22 '15

On remarque que si (λ, μ) est une solution de (A), $(-\lambda, \mu)$ en est une autre; c'est le produit de (λ, μ) par la solution $(-1, 0)$. Mais $(-\lambda, -\mu)$ est aussi une solution.

On en déduit que les solutions de l'équation proposée se groupent par deux (x, y), (x_1, y_1) transformées l'une de l'autre par les équations symétriques

$$x_1 = 5x - 4y, \qquad y_1 = 6x - 5y.$$

En définitive, on a le moyen de trouver une infinité de solutions nouvelles de l'équation proposée quand on connaît une solution de (A) ou plusieurs.

Les propriétés de l'équation (A) se généralisent dans les équations du type plus général de la forme

$$\text{(A)} \qquad \lambda^2 - k\mu^2 = 1.$$

Les formules

$$\lambda_1 + \sqrt{k}\mu_1 = (\lambda_0 + \sqrt{k}\mu_0)(\lambda + \sqrt{k}\mu),$$
$$\lambda_1 - \sqrt{k}\mu_1 = (\lambda_0 - \sqrt{k}\mu_0)(\lambda - \sqrt{k}\mu)$$

permettent encore d'appliquer les propriétés des *produits des solutions.*

Les équations du type

$$\text{(B)} \qquad m\alpha^2 - n\beta^2 = 1$$

sont liées étroitement à l'équation (A) où l'on prend $k = mn$.

En premier lieu, si (α, β) est une solution de (B),

$$\lambda = m\alpha^2 + n\beta^2, \qquad \mu = 2\alpha\beta$$

est une solution de (A), en sorte que l'existence d'une solution de (B) assure celle d'une solution de (A). Il est à noter que la réciproque n'est pas vraie, et que (A) peut avoir des solutions sans que (B) en possède.

Si α_0, β_0 est une solution de (B), les équations

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} m\alpha + \sqrt{mn}\,\beta = (\lambda + \sqrt{mn}\,\mu)(m\alpha_0 + \sqrt{mn}\,\beta_0), \\ m\alpha - \sqrt{mn}\,\beta = (\lambda - \sqrt{mn}\,\mu)(m\alpha_0 - \sqrt{mn}\,\beta_0), \end{cases}$$

ou, explicitement,

$$\text{(3)} \qquad \alpha = \alpha_0\lambda + n\beta_0\mu, \qquad \beta = \beta_0\lambda + m\alpha_0\mu,$$

ou bien

$$\text{(4)} \qquad \lambda = m\alpha_0\alpha - n\beta_0\beta, \qquad \mu = -\beta_0\alpha + \alpha_0\beta,$$

transforment (B) en (A) ou bien (A) en (B).

Les formules (3) où λ, μ est une solution déterminée de (A) transforment au contraire (B) en elle-même et permettent de déduire de nouvelles solutions de (B) de l'une d'elles. On pourrait dire que la solution (α, β) est le produit de la solution (α_0, β_0) par la solution (λ, μ) de (A); on pourrait multiplier par $(\lambda, \mu)^2$, $(\lambda, \mu)^3$, ...

Un cas particulier est curieux : c'est celui des équations

$$\text{(A)} \qquad \lambda^2 - k\mu^2 = 1,$$
$$\text{(A')} \qquad \lambda^2 - k\mu^2 = -1.$$

L'équation (A') est une équation (B) où $m = k$, $n = 1$. La théorie précédente s'y applique.

(A) peut avoir une solution sans que (A') en ait (exemple $k = 6$). Mais si (A') a UNE solution, (A) et (A') en possèdent du coup une infinité[1].

G. KOENIGS.

Solutions de l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{x(x+1)}{2} = \frac{y(y+1)}{3}.$$

L'équation (1) est vérifiée par $x = 4$ et $y = 5$ comme il a été dit, mais aussi par $x = -5$, et $y = -6$. Elle admet d'ailleurs une infinité d'autres solutions en entiers, soit positifs, soit négatifs.

C'est ce qu'il sera aisé d'établir.

En effet, l'équation (1) revient à

$$\text{(2)} \qquad 3x^2 + 3x - 2y^2 - 2y = 0,$$

dont on déduit deux discriminants à rendre carrés :

$$\text{(A)} \qquad 24y^2 + 24y + 1 = \square = 9z^2,$$
$$\text{(B)} \qquad 6x^2 + 6x + 1 = \square.$$

Il sera intéressant de les étudier successivement.

---

[1] Au lieu d'écrire les lignes qui précèdent, j'aurais pu me contenter de renvoyer le lecteur à Lagrange, à Legendre et aux Traités modernes d'Arithmétique, notamment à l'Ouvrage si nourri que M. Cahen a publié sous le titre *Éléments de la Théorie des nombres*. En fait, on sait résoudre toutes les équations du second degré qui sont susceptibles de l'être.