DIMENSIONS DES ESPACES DE FORMES MODULAIRES

par H. COHEN et J. OESTERLÉ

I) Introduction.

La connaissance explicite des dimensions des espaces de formes modulaires est nécessaire dans de nombreux problèmes. Les formules qui les donnent sont connues de beaucoup de gens et il existe plusieurs méthodes permettant de les obtenir (théorème de Riemann-Roch, application des formules de trace données par Shimura dans [3]). Néanmoins on ne les trouve pas dans la littérature courante ; cet exposé, tout en s'abstenant de fournir les démonstrations, se propose donc de combler cette lacune. En outre, une table donnant $\dim S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ et $\dim(M_k(\Gamma_0(N),\chi)$ pour $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, $N \leqslant 200$, et tout caractère χ, figure à la fin de l'article.

II) Notations.

Soit $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Im}\ z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré sur lequel agit $SL_2(\mathbb{R})$ par : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Soit N un entier naturel non nul et notons $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0(N)$.

Soit χ un caractère multiplicatif modulo N, i.e. un homomorphisme de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ dans $\mathbb{C}^*$. Soit f le conducteur de χ, c'est-à-dire le plus petit diviseur de N tel que χ se factorise à travers

$(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$.

Soit $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ un entier ou demi-entier.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Si k est entier, $\chi(-1) = (-1)^k$.
- Si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, N est multiple de 4 et $\chi(-1) = 1$.

Nous définirons le symbole $(\frac{c}{d})$ pour $c \in \mathbb{Z}$, et $d \in \mathbb{Z}^*$ par les conditions suivantes :

$d \to (\frac{c}{d})$ est complètement multiplicative

$(\frac{c}{-1}) = -1$ si $c<0$ et $(\frac{c}{-1}) = 1$ si $c \geqslant 0$

$(\frac{c}{2}) = (-1)^{(c^2-1)/8}$ si c est impair

$(\frac{c}{p})$ est le symbole de Legendre si p est premier impair et c premier à p

$(\frac{c}{d}) = 0$ si $\mathrm{pgcd}(c,d) \neq 1$.

La notation a^b, pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ désignera $\exp(b(\log|a| + i \operatorname{Arg} a))$, avec $-\pi < \operatorname{Arg} a \leqslant \pi$.

Nous noterons $M_k(\Gamma_o(N),\chi)$ (resp. $S_k(\Gamma_o(N),\chi)$) et nous appellerons espace des formes modulaires entières (resp. paraboliques) de poids k, de niveau N et de caractère χ l'espace des fonctions f définies sur $\mathfrak{h}$ ayant les propriétés suivantes :

a) f est holomorphe sur $\mathfrak{h}$.

b) Si $k \in \mathbb{Z}$, $f(\frac{az+b}{cz+d}) = \chi(d)(cz+d)^k f(z)$ pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_o(N)$ et tout $z \in \mathfrak{h}$.

b') Si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, $f(\frac{az+b}{cz+d}) = \chi(d)(\frac{c}{d})(\frac{-1}{d})^{-k}(cz+d)^k f(z)$ pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_o(N)$ et tout $z \in \mathfrak{h}$.

c) f est holomorphe (resp. s'annule) aux pointes (cf. [2] pour la signification de cet énoncé).

On démontre que les espaces $M_k(\Gamma_o(N),\chi)$ et $S_k(\Gamma_o(N),\chi)$ sont de dimension finie. On a même les résultats suivants :

(i) $\dim S_k(\Gamma_o(N),\chi) = 0$ si $k \leqslant 0$,

(ii) $\dim M_k(\Gamma_o(N),\chi) = 0$ si $k < 0$, ou bien si $k=0$ et que χ n'est pas le caractère trivial χ_o,

(iii) $\dim M_o(\Gamma_o(N),\chi_o) = 1$.

III) Les résultats.

Dans les théorèmes 1 et 2, nous allons donner la valeur de $\dim S_k(\Gamma_o(N),\chi) - \dim M_{2-k}(\Gamma_o(N),\chi)$, valable pour toute valeur de k dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, le théorème 1 traitant le cas où k est dans $\mathbb{Z}$, et le théorème 2 le cas où $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$.

