

## Zur Ableitung der Klein-Fock'schen Gleichung.

Von **D. Iwanenko** und **L. Landau** in Leningrad.

(Eingegangen am 8. Oktober 1926.)

Es wird gezeigt, daß die verallgemeinerte Schrödingersche Gleichung durch einen Übergang aus dem relativistischen Analogon des Hamiltonschen Problems erhalten werden kann.

Aus der Relativitätstheorie ist folgender Ausdruck für das Differential der Wirkungsfunktion bekannt:

$$dW = -mc ds + \frac{e}{c} \varphi_k dx^k, \quad (1)$$

wo

$$ds^2 = -dx_k dx^k.$$

Die generalisierten Momente sind gegeben durch

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial (dW)}{\partial (dx^k)} = +mc \frac{dx_k}{ds} + \frac{e}{c} \varphi_k, \quad (2)$$

$$\left( L = \frac{dW}{dt} \text{ die Lagrangsche Funktion} \right).$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} p_k - \frac{e}{c} \varphi_k &= mc \frac{dx_k}{ds}, \\ \left( p_k - \frac{e}{c} \varphi_k \right) \left( p^k - \frac{e}{c} \varphi^k \right) + m^2 c^2 &= 0^1). \end{aligned} \quad (3)$$

Andererseits gilt:

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial x^k} = W_{.k}, \quad (4)$$

also

$$W_{.k} W^{.k} - 2 \frac{e}{c} \varphi^k W_{.k} + \frac{e^2}{c^2} \varphi_k \varphi^k + m^2 c^2 = 0. \quad (5)$$

Machen wir eine der Schrödingerschen<sup>2)</sup> ähnliche Annahme, daß die Gleichung (5) der Grenzfall einer linearen Gleichung für

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} W^3) \quad \text{bei } \hbar \rightarrow 0$$

<sup>1)</sup> Siehe auch P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **111**, 405, 1926.

<sup>2)</sup> E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 489, 1926.

<sup>3)</sup>  $\hbar$  bezeichnet die  $2\pi$  mal verkleinerte Plancksche Konstante.

ist, so folgt mit Rücksicht auf:

$$\begin{aligned}\psi \cdot \kappa &= \frac{i}{h} \psi W \cdot \kappa, \\ \psi \cdot k &= \frac{-1}{h^2} \psi W \cdot k W \cdot k, \\ \psi \cdot k - 2 \frac{e}{c} \frac{i}{h} \varphi^k \psi \cdot k - \frac{1}{h^2} \left( m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} \varphi_k \varphi^k \right) \psi &= 0^1). \quad (6)\end{aligned}$$

Diese Gleichung fällt mit derjenigen von Klein-Fock<sup>2)</sup> zusammen, welche also auch ohne die etwas künstliche Einführung der fünften Koordinate erhalten werden kann<sup>3)</sup>.

Leningrad, Physikalisches Institut der Universität.

1) Es sei bemerkt, daß im feldfreien Falle aus (6) die Geschwindigkeit der de Broglieschen Phasenwellen leicht erhalten werden kann. Die Substitution ergibt nämlich  $\psi = \psi' e^{\frac{i}{h} E t}$ , wo  $\psi'$  nicht von  $t$  abhängt, wegen

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \frac{E^2}{h^2} \psi,$$

$$\nabla^2 \psi - \left( \frac{1}{c^2} - \frac{m^2 c^2}{E^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Setzen wir

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}},$$

so ist

$$\nabla^2 \psi - \frac{b^2}{c^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

oder die gesuchte Geschwindigkeit  $V = \frac{c^2}{b}$ , was auch unmittelbar aus der relativistischen Hamiltonschen Gleichung (5) erschlossen werden konnte.

<sup>2)</sup> O. Klein, ZS. f. Phys. **37**, 895, 1926; V. Fock, ZS. f. Phys. **39**, 226, 1926.

<sup>3)</sup> Anmerkung bei der Korrektur. Inzwischen hat E. Schrödinger (Ann. d. Phys. **81**, 132, 1926) dieselbe Gleichung mit Hilfe der Operatorenmethode gewonnen.