

Scan

AS226

+ 2 more

Labelle

Quelques 000

add to 3 segs

"QUELQUES ESPECES SUR LES ENSEMBLES DE PETITE CARDINALITE"

par Jacques Labelle¹

fa
Résumé

On sait que toute espèce de structures (au sens combinatoire de [3]) se décompose comme somme d'espèces dites *moléculaires* (i.e. indécomposables pour la somme) et que ces espèces sont elles-mêmes des produits d'espèces dites *atomiques* (i.e. indécomposables pour le produit). Afin d'entreprendre l'étude systématique des espèces sur les petites cardinalités, nous dressons donc la liste complète de toutes les espèces moléculaires (et atomiques) sur les cardinalités jusqu'à cinq. Nous en faisons une analyse assez détaillée et donnons, en particulier, le type, la cardinalité, le rang, la dérivée et la série indicatrice des cycles de chacune d'elles. Certains exemples, contre-exemples, propriétés et identités spéciales à propos de ces exemples sont aussi explicités en cours de route. Nous terminons en disant quelques mots du cas multi-sortes. En résumé, ce travail se veut avant tout un texte de référence concernant la combinatoire des espèces quelconques portées par au plus 5 éléments.

¹ Travail fait dans le cadre de la subvention FCAC [EQ 1608], ministère de l'Éducation du Gouvernement du Québec. (et CRSNG A 5660)

1. Rappels sur les G-ensembles

Soit X un ensemble muni d'une G -action ($\rho: G \times X \longrightarrow X$) du groupe G . On dit alors tout aussi bien que G agit sur X , que X est un G -ensemble, que X est une *représentation ensembliste* de G ou que l'homomorphisme associé $G \longrightarrow S_X$ est une représentation de G comme groupe de permutations de X .

Lorsque G et X sont finis (et ce sera le cas à partir de maintenant) l'action ρ peut être représentée géométriquement par le multigraphe orienté obtenu en prenant, $\forall x \in X$, un sommet x et, $\forall g \in G$, une flèche indiquée g de x à gx . Bien sûr, dans ce multigraphe l'ensemble des boucles en x correspond au *stabilisateur* G_x de x et les composantes connexes correspondent aux *orbites* de ρ . L'action est dite *connexe* (ou *transitive*) si elle admet une seule orbite. Deux G -ensembles sont *isomorphes* (on dit aussi qu'ils ont le même *type*) si et seulement si leurs multigraphes sont isomorphes.

Il est bien connu (lemme de Burnside) que l'orbite de x contient $|G|/|G_x|$ éléments et que le nombre d'orbites est donné (théorème de Burnside) par l'expression:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Fix } g$$

où $\text{Fix } g = |\{x \in X \mid gx = x\}|$.

Lorsque l'action est connexe, son *rang* est le nombre d'orbites (indépendant de x) de l'action restreinte de G_x sur X . On voit facilement [11] que le rang est donné par l'expression:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\text{Fix } g)^2$$

Il y a bijection entre les types d'actions connexes de G et les classes de conjugaison de sous-groupes de G . En effet, à toute action connexe $\rho: G \times X \longrightarrow X$ on peut associer l'ensemble $\{G_x | x \in X\}$. Réciproquement si H est un sous-groupe de G alors le type de l'action canonique de G sur G/H ne dépend que de la classe de conjugaison du sous-groupe H . Il découle de ceci que pour G donné, il n'y a qu'un nombre fini (notons-le μ_G) de types d'actions connexes de G . Notons de plus que $|X|$ divise $|G|$ pour tout G -ensemble connexe X .

Au début du 20^{ème} siècle, le mathématicien anglais A. Cayley a entrepris l'étude de l'important cas où G est le groupe symétrique S_n de degré n . Plus tard, les chimistes A.C. Lunn et J.K. Senior ont utilisés ses travaux dans [9] où l'on peut trouver les premières valeurs des nombres $\mu_n = \mu_{S_n}$ ainsi que de nombreuses listes de sous-groupes de S_n . La suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ est la suite 477 du livre de N.J.A. Sloane [14] et ses premières valeurs sont: 1, 1, 2, 4, 11, 19, 56, 96, 296, 554, 1593, 3093.

AG 38

2. Rappels sur la théorie des espèces

Nous utiliserons la théorie combinatoire des espèces de structures introduite par André Joyal [3] (voir également [5] et [8]). Rappelons seulement qu'une espèce T est un foncteur du groupoïde \mathcal{B} (i.e la catégorie des ensembles finis avec bijections) dans la catégorie Ens_f des ensembles finis avec fonctions.

Si S et T sont des espèces alors $S+T$, $S \cdot T$ et $S \circ T$ (si $T[\emptyset] = \emptyset$) dénotent leur somme, produit et substitution respectivement.

Notons respectivement 0 , 1 , X , E , E^\pm , C et L les espèces *vide*, *ensemble vide*, *singleton*, *ensemble*, *ensemble pointé*, *ensemble orienté*, *permutation cyclique* et *ordre linéaire*. De plus, si T est une espèce, notons T_n l'espèce obtenue en restreignant T aux ensembles de cardinalité n :

$$T_n[U] = \begin{cases} T[U] & \text{si } |U| = n \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $E_0 = 1$, $E_1 = X$, $E_2^\pm = L_2$ et $E_3^\pm = C_3$. De plus, pour $n \geq 1$, $E_n^\pm = X \cdot E_{n-1}$ et $L_n = X^n$.

Voici quelques précisions concernant l'espèce $S = mT$ où $m \geq 1$. Bien sûr S est la somme de m copies de T ; pour tout U fini, $S[U]$ est donc la réunion disjointe de m copies de $T[U]$. Il est commode de penser à une S -structure s comme étant une T -structure munie d'une étiquette i , $1 \leq i \leq m$, (ou encore

coloriée d'une $i^{i\text{ème}}$ couleur) indiquant de laquelle des m copies de $T[U]$ elle provient. Notez cependant que lorsqu'on transporte s le long d'une bijection $f:U \rightarrow V$, l'étiquette demeure inchangée. Notez également que mT est un produit d'espèces. En effet, il suffit de penser à m comme étant l'espèce définie par

$$m[U] = \begin{cases} \{1, 2, \dots, m\} & \text{si } U = \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espèce M est dite *moléculaire* si $M=S+T$ implique $S=0$ ou $T=0$. Comme toute espèce A admet la décomposition $A = \sum_{n \geq 0} A_n$, une espèce moléculaire est nécessairement concentrée sur une seule cardinalité. Soit n cette cardinalité et U un ensemble à n éléments. L'ensemble $A[U]$ est par définition muni de l'action du groupe symétrique S_U définie par

$$(\sigma, a) \longmapsto A[\sigma](a).$$

Dire que A est moléculaire revient à dire que cette action est connexe. En particulier pour $U = n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ on obtient une action connexe de S_n sur $A[n]$ dont le multigraphe associé peut être grandement simplifié comme suit. Il est bien connu [11] que les transpositions, $s_i = (0, i)$, $1 \leq i \leq n-1$, constituent un ensemble de générateurs de S_n satisfaisant aux relations: $s_i^2 = I$, $(s_i s_{i+1})^3 = I$ et $(s_i s_{i+1} s_{i+2})^2 = I$, où $1 \leq i, j \leq n-1$, $j \neq i$, $j \neq i+1$ et $i+1$ est pris modulo $n-1$. Plaçons donc en chaque sommet $a \in A[n]$, plutôt que $n!$ flèches, seulement $n-1$ arêtes (l'arête d'indice i , $1 \leq i \leq n-1$, joignant a à $A[s_i](a)$) dont certaines peuvent être des boucles. Ce multigraphe (non-orienté), lorsqu'on oublie la nature de ses sommets, s'appelle le *type* de l'espèce A où A peut être une espèce quelconque concentrée sur la cardinalité n . Par exemple, la figure 1 montre la

construction du type de l'espèce $X \cdot C_3$ qui apparaît dans la figure 10 plus loin. (Le lecteur trouvera également dans [6] figure 1, l'exemple de l'espèce P_4^{bic} que nous décrivons à la remarque B2).

