Ejercicio 3.5. Probar que:

1. Para cada número primo p, existe una única terna pitagórica primitiva y ordenada con exinradio menor igual a p y tal que su cateto menor es un número impar.
2. Para cada número primo $p \geq 5$, existe una única terna pitagórica primitiva y ordenada con exinradio menor igual a p y tal que su cateto menor es un número par.

Solución Ejercicio 3.5. ☞ Para cada número primo $p \geq 3$, como

$$\mathrm{Div}_{<(2-\sqrt{2})p}(2p^2) = \begin{cases} \{1\} & \text{si} \quad p = 2, \\ \{1\} & \text{si} \quad p = 3, \\ \{1, 2\} & \text{si} \quad p \geq 5, \end{cases}$$

entonces, según el teorema 3.5 (pág. 68):

1. Para $p = 2$, existe una única terna pitagórica ordenada con exinradio menor igual a p, siendo ésta

$$(2p - 1, 2p^2 - 2p, 2p^2 - 2p + 1) = (3, 4, 5).$$

   Además, esta terna pitagórica tiene por cateto menor un número impar y es primitiva, ya que cualesquiera dos números naturales consecutivos son primos entre sí.

2. Para $p = 3$, existe una única terna pitagórica ordenada con exinradio menor igual a p, siendo ésta

$$(2p - 1, 2p^2 - 2p, 2p^2 - 2p + 1) = (5, 12, 13).$$

   Además, esta terna pitagórica tiene por cateto menor un número impar y es primitiva, ya que cualesquiera dos números naturales consecutivos son primos entre sí.

3. Para $p \geq 5$, existen exactamente dos ternas pitagóricas ordenadas con exinradio menor igual a p, ambas primitivas, según nos aseguran los lemas 3.1 (pág. 75) y 3.2 (pág. 76), ya que

$$\begin{cases} \mathrm{mcd}(1, 2p^2) = 1, \\ \mathrm{mcd}(2, p^2) = 1, \end{cases}$$

   siendo éstas:

   a) La terna pitagórica $(2p - 1, 2p^2 - 2p, 2p^2 - 2p + 1)$, cuyo cateto menor es un número impar. El programa 3.4 (pág. 332), introduciendo un valor para $n \in \mathbb{N}$, nos muestra los ternas pitagóricas de este tipo que se obtienen para cada uno de los n primeros números primos.

   b) La terna pitagórica $(2p - 2, p^2 - 2p, p^2 - 2p + 2)$, cuyo cateto menor es un número par. El programa 3.5 (pág. 332), introduciendo un valor para $n \in \mathbb{N}$, nos muestra los ternas pitagóricas de este tipo que se obtienen para cada uno de los n primeros números primos mayores o iguales que 5.