Compte tenu de (i), (ii), (iii), les formules ainsi obtenues permettent de calculer la valeur de $\dim S_k(\Gamma_o(N),\chi)$ pour $k \geqslant 2$, et aussi celle de $\dim M_k(\Gamma_o(N),\chi)$ pour $k \geqslant 2$ (faire $k=2-k$ dans la formule).

Pour $k=1/2$ et $k=3/2$, les formules donnent la valeur de $\dim S_{1/2}(\Gamma_o(N),\chi) - \dim M_{3/2}(\Gamma_o(N),\chi)$ et de $\dim S_{3/2}(\Gamma_o(N),\chi) - \dim M_{1/2}(\Gamma_o(N),\chi)$.

Pour un N et un χ fixé, Serre et Stark exhibent dans [1] une base explicite de $S_{1/2}(\Gamma_o(N),\chi)$ et $M_{1/2}(\Gamma_o(N),\chi)$. Les formules précédentes permettent alors d'obtenir la dimension de $M_{3/2}(\Gamma_o(N),\chi)$ et $S_{3/2}(\Gamma_o(N),\chi)$.

<u>Théorème</u> 1. <u>Soit</u> $k \in \mathbb{Z}$ (<u>et donc</u> $\chi(-1) = (-1)^k$). <u>On a</u> :

$$\dim S_k(\Gamma_o(N),\chi) - \dim M_{2-k}(\Gamma_o(N),\chi) =$$

$$\frac{k-1}{12} N \prod_{p|N} (1+\frac{1}{p}) - \frac{1}{2} \prod_{p|N} \lambda(r_p,s_p,p) + \varepsilon_k \sum_{\substack{x \bmod N \\ x^2+1 \equiv 0(N)}} \chi(x)$$

$$+ \mu_k \sum_{\substack{x \bmod N \\ x^2+x+1 \equiv 0(N)}} \chi(x)$$

<u>avec les notations suivantes</u> :

<u>si</u> $p|N$, r_p (resp. s_p) <u>désigne l'exposant de</u> p <u>dans la décomposition en facteurs premiers de</u> N (resp. de f)

. $\lambda(r_p,s_p,p)$ vaut : $\begin{cases} p^{r'}+p^{r'-1} & \text{si} \quad 2s_p \leq r_p = 2r' \\ 2p^{r'} & \text{si} \quad 2s_p \leq r_p = 2r'+1 \\ 2p^{r_p - s_p} & \text{si} \quad 2s_p > r_p \end{cases}$

. ε_k vaut : $\begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ -\frac{1}{4} & \text{si } k \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1}{4} & \text{si } k \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$

. μ_k vaut : $\begin{cases} 0 & \text{si } k \equiv 1 \pmod 3 \\ -\frac{1}{3} & \text{si } k \equiv 2 \pmod 3 \\ \frac{1}{3} & \text{si } k \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$

Remarques concernant l'énoncé du théorème :

1°) L'expression $\prod_{p|N} \lambda(r_p,s_p,p)$ est en fait égale à la somme $\sum_{\substack{c|N \\ (c,\frac{N}{c}) | \frac{N}{f}}} \varphi((c,\frac{N}{c}))$ où φ est la fonction d'Euler. Mais c'est le produit qui est le plus maniable en pratique.

2°) Si $\chi = \chi_0$, caractère trivial, la somme $\sum_{\substack{x \bmod N \\ x^2+1 \equiv 0(N)}} \chi(x)$ (resp. $\sum_{\substack{x \bmod N \\ x^2+x+1 \equiv 0(N)}} \chi(x)$) est égale au nombre de racines de l'équation $x^2+1=0$ (resp. $x^2+x+1=0$) dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Ce nombre vaut :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 4|N \\ \prod_{p|N} (1+(\frac{-4}{p})) & \text{si } 4\nmid N \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \begin{cases} 0 & \text{si } 9|N \\ \prod_{p|N} (1+(\frac{-3}{p})) & \text{si } 9\nmid N \end{cases}\right)$$