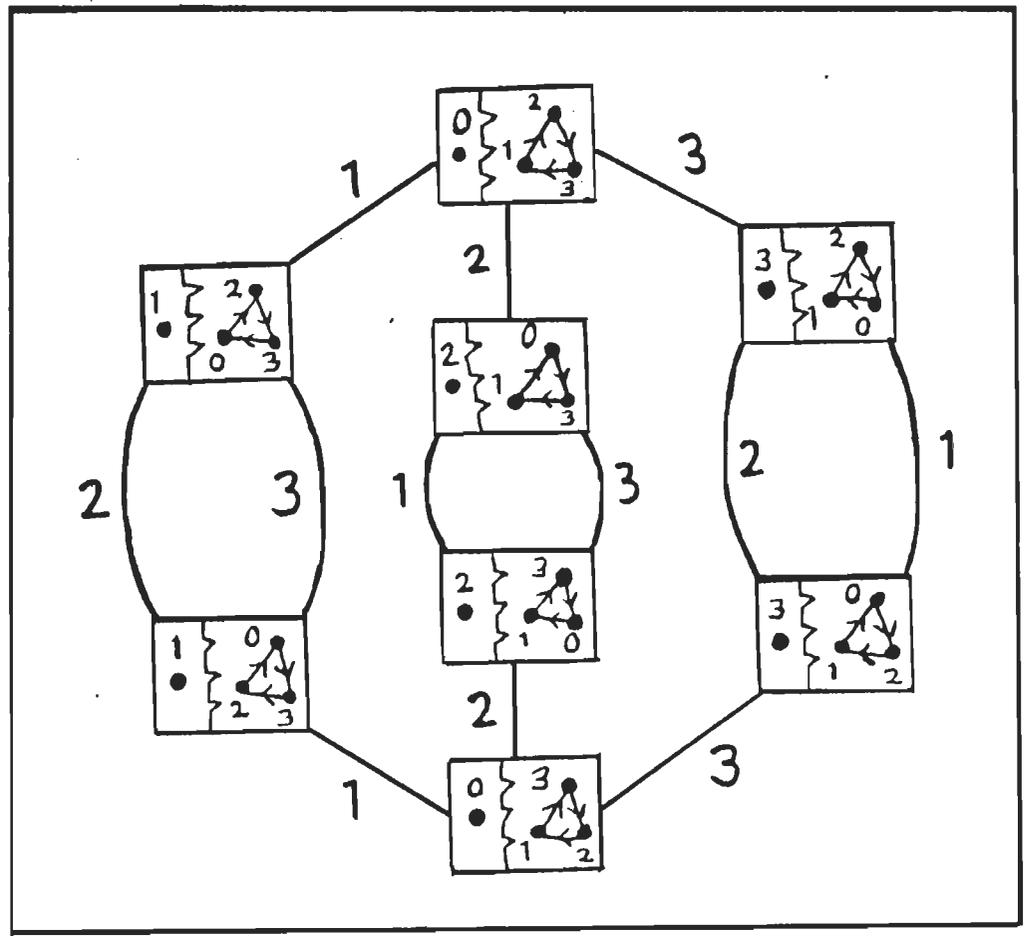


FIGURE 1

Il est facile de voir que pour toute espèce A , concentrée en cardinalité n , le type de A' (l'espèce *dérivée* de A) s'obtient de celui de A en effaçant toutes les arêtes d'indice $n-1$ (sauf si $n=0$).

Notez que le type de A pourrait également se représenter en choisissant les générateurs $\tau_i = (i, i+1)$, $0 \leq i \leq n-1$, de S_n . On pourrait également se contenter de ne placer en chaque sommet qu'une arête et une flèche correspondant à l'action des deux générateurs $(0,1)$ et $(0,1,2,\dots,n-1)$ de S_n . Ce dernier modèle, bien que moins chargé, est moins symétrique et ne permet pas de voir facilement le type de A' à partir de celui de A .

Le but des deux prochaines sections est de trouver des modèles concrets d'espèces réalisant tous les types d'espèces moléculaires concentrées sur la cardinalité n pour $n \leq 5$.

Pour $n \leq 4$, ceci a été fait par Hélène Décoste et Gilbert Labelle [6]. La figure 10 (qui leur est due) donne la liste complète (à isomorphisme près) des 19 espèces moléculaires sur quatre points ou moins.

Comme eux, notons $M_n^{(i)}$ la $i^{\text{ième}}$ espèce moléculaire sur n points. Pour n fixe, les espèces sont ordonnées suivant l'ordre croissant de leur "cardinalité" (nombre de structures).

Toute espèce T , concentrée sur n points, peut s'écrire de façon unique (à isomorphisme près) sous la forme

$$T = \sum_{i=1}^{\mu_n} c_i M_n^{(i)} \quad \text{où } c_i \in \mathbb{N}.$$

C'est la *décomposition moléculaire* de l'espèce T . Par exemple si A est l'espèce *arbre*, il est facile de voir que A_4 est isomorphe à $X \cdot E_3 + E_2 \circ L_2$. La décomposition moléculaire de \mathcal{S}_n (\mathcal{S} étant l'espèce *permutation*) est donnée à la remarque A5.

Une espèce moléculaire M est dite *atomique* si $M = S \cdot T$ implique $S=1$ ou $T=1$. Yeh a démontré récemment [13] que toute espèce moléculaire M peut de façon unique (à isomorphisme et ordre près des facteurs) s'écrire comme produit d'espèces atomiques.

Au cours de la construction des espèces moléculaires sur cinq points et moins nous nous efforcerons donc d'explicitier la décomposition atomique de chaque espèce.

3. Construction d'espèces

Parlons maintenant d'une importante construction permettant de "quotienter" les espèces.

Nous dirons que le groupe fini G agit de façon naturelle sur l'espèce T si on a un homomorphisme de G dans $\text{Aut}(T)$, le groupe des équivalences (ou

automorphismes) naturelles du foncteur T sur lui-même. Ceci veut dire que pour tout ensemble fini U , on a une action $\rho_U: G \times T[U] \longrightarrow T[U]$, de sorte que, pour toute bijection $f: U \longrightarrow V$ le carré suivant commute:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times T[U] & \xrightarrow{\rho_U} & T[U] \\
 \downarrow 1_G \times T[f] & & \downarrow T[f] \\
 G \times T[V] & \xrightarrow{\rho_V} & T[V]
 \end{array}$$

On peut alors quotienter l'espèce T par G pour obtenir l'espèce T/G définie par $(T/G)[U] = T[U]/G$. Une (T/G) -structure sur U est donc l'orbite (par l'action ρ_U) d'une T -structure sur U .

En particulier, la donnée d'une action naturelle de $Z_k = Z/kZ$ sur T équivaut à la donnée d'un automorphisme naturel θ de T tel que $\theta^k = 1_T$.

Par exemple, pour l'automorphisme naturel $\theta: L_k \longrightarrow L_k$ défini par $\theta_U(u_1, u_2, \dots, u_k) = (u_k, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$, où $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, on obtient l'espèce quotient L_k/Z_k isomorphe à C_k . Plus simplement, $\forall n \geq 3$, l'automorphisme involutif $\theta: C_n \longrightarrow C_n$, défini par $\theta(\sigma) = \sigma^{-1}$, permet de construire l'espèce $C_n/Z_2 = P_n$ appelée l'espèce *polygone à n côtés*.

Remarque. Si H est un sous-groupe de S_n alors l'espèce moléculaire associée à la classe de conjugaison de H est, à isomorphisme près, $B([n], -)/H$ où l'action naturelle de H sur l'espèce $B([n], -)$ est évidente. Une $B([n], -)/H$ structure sur U (où $|U|=n$) est donc une bijection (à l'action de H près) de $[n]$ sur U . On peut également obtenir un modèle de cette espèce moléculaire en quotientant plutôt l'espèce L_n par l'action de H obtenue en permutant les éléments des ordres totaux (voir par exemple la remarque A3) dans la section qui suit).

4. Recensement des espèces moléculaires

Le lecteur trouvera dans les tableaux A, B et C, qui suivent, des modèles concrets pour toutes les espèces moléculaires sur n points ($n \leq 5$) ainsi que de nombreuses données s'y rattachant. Le tableau A concerne les cardinalités 0, 1, 2 et 3; les tableaux B et C, les cardinalités 4 et 5 respectivement. Dans chaque tableau, la troisième colonne donne la cardinalité de l'espèce (par abus de langage $|M[n]|$), la quatrième colonne le "rang de l'espèce" (considérée comme action connexe de S_n) et la cinquième colonne la dérivée de l'espèce.

Un crochet dans la 6ième colonne indique que l'espèce est atomique. Dans la partie droite des tableaux, sous l'expression $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ où $\sum i d_i = n$, on trouve en $i^{\text{ième}}$ case le nombre de $M_n^{(i)}$ -structures sur $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ laissées fixes par une quelconque permutation σ de type $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ (i.e ayant d_i cycles de longueur i). Toujours dans la colonne $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$, au bas du tableau, on trouve le nombre d'éléments de S_n de ce type. Par le théorème de Burnside, le produit scalaire de la ligne au bas d'un tableau avec la partie droite de la $i^{\text{ième}}$ ligne donne toujours $n!$. Rappelons [3] que si T est une espèce quelconque, sa série indicatrice des cycles, Z_T , est la série à une infinité de variables x_1, x_2, \dots définie par :

$$Z_T(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\sum i d_i = n} \text{Fix}_T(\sigma) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots n^{d_n} d_n!}$$

où, dans la deuxième somme, σ est une permutation quelconque de type $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ sur n et $\text{Fix}_T(\sigma)$ est le nombre de T -structures sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$ laissées fixes par σ . La série indicatrice des cycles de chacune des espèces se lit donc facilement à partir des tableaux.

Dans ce qui suit, les remarques A1), B1) et C1) se rapportent aux tableaux A, B et C respectivement.

TABLEAU A

| | i | $M_n^{(i)}$ | card | rang | dérivée | atom. | série indicatrice | | |
|-------------------------|-----|-------------|------|------|-------------|-------|-------------------|-----------------|-------|
| n=0 | 1 | E_0 | 1 | 1 | 0 | | 1 | | |
| n=1 | 1 | X | 1 | 1 | E_0 | ✓ | x_1 | | |
| n=2 | 1 | E_2 | 1 | 1 | X | ✓ | 1^2 | 2^1 | 1 |
| | 2 | L_2 | 2 | 2 | 2X | | 1 | 1 | 0 |
| n=3 | 1 | E_3 | 1 | 1 | E_2 | ✓ | 1^3 | $1^1 \cdot 2^1$ | 3^1 |
| | 2 | C_3 | 2 | 2 | L_2 | ✓ | 1 | 1 | 1 |
| | 3 | E_3^* | 3 | 2 | $E_2 + L_2$ | | 2 | 0 | 2 |
| | 4 | L_3 | 6 | 6 | $3L_2$ | | 3 | 1 | 0 |
| nombre de permutations: | | | | | | | 6 | 0 | 0 |
| | | | | | | | 1 | 3 | 2 |

Remarques

- A1) Les espèces $L_3 + 2E_3$ et $C_3 + 2E_3$ ne sont évidemment pas isomorphes (voir leur type à la figure 2), cependant elles ont la même série indicatrice des cycles, soit $\frac{4}{3} x_1^3 + x_1 x_2 + \frac{2}{3} x_3$. Existe-t-il deux espèces moléculaires non-isomorphes ayant même série indicatrice?

