

BURS 24 (1976)

AIRES DES CHEMINS SURDIAGONAUX A ÉTAPES OBLIQUES PERMISES

G. KREWERAS

✓
A6318

scan
add to
A6318
A6319

I - INTRODUCTION

Comme dans l'article précédent du même "Cahier", nous considérons ici les points (x, y) de Z^2 comme les sommets d'un graphe, mais avec trois arcs (au lieu de deux seulement) partant de chaque sommet (x, y) : l'un vers $(x + 1, y)$ ("arc horizontal"), un autre vers $(x + y, 1)$ ("arc vertical"), et un troisième vers $(x + 1, y + 1)$ ("arc oblique") ; nous appellerons *chemin royal* tout chemin de ce graphe, par analogie avec la marche du roi aux échecs.

Les chemins royaux joignant $(0, 0)$ à un point de coordonnées entières non-négatives (x, y) forment un ensemble de cardinal $R(x, y)$. Les nombres $R(x, y)$ ont été fréquemment étudiés, notamment dans [2] et [1] ; nous en donnons un tableau plus loin.

Nous appelons *pont royal strict de portée n* tout chemin joignant $(0, 0)$ à (n, n) tel que tout sommet *intermédiaire* satisfasse à $x < y$; la fig. 1 en donne un exemple. Le nombre de ponts royaux stricts de portée n est donné par la suite des entiers b_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	1	2	6	22	90	394	1806	8558

→ A6318

également étudiés dans [1] sous le nom de "nombres de Schröder doubles".

Lorsqu'un pont royal strict de portée n , soit P , est tracé dans $R^2 \supset Z^2$, il existe une aire $S(P)$ comprise entre P et la diagonale $y = x$, aire qui peut

(*) Le présent travail a pu être réalisé grâce à l'appui de la Sous-commission franco-québécoise de coopération scientifique et technologique.

A6318
A6319

se décomposer en triangles rectangles isocèles comme l'indique la fig. 1. Parmi ces triangles, dont chacun a pour aire $1/2$, nous distinguerons les triangles "sur-hypoténuse" et les triangles "sous-hypoténuse".

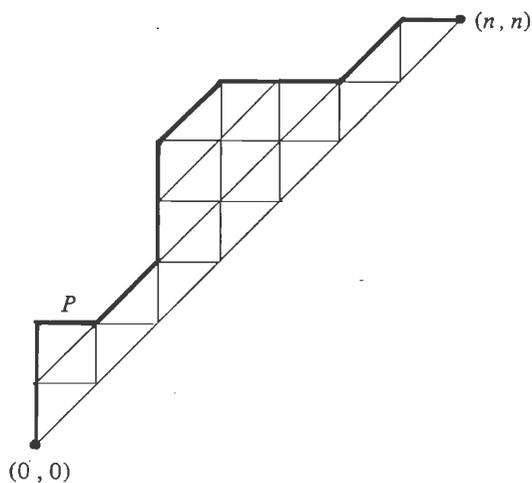


Fig. 1

L'objet principal de cet article est d'étudier la somme des aires $\sum S(P)$ lorsque P décrit l'ensemble des b_n ponts royaux stricts de portée n ; on montrera en particulier que

$$\sum_P S(P) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i-1} C_{2n-1}^{2i}.$$

Cette étude constitue donc un prolongement naturel de la première partie de l'article précédent du même "Cahier"; bien que l'expression finale soit ici un peu moins simple, la méthode suivie sera grosso modo la même.

UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
MADISON, WISCONSIN

II - LES NOMBRES $A(x, y)$

Pour tout point entier (x, y) tel que $0 \leq x < y$, appelons $A(x, y)$ le nombre de chemins royaux joignant $(0, 0)$ à (x, y) et qui sont "surdiagonaux au sens fort", c'est-à-dire tels qu'en tout sommet (ξ, η) autre que $(0, 0)$ on ait $\xi < \eta$.

Les nombres $A(x, y)$ ont été spécialement étudiés dans [1] (où ils s'appellent $A'_1(x, y)$); on y montre en particulier que

$$A(x, y) = R(x, y-1) - R(x-1, y). \quad (1)$$

Les deux tableaux ci-après donnent respectivement les premiers des nombres $R(x, y)$ et $A(x, y)$.

