JRAM 227 1967

2794
2795
2789

Chapitre 14. Systèmes variés

Rappelons qu'un système diophantien linéaire, qui dépend linéairement d'un paramètre n, est dit *significatif*, si pour n suffisamment grand il définit un domaine polyédrique P_n. Si dans les relation du système on met en évidence les termes en n, elles sont de la forme $nf = g$, $nf > g$, $nf \geqq g$, qui tendent vers $f = 0$, $f > 0$, $f \geqq 0$, quand $n \to \infty$. On voit par là que P_n tend en général vers un domaine fixe et que, par suite, *le compteur C_n du système est en général une constante à partir d'une certaine valeur de n.* (Il vérifie alors la récurrence eulérienne triviale $C_n - C_{n-1} = 0$.) La détermination de C_n n'est donc intéressante que si la mesure de P_n tend vers l'infini avec n, soit parce qu'une variété linéaire qui porte ou qui borde P_n s'éloigne à l'infini (comme c'est en particulier le cas pour les systèmes étudiés dans les chapitres précédents), soit parce que des facettes de P_n ont des directions limites parallèles.

Dans ce chapitre nous examinons quelques systèmes numériques où il en est ainsi, sans qu'ils entrent dans les catégories eulériennes précédemment étudiées. *Leurs compteurs vérifient encore des relations de récurrence eulériennes.*

Exemple 21.

$$4X + 2Y + (2n - 3)Z + (3n + 3)T < 9n + 1, \quad X, Y, Z, T > 0.$$

La première inéquation, qui peut s'écrire

$$n(9 - 2Z - 3T) > 4X + 2Y - 3Z + 3T - 1,$$

n'admet de solution positive pour n grand que si $9 - 2Z - 3T \geqq 0$. On voit donc que pour $n \geqq 3$ les seuls couples (Z, T) possibles sont $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$. Par suite le système proposé se décompose en quatre systèmes

$$(1) \qquad 4X + 2Y < 4n + 1, \quad X, Y > 0;$$
$$(2) \qquad 4X + 2Y < 2n + 4, \quad X, Y > 0;$$
$$(3) \qquad 4X + 2Y < n - 2, \quad X, Y > 0;$$
$$(4) \qquad 4X + 2Y < 7, \quad X, Y > 0.$$

(4) a une seule solution. Les trois premiers systèmes sont bordés. Les dénominateurs des sommets de leurs domaines primitifs sont respectivement $(1, 1, 1)$, $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Le plus petit commun multiple de leurs produits caractéristiques est donc

$$\Pi(t) = (1 - t)(1 - t^2)(1 - t^4) = 1 - t - t^2 + t^3 - t^4 + t^5 + t^6 - t^7,$$

qui caractérise le système proposé. La région (3) n'existe que si $n \geqq 3$. Pour n de 3 à 9 on compte pour l'ensemble des quatre systèmes $C_n = i_n = 9, 17, 27, 40, 55, 73$. Par la formule de récurrence

$$C_n - C_{n-1} - C_{n-2} + C_{n-3} - C_{n-4} + C_{n-5} + C_{n-6} - C_{n-7} = 0, \qquad 2794 \;\; 2797$$

on obtient les valeurs conventionnelles $C_2 = 5$, $C_1 = 2$, $C_0 = 3$. D'où

$$f(t) = \Pi(t)(3 + 2t + 5t^2 + 9t^3 + 17t^4 + 27t^5 + 40t^6 + \cdots) = 3 - t + 5t^3 + 2t^4 + 7t^5 + 5t^6.$$

En décomposant $\frac{j(t)}{\Pi(t)} = \Sigma C_n t^n$ en éléments simples, on trouve

$$C_n = \frac{1}{16}(21n^2 + 35n + 15\varepsilon) = \frac{1}{8}\left[(13+\varepsilon)n + \cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

ou

$$(1) \qquad C_n = \left\| \frac{21n^2 - 2(13+\varepsilon)n}{16} \right\| + 2 + \varepsilon \quad (n \geqq 3).$$

Contrôle: Cette formule donne $C_{10} = 117$, $C_{11} = 143$, comme le décompte de points entiers, ou comme la recherche méthodique des valeurs (X, Y, Z, T) qui vérifient le système pour $n = 10$ et pour $n = 11$.

Remarque. La formule (1) n'est valable que pour $n \geqq 3$. Elle donne les valeurs conventionnelles $C_2 = 5$, $C_1 = 2$, alors que la vraie valeur de C_2 est 4 et que C_1 est infini.

Exemple 22.

$$nX + Y < 4n + 3, \quad X > 1, \quad Y > 2.$$

En écrivant la première inéquation $n(4 - X) > Y - 3$, on voit que les seules valeurs possibles pour X sont 2 et 3. D'où $C_n = 3n$, qui vérifie $\{(1 - C)^2\} = 0$.