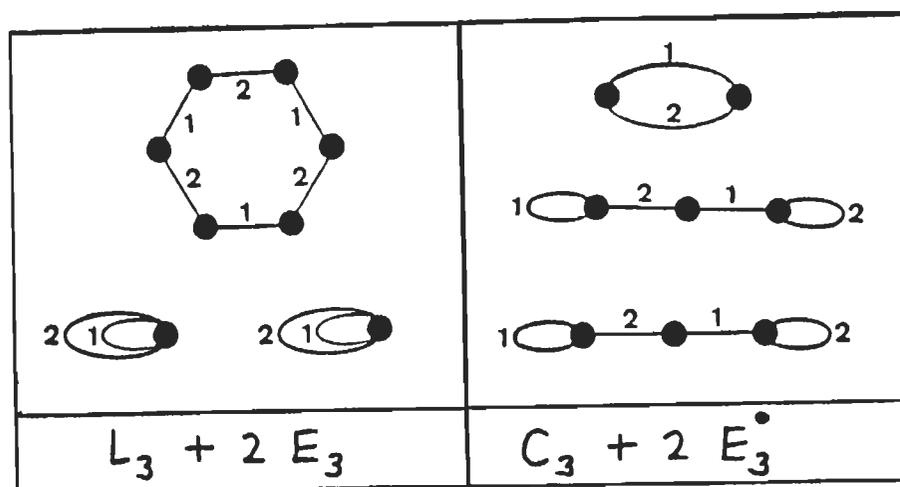


FIGURE 2

- A2) Un isomorphisme possible entre C'_n et L_{n-1} est décrit par la figure 3 où $n=5$.

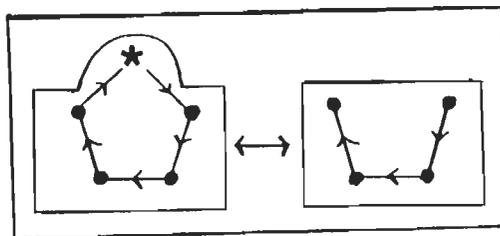


FIGURE 3

- A3) Tout sous-groupe de S_n agit de façon naturelle sur $L_n = X^n$ en permutant les facteurs. On peut donc définir l'espèce E_n^\pm comme l'espèce quotient L_n/A_n où A_n est le groupe alterné de degré n .
- A4) Pour une espèce non-atomique, $M=S \cdot T$, le calcul de la dérivée se fait facilement grâce à la bonne vieille formule: $M' = S' \cdot T + S \cdot T'$. On peut aussi identifier le type de M' en enlevant du type de $M=M_n$ toutes les arêtes (et boucles) d'indice $n-1$. Une troisième façon de procéder est de trouver un isomorphisme explicite entre M' et l'espèce correspondante apparaissant en cinquième colonne.
- A5) Soit $\$$ l'espèce permutation. Il est bien connu ([3], [8]) que $\$$ et L sont équipotentes sans être isomorphes. En fait $\forall n$, $\$ _n$ est somme de p_n (nombre de partages de n) espèces moléculaires. Plus précisément, il est facile de voir que la décomposition moléculaire de $\$ _n$ est:

$$\$ _n = \sum \prod_{i=1}^n E_{d_i} \circ C_i$$

où la somme s'étend sur les (d_1, d_2, \dots, d_n) , $d_i \geq 0$ et $\sum id_i = n$.

TABLEAU B (n=4)

| 1 | $M_n^{(1)}$ | card | rang | dérivée | atom. | 1^4 | $1^2 \cdot 2^1$ | $1^1 \cdot 3^1$ | 2^2 | 4 |
|----|-----------------|------|------|----------------------|-------|-------|-----------------|-----------------|-------|---|
| 1 | E_4 | 1 | 1 | E_3 | ✓ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | E_4^\pm | 2 | 2 | E_3^\pm | ✓ | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 3 | $E_2 \circ E_2$ | 3 | 2 | E_3^\bullet | ✓ | 3 | 1 | 0 | 3 | 1 |
| 4 | E_4^\bullet | 4 | 2 | $E_3 + E_3^\bullet$ | | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | $E_2 \cdot E_2$ | 6 | 3 | $2E_3^\bullet$ | | 6 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 6 | P_4^{bic} | 6 | 6 | L_3 | ✓ | 6 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| 7 | C_4 | 6 | 3 | L_3 | ✓ | 6 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 8 | $X \cdot C_3$ | 8 | 4 | $C_3 + L_3$ | | 8 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 9 | $L_2 \cdot E_2$ | 12 | 7 | $2E_3^\bullet + L_3$ | | 12 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | $E_2 \circ L_2$ | 12 | 8 | $2L_3$ | ✓ | 12 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| 11 | L_4 | 24 | 24 | $4L_3$ | | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 |

nombre de permutations: 1 6 8 3 6

B1) Pour une espèce obtenue par substitution, $M=S \circ T$, la formule de dérivation en chaîne est disponible,

$$M' = (S' \circ T) \cdot T'$$

B2) L'espèce P_n^{bic} est l'espèce "polygone à n côtés bicolorés". Plus précisément, nous disposons de deux couleurs (la première représentée par un trait gras et la seconde par un trait fin) et une P_n^{bic} -structure sur U , $|U|=n$, est un polygone ayant U comme ensemble de sommets et dont les arêtes sont coloriées avec les deux couleurs de sorte que deux arêtes incidentes ne soient jamais de la même couleur. Les arêtes grasses (de même que les fines) forment donc un facteur linéaire du graphe simple qu'est le polygone ([2], [7]). En particulier, P_4^{bic} est l'espèce "carré bicoloré" dont le type apparaît dans la figure 10. Un isomorphisme entre $(P_4^{\text{bic}})'$ et L_3 est décrit par la figure 4.

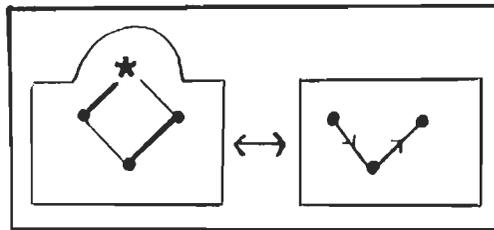


FIGURE 4

TABLEAU C (n=5)

| 1 | $M_n^{(1)}$ | card | rang | dérivée | atom. | 1^5 | $1^3 \cdot 2^1$ | $1^2 \cdot 3^1$ | $1^1 \cdot 4^1$ | $1^1 \cdot 2^2$ | $2^1 \cdot 3^1$ | 5 |
|----|---------------------------|------|------|----------------------------------|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---|
| 1 | E_5 | 1 | 1 | E_4 | ✓ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | E_5^\pm | 2 | 2 | E_4^\pm | ✓ | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | E_5^\bullet | 5 | 2 | $E_4 + E_4^\bullet$ | | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | P_5/Z_2 | 6 | 2 | C_4 | ✓ | 6 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 |
| 5 | $X \cdot E_4^\pm$ | 10 | 4 | $E_4^\pm + X \cdot E_3^\pm$ | | 10 | 0 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 6 | $E_2 \cdot E_3$ | 10 | 3 | $E_4^\bullet + E_2 \cdot E_2$ | | 10 | 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 7 | P_5 | 12 | 4 | $E_2 \circ L_2$ | ✓ | 12 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| 8 | $X \cdot (E_2 \circ E_2)$ | 15 | 4 | $E_2 \circ E_2 + L_2 \cdot E_2$ | | 15 | 3 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| 9 | $L_2 \cdot E_3$ | 20 | 7 | $2E_4^\bullet + L_2 \cdot E_2$ | | 20 | 6 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | $E_2 \cdot C_3$ | 20 | 5 | $X \cdot C_3 + L_2 \cdot E_2$ | | 20 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 11 | $(L_2 \cdot C_3)/Z_2$ | 20 | 6 | $X \cdot C_3 + E_2 \circ L_2$ | ✓ | 20 | 0 | 0 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| 12 | C_5 | 24 | 8 | L_4 | ✓ | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 13 | $X \cdot E_2 \cdot E_2$ | 30 | 11 | $E_2 \cdot E_2 + 2L_2 \cdot E_2$ | | 30 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 14 | $X \cdot P_4^{bic}$ | 30 | 12 | $L_4 + P_4^{bic}$ | | 30 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| 15 | $X \cdot C_4$ | 30 | 9 | $L_4 + C_4$ | | 30 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 16 | $L_2 \cdot C_3$ | 40 | 16 | $L_4 + 2X \cdot C_3$ | | 40 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | $E_2 \cdot L_3$ | 60 | 33 | $L_4 + 3L_2 \cdot E_2$ | | 60 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | $X \cdot (E_2 \circ L_2)$ | 60 | 32 | $2L_4 + E_2 \circ L_2$ | | 60 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| 19 | L_5 | 120 | 120 | $5L_4$ | | 120 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

nombre de permutations:

1 10 20 30 15 20 24

Il est intéressant de noter que les espèces P_4^{bic} et C_4 , bien que non-isomorphes, ont des dérivées toutes deux isomorphes à L_3 (plus généralement, on a $(P_{2n}^{\text{bic}})' \cong L_{2n-1} \cong C_{2n}'$). Ce dernier fait a été utilisé par G. Labelle pour démontrer une partie du très joli théorème A de [6] sur la non-unicité de la solution combinatoire d'un système différentiel dont nous citons un cas particulier à la section 6.

