

Vers de verres

(Glass worms)

Soit un alignement fini de verres, contenant chacun un nombre entier d'unités de liquide (parfois zéro -> verre vide)

Procédure :

- on prend le verre le plus à gauche,
- on regarde le nombre k d'unités qu'il contient,
- on le vide dans le k -ième verre à sa droite,
- on pose le verre vide tout à droite, en dernière position ;
- on recommence la procédure.

Exemple :

\ 1 / \ 2 / \ 4 / \ 1 / \ 0 /

\ 0 / \ 3 / \ 4 / \ 1 / \ 0 /

c) \ 3 / \ 4 / \ 1 / \ 0 / \ 0 /

d) \ 0 / \ 4 / \ 1 / \ 3 / \ 0 /

e) \ 4 / \ 1 / \ 3 / \ 0 / \ 0 /

f) \ 0 / \ 1 / \ 3 / \ 0 / \ 4 /

g) \ 1 / \ 3 / \ 0 / \ 4 / \ 0 /

h) \ 0 / \ 4 / \ 0 / \ 4 / \ 0 /

i) \ 4 / \ 0 / \ 4 / \ 0 / \ 0 /

j) \ 0 / \ 0 / \ 4 / \ 0 / \ 4 /

k) \ 0 / \ 4 / \ 0 / \ 4 / \ 0 / --> cette configuration est la même que (h)

Remarque (merci à Mitch Harris et Jacques Tramu)

Il est interdit de verser le contenu d'un verre ailleurs que dans un verre ! La configuration suivante « bloque » immédiatement :

\ 4 / \ 2 / \ 0 / \ 1 /

... en effet le contenu 4 du premier verre n'a pas de réceptacle valide. Jacques dit ça autrement : « S'il y a N verres, la capacité maximale de chacun est de $N-1$, avec interdiction de déborder ».

Questions :

Si l'on représente une configuration de verres sous forme de chaîne de caractères, la séquence ci-dessus s'écrit :

(a) 12410 --> (b) 03410 --> (c) 34100 --> (d) 04130 --> (e) 41300 --> (f) 01304 --> (g) 13040 --> (h) 04040 --> (i) 40400 --> (j) 00404 --> (k) 04040 --> (h) (boucle)

Traduisons maintenant une configuration de verres en nombre entier (quand c'est possible - en effet une configuration commençant par un verre vide sera « traduite » par un entier commençant pas zéro, ce qui est interdit). Quelle serait alors la suite **W(1)** des nombres entiers (tels que 12410 ou 13040) qui permettent d'entrer dans une boucle ?

Quelle serait la suite **W(2)** des plus petits nombres entiers (tels que 40400) faisant partie d'une boucle ? [On peut voir ces derniers comme des vers (de verres) se déplaçant vers la droite par mues successives - d'où le titre de cette page].

Jacques Tramu a proposé (le 9 mars 2009, sur la liste [SegFans](#)) une troisième suite **W(3)**, celle des « worst worms » (les pires vers) :

What is the starting configuration which leads to the larger number of moves, before detecting a cycle?
I've found the following (not exhaustive search) sequence for glasses = 1 to 11:

number of glasses	(starting configuration)	maximum moves to cycle detection
1	{ 0 }	1
2	{ 0, 1 }	2
3	{ 1, 0, 1 }	4
4	{ 0, 1, 1, 1 }	7
5	{ 0, 1, 0, 2, 1 }	10
6	{ 3, 0, 0, 0, 0, 2 }	13
7	{ 2, 0, 0, 5, 4, 4, 1 }	20
8	{ 0, 0, 0, 2, 2, 2, 0, 1 }	22
9	{ 1, 5, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 3 }	42
10	{ 3, 0, 4, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 3 }	43
11	{ 0, 3, 0, 1, 4, 0, 5, 10, 1, 1, 3 }	63

Example:

```
{ 1, 0, 1 }
{ 1, 1, 0 } move 1
{ 2, 0, 0 } move 2
{ 0, 2, 0 } move 3
{ 2, 0, 0 } move 4 <-- cycle detection
```

On voit à la ligne 9 du tableau de **Jacques** que le vers (et le nombre) 151112003 met 42 générations à se régénérer !

Les dix premiers termes de **W(3)** pourraient donc être (colonne de droite du tableau ci-dessus) :

W(3) = 1, 2, 4, 7, 10, 13, 20, 22, 42, 43, 63, ...

