BIRECOUVREMENTS ET BIREVÊTEMENTS D'UN ENSEMBLE FINI

par

L. COMTET

Studia Scient Math Hung 3(1968)
137–152

Please enter 2 → 27718, 27719

Notre but est de calculer et d'estimer le nombre $c(n)$ des recouvrements d'un ensemble fini E à n éléments, tels que chaque point de E soit deux fois recouvert: en abrégé „birecouvrements"; ce nombre $c(n)$ généralise le nombre (de Bell) $b(n)$ des partitions de E ([1], [2]) puisqu'une partition est un recouvrement tel que chaque point de E soit une fois recouvert. Les blocs d'un birecouvrement étant, par définition, tous distincts, nous sommes amenés à étudier des systèmes de parties de E plus généraux que les birecouvrements et que nous appelons „birevêtements"; chaque point de E est encore deux fois recouvert mais certains blocs du système peuvent ne pas différer; leur nombre $v(n)$ est en relation simple avec $c(n)$. Au passage s'introduit le nombre $c(n, k)$ des birecouvrements à k blocs: il généralise le nombre de Stirling de seconde espèce $S(n, k)$ ([3], p. 32). Nous donnons enfin une estimation et une fonction génératrice des $c(n)$ et $v(n)$.

1. Introduction

Dans tout ce qui suit, le nombre d'éléments d'un ensemble M se note $|M|$. Soit E un ensemble fini ayant n éléments, $|E|=n$, et soit $\mathscr{P}'(E)$ l'ensemble de ses parties non Vides.

DÉFINITION 1. Un *système* $\mathscr{S}$ de E est un ensemble non vide (non ordonné) de parties non vides distinctes de E: $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}'(