- C1) L'espèce P_5 est munie d'un automorphisme naturel involutif θ (figure 5) qui consiste à envoyer un cycle de longueur cinq sur U , $|U| = 5$, dans son complémentaire qui (accidentellement) est aussi un cycle de longueur cinq sur U .

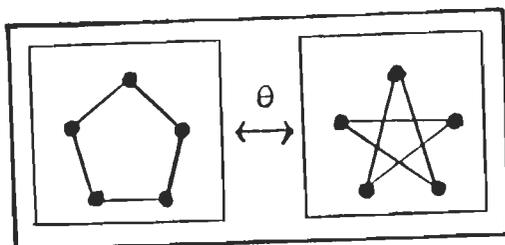


FIGURE 5

L'espèce $M_5^{(4)}$ est P_5/Z_2 où l'action de Z_2 est celle définie par θ . Une (P_5/Z_2) -structure sur U , $|U| = 5$, peut également se définir comme une 2-factorisation ([2],[7]) du graphe complet K_U . Un isomorphisme possible entre $(P_5/Z_2)'$ et C_4 est décrit par la figure 6.

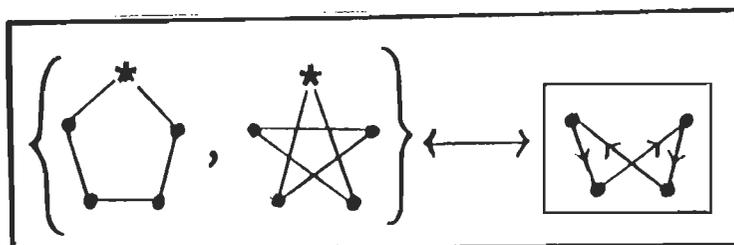


FIGURE 6

C2) La remarque précédente nous montre que C_4 est intégrable. Quelles sont précisément les valeurs de n pour lesquelles C_n est intégrable? Dans cette direction, on a le résultat suivant:

Lemme

Si $n+1=p$ est un nombre premier alors l'espèce C_n est intégrable.

Preuve. Soit a une racine primitive modulo p . Le groupe multiplicatif \mathbb{Z}_{n+1}^* est donc cyclique engendré par a . Considérons l'automorphisme naturel θ de l'espèce C_{n+1} défini en posant $\theta(\sigma) = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_a$ où $\sigma \in C_{n+1}[V]$ et $|V| = n + 1$.

On a $\theta^n(\sigma) = \sigma^{a^n} = \sigma$ et θ induit donc une action naturelle de \mathbb{Z}_n sur C_{n+1} .

Soit T l'espèce quotient C_{n+1}/\mathbb{Z}_n alors $T' \cong C_n$. En effet, voici un isomorphisme naturel $\psi: T' \longrightarrow C_n$: pour $|U| = n$ et $\alpha \in T'[U] = T[U\theta(*)]$, on pose

$$\psi_U[\alpha] = (\sigma(*), \sigma^a(*), \sigma^{a^2}(*), \dots, \sigma^{a^{n-1}}(*))$$

où $\sigma \in C_{n+1}[U\theta(*)]$ est un représentant quelconque de α .

Le lecteur peut facilement se convaincre que dans le cas particulier où $n=4$ et $a=2$ l'espèce C_5/\mathbb{Z}_4 ainsi construite est isomorphe à l'espèce P_5/\mathbb{Z}_2 de l'exemple précédent.

Remarque: Plus généralement, on montre ([4],[12]) que si $n + 1 = q$ est une puissance d'un nombre premier alors C_n est intégrable. En effet l'espèce $B(F_q, -)/H$, où F_q est le corps à q éléments et

$H = \{ax + b \mid a, b \in F_q, a \neq 0\}$ est le groupe des transformations affines de F_q , admet C_n comme dérivée.

De plus, un calcul ad hoc de théorie des groupes [12] permet de démontrer que l'espèce C_5 n'est pas intégrable.

C3) Un isomorphisme entre P_5' et $E_2 \circ L_2$ est décrit par la figure 7.

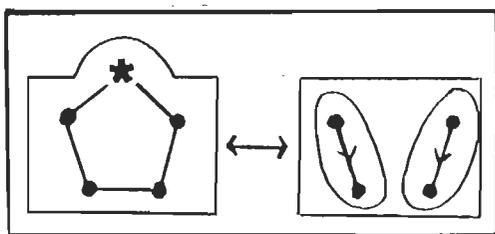


FIGURE 7

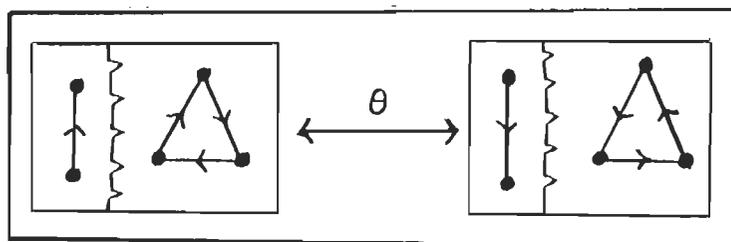


FIGURE 8

C4) L'espèce $L_2 \cdot C_3$ est munie d'un automorphisme naturel involutif θ décrit par la figure 8. L'espèce $M_5^{(11)}$ est $(L_2 \cdot C_3)/Z_2$ où l'action de Z_2 est celle induite par θ . Un isomorphisme possible entre $(M_5^{(11)})'$ et $X \cdot C_3 + E_2 \circ L_2$ est décrit par la figure 9. Notez que $M_5^{(11)}$ est une espèce atomique dont la dérivée n'est même pas moléculaire. (C'est également le cas de $E_2 \circ L_2$ dont la dérivée est $2L_3$).

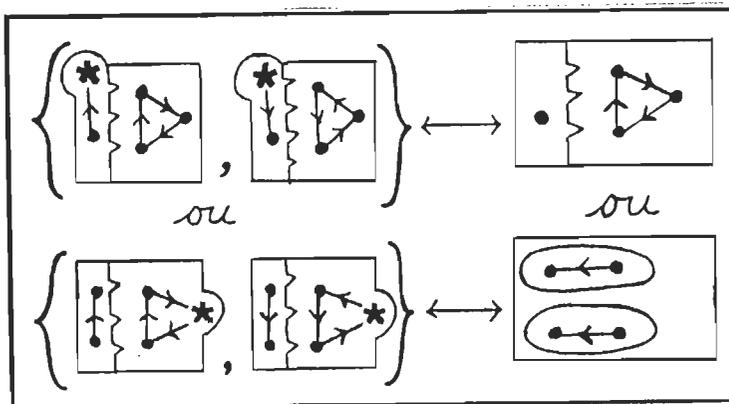


FIGURE 9

5. Les types des espèces moléculaires

La très jolie figure 10, due à Hélène Décoste et Gilbert Labelle, donne les types de toutes les espèces moléculaires sur quatre points et moins. La figure 11 décrit les types de $M_5^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq 7$. On y voit immédiatement, en enlevant les arêtes numérotées quatre, les formules:

$$(P_5/Z_2)' = C_4 \quad \text{et} \quad P_5' = E_2 \circ L_2.$$

La figure 12 décrit les types de $M_5^{(i)}$ pour $8 \leq i \leq 12$. Encore là, les dérivées de ces cinq espèces (qui apparaissent dans le tableau C) se retrouvent par suppression des arêtes indicées quatre.

Dans la figure 12, les types des trois espèces, $L_2 \cdot E_3$, $E_2 \cdot C_3$ et $(L_2 \cdot C_3)/Z_2$, ont été sciemment dessinés sur deux paliers avec un effet de relief. Ainsi les trois épimorphismes d'espèces, soient $L_2 \cdot E_3 \longrightarrow E_2 \cdot E_3$, $E_2 \cdot C_3 \longrightarrow E_2 \cdot E_3$ et $(L_2 \cdot C_3)/Z_2 \longrightarrow E_2 \cdot E_3$, obtenus dans chaque cas en envoyant une structure dans son découpage sous-jacent, sont mis en évidence (voir le type de $E_2 \cdot E_3$ à la figure 11). Ces trois épimorphismes sont des genres de "revêtement à deux feuilles" au-dessus de $E_2 \cdot E_3$ dans la catégorie des espèces. De même pour $X \cdot (E_2 \circ E_2)$ qui est un revêtement à 3 feuilles de $X \cdot E_4 = E_5$.