À la ligne 11 du tableau apparaît un contenu (en gris) qui est supérieur à 9 ; le vers {0,3,0,1,4,0,5,10,1,1,3} n'est donc pas immédiatement traduisible en nombre entier (il commence d'ailleurs par zéro, ce qui est interdit).

Jacques a pensé à une quatrième suite **W(4)**, celle du nombre de configurations *légales* de départ correspondant à un nombre de verres donné. Une configuration légale ? On a vu qu'un verre ne peut avoir qu'un contenu inférieur ou égal au nombre de verres en jeu. La configuration suivante est donc *illégal* :

```
\ 4 / \ 2 / \ 0 / \ 1 /
 \_ / \_ / \_ / \_ /
```

Qui calculera **W(4)** ? Jacques, bien sûr ! Voici un début de tableau :

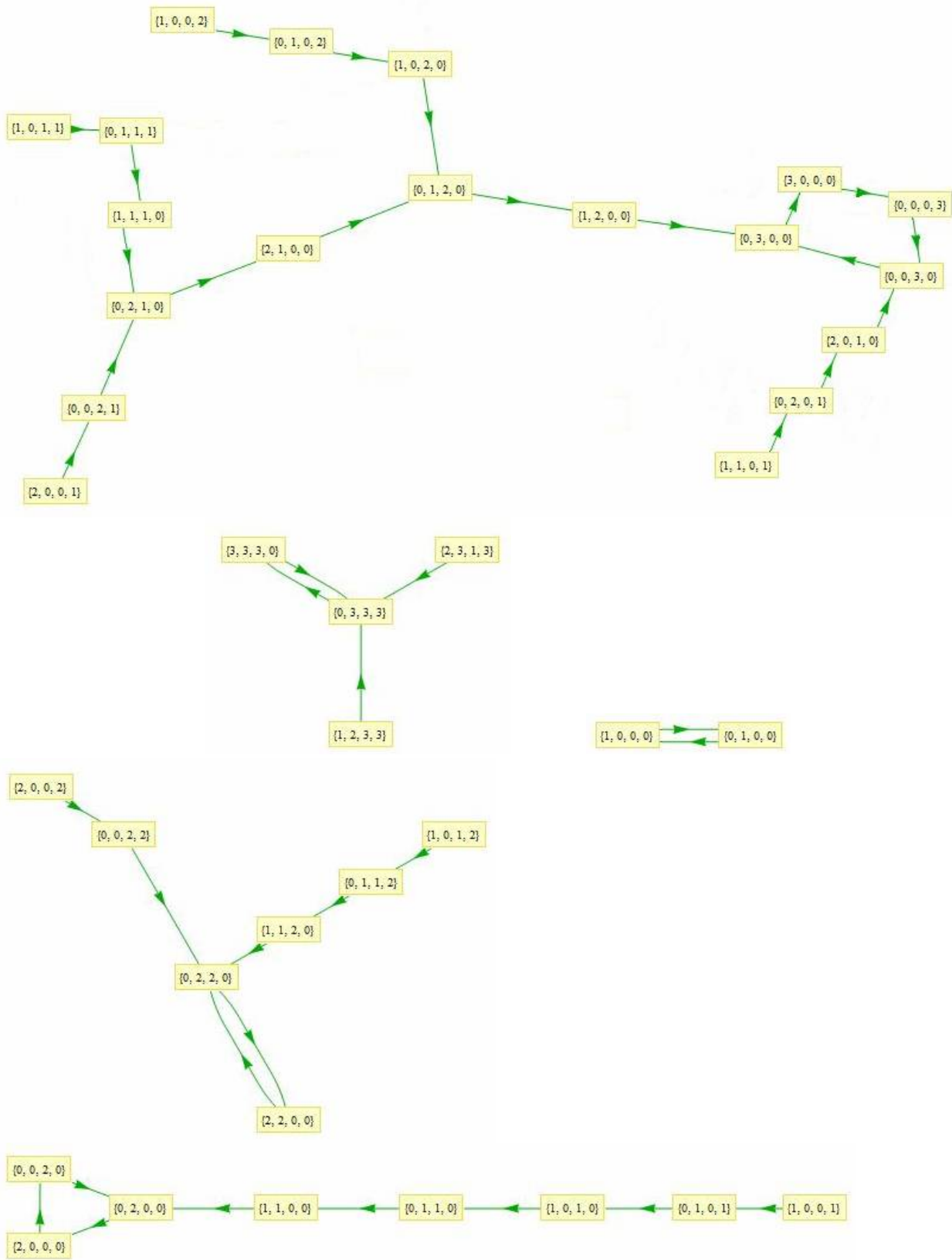
Nbre de verres / **Config. de dép. légales** / **Config. possibles**

