On swinging factorials (see A056040) and the https://en.wikipedia.org/wiki/Lonely_runner_conjecture

A geometrical approach of the lonely runner conjecture

Didier Guillet _27/06/2018

La conjecture du coureur solitaire peut être exprimée sous une forme géométrique. Les n coureurs sont remplacés par un réseau d' hyper-cubes dans un espace de dimension n-1.

Note : on simplifie le problème en ne considérant que n-1 coureurs qui ont chacun une vitesse relative (vk – v1) par rapport au premier coureur. Ce dernier peut donc être considéré comme fixe. La conjecture indique que pour n coureurs il y aura toujours un instant où le premier coureur (qui ne court pas !) sera au moins à une distance L=1/n du plus proche coureur : il sera solitaire. La conjecture est triviale dans le cas de 2 coureurs (L =1/2) car le second coureur atteindra forcément cette distance à l'issu d'un temps t = (v2 – v1) / 2

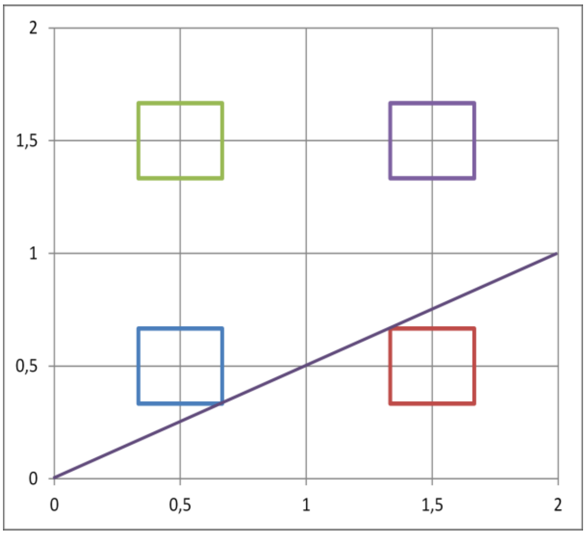
Géométriquement, la problématique s'exprime ainsi : à partir de quelle taille d'hyper-cubesl'horizon n'est-t-il plus visible ? La conjecture indique que la taille L doit être supérieure ou égale à L = 1/n.

Note : le principe consiste à « dérouler » à l'infini le cercle de longueur 1 sur lequel avance les n-1 coureurs sur les n-1 dimensions d'un espace euclidien. On considère ensuite un segment de droite d'origine O et dont les coefficients du vecteur directeur sont égaux aux vitesses relatives v2, … vn. Cette droite correspond aux positions des n-1 coureurs au cours du temps. On place ensuite dans cette espace des hyper-cubes centrée sur les valeurs (2k+1)/2 correspondant à ½, 3/2, … , (2k+1)/2 tours. Ces hyper-cubes délimitent un espace dans lequel chaque coureur est à une distance suffisante du premier coureur pour qu'une condition de « solitude » soit satisfaite. Si tous les n-1 coureurs sont dans cet espace (si la droite coupe un hypercube) alors le premier coureur est solitaire. Le problème revient donc à prouver que pour une taille d'hypercube supérieure à L=1/n et quelques soit le vecteur directeur de la droite celle-ci passera forcément pas un hypercube. Cela revient à dire que l'horizon ne sera plus visible depuis O.

L'observateur est placé à l'origine O du repère.
Les hyper-cubes sont centrés en (x, y, z, ..) = k + 0,5 (k >= 0) et ont un coté de longueur L.

La figure ci-dessous représente les premiers hypercubes pour un nombre n de coureurs égal à 3 (donc dans un espace de dimension 2) et L égal à 1/3.

L'espace étant de dimension 2, les hypercubes sont des carrés.



Les points M1 et M2 sont de coordonnées respectives (1/2+1/6,1/2-1/6) et (3/2-1/6, 1/2+1/6)
M1 (2/3, 1/3) et M2 (4/3, 2/3) ; ils sont donc alignés sur une droite de pente ½.

La taille des cubes garantit que la droite « de visée » tangente tous les autres cubes et donc que L=1/3 est un cas limite pour lequel l'observateur « voit » l'horizon. Si L est supérieur à 1/3 l'observateur ne voit plus l'horizon car toutes les droites passent par un carré ce qui revient à dire que quelque soit la vitesse des coureurs le premier coureur sera forcément solitaire à un instant donné (lorsque la droite rencontrera un carré). Si L est inférieur à 1/3 il existera des droites ne passant jamais par un carré, l'observateur verra l'horizon, et le coureur ne sera jamais solitaire.

Si l'on se place maintenant dans un espace de dimension supérieure à 2 (donc lorsqu'il y a plus de 3 coureurs), la question de l'existence de telles droites se pose.

Dans les paragraphes suivants on testera 2 hypothèses sur la disposition des points de contact de ces droites avec les différents hypercubes.

Hypothèse n° 1 – Les points se répartissent selon les sommets du polytope formé par l'intersection de l'hyper-plan perpendiculaire à la diagonale de l'hypercube et passant par son centre

Cette droite tangente l'hypercube le plus proche de l'observateur, placé en (0,5, 0,5).

Il est alors légitime de considérer les points correspondant à l'intersection d'un hyper-plan perpendiculaire à la diagonale de l'hypercube.

La question se pose de la position de cet hyperplan sur la diagonale.

Dans la suite de cet article, on suppose que l'hyperplan passe par le centre de l'hypercube.

En dimension 3, les points d'intersection se répartissent sur un hexagone.

Les coordonnées des sommets de cet hexagone sont : (1, ½, 0) (1, 0, ½), (½ , 1, 0), (0, 1, ½), (½ , 0, 1), (0, ½, 1) .