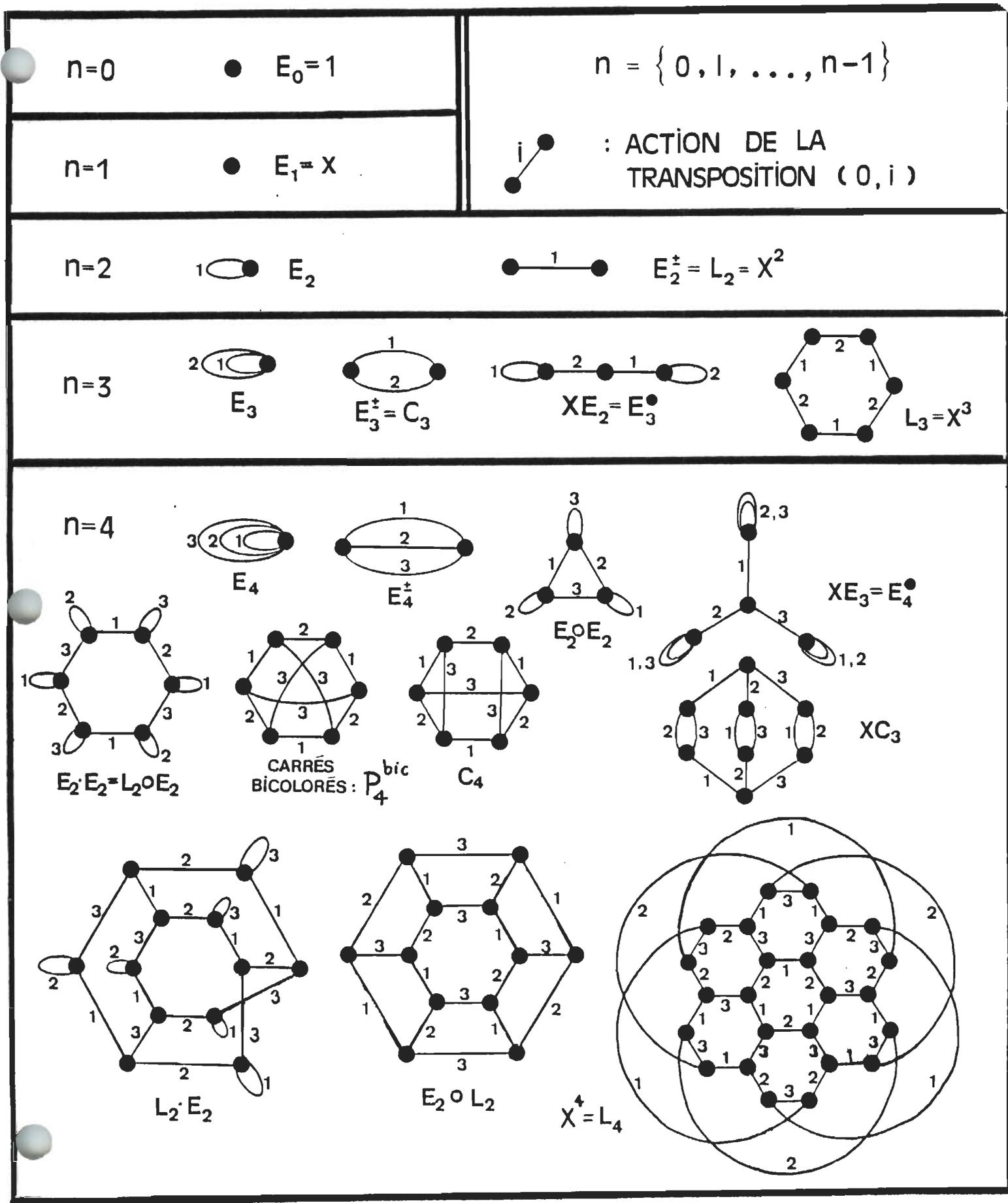
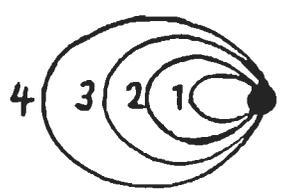
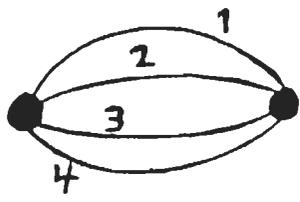