Théorème 2. Soit $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ (et donc $4|N$ et $\chi(-1)=1$). On a :

$$\dim S_k(\Gamma_0(N),\chi) - \dim M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi) = \frac{k-1}{12} N \prod_{p|N} (1+\frac{1}{p}) - \frac{\zeta}{2} \prod_{\substack{p|N \\ p\neq 2}} \lambda(r_p,s_p,p)$$

où λ, r_p et s_p ont même signification qu'au théorème 1, et où ζ est défini par le diagramme suivant :

$r_2 \geq 4$				$\zeta = \lambda(r_2,s_2,2)$
$r_2 = 3$				$\zeta = 3$
$r_2 = 2$	Condition (C)			$\zeta = 2$
	non (C)	$k-\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$	$s_2 = 0$	$\zeta = 3/2$
			$s_2 = 2$	$\zeta = 5/2$
		$k-\frac{3}{2} \in \mathbb{Z}$	$s_2 = 0$	$\zeta = 5/2$
			$s_2 = 2$	$\zeta = 3/2$

La condition (C) étant la condition suivante :

(C) $\Longleftrightarrow$ $\exists p$ premier, $p \equiv 3(4)$, $p|N$, r_p impair ou $0 < r_p < 2s_p$.

Par suite :

non (C) $\Longleftrightarrow$ ($\forall p$ premier), ($p \equiv 3(4)$ et $p|N \Longrightarrow r_p$ pair et $r_p \geq 2s_p$).

TABLES : DIMENSIONS EN POIDS DEMI-ENTIER

I) Rappel des notations.

$k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, N est un entier naturel multiple de 4 et χ un caractère multiplicatif modulo N de conducteur f tel que $\chi(-1) = 1$; on note $M_k(\Gamma_0(N),\chi)$, $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$, $E_k(\Gamma_0(N),\chi)$ l'espace des formes modulaires entières, paraboliques, d'Eisenstein respectivement, relativement au groupe $\Gamma_0(N)$ et au caractère χ, et de poids k.

χ étant astreint à être pair, f ne peut prendre que des valeurs distinctes de 3 et 4 et non congrues à 2 modulo 4.

II) Présentation des tables.

Les tables qui suivent permettent de calculer facilement les valeurs des dimensions des espaces $M_k(\Gamma_0(N),\chi)$, $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$, $E_k(\Gamma_0(N),\chi)$ pour tout $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, et tout caractère χ modulo N, pourvu que le niveau N soit inférieur ou égal à 200.

Une première table donne les valeurs d'une certaine quantité $a(N)$ en fonction de N.

Une deuxième table, ordonnée en quatre colonnes, donne les valeurs de certaines quantités $b(N,f)$ et $c(N,f)$ qui ne dépendent que du niveau N, et du conducteur f de χ. Dans la première colonne figurent les valeurs de N. Dans la seconde colonne figurent les valeurs de f. Parfois, cette colonne est vide ; cela signifie que pour le niveau N correspondant, $b(N,f)$ et $c(N,f)$ sont en fait indépendants de f. Parfois, on trouvera sur une même ligne de cette seconde colonne, plusieurs valeurs de f distinctes, séparées par une virgule ; cela signifie que $b(N,f)$ et $c(N,f)$ sont les mêmes pour toutes ces valeurs de f.

Une troisième table donne la dimension, que nous noterons $d(N,\chi)$, de l'espace $M_{1/2}(\Gamma_0(N),\chi)$. Des règles générales permettant de trouver $d(N,\chi)$ y figurent, et elles sont suivies de la liste des exceptions.

III) Résultats.