8	1	17	145	833	3649				
7	1	15	113	575	2241	7183			
6	1	13	85	377	1289	3653	8989		
5	1	11	61	231	681	1683	3653	7183	
4	1	9	41	129	321	681	1289	2241	3649
3	1	7	25	63	129	231	377	575	833
2	1	5	13	25	41	61	85	113	145
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$y=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$R(x, y)$	$x=0$	1	2	3	4	5	6	7	8

8	1	14	96	430	1408	3534	6752	8558
7	1	12	70	264	714	1412	1806	
6	1	10	48	146	304	394		
5	1	8	30	68	90			
4	1	6	16	22				
3	1	4	6					
2	1	2						
$y = 1$	1							
$A(x, y)$	$x = 0$	1	2	3	4	5	6	7

Les nombres R et A font l'objet de deux lemmes simples, exposés dans les deux paragraphes suivants

III - LEMME SUR LES R

Si l'on définit $\varphi(x, y)$ par la somme alternée

$$\varphi(x, y) = R(x, y) - R(x-1, y+1) + \dots + (-1)^x R(0, y+x)$$

et $\psi(x, y)$ par

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) + \varphi(x-2, y),$$

le lemme énonce que

$$\psi(x, y) = R(x, y-1) + R(x-1, y-1), \quad (2)$$

étant entendu que l'apparition d'un argument négatif rend nulle l'expression correspondante.

Ce lemme est trivialement vrai pour $x = 0$ (les deux membres de (2) sont égaux à 1) et se démontre par récurrence sur x . En effet on a

$$\varphi(x, y) = R(x, y) - \varphi(x-1, y+1),$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= R(x, y) - \varphi(x-1, y+1) + R(x-2, y) - \varphi(x-3, y+1) \\ &= R(x, y) + R(x-2, y) - \psi(x-1, y+1). \end{aligned}$$

En remplaçant, en vertu de l'hypothèse de récurrence, $\psi(x-1, y+1)$ par $R(x-1, y) + R(x-2, y)$, on trouve

$$\psi(x, y) = R(x, y) - R(x-1, y),$$

ce qui, compte tenu de la relation évidente

$$R(x, y) = R(x-1, y) + R(x, y-1) + R(x-1, y-1),$$

fait bien retomber sur l'expression (2).

IV - LEMME SUR LES A

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a

$$A(k, 2n-k) = \sum_{\lambda=0}^k A(\lambda, \lambda+n-k) A(k-\lambda, n-\lambda).$$

Pour l'établir il suffit de remarquer que chacun des chemins royaux surdiagonaux au sens fort qui joignent $(0, 0)$ à $(k, 2n-k)$ a au moins un point sur la droite $y = x + n - k$ et d'appeler λ l'abscisse du *dernier* de ces points, lequel décompose le chemin en deux tronçons indépendants ; pour λ donné, le nombre de possibilités est alors $A(\lambda, \lambda + n - k)$ pour le premier tronçon et $A(k - \lambda, n - k)$ pour le second (même raisonnement que pour la fig. 2 de l'article précédent).

V - SOMME DES AIRES

L'aire totale du triangle formé par $(0, 0)$, (n, n) et $(0, n)$ est découpée par les abscisses et ordonnées entières et par les obliques ($y = x + \text{entier constant}$) en n^2 triangles rectangles isocèles, dont $n(n+1)/2$ triangles sur-hypoténuse et $n(n-1)/2$ triangles sous-hypoténuse. Dans la somme des aires $S(P)$, chacun de ces triangles est à compter autant de fois qu'il y a de ponts qui le "contournent" (par le haut et la gauche).

Ainsi par exemple, pour $n = 4$, on a inscrit sur la fig. 2 dans chacun des seize triangles le nombre de ponts qui le contournent ; la somme de ces nombres est 239, qui se trouve être aussi égal à la somme