FIGURE 10

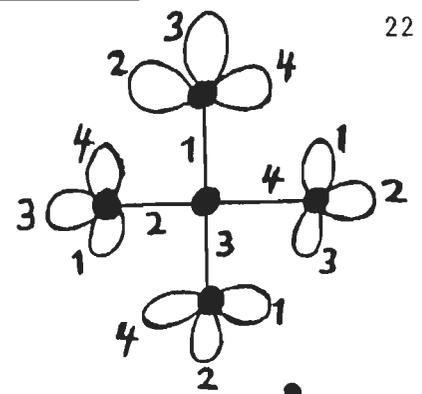
$n=5$



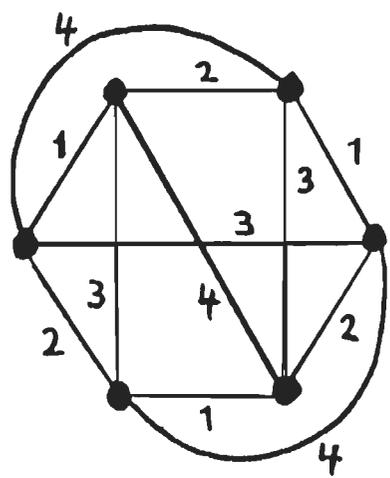
E_5



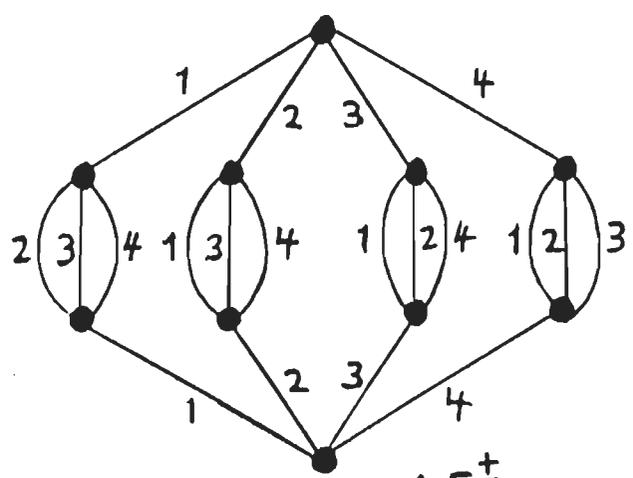
E_5^t



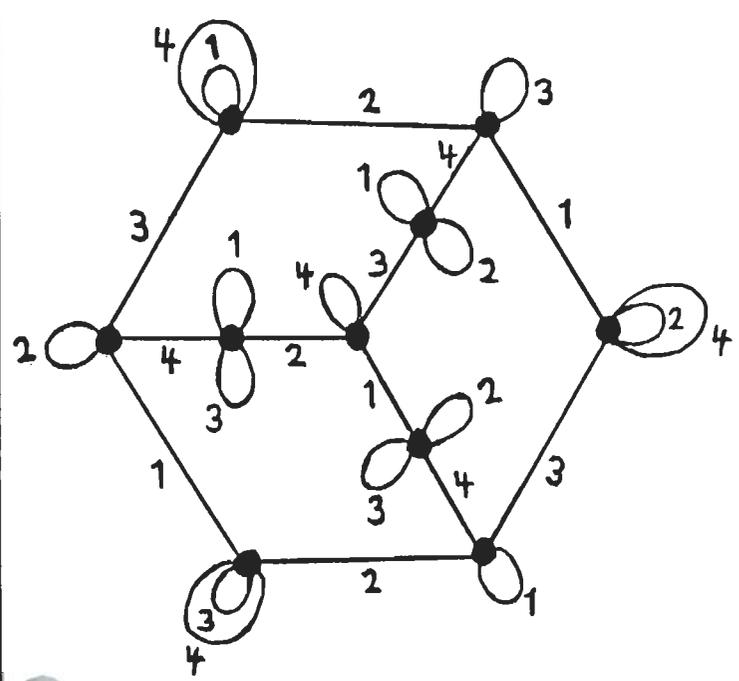
$X \cdot E_4 = E_5$



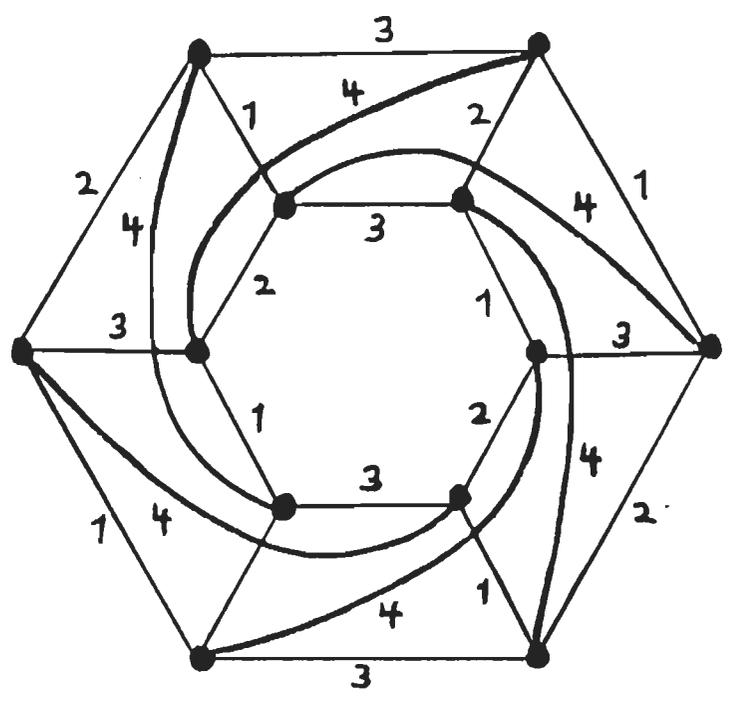
P_5 / \mathbb{Z}_2



$X \cdot E_4^t$



$E_2 \cdot E_3$

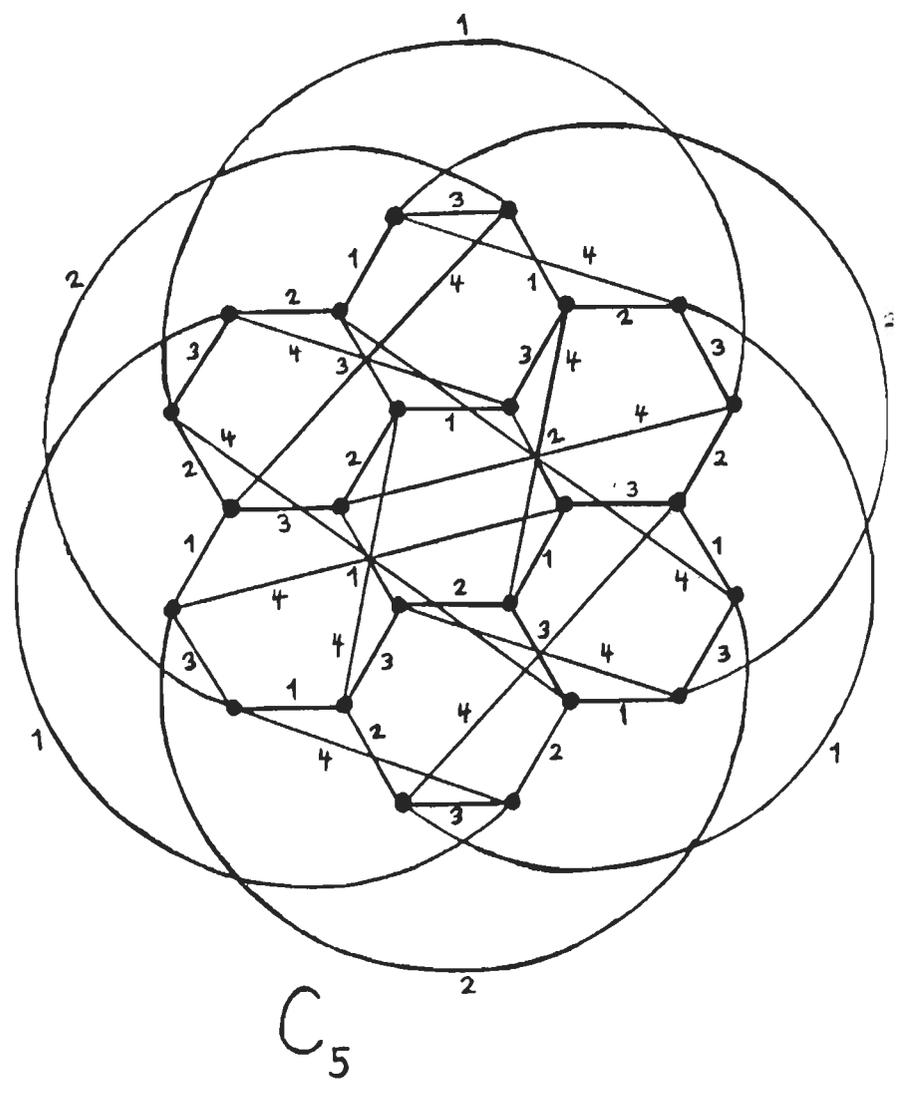
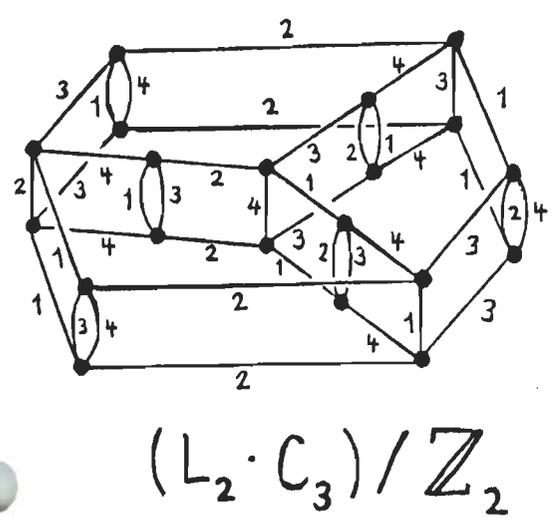
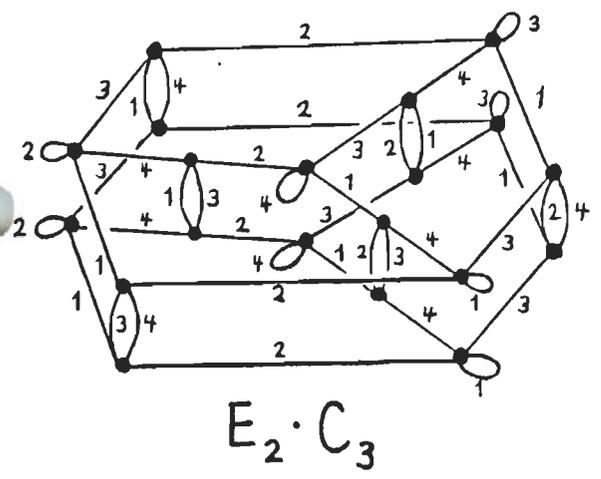
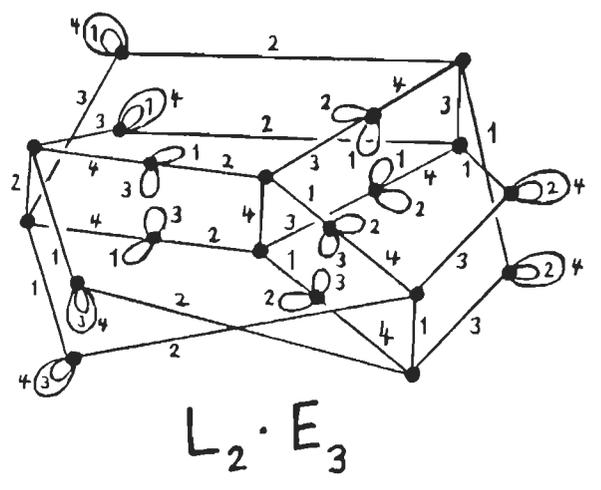
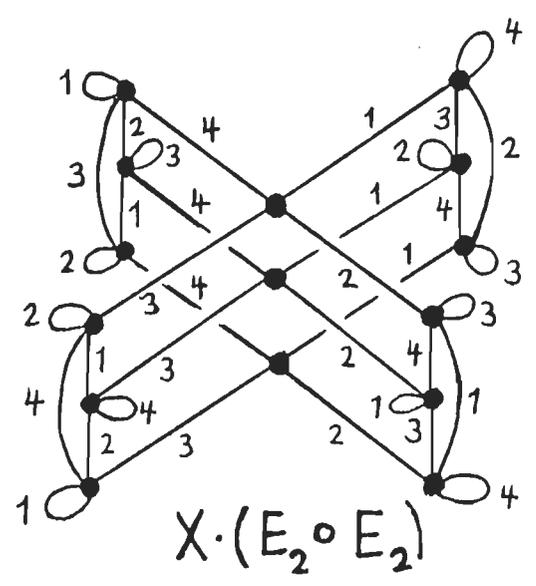


P_5

...

FIGURE 11

n=5 (suite)



...

FIGURE 12

Remarque Il n'y a pas une façon mécanique et canonique de tracer le type d'une espèce. Par exemple, il n'est pas évident que les deux multigraphes apparaissant dans la figure 13 représentent tous deux le type de l'espèce $(L_2 \cdot C_3)/Z_2$.

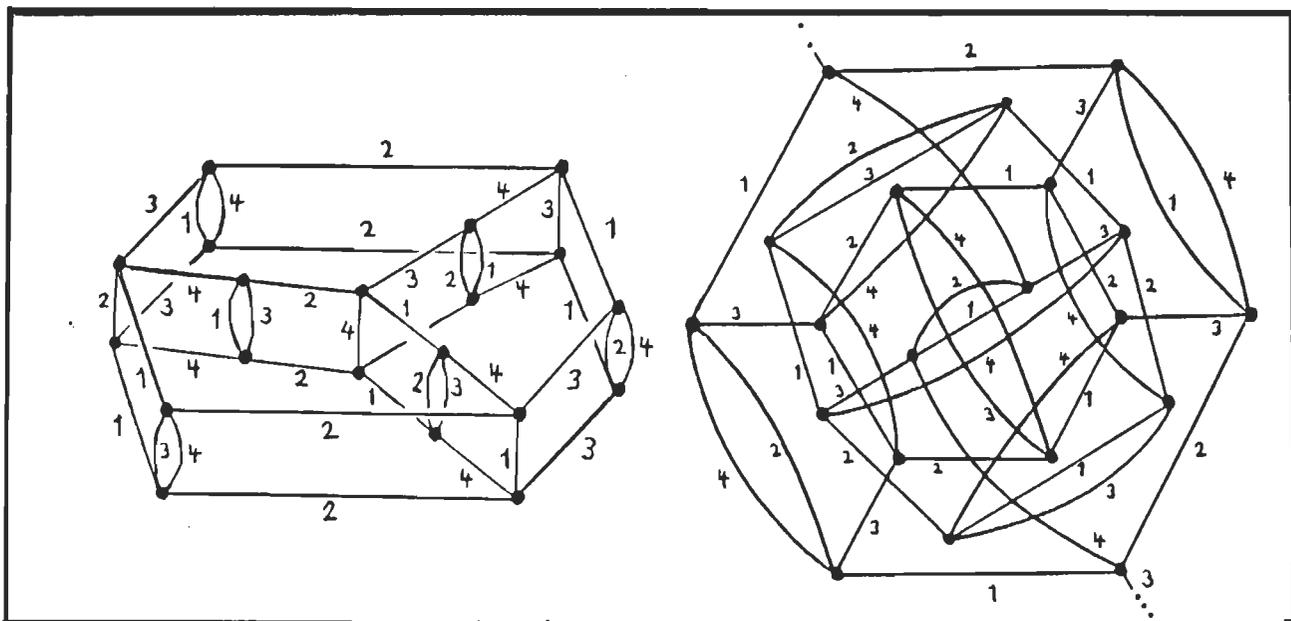


FIGURE 13

Un critère important dans la façon de dessiner le type d'une espèce (figures 10, 11 et 12) a été la beauté de la figure.