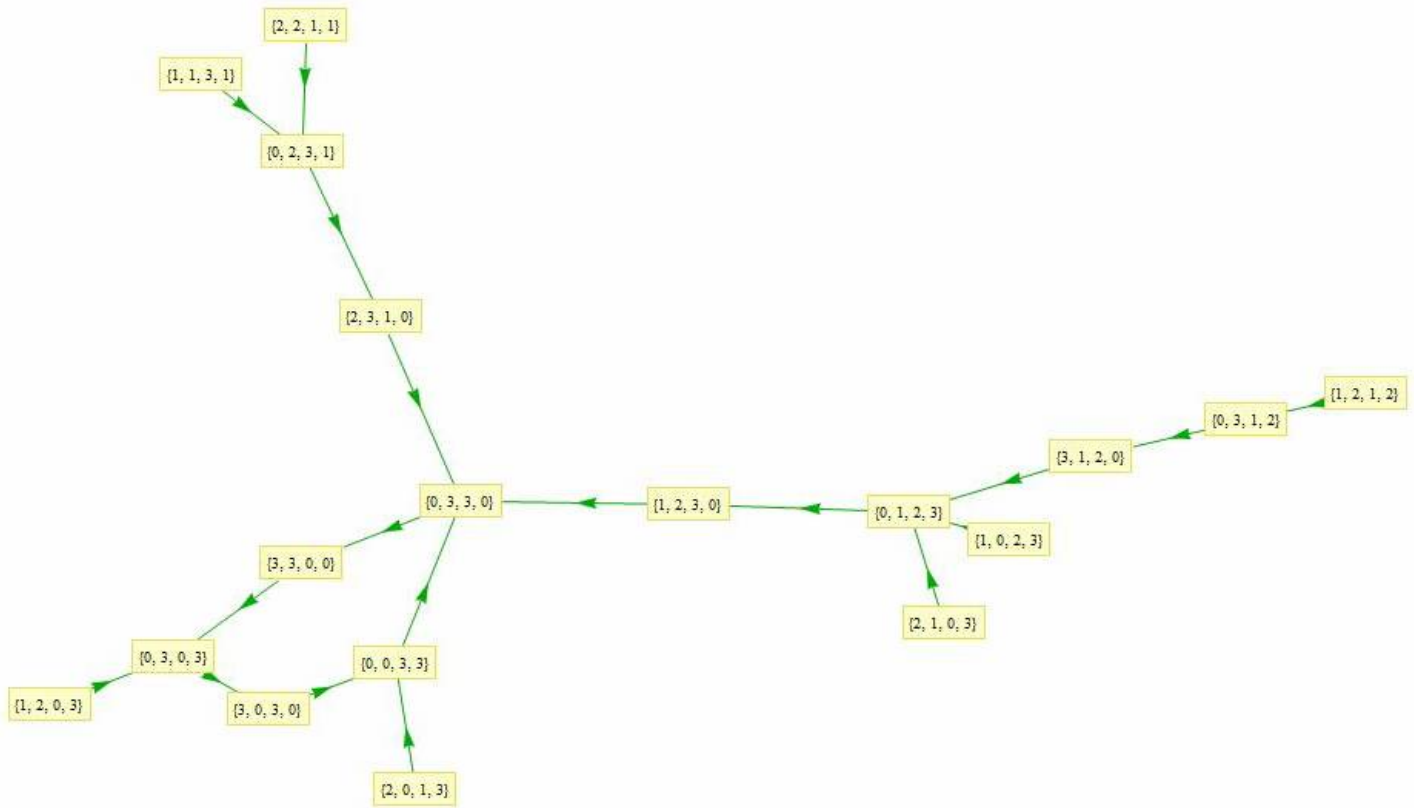
0	1	1
1	1	1
2	3	4
3	13	27
4	64	256
5	404	3125
6	2135	46656
7	21077	823543
8	111459	16777216
...		

W(4) = 1, 1, 3, 13, 64, 404, 2135, 21077, 111459, ...

La colonne des configurations possibles est la suite [A000312](#) dans l'OEIS de **Neil Sloane**.

Jean-Marc Falcoz a dessiné le 10 mars 2009 tous les parcours des vers légaux de longueur 4 ; boucles et attracteurs sont bien visibles :





Tous les vers légaux de longueur 2 à 6 sont [là](#) (merci à Jean-Marc)

Retour à la page d'accueil, [là](#).