Avec les notations précédentes on a :

si $k < 0$: $\dim S_k(\Gamma_0(N),\chi) = \dim M_k(\Gamma_0(N),\chi) = 0$

si $k = \frac{1}{2}$: $\dim S_{1/2}(\Gamma_0(N),\chi) = 0$ (attention : ceci n'est plus vrai si $N > 200$)
$\dim M_{1/2}(\Gamma_0(N),\chi) = d(N,\chi)$

si $k = \frac{3}{2}$: $\dim S_{3/2}(\Gamma_0(N),\chi) = d(N,\chi) + b(N,f) - c(N,f)$
$\dim M_{3/2}(\Gamma_0(N),\chi) = b(N,f)$

si $k = 2k' + \frac{1}{2}$ avec $k' \geqslant 1$: $\dim S_k(\Gamma_0(N),\chi) = a(N)k' - b(N,f)$
$\dim M_k(\Gamma_0(N),\chi) = a(N)k' - b(N,f) + c(N,f)$
$\dim E_k(\Gamma_0(N),\chi) = c(N,f)$

si $k = 2k' + \frac{3}{2}$ avec $k' \geqslant 1$: $\dim S_k(\Gamma_0(N),\chi) = a(N)k' + b(N,f) - c(N,f)$
$\dim M_k(\Gamma_0(N),\chi) = a(N)k' + b(N,f)$
$\dim E_k(\Gamma_0(N),\chi) = c(N,f)$

1ère table :

N	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
a(N)	1	2	4	4	6	8	8	8	12	12	12	16	14	16	24	16	18

N	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136
a(N)	24	20	24	32	24	24	32	30	28	36	32	30	48	32	32	48	36

N	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200
a(N)	48	48	38	40	56	48	42	64	44	48	72	48	48	64	56	60

2ème table :

N	f	c(N,f)	b(N,f)
4		2	1
8		3	2
12		4	3
16	1	6	4
	8	4	3
	16	2	2
20	1,5	4	3
	20	4	4
24		6	5
28		4	4
32	1,8	8	6
	16	4	4
	32	2	3
36	1	8	6
	12	8	8
	9,36	4	5
40		6	6
44		4	5
48	1,12	12	10
	8,24	8	8
	16,48	4	6
52	1,13	4	5
	52	4	6
56		6	7
60		8	10
64	1,8	12	10
	16	8	8
	32	4	6
	64	2	5
68	1,17	4	6
	68	4	7
72	1,8,12,24	12	12
	9,36,72	6	9
76		4	7
80	1,5,20	12	12
	8,40	8	10
	16,80	4	8
84		8	12
88		6	9
92		4	8
96	1,8,12,24	16	16
	16,48	8	12
	32,96	4	10
100	1,5	12	12
	20	12	15
	25	4	9
	100	4	10
104		6	10
108	1,9,12,36	12	15
	27,108	4	11

N	f	c(N,f)	b(N,f)
112	1,7,28	12	14
	8,56	8	12
	16,112	4	10
116	1,29	4	9
	116	4	10
120		12	18
124		4	10
128	1,8,16	16	16
	32	8	12
	64	4	10
	128	2	9
132		8	16
136		6	12
140		8	16
144	1,12	24	24
	8,24	16	20
	9,36	12	18
	16,48,72	8	16
	144	4	14
148	1,37	4	11
	148	4	12
152		6	13
156		8	18
160	1,5,8,20,40	16	20
	16,80	8	16
	32,160	4	14
164	1,41	4	12
	164	4	13
168		12	22
172		4	13
176	1,11,44	12	18
	8,88	8	16
	16,176	4	14
180	1,5,15	16	24
	12,20,60	16	28
	9,36,45,180	8	22
184		6	15
188		4	14
192	1,12,8,24	24	28
	16,48	16	24
	32,96	8	20
	64,192	4	18
196	1,7	16	20
	28	16	24
	49,196	4	16
200	1,5,8,20,40	18	24
	25,100,200	6	18

3ème table : Valeurs de $d(N,\chi) = \dim M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N),\chi)$ pour $N < 200$.

- Premier cas : χ n'est pas le caractère unité et n'est pas d'ordre 2.

Dans ce cas on a $d(N,\chi) = 0$ sauf dans le cas suivant :

Si $N = 196$ et que χ est l'un des deux caractères d'ordre 3 et de conducteur 7 , alors $d(N,\chi) = 1$.