Signalons qu'une équipe d'informaticiens de l'université de Montpellier a mis sur pied un programme d'ordinateur, nommé CABRI, permettant de "manipuler", par exemple sur écran digital, la figure plane représentant un graphe [1]. Ce programme, s'il avait été connu et accessible plus tôt à l'auteur lui aurait sauvé beaucoup d'heures de travail et de papier brouillon.

6. Intégration des espèces

En observant le tableau C, on constate qu'aucune espèce n'admet E_4^\bullet comme dérivée. De plus l'espèce L_3 admet deux intégrales non-isomorphes: soit P_4^{bic} et C_4 . C'est dire que l'équation différentielle $Y' = M$, même sous la condition initiale $Y[\emptyset] = \emptyset$, peut tout aussi bien admettre zéro que deux solutions combinatoires. Gilbert Labelle [6] a plus généralement étudié les systèmes différentiels dans la catégorie des espèces. Il obtient en particulier le résultat suivant:

Théorème La cardinalité de l'ensemble des solutions non-isomorphes de l'équation $Y' = M$, sous la condition initiale $Y[\emptyset] = \emptyset$, peut, suivant l'espèce M , être 0, 1, 2, ... ou \aleph (la cardinalité de \mathbb{R}), mais ne peut être \aleph_0 (la cardinalité de \mathbb{N}).

De plus, parmi les onze espèces moléculaires concentrées sur quatre points, on observe que seules E_4 , E_4^\pm , C_4 , $E_2 \circ L_2$ et L_4 sont "intégrables". On a $\int E_4 = E_5$, $\int E_4^\pm = E_5^\pm$, $\int C_4 = P_5/Z_2$, $\int E_2 \circ L_2 = P_5$ et $\int L_4 = C_5$. André Joyal [4] a récemment démontré que dans l'anneau de $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(E)$ des espèces (i.e la complétion du semi-anneau des classes d'isomorphie d'espèces) toute espèce est intégrable. En d'autres mots, quelle que soit l'espèce F , il existe deux espèces S et T telles que $F = (S-T)'$. Il démontre l'élégante formule:

$$\int F = E_1 \cdot F - E_2 \cdot F' + E_3 \cdot F'' + \dots + (-1)^n E_{n+1} \cdot F^{(n)} + \dots$$

Dans le tableau D, le lecteur trouvera une liste d'intégrales (les plus simples trouvées parmi une multitude) pour chacune des espèces moléculaires sur les cardinalités ≤ 4 . Lorsque l'espèce n'est pas intégrable, on y donne une intégrale virtuelle (i.e un élément de \mathcal{H} qui n'est pas une espèce) qui ne coïncide que rarement avec celle *canonique* donnée par la formule de Joyal. Notons que tout élément T de \mathcal{H} admet une décomposition moléculaire unique

$$T = \sum_{n \geq 0} T_n = \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{\mu_n} c_{n,i} M_n^{(i)}$$

où, contrairement à la section 2, les entiers $c_{n,i}$ sont maintenant dans \mathbf{Z} . De plus, une conséquence du théorème de Yeh [13], cité plus tôt, est que \mathcal{H} est un anneau factoriel.

TABLEAU D

| n | i | $M_n^{(1)}$ | $\int M_n^{(1)}$ |
|---|----|-----------------|---|
| 0 | 1 | E_0 | E_1 |
| 1 | 1 | E_1 | E_2 |
| 2 | 1 | E_2 | E_3 |
| | 2 | L_2 | C_3 |
| 3 | 1 | E_3 | E_4 |
| | 2 | C_3 | (virtuelle) $X \cdot C_3 - C_4$ ou $X \cdot C_3 - P_4^{bic}$ |
| | 3 | E_3° | $E_2 \circ E_2$ |
| | 4 | L_3 | C_4 ou P_4^{bic} |
| 4 | 1 | E_4 | E_5 |
| | 2 | E_4^+ | E_5^+ |
| | 3 | $E_2 \circ E_2$ | (virtuelle) $X \cdot (E_2 \circ E_2) + 2E_5^{\circ} - L_2 \cdot E_3 - 2E_5$ |
| | 4 | E_4° | (virtuelle) $E_5^{\circ} - E_5$ |
| | 5 | $E_2 \cdot E_2$ | (virtuelle) $E_2 \cdot E_3 + E_5 - E_5^{\circ}$ |
| | 6 | P_4^{bic} | (virtuelle) $X \cdot P_4^{bic} - C_5$ |
| | 7 | C_4 | P_5 / Z_2 |
| | 8 | $X \cdot C_3$ | (virtuelle) $M_5^{(11)} - P_5$ |
| | 9 | $L_2 \cdot E_2$ | (virtuelle) $L_2 \cdot E_3 + 2E_5 - 2E_5^{\circ}$ |
| | 10 | $E_2 \circ L_2$ | P_5 |
| | 11 | L_4 | C_5 |

7. Lien entre $(\mu_n)_{n \geq 0}$ et $(\pi_n)_{n \geq 0}$

Soit μ_n et π_n le nombre d'espèces moléculaires et atomiques respectivement, concentrées sur la cardinalité n . Le tableau E donne les premiers termes de ces deux suites.

TABLEAU E

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---------|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|------|------|
| μ_n | 1 | 1 | 2 | 4 | 11 | 19 | 56 | 96 | 296 | 554 | 1593 | 3093 |
| π_n | 0 | 1 | 1 | 2 | 6 | 6 | 27 | 20 | 130 | 124 | 598 | 640 |

A638
 ↖ A5226

Les premières valeurs des μ_n ont été citées à la section 1. Pour trouver les premières valeurs des π_n , on peut procéder comme suit: à partir de la figure 10, on trouve facilement les espèces atomiques sur quatre points ou moins. A partir de celles-ci, on construit les espèces non-atomiques (il y en a 13) sur cinq points; d'où $\pi_5 = 6$. Et ainsi de suite... Notez que la suite (π_n) n'apparaît pas dans le livre de N.J.A. Sloane [14] et qu'elle n'est pas monotone. Le lien entre les deux suites se traduit par la formule suivante à partir de laquelle il est également facile de calculer π_n ($0 \leq n \leq 11$) connaissant μ_n ($0 \leq n \leq 11$).

Remarque (G. Labelle)

$$\text{On a } \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^m} \right)^{\pi_m}$$

Preuve: Soit M_n et P_n les ensembles de types d'espèces moléculaires et atomiques, respectivement, concentrées sur n points. Soit $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n id_i = n$. Si pour tout i , on choisit une combinaison avec répétitions de d_i éléments de P_i et que l'on multiplie toutes ces espèces atomiques on obtient bien sûr un élément de M_n . Le théorème de Yeh [15] (voir §6) implique que les μ_n éléments de M_n sont obtenus une et une seule fois par un tel produit.

On a donc $\mu_n = \sum \prod_{i=1}^n \left\{ \begin{matrix} \pi_i \\ d_i \end{matrix} \right\}$ où la somme s'étend sur les (d_1, d_2, \dots, d_n) où $d_i \geq 0, \sum id_i = n$. En effet, il est bien connu que le nombre de combinaisons avec répétitions de j objets pris parmi k est donné par $\left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} = \frac{k(k+1) \dots (k+j-1)}{j!}$.

Comme de plus on a $(1-t^i)^{-\pi_i} = \sum_{d=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \pi_i \\ d \end{matrix} \right\} t^{id}$, la formule s'ensuit.

8. Espèces multisortes

Dans cette dernière section, nous ne ferons qu'aborder l'étude des espèces à plusieurs sortes, du point de vue de leur décomposition (moléculaire ou atomique) en espèces multisortes plus simples.

Soit T une espèce à k sortes, $k \geq 1$. C'est-à-dire ([3],[8]) que T associe à tout k -tuple, (U_1, U_2, \dots, U_k) d'ensembles finis, un ensemble fini $T[U_1, U_2, \dots, U_k]$ et à tout k -tuple (f_1, f_2, \dots, f_k) de bijections $(f_i: U_i \rightarrow V_i)$ une bijection $T[f_1, f_2, \dots, f_k]: T[U_1, U_2, \dots, U_k] \longrightarrow T[V_1, V_2, \dots, V_k]$.