Exemple 23.

$$0 < Y \leqq nX, \quad X \leqq n.$$

La droite pivotante $d(Y = nX)$ tend vers une parallèle à la droite de direction fixe $d'(X = n)$, quand $n \to \infty$. Le point (d, d) décrit une parabole. On voit facilement que $C_n = n \sum_1^n t = \frac{n^2(n+1)}{2}$; polynôme du troisième degré vérifiant $\{(1 - C)^4\} = 0$.

Dans les deux derniers exemples nous nous contenterons d'établir la relation de récurrence.

Exemple 24.

$$X - 4Y < 2, \quad X + Y < 2n, \quad (2n-1)X - (3n+1)Y > n - 3.$$

Le triangle ouvert défini par ce système a un côté d fixe, un autre d' de direction fixe, le troisième d'' pivote autour du point fixe $P(2, 1)$ et tend vers la droite $D''(2X - 3Y = 1)$, quand $n \to \infty$. Si n est suffisamment grand, il passe entre le point $A(d', d'')$ et P un nombre constant de droites réticulaires parallèles à D'', car le lieu de A est une hyperbole, dont une asymptote a la direction de D''. On trouve que pour $n \geqq 1$, il n'en passe qu'une $(2X - 3Y = 2)$, qui coupe d'' en M et d' en N. Soit i' le nombre de points entiers situés à l'intérieur de MN ou en M. Pour $n \geqq 3$, aucun point entier ne se trouve à l'intérieur du triangle $dd''D''$ ou sur son côté de support D'': $i_{dd'd''} = i_{dd'D''} - i'$. Le triangle $dd'D''$ et le segment MN sont des polyèdres bordés, qui ont pour produits caractéristiques $(1-t)(1-t^5)^2$ et $(1-t)(1-t^5)$. Donc

$$\Pi(t) = (1-t)(1-t^5)^2 = 1 - t - 2t^5 + 2t^6 + t^{10} - t^{11},$$

$$C_n - C_{n-1} - 2C_{n-5} + 2C_{n-6} + C_{n-10} - C_{n-11} = 0 \quad (n \geqq 3).$$

Exemple 25.

$$-(2n-1)X + 3nY < 10n, \quad 2nX - (3n-1)X < 6n, \quad X > 0, \quad Y > 0.$$

Ce système définit un quadrilatère ouvert $A\left(0, \frac{10}{3}\right)$, $O(0,0)$, $B(3,0)$, M. Le sommet M décrit une hyperbole, dont la droite $a(2X - 3Y = 0, 4)$ est une asymptote. La parallèle à a par A coupe OX en C. Les i_{ACBM} et i_{AOBM} ont le même produit caractéristique, car ils diffèrent d'une constante. Pour $n \geqq 1$, il passe 9 droites réticulaires parallèles à a entre M et C et 6 entre M et B. Pour les premières les segments découpés par le triangle MBC ont pour produit caractéristique $(1-t)(1-t^3)$, pour les secondes $(1-t)(1-t^2)$. On le voit en transportant chaque segment sur la droite $2X - 3Y = 0$ (où il sera bordé) par une translation entière, qui ne modifie pas son i. Donc

$$\Pi(t) = (1-t^2)(1-t^3) = 1 - t^2 - t^3 + t^5,$$

$$C_n - C_{n-2} - C_{n-3} + C_{n-5} = 0.$$

Or pour n de 1 à 5, $C_n = 18, 45, 69, 96, 120$. ~~2795~~ 2798

Contrôle: La récurrence donne $C_6 = 147$, $C_7 = 171$, comme le décompte de points entiers.

Conclusion

Le compteur de tout système eulérien général (homothétique, bordé ou affine) *vérifie une relation de récurrence eulérienne.* Cette relation étant établie à partir du domaine polyédrique convexe et rationnel que définit le système, et un nombre convenable de valeurs initiales du compteur étant connues par des décomptes, on peut le déterminer comme polynôme mixte du paramètre du système par un calcul classique.

Pour quelques systèmes diophantiens linéaires qui dépendent linéairement d'un paramètre (systèmes L), mais n'entrent pas dans la catégorie précédente, nous avons pu montrer que le compteur vérifie encore une relation de récurrence eulérienne. Cela nous amène à penser qu'il en est peut-être ainsi pour tout système L significatif. Mais sous cette forme générale la question reste ouverte.

Littérature

L'auteur a publié les notes suivantes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

[1] **240** (1955), 483—485.
[2] **242** (1956), 1570—1573.
[3] **243** (1956), 347—349.
[4] **252** (1961), 1085—1087.
[5] **258** (1964), 3945—3948.
[6] **258** (1964), 4182—4183.
[7] **258** (1964), 5131—5133.
[8] **258** (1964), 4885—4887.

✓ checked all

Eingegangen 12. Juli 1965