- Deuxième cas : χ est le caractère unité, i.e : $\chi = \chi_0$.

Dans ce cas, on a la table suivante :

N	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
$d(N,\chi_0)$	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	3	1

N	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136
$d(N,\chi_0)$	2	1	2	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	3	1	1

N	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200
$d(N,\chi_0)$	1	4	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	3	2	2

- Troisième cas : χ est d'ordre 2.

Dans ce cas $d(N,\chi) = 1$, sauf pour la table d'exceptions que nous présentons ci-dessous avec en première colonne la valeur de N , en seconde colonne l'entier f (il est à remarquer que si χ quadratique pair, alors $\chi = (\frac{f}{\cdot})$ où f est son conducteur) ; dans la troisième colonne on trouve $d(N,\chi)$.

N	f	$d(N,\chi)$
32	8	2
48	12	2
64	8	2
72	8	2
80	5	2
96	8	2
	12	2
	24	2
100	5	2

N	f	$d(N,\chi)$
108	12	2
112	28	2
128	8	3
144	8	2
	12	2
160	8	2
	5	2
	40	2
176	44	2

N	f	$d(N,\chi)$
180	5	2
192	8	2
	12	3
	24	2
200	8	2
	5	2
	40	2

IV) Exemples.

1°) Calcul de $\dim[S_{3/2}(\Gamma_o(108),(\frac{12}{\cdot}))]$. Remarque : $(\frac{12}{\cdot})$ est le caractère d'ordre 2 associé à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$; son conducteur f est égal à 12.

On a : $d(108,(\frac{12}{\cdot})) = 2$ (cf 3ème table, 3e cas, exceptions)

$b(108,12) = 15$ (2ème table)

$c(108,12) = 12$ (2ème table)

Donc : $\dim S_{3/2}(\Gamma_o(108),(\frac{12}{\cdot})) = 2+15-12 = 5$.

2°) Calcul de $\dim[M_{9/2}(\Gamma_o(156),\chi)]$ où χ est un caractère d'ordre 19 et de conducteur 39.

On a : $\frac{9}{2} = 2k' + \frac{1}{2}$ avec $k' = 2$

$a(156) = 56$ (1ère table)

$b(156,39) = 18$ (2ème table)

$c(156,39) = 8$ (2ème table)

Donc la dimension cherchée est $56 \times 2 - 18 + 8 = 102$.

-:-:-:-:-:-:-

Bibliographie

[1] J.-P. SERRE et H. M. STARK : Modular forms of weight ½ , (publié dans ce même volume).

[2] G. SHIMURA : Introduction to the theory of automorphic forms. Princeton University Press, (1971).

[3] G. SHIMURA : On the trace formula for Hecke operators. Acta Mathematica, vol. 132, (1974).

International Summer Schcol on Modular Functions
BONN 1976

FACTEURS GAMMA ET ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

par M.-F. VIGNÉRAS

Introduction.

On considère des séries de Dirichlet $\varphi(s)$ de la forme

(1) $$\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s} \quad , \quad s \in \mathbb{C} \ , \ a_n \in \mathbb{C}$$

vérifiant une équation fonctionnelle :

(2) $$\Phi(s) = A^{-s}\,\Psi(-s) \quad , \quad A > 0$$

avec les conditions suivantes :

1) $\varphi(s)$ converge pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand vers une fonction non identiquement nulle.

2) $\psi(s)$ est une autre série de Dirichlet vérifiant 1), de la forme (1), $\psi(s) = \sum_{n\geqslant 1} b_n n^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{C}$.

3) $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$ sont des facteurs gamma

(3) $$\Delta_1(s) = \prod_{f=1}^{G} \Gamma(p_f s + c_f)$$
$$\Delta_2(s) = \prod_{g=G+1}^{H} \Gamma(p_g s + c_g)$$

où $G \geqslant 1$, $H-G \geqslant 1$, les constantes c_f , c_g sont des nombres complexes et les constantes p_f , p_g des nombres rationnels strictement positifs. On pose