Si $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ est une multichiffre alors $T(n_1, n_2, \dots, n_k)$ est l'espèce à k sortes définie par

$$T(n_1, \dots, n_k)[U_1, U_2, \dots, U_k] = \begin{cases} T[U_1, \dots, U_k] & \text{si } \forall i, |U_i| = n_i \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous dirons que T est concentrée sur la multichiffre (n_1, \dots, n_k) si $T = T(n_1, \dots, n_k)$. Si (U_1, U_2, \dots, U_k) est de multichiffre (n_1, \dots, n_k) on a alors une action de $S_{U_1} \times S_{U_2} \times \dots \times S_{U_k}$ sur $T[U_1, \dots, U_k]$. Plus spécifiquement, prenons $U_i = n_i = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$ et représentons T par un "multigraphe" ayant k sortes d'arêtes.

En chaque sommet $x \in T[n_1, n_2, \dots, n_k]$, on place, pour tout $1 \leq i \leq k$, $n_i - 1$ arêtes d'indices (i, j) , $1 \leq j \leq n_i - 1$, correspondant à l'action de la transposition s_j de 0 et j dans la $i^{\text{ème}}$ sorte de points. Plus précisément l'arête d'indice (i, j) joint le sommet x au sommet

$$T[id_{n_1}, id_{n_2}, \dots, s_j, id_{n_{j+1}}, \dots, id_{n_k}](x).$$

Lorsque $n_i = 1$, pour une raison technique qui deviendra claire plus tard, il est préférable de placer en x une boucle d'indice $(i,0)$. Le multigraphe obtenu, lorsqu'on oublie la nature de ces sommets, s'appelle le *type* de l'espèce à k sortes T .

A titre d'exemple, la figure 14 donne le type de deux espèces à deux sortes sur la multichiffre $(3,3)$. Ce sont les espèces $L_3(X) \cdot C_3(Y)$ et $C_{3,3}^{alt}$ définies par:

$$L_3(X) \cdot C_3(Y)[U,V] = L_3[U] \times C_3[V]$$

$$\text{et } C_{3,3}^{alt}[U,V] = \{\delta \in C[U+V] \mid \delta(U) = V \text{ et } \delta(V) = U\}$$

$$\text{où } |U| = 3 \text{ et } |V| = 3.$$

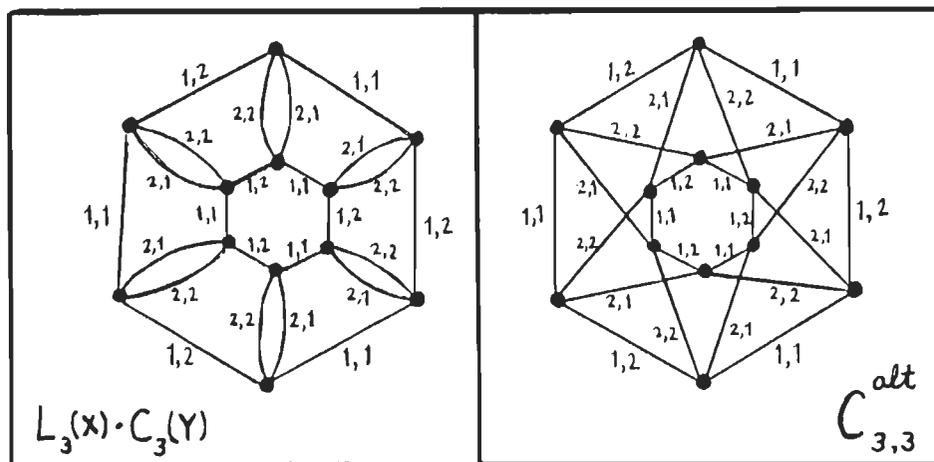


Figure 14.

Dans la figure 15, les mêmes types sont redessinés en représentant les arêtes de la première (seconde) sorte par un trait gras (fin)

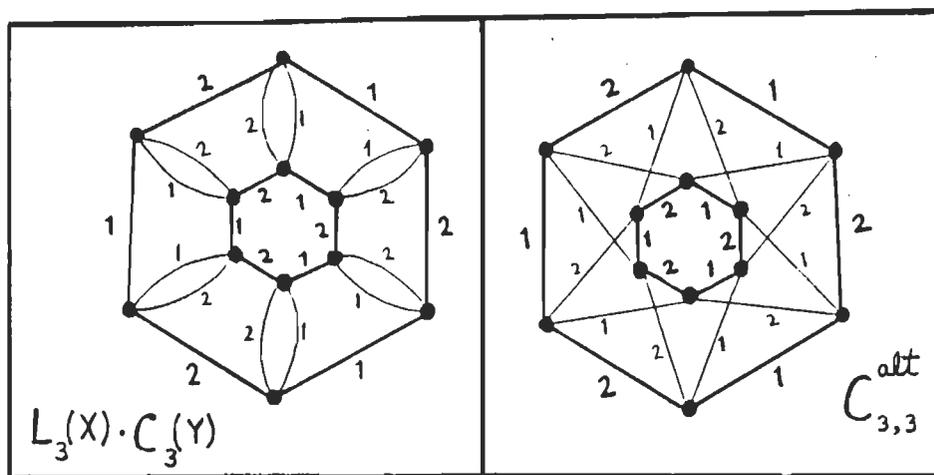


Figure 15

Connaissant le type de T , on trouve le type de $\frac{\partial}{\partial X_i} T$ en enlevant toutes les arêtes d'indice $(i, n_i - 1)$. S'il n'y a aucune arête de la $i^{\text{ième}}$ sorte (même pas d'indice $(i, 0)$) alors $n_i = 0$ et $\frac{\partial}{\partial X_i} T$ est l'espèce vide.

Remarque: Si A_1, A_2, \dots, A_k sont k espèces (à une sorte) concentrées respectivement sur les cardinalités n_1, n_2, \dots, n_k alors il est facile de construire une espèce T à k sortes, notée $A_1(X_1) \cdot A_2(X_2) \cdot \dots \cdot A_k(X_k)$, sur la multicharité (n_1, n_2, \dots, n_k) ; il suffit de poser

$$T[U_1, U_2, \dots, U_k] = A_1[U_1] \times A_2[U_2] \times \dots \times A_k[U_k].$$

Le lecteur ne devrait surtout pas croire qu'on obtient ainsi toutes les espèces à k sortes. Par exemple, $C_{3,3}^{\text{alt}}$ n'est pas une telle espèce à deux sortes.

A partir des opérations de somme et de produit d'espèces à k sortes, on définit de la façon évidente les notions d'espèces moléculaires et atomiques à k sortes.

Puisque les types d'espèces à k sortes sur la multichiffrement
 (n_1, \dots, n_k) correspondent aux types actions connexes du groupe
 $S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}$ (ou encore aux classes de conjugaison de sous-groupes
de ce groupe), on sait qu'il n'y en a qu'un nombre fini. Soit
 $\mu_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ce nombre; de plus, soit $\pi_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ le nombre
de celles qui sont primaires.

Remarque (G. Labelle 1984)

$$\text{On a } \sum_n \mu_{n_1, n_2, \dots, n_k} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_k^{n_k} = \prod_m \left(\frac{1}{1-t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_k^{m_k}} \right)^{\pi_{m_1, \dots, m_k}}$$

où $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $m = (m_1, m_2, \dots, m_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Preuve: Le cas $k=1$ a été prouvé à la section 7. Le cas $k > 1$ n'est
guère plus difficile. Cependant plutôt que de considérer un partage de
l'entier n , on doit maintenant parler d'un multipartage de la multichiffrement
 (n_1, n_2, \dots, n_k) . Un multipartage de (n_1, \dots, n_k) étant
une combinaison avec répétitions de multichiffrements dont la somme
terme à terme donne (n_1, n_2, \dots, n_k) . Le reste de la preuve est
laissé au lecteur.

L'auteur tiens à remercier François Bergeron, Hélène Décoste,
André Joyal, Gilbert Labelle, Pierre Leroux et Volker Strehl, tous
membres du groupe de recherche combinatoire de l'UQAM, et plus parti-
culièrement François Bergeron et Gilbert Labelle, ainsi que Steve
Schanuel et Yeong Nan Yeh, de l'université de New York à Buffalo,
pour de nombreuses discussions fort instructives.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. Bordat, A. Cazes, M. Chein, O. Cogis et Y. Guido, C.A.B.R.I: *un cahier de brouillon informatisé pour l'étude des ensembles ordonnés*, Centre de recherche en informatique de Montpellier (1983).
- [2] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1968.
- [3] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math., 42, 1981, 1-82.
- [4] A. Joyal, *communication verbale*, février 84.
- [5] G. Labelle, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math., 42, 1981, 217-247.
- [6] G. Labelle, *A propos des équations différentielles combinatoires*, à paraître.
- [7] J. Labelle, *Théorie des graphes*, Modulo Editeur, Outremont, Québec, 1981.
- [8] J. Labelle, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. Sc. Math. du Québec, 7, no 1, 1983, 59-94.
- [9] A.C. Lunn and J.K. Senior, *Isomerism and Configurations*, J. of Physical Chemistry, vol. 33, 1929, 1026-1079.
- [10] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, GTM 5, Springer-Verlag, N.Y., 1971.

- [11] D.S. Passman, *Permutation Groups*, Benjamin 1968.
- [12] S. Schanuel, *Communication verbale*, avril 1984.
- [13] S. Schanuel, *Yeh's proof of the factoriality of Joyal's ring of species*, Conférence par S. Schanuel au séminaire de combinatoire de l'UQAM, le 13 avril 1984.
- [14] N.J.A Sloane, *A Handbook of Integer Sequences*, Acad. Press, N.Y., 1973.
- [15] Yeh, Yeong Nan, *à paraître*.

Jacques Labelle
Département de Mathématiques
et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3P8