. 12
$\sqsubseteq$	$S \sqsubseteq T$ heißt: $S$ ist Teilmenge eines Translats von $T$ , s. Def 2.1, S. 12
$\rightarrow$	$i \rightarrow j$ heißt: In einem Graphen existiert ein Weg von Knoten $i$ zu Knoten $j$ .
$\langle A \rangle_K$	$K$ -Spann von $A$ .
$\lfloor \cdot \rfloor$	'Gaußklammer': $\lfloor a \rfloor$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $a$ ist.
$\  \cdot \ $	euklidische Norm
$ \cdot _p$	$p$ -adische (Pseudo-)Bewertung, s. Anhang
$\partial(\cdot)$	Rand einer Menge
$\square$	Sind $A$ und $B$ gefärbte Punktmenge mit $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ , so ist $A \square B$ die ungefärbte Menge der Punkte, deren Farben in $A$ und $B$ übereinstimmen, <u>ohne</u> Berücksichtigung der Farbe; s. Def. 4.6, S. 77
$\Gamma$	Gitter, fast immer: Gitter, auf dem eine Pflasterung oder Delone-Multimenge lebt
$\eta$	Inflationsfaktor, s. Def 2.5, S. 20
$\Lambda$	Gitter, ausschließlich verwendet für das hochdimensionale Gitter in $\mathbb{R}^d \times G$ in einem CPS, s. (6), S. 64
$\mu$	Maß
$\varphi$	Isometrie
$\Phi$	Matrixfunktionssystem, s. Def. 4.3, S. 72
$\mathbb{B}^d$	abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$ bzgl. euklidischer Norm
$\mathbb{B}_p(x, r)$	Kugel um $x$ mit Radius $r$ bzgl. $p$ -adischem Abstand in $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ , s. Anhang
$\mathbb{B}_p^d(x, r)$	Kugel um $x$ mit Radius $r$ bzgl. $p$ -adischem Abstand in $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ , s. (17), S. 69
$\mathcal{C}$	Cluster in einer Pflasterung
$C_r(x, V)$	$r$ -Cluster um $x$ in der Delone-Multimenge $V$ , s. Def. 2.13, S. 43 und nachfolgender Text
$\mathcal{C}_r(x, \mathcal{P})$	$r$ -Cluster um $x$ in der Pflasterung $\mathcal{P}$ , s. Def. 2.2, S. 14
cl	Abschluss einer Menge
CPS	kurz für: 'Cut-and-Project-Scheme', s. S. 62
$d$	Dimension, in Abschnitt 2.4 auch Periode eines Knotens

$D$	eine Punktmenge, fast immer eine Delonemenge, s. Def 2.12, S. 43
$d(\cdot, \cdot)$	euklidischer Abstand
$d_p(\cdot, \cdot)$	$p$ -adischer Abstand in $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ , s. Anhang
$d_p^d(\cdot, \cdot)$	$p$ -adischer Abstand in $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ , s. (16), S. 69
diam	Durchmesser einer Menge, also: $\text{diam}(A) = \max\{\ x - y\  \mid x, y \in A\}$
$\mathcal{F}$	Musterfamilie einer Pflasterung oder Spezies, s. Def 2.5, S. 20
$I$	i.Allg. die Einheitsmatrix. Auch:
$I, J, K$	Im Zusammenhang mit Graphen: Klassen von Knoten
<b>(I)</b>	Menge aller Inflationsspezies, s. Def. 2.5, S. 20
<b>(I,M)</b>	Menge aller minimalen Inflationsspezies, s. Def 2.10, S. 25
infl	Inflationsoperator, s. Def 2.5, S. 20
int	Inneres einer Menge
<b>(LFC)</b>	Menge aller Spezies von lokal endlicher Komplexität, s. Def. 2.3, S. 17
<b>(LR)</b>	Menge aller linear repetitiven Spezies, s. Def. 2.4, S. 18
$m$	Anzahl der Mustersteine einer Spezies oder Anzahl der 'Farben' einer Delone-Multimenge $(V_1, \dots, V_m)$ .
MFS	kurz für 'Matrixfunktionssystem', s. Def. 4.3, S. 72
<b>NM.i</b>	Drei Arten der Nichtminimalität, s. S. 22
$P$	Polytop, s. Def. 2.8, S. 22
$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$	Pflasterungen, am Ende von Abschnitt 2.6 auch alternativ: Delone-Multimengen
$\mathbb{Q}(a)$	$\mathbb{Q}$ adjungiert $a$ (Körperadjunktion), also: der kleinste Körper, der $\mathbb{Q}$ und $a$ enthält
<b>(R)</b>	Menge aller repetitiven Spezies, s. Def. 2.4, S. 18
<b>S</b>	Spezies, also eine Familie von 'verwandten' Pflasterungen
<b>S(<math>\mathcal{F}</math>,infl)</b>	Inflationsspezies, s. Def 2.5, S. 20
$(t, i)$	Ein Punkt der Farbe $i$ an der Position $t$ . Kurzform für $(\emptyset, \dots, \emptyset, \{t\}, \emptyset, \dots, \emptyset)$ , s. Def. 2.13, S. 43 und nachfolgender Text
$T, T_i$	Steine, s. Def. 2.1, S. 12
<b>T</b>	Translationsmodul, s. Def. 3.2, S. 56
tr	Träger einer Menge. Ist $M = \{A_1, A_2, \dots\}$ eine Steinmenge, so ist $\text{tr}(M) = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ . Ist $M = (A_1, \dots, A_m)$ Teilmenge einer Delone-Multimenge, so ist $\text{tr}(M) = A_1 \cup \dots \cup A_m$ .
$V$	Delone-Multimenge, s. Def. 2.13, S. 43
$V_i$	Delonemenge, fast immer: Bestandteil einer Delone-Multimenge, s. Def. 2.13, S. 43
vol	relatives Volumen, s. S. 48
$W$	Fenstermenge eines CPS, s. (6), S. 64
$\mathcal{W}_d$	Die kanonischen Würfelpflasterungen, s. S. 12
<b>(WR)</b>	Menge aller schwach repetitiven Spezies, s. Def. 2.4, S. 18
$X_{\mathcal{P}}$	Menge aller Translationsvektoren, die Steine in $\mathcal{P}$ auf Steine desselben Typs in $\mathcal{P}$ verschieben
$\mathbb{Z}[a]$	$\mathbb{Z}$ adjungiert $a$ (Ringadjunktion), also: der kleinste Ring, der $\mathbb{Z}$ und $a$ enthält