Dans un espace de dimension supérieur, le nombre de points dépend de la parité de la dimension n.

Si n est pair alors les points se répartissent sur les sommets extrêmes de l'hypercube.

Ces points sont au nombre de $\binom{n}{n/2}$

Si n est impair alors les points se répartissent au milieu des arrêtes centrales de l'hypercube.

Ces points sont au nombre de $\binom{n}{\frac{n-1}{2}} . \frac{n+1}{2}$

Le tableau suivant indique le nombre de points en fonction de la dimension n :

n=1	1
n=2	2
n=3	6
n=4	6
n=5	30
n=6	20
n=7	140
n=8	70

Il est à noter que ces points sont tous situés dans un hyperplan, de dimension n-1, orthogonal à la diagonale de l'hypercube.

Les valeurs du tableau sont à rapprocher de la séquence **A056040** qui donne les valeurs de la fonction « swinging factorial » :

$$\mathbf{n} \wr = \frac{\boldsymbol{n}!}{\left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}} \right\rfloor !}$$

D’un point de vue géométrique, des polytopes peuvent être associés aux valeurs de n.

Le tableau suivant donne le nombre *S* de sommets en fonction du nombre *n* de coureurs et la dimension *dim* associée.

Le nom du polytope résultant est indiqué.

n	dim	S	Nom du polytope (swingoèdre)
1	0	1	point
2	1	2	ligne
3	2	6	hexagone
4	3	6	Octaèdre (cf. https://en.wikipedia.org/wiki/Octahedron et https://en.wikipedia.org/wiki/Hypersimplex)
5	4	30	Bitruncated 5-cell (cf. https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_5-cell)
6	5	20	Birectified 5-simplex (cf. https://en.wikipedia.org/wiki/Rectified_5-simplexes#Birectified_5-simplex)
7	6	140	Tritruncated 6-simplex? https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_6-simplexes#Tritruncated_6-simplex

Hypothèse n° 2 – Les points se répartissent selon les sommets du polytope correspond aux permutations du vecteur (0, 1/(n-1), 2/(n-1), …, 1)

Ces permutations étant au nombre de *n !* Le polytope résultant comporte dont *n !* sommets.

Il est nommé *permutoèdre* (Cf. https://en.wikipedia.org/wiki/Permutohedron)

Le nombre de sommets du *permutoèdre* est indiqué dans le tableau ci-dessous, à comparer au nombre de sommets des *polytopes (swingoèdre)* du tableau précédent :

n	dim	S (permutoèdre)	S (swingoèdre)	Nom du permutoèdre
1	0	1	1	point
2	1	2	2	ligne
3	2	6	6	hexagone
4	3	24	6	truncated octahedron.
5	4	120	30	omnitruncated 5-cell
6	5	720	20	omnitruncated 5-simplex
7	6	5040	140	https://en.wikipedia.org/wiki/Pentellated_6-simplexes#Omnitruncated_6-simplex

Les coordonnées des points rencontrés par la droite de visée de l'observateur sur le premier hypercube correspondent aux coordonnées d'un des sommets du *permutoèdre*.

Le tableau suivant indique ces coordonnées en fonction de *n* ainsi que la largeur de l'hypercube et la distance minimale D à respecter pour être « en dehors » de l'hypercube.

n	dim	x1	x2	x3	x4	x5	largeur	D = largeur/2
1	*0*						*-1*	
2	1	1/2					0	0
3	2	1/3	2/3				1/3	1/6
4	3	1/4	1/2	3/4			1/2	1/4
5	4	1/5	2/5	3/5	4/5		3/5	3/10
6	5	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	2/3	1/3

Pour n égal à 1, la dimension est nulle et le calcul de la largeur [(n-2)/n] donne une valeur -1 non significative. Dans ce cas le coureur est toujours solitaire, par définition !

Démonstration de l'hypothèse n° 2

Les coordonnées des sommets du *permutoèdre* sont de la forme k / n avec $k = 1.. (n-1)$.

On veut montrer que quelque soit la position d'un point *P* sur la ligne de visée, celui-ci est toujours en dehors d'un des hypercubes du réseau. Il convient donc de montrer que quelque soit les coordonnées de *P* il existe toujours **au moins** une des *n* coordonnées qui soit à une distance **au moins** égale à *D* du centre du plus proche hypercube, *D* étant la demi largeur d'un hypercube.

On remarque que si l'on multiplie ces coordonnées par $n+1$ on obtient, modulo 1, les mêmes valeurs.

Il suffit dont de démontrer cette proposition pour la portion de droite OM, les coordonnées x_k de *M* étant égales à $k. (n+1) / n$ avec $k = 1.. (n-1)$.

C'est une démonstration analogue à celle réalisée au début de cette note pour la dimension 2 mais généralisée pour la dimension *n*.

Par exemple, pour n=6, on obtient le tableau suivant :

	n=	6					abs(x - 0,5)					sup (D)
x	0	0	0	0	0	0	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	
x	1	0,17	0,33	0,5	0,67	0,83	0,33	0,17	0,00	0,17	0,33	0,33
x	2	0,33	0,67	0	0,33	0,67	0,17	0,17	0,50	0,17	0,17	0,50
x	3	0,5	0	0,5	0	0,5	0,00	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50
x	4	0,67	0,33	0	0,67	0,33	0,17	0,17	0,50	0,17	0,17	0,50
x	5	0,83	0,67	0,5	0,33	0,17	0,33	0,17	0,00	0,17	0,33	0,33

On, remarque qu'il y a toujours une des coordonnées, surlignée en vert, qui est à une distance supérieure à D (D=0,33) du centre de l'hypercube ($x_k = 0,5$). Ceci garantit que la droite OM passe toujours en dehors de l'hypercube.