Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 31

Übungsaufgaben

AUFGABE 31.1. Zeige, dass das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ in der Tat ein Skalarprodukt ist.

AUFGABE 31.2. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

AUFGABE 31.3.*

Es sei V ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass der Realteil dieses Skalarproduktes ein Skalarprodukt auf dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum ist.

AUFGABE 31.4. Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^2$ mit den Werten $\langle e_1, e_1 \rangle = 5$, $\langle e_1, e_2 \rangle = -4$, $\langle e_2, e_1 \rangle = 7$ und $\langle e_2, e_2 \rangle = -3$. Berechne $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle$. Handelt es sich um ein Skalarprodukt?

AUFGABE 31.5. Es seien
$$f, g \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit $f(x) = -x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + x + 3$. Berechne $\langle f, g \rangle$ im Sinne von Beispiel 31.6.

AUFGABE 31.6. Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes reelles Intervall mit $a < b$ und sei $V = \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} | \, f \text{ stetig} \}$. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ und $f, g \in V$ sei
$$\langle f, g \rangle_n := \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i \frac{b-a}{n} \right) g\left(a + i \frac{b-a}{n} \right).$$
Welche Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt $\langle -, - \rangle_n$, welche nicht? Welche Beziehung besteht zwischen $\langle -, - \rangle_n$ und dem Skalarprodukt aus Beispiel 31.6?

AUFGABE 31.7. Es seien $(V_1, \langle -, - \rangle_1)$ und $(V_2, \langle -, - \rangle_2)$ reelle Vektorräume mit Skalarprodukten. Zeige, dass auf dem Produktraum $V_1 \times V_2$ durch
$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v_2, w_2 \rangle_2$$
ein Skalarprodukt definiert ist.

Aufgabe 31.8. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$|| v + w ||^2 + || v - w ||^2 = 2 \, || v ||^2 + 2 \, || w ||^2$$

gilt.

Aufgabe 31.9. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq || v || \cdot || w ||$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

Aufgabe 31.10. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$.

a) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(|| v + w ||^2 - || v ||^2 - || w ||^2 \right)$$

gilt.

b) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left(|| v + w ||^2 - || v - w ||^2 + \mathrm{i} \, || v + \mathrm{i} w ||^2 - \mathrm{i} \, || v - \mathrm{i} w ||^2 \right).$$

Aufgabe 31.11. Es sei V ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass die Norm zu diesem Skalarprodukt mit der Norm übereinstimmt, die man erhält, wenn man V als reellen Vektorraum mit dem zugehörigen reellen Skalarprodukt auffasst.

Aufgabe 31.12. Zeige, dass die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{K}^n$ eine Norm ist.

Aufgabe 31.13. Zeige, dass die Summennorm auf dem $\mathbb{K}^n$ eine Norm ist.

Aufgabe 31.14. Bestimme für den Vektor

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

den zugehörigen normierten Vektor bezüglich der euklidischen Norm, der Maximumsnorm und der Summennorm.

Aufgabe 31.15. Sei $n \geq 2$. Zeige, dass für die Norm $|| x || := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ kein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ existiert mit der Eigenschaft $|| x || = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Aufgabe 31.16. Es sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeige, dass V, aufgefasst als reeller Vektorraum, mit der gleichen Norm ebenfalls ein normierter Vektorraum ist.

Aufgabe 31.17.*

Zeige, dass ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum durch

$$d(u,v) := ||u-v||$$

zu einem metrischen Raum wird.

Aufgabe 31.18.*

Es seien $P = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$ und $Q = \left(2, \frac{1}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in

a) der euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) der Maximumsmetrik.

d) Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 31.19.*

Es sei A eine nichtleere Menge, $n \in \mathbb{N}_+$ und $M = A^n$ das n-fache Produkt der Menge mit sich selbst.

a) Zeige, dass auf M durch

$$d(x,y) = d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) := \#(\{i \mid x_i \neq y_i\})$$

eine Metrik definiert wird.

b) Bestimme zu $A = \{a,b,c\}$ und $n = 4$ den Abstand $d((a,a,b,c),(c,a,b,a))$.

c) Liste für $A = \{a,b,c\}$ und $n = 3$ alle Elemente aus der offenen Kugel $U((a,a,b),2)$ auf.

Aufgabe 31.20. Es sei M die Menge aller (Personen)-Bahnhöfe in Deutschland. Zu $a,b \in M$ sei

$$d(a,b)$$

die (zeitlich) kürzeste fahrplanmäßige Verbindung von a nach b. Handelt es sich dabei um eine Metrik?

Aufgabe 31.21. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Achsenkreuz, also die Vereinigung von x-Achse und y-Achse.

(1) Definiere auf A den Abstand, der durch die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten $P,Q \in A$ durch einen Weg auf A gegeben ist.
(2) Zeige, dass es sich dabei um eine Metrik handelt.

(3) Gibt es eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ derart, dass die Einschränkung der zugehörigen Metrik mit unserer Verbindungsmetrik übereinstimmt?

Aufgabe 31.22.*

Es sei V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und E ein affiner Raum über V. Zeige, dass E durch

$$d(P,Q) := || \overrightarrow{PQ} ||$$

zu einem metrischen Raum wird.

Es sei T eine Menge und

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$|| f || := || f ||_T = \sup (|f(x)| \, | x \in T)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Aufgabe 31.23. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} | \ || f ||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass M ein komplexer Vektorraum ist.

Aufgabe 31.24. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} | \ || f ||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass die Supremumsnorm auf M folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $|| f || \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $|| f || = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in M$ gilt

$$|| \lambda f || = |\lambda| \cdot || f || .$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$|| g + f || \leq || g || + || f || .$$

Aufgabe 31.25. Es sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei

$$M = \{f : T \to E | \ || f ||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E. Zeige, dass die Supremumsnorm auf M eine Norm ist.

Aufgabe 31.26. Es sei T eine Menge, E ein euklidischer Vektorraum und

$$M = \{f : T \to E \mid \,||\, f \,||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E. Zeige, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M genau dann gegen $f \in M$ gleichmäßig konvergiert, wenn diese Folge im durch die Supremumsnorm gegebenen metrischen Raum M konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 31.27. (4 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x) = 2x^3 - x + 3$ und $g(x) = -5x^2 + 4x - 7$. Berechne

$$\langle f, g \rangle, \; ||\, f \,||, \; ||\, g \,||$$

im Sinne von Beispiel 31.6.

Aufgabe 31.28. (3 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Bestätige

$$||\, x + y \,||^2 - ||\, x - y \,||^2 = 4 \langle x, y \rangle .$$

Aufgabe 31.29. (4 Punkte)

Es sei $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeige, dass V versehen mit der Abbildung

$$\langle -, - \rangle : \; V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \; (A, B) \longmapsto \mathrm{Spur}\left(B^t A\right)$$

ein euklidischer Vektorraum ist.

Aufgabe 31.30. (5 Punkte)

Es seien n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,0) \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $Q \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} d(P_i, Q) \geq n$$

gibt.

Aufgabe 31.31. (3 Punkte)

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $||\, v \,|| \leq 1$ und $||\, w \,|| = 1$. Zeige, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $||\, v + aw \,|| = 1$ gibt.