## Literatur

- [BAA] M. Baake: A guide to mathematical quasicrystals, *Quasicrystals*, eds J.–B. Suck, M. Schreiber & P. Häußler, Springer Berlin (2002)
- [BAM] M. Baake, R.V. Moody: Weighted Dirac combs with pure point diffraction, Preprint (2002), arXiv.org: math.MG/0203030
- [BAN] C. Bandt: Self–similar sets I. Topological Markov chains and mixed self–similar sets, *Math. Nachr.* **142** (1989) pp 107–123
- [BER] R. Berger: The undecidability of the domino problem, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **66** (1966) pp 72–73
- [BMS] M. Baake, R.V. Moody, M. Schlottmann: Limit–(quasi)periodic point sets as quasicrystals with  $p$ -adic internal spaces, *J.Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) pp 5755–5765
- [BSJ] M. Baake, M. Schlottmann, P.D. Jarvis: Quasiperiodic tilings with tenfold symmetry and equivalence with respect to local derivability, *J.Phys.A: Math. Gen.* **24** (1991) pp 4637–4654
- [COP] *Proceedings of the Colloquium on Convexity Copenhagen 1965* (1967)
- [COX] H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes*, Methuen & Co. Ltd., London (1948)
- [DAN1] L. Danzer: 3-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals, *Discr. Math.* **76** (1989) pp 1-7
- [DAN2] L. Danzer: Quasiperiodizität, Vorlesung WS 1990/91 an der Universität Dortmund
- [DAN3] L. Danzer: Quasiperiodische Strukturen, Vorlesung WS 1995/96 an der Universität Dortmund
- [DAN4] L. Danzer: Aperiodische Strukturen, Vorlesung WS 2000/01 an der Universität Dortmund
- [DAN5] L. Danzer: Inflation-species of planar tilings which are not of locally finite complexity, Preprint (2001)
- [DVO] L. Danzer, G. van Ophuysen: A species of planar triangular tilings with inflation factor  $\sqrt{-\tau}$ , Preprint (1998), auch: *Panjab Univ. Res. Bull.* **50** (2000) pp 137–175
- [DEB] N.G. de Bruijn: Algebraic theory of Penrose’s non–periodic tilings of the plane, *Math. Proc.* **A84** (1981) pp 39–52 (Teil I) und 53–66 (Teil II)

- [ERL] D. Erle, Topologie I, Vorlesung an der Universität Dortmund
- [GK] F. Gähler, R. Klitzing: The diffraction pattern of self-similar tilings, *The mathematics of long-range aperiodic order*, ed R.V.Moody, (1996) pp 239-268
- [G-S] C. Goodman-Strauss: Matching Rules and Substitution Tilings, *Annals of Mathematics* **147** (1998) pp 181–223
- [GS] B. Grünbaum, G.C. Shephard: *Tilings and patterns*, Freeman, New York (1987), insbesondere Kap. 10.
- [KD] A. Katz, M. Duneau: Quasiperiodic patterns and icosahedral symmetry, *J. Phys.* **47** (1986) pp 181–196
- [KEN] R. Kenyon: Self-replicating tilings, *Symbolic Dynamics and its Applications*, ed. P. Walters, *Contemporary Mathematics* **135**, AMS (1992) pp 239–263
- [KÖN] D. König: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Chelsea Publishing Company (Reprint der Ausg. Budapest 1935), New York (ca. 1969)
- [KRA] P. Kramer: Non-periodic central space filling with icosahedral symmetry using copies of seven elementary cells, *Acta Cryst.* **A 38** (1982) pp 257–264
- [KRN] P. Kramer, R. Neri: On periodic and non-periodic space fillings of  $\mathbb{E}^m$  obtained by projection, *Acta Cryst.* **A 40** (1984) pp 580–587
- [LM] Jeong-Yup Lee, R.V. Moody: Lattice substitution systems in model sets, *Discr. & Comput. Geom.* **25** (2001) pp 173–201
- [LMS] Jeong-Yup Lee, R.V. Moody, B. Solomyak: Consequences of Pure Point Dynamical and Diffraction Spectra, Preprint (2001), <http://www.math.washington.edu/~solomyak/PREPRINTS/qc.html>
- [LAP1] J.C. Lagarias, P.A.B. Pleasants: Repetitive Delone sets and perfect quasicrystals, Preprint (2001), arXiv.org: math.DS/9909033
- [LAP2] J.C. Lagarias, P.A.B. Pleasants: Local complexity of Delone-Sets and crystallinity, Preprint (2001), arXiv.org: math.MG/0105088
- [LUP] W.F. Lunnon, P.A.B. Pleasants: Quasicrystallographic tilings, *J. Math. Pures Appl.* **66** (1987) pp 217-263
- [M] R.V. Moody: Meyer sets and their duals, *The Mathematics of Long-range Aperiodic Order*, ed R.V.Moody, (1996) pp 403–441
- [MAC] MacKay: De nive quinquangula: on the pentagonal snowflake, *Kristallografiya* **26** (1981) pp 910–919

- [O'M] O.T. O'Meara: *Introduction to quadratic forms*, Springer-Verlag Berlin (1963)
- [PEN] R. Penrose: The role of aesthetics in pure and applied mathematical research, *Bull. Inst. Math. & Appl.*, **10** (1974) pp 266–271
- [PER] O. Perron: Zur Theorie der Matrices, *Math. Annalen*, **64** (1907) pp 248–263
- [PRI] N. Priebe: Substitution sequences in  $\mathbb{Z}^d$  with a nonsimple component in the spectrum, Preprint (2001),  
<http://math.vassar.edu/Faculty/Priebe/default.html>
- [RAD] C. Radin: The pinwheel tilings of the plane, *Annals of Math.* **139** (1997) pp 661–702
- [ROB] R.M. Robinson: Seven polygons, which admit only nonperiodic tilings of the plane (Abstract), *Notices Amer. Math. Soc.* **14** (1967) p 835
- [SBGC] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, W. Cahn: Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) pp 1951–1953
- [SCH1] M. Schlottmann: Geometrische Eigenschaften quasiperiodischer Strukturen, Dissertation an der Fakultät für Physik der Eberhard-Karls-Universität Tübingen (1993)
- [SCH2] M. Schlottmann: Cut-and-project sets in locally compact abelian groups, *Quasicrystals and Discrete Geometry*, ed. J. Patera, Fields Institute Monographs Vol. 10, AMS, Providence, RI (1998), pp 247–264
- [SCH3] M. Schlottmann: Generalized model sets and dynamical systems, *Directions in mathematical quasicrystals*, eds. M. Baake & R.V. Moody, CRM Monograph Series Vol.13, AMS, Providence, RI (2000) pp 143–159
- [SCHU] E. Schulte, North Eastern University Boston, E-mail-Korrespondenz
- [SE] E. Seneta: *Non-negative matrices*, George Allen & Unwin Ltd., London (1973)
- [SEN] M. Senechal: *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [SOL1] B. Solomyak: Dynamics of self-similar tilings, *Ergod. Th. & Dyn. Syst.* **17** (1997) pp 695–738;  
Corrections, *Ergod. Th. & Dyn. Syst.* **19** (1999) p. 1685
- [SOL2] B. Solomyak: Non-periodicity implies unique composition property for self-similar translationally finite tilings, *Discr. & Comput. Geom.* **20** (1998) pp 265–279

- [VDW] B.L. van der Waerden: *Algebra*, Springer-Verlag Berlin New York, 7. Auflage (1966)
- [VIN] A. Vince: Digit tiling of euclidean space, *Directions in mathematical quasicrystals*, eds. M. Baake & R.V. Moody, CRM Monograph Series Vol.13, AMS, Providence, RI (2000) pp 329–370
- [WIE] H. Wielandt: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, *Math. Z.* **52** (1950), pp 642–648
- [Z] G. Ziegler: *Lectures on polytopes*, Springer-Verlag New York (1995)