$$1 + 2C_7^2 + 4C_7^4 + 8C_7^6.$$

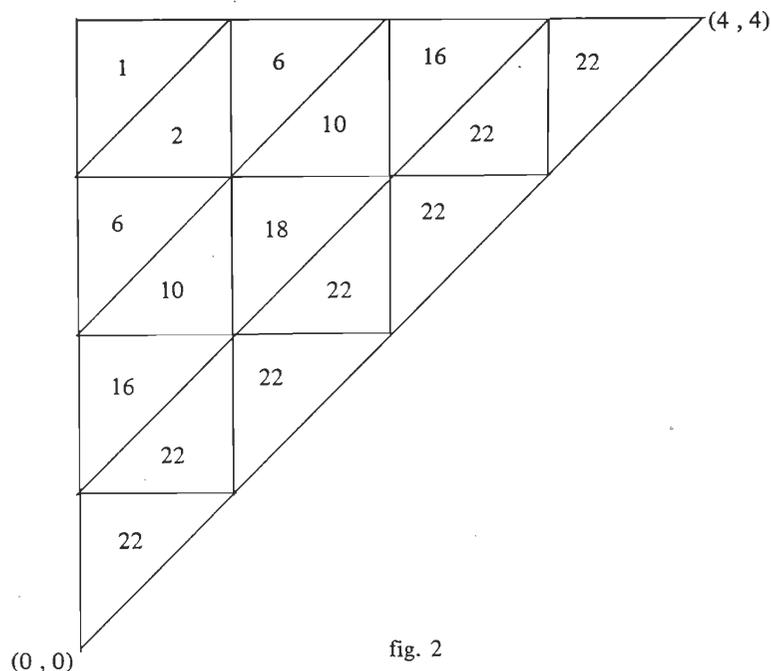


fig. 2

Pour établir un résultat analogue pour n quelconque, nous considérerons séparément les triangles sur-hypoténuse et sous-hypoténuse.

5.1. Soit T un triangle sur-hypoténuse, que nous définirons par les coordonnées (a, b) du sommet de l'angle droit ; ses deux autres sommets sont $(a, b - 1)$ et $(a + 1, b)$. Les ponts P qui contournent T sont de deux sortes : ceux qui passent par un point $(a - i, b + i)$ ($i \geq 0$) et ceux pour lesquels le point $(a - i - 1, b + i)$ est joint au point $(a - i, b + i + 1)$ par une étape oblique.

Les premiers sont au nombre de

$$f_i(a, b) = A(a - i, b + i) A(n - b - i, n - a + i),$$

les seconds au nombre de

$$g_i(a, b) = A(a - i - 1, b + i) A(n - b - i - 1, n - a + i).$$

Le nombre m_T à inscrire dans le triangle T serait donc

$$m_T = \sum_{i \geq 0} [f_i(a, b) + g_i(a, b)].$$

Ce nombre n'a malheureusement pas d'expression simple en fonction de a et b . Par contre nous pourrions plus aisément calculer une expression de la somme des m_T lorsque T varie de manière que la différence $b - a$ soit constante. Nous poserons $b - a = n - h$, avec $1 \leq n - h \leq n$, c'est-à-dire $0 \leq h \leq n - 1$; on aura alors

$$M_h = \sum_{b-a=n-h} m_T = \sum_{(a,i)} f_i(a, a + n - h) + \sum_{(a,i)} g_i(a, a + n - h).$$

Ces deux dernières sommes se calculent plus aisément si l'on somme d'abord par rapport à a . La première d'entre elles donne alors

$$\sum_{a=i}^{h-i} A(a - i, a + n - h + i) A(h - a - i, n - a + i),$$

ce qui permet d'utiliser le "lemme sur les A " avec $\lambda = a - i$ et $k = h - 2i$ et de trouver

$$A(h - 2i, 2n - h + 2i) = R(h - 2i, 2n - h + 2i - 1) - R(h - 2i - 1, 2n - h + 2i).$$

La sommation de ce dernier membre par rapport à i donne la somme alternée qui a été appelée $\varphi(h, 2n - h - 1)$.

La deuxième des sommes qui interviennent pour le calcul de M_h se traite par une méthode analogue ; mais pour pouvoir utiliser le "lemme sur les A " il faut cette fois poser $\lambda = a - i - 1$, $k = h - 2i - 2$ et remplacer n par $n - 1$; on trouve alors $A(h - 2i - 2, 2n - h + 2i)$, dont la traduction en différence de deux R et la sommation par rapport à i donne cette fois $\varphi(h - 2, 2n - h - 1)$.

Finalement M_h n'est autre que la somme de $\varphi(h, 2n - h - 1)$ et de $\varphi(h - 2, 2n - h - 1)$, c'est-à-dire

$$\psi(h, 2n - h - 1) = R(h, 2n - h - 2) + R(h - 1, 2n - h - 2)$$

(d'après le "lemme sur les R ").

5.2. Les triangles sous-hypoténuse donnent lieu au même type de calcul. Il sera commode de définir chacun d'eux, soit T' , par le sommet (a, b) de son angle droit, les deux autres sommets étant $(a - 1, b)$ et $(a, b + 1)$, et de compter d'une part les ponts qui passent par $(a - i, b + i)$, d'autre part ceux qui ont une étape oblique joignant $(a - i, b + i - 1)$ à $(a - i + 1, b + i)$; mais i désigne cette fois obligatoirement un entier positif.

Le nombre à inscrire dans T' est

$$m_{T'} = \sum_{i>0} [f_i(a, b) + g'_i(a, b)],$$

$f_i(a, b)$ ayant la même expression que précédemment et $g'_i(a, b)$ étant donné par

$$g'_i(a, b) = A(a - i, b + i - 1) A(n - b - i, n - a + i - 1).$$

Nous ferons de nouveau varier T' de façon que la différence $b - a$ soit constante, mais nous poserons cette fois $b - a = h - n$, avec $n \leq h \leq 2n - 2$. La somme correspondante, que nous appelons de nouveau M_h , sera

$$M_h = \sum_{b-a=h-n} m_{T'} = \sum_{(a,i)} f_i(a, a + h - n) + \sum_{(a,i)} g'_i(a, a + h - n).$$

En procédant comme précédemment, avec les modifications nécessaires, on trouve par une première sommation par rapport à a :

$$A(2n - h - 2i, h + 2i) + A(2n - h - 2i, h + 2i + 2).$$

La seconde sommation, par rapport aux valeurs positives de i , donne cette fois

$$\begin{aligned} \varphi(2n - h - 2, h + 1) & \text{ pour les } f_i, \\ \varphi(2n - h - 2, h - 1) & \text{ pour les } g'_i. \end{aligned}$$

Mais on remarque que, lorsque la somme $x + y$ est impaire, on a nécessairement

$$\varphi(x, y) = \varphi(y - 1, x + 1),$$

égalité qui résulte de la nullité de la somme alternée des R depuis $(0, x + y)$ jusqu'à $(x + y, 0)$; il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M_h &= \varphi(h, 2n - h - 1) + \varphi(h - 2, 2n - h - 1) = \psi(h, 2n - h - 1) \\ &= R(h, 2n - h - 2) + R(h - 1, 2n - h - 2) \end{aligned}$$

(toujours d'après le "lemme sur les R ").

On constate que l'expression finale de M_h est la même dans les deux cas, mais avec $0 \leq h \leq n - 1$ pour les alignements obliques de triangles sur-hypoténuse et avec $n \leq h \leq 2n - 2$ pour les alignements obliques de triangles sous-hypoténuse.

On vérifie sur la figure 2 et le tableau des $R(x, y)$ que l'on a bien, pour $n = 4$:

triangles	}	$h = 0$	$1 = 1$
sur		$h = 1$	$6 + 6 = 11 + 1$
hypoténuse		$h = 2$	$16 + 18 + 16 = 41 + 9$
		$h = 3$	$22 + 22 + 22 + 22 = 63 + 25$
triangles	}	$h = 4$	$22 + 22 + 22 = 41 + 25$
sous		$h = 5$	$10 + 10 = 11 + 9$
hypoténuse		$h = 6$	$2 = 1 + 1$

VI - SOMMATION FINALE

Dans le cas général la sommation finale par rapport à h donne la somme $\rho_{2n-2} + \rho_{2n-3}$ des deux transversales consécutives $x + y = 2n - 2$ et $x + y = 2n - 3$ du tableau des $R(x, y)$.

Or la règle même de formation des $R(x, y)$ comme sommes

$$R(x - 1, y) + R(x, y - 1) + R(x - 1, y - 1)$$

entraîne que

$$\rho_n = 2\rho_{n-1} + \rho_{n-2}.$$

On en conclut aisément que si l'on pose $v_n = \rho_{2n-2} + \rho_{2n-3}$, on a la récurrence

$$v_n = 6v_{n-1} - v_{n-2},$$

dont l'équation caractéristique $r^2 - 6r + 1 = 0$ a pour zéros

$$(1 + \sqrt{2})^2 \quad \text{et} \quad (1 - \sqrt{2})^2.$$

De ce fait on sait que

$$v_n = A(1 + \sqrt{2})^{2n} + B(1 - \sqrt{2})^{2n},$$

et les conditions initiales $v_1 = 1$ et $v_2 = 7$ entraînent que

$$A = -\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2};$$

il en résulte que

$$v_n = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{2})^{2n-1} + (1 - \sqrt{2})^{2n-1}],$$

et en fin de compte, après développement binomial des parenthèses,

$$v_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i C_{2n-1}^{2i}. \quad (4)$$

Ainsi pour $n = 4$:

$$\begin{aligned} v_4 &= \rho_6 + \rho_5 = 169 + 70 (= 239) \\ &= 1 + 2 \times 21 + 4 \times 35 + 8 \times 7 (= 239). \end{aligned}$$

De l'expression finale (4) résulte bien l'expression annoncée de la somme des aires, puisque chacun des triangles T ou T' a pour aire $1/2$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KREWERAS G. — *Sur les hiérarchies de segments*, Cahiers du B.U.R.O., n° 20, Paris (1973).
- [2] MOSER et ZAYACHKOWSKI — *Lattice paths with diagonal steps*, Scripta M., n° 26 (1963), pp. 223-229.