Demostración.

1. Como
$$a - q_r = a - \frac{2a + c - d}{2} = \frac{d - c}{2} > 0,$$
entonces,
$$q_r < a < c.$$

2. Si fuese $c - q_r = q_r$, entonces,
$$0 = c - 2q_r = c - (2a + c - d) = d - 2a \Rightarrow d = 2a,$$
por lo que
$$2a^2 + c^2 = d^2 = 4a^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}a \notin \mathbb{N},$$
llegándose a una contradicción.

3. $c - q_r < q_r \iff c < 2q_r = 2a + c - d \iff 0 < 2a - d \iff d < 2a.$

□

Teorema 10.12. *Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathcal{T}_o$ de ternas pitagóricas ordenadas y el conjunto $\mathcal{C}_{i_2}^{q_r > a}$ de cuaternas pitagóricas isósceles (de segunda especie, ya que, según el lema 10.2, cualquier cuaterna pitagórica isósceles de primera especie tiene inradio menor que su cateto menor) tales que su inradio es mayor que su cateto menor. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.*

Demostración. Si (a, b, b, d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie tal que $q_r > a$, como $q_r - a < q_r$, según el teorema 10.8, $(q_r - a, q_r, d - b)$ es una terna pitagórica ordenada, por lo que, para cualquier terna pitagórica ordenada $(u, v, w) \in \mathcal{T}_o$, la correspondencia buscada debería ser de la forma

$$(u, v, w) = (q_r - a, q_r, d - b) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} u = \dfrac{-a + 2b - d}{2}, \\ v = \dfrac{a + 2b - d}{2}, \\ w = -b + d, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -u + v, \\ b = u + v + w, \\ d = u + v + 2w, \end{cases} \end{array} \right.$$

siendo

$$a^2 + 2b^2 - d^2 = (-u + v)^2 + 2(u + v + w)^2 - (u + v + 2w)^2 = 2(u^2 + v^2 - w^2),$$

y, por tanto, (a, b, b, d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie si y sólo si (u, v, w) es una terna pitagórica ordenada. Además, el inradio de la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie correspondiente a cualquier terna pitagórica ordenada (u, v, w) verifica que

$$q_r = \frac{a+2b-d}{2} = \frac{-u+v+2(u+v+w)-(u+v+2w)}{2} = v > -u+v = a.$$

A continuación, como las aplicaciones lineales $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por estas relaciones,

$$f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad g = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

son biyectivas (por ser inversas una de la otra, ya que $f \cdot g = 1_{\mathbb{R}^3}$), tenemos dos correspondencias biunívocas inversas una de la otra

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_o & \xrightarrow{g} & \mathcal{C}_{i_2}^{q_r>a} \\ (u,v,w) & \rightsquigarrow & (-u+v, u+v+w, u+v+w, u+v+2w) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_{i_2}^{q_r>a} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T}_o \\ (a,b,b,d) & \rightsquigarrow & \left(\dfrac{-a+2b-d}{2}, \dfrac{a+2b-d}{2}, -b+d\right) \end{array}$$

Finalmente:

1. Si (u, v, w) es una terna pitagórica ordenada primitiva, como w es impar $(*)$, resulta que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{mcd}(u,v,w) \\ &= \operatorname{mcd}(v,u,w) \\ &= \operatorname{mcd}(v,u+v,w) \\ &= \operatorname{mcd}(2v,u+v,w) \\ &\overset{*}{=} \operatorname{mcd}(-u+v,u+v,w) \\ &= \operatorname{mcd}(-u+v,u+v+w,w) \\ &= \operatorname{mcd}(-u+v,u+v+w,u+v+2w), \end{aligned}$$

   y, por tanto, la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie $(-u+v, u+v+w, u+v+w, u+v+2w)$ también es primitiva.

2. Si (a, b, b, d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie primitiva, según el teorema 10.11, b es par, por lo que, tanto a como d son impares $(*)$, verificándose que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{mcd}(a,b,b,d) \\ &= \operatorname{mcd}(a,b,d) \\ &= \operatorname{mcd}(a,b,-b+d) \\ &= \operatorname{mcd}(a,a+2b-d,-b+d) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{mcd}(-a+2b-d, a+2b-d, -b+d) \\
&\underset{*}{=} \operatorname{mcd}\left(\frac{-a+2b-d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right),
\end{aligned}
$$

y, por tanto, la terna pitagórica ordenada $\left(\frac{-a+2b-d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right)$ también es primitiva.

El programa 10.7 (pág. 345), introduciendo un valor para $m \in \mathbb{N}$, nos muestra los m primeros términos de la sucesión de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuyo término general es

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : (u_n, v_n, w_n) = (2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)$$

y de la correspondiente sucesión de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie, cuyo término general es

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : (a_n, b_n, c_n, d_n) = (2n^2-1, 4n^2+6n+2, 4n^2+6n+2, 6n^2+8n+3),$$

pudiéndose comprobar que, en todas ellas, su inradio es mayor que su cateto menor. □

Ejemplo 10.8. Según el teorema 10.12, la terna pitagórica ordenada $(3,4,5)$ se corresponde con la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie $(1,12,12,17)$, ya que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Teorema 10.13.

1. *Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos* $\mathcal{T}_o^{w>2u}$ *y* $\mathcal{C}_{i_2}^{q_r<a}$. *Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.*

2. *Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos* $\mathcal{T}_o^{w<2u}$ *y* $\mathcal{C}_{i_1}^{2a>d}$. *Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.*

3. *Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos* $\mathcal{T}_o^{w<2v}$ *y* $\mathcal{C}_{i_1}^{2a<d}$. *Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.*

4. $\operatorname{card}\left(\mathcal{C}_{i_1}^{2a>d}\right) < \operatorname{card}\left(\mathcal{C}_{i_1}^{2a<d}\right)$, *pudiéndose definir entonces una aplicación inyectiva* $\Psi : \mathcal{C}_{i_1}^{2a>d} \longrightarrow \mathcal{C}_{i_1}^{2a<d}$ *verificando que, para cada* $(a,a,c,d) \in \mathcal{C}_{i_1}^{2a>d}$, *el cateto mayor de* $\Psi\big((a,a,c,d)\big)$ *es igual a* c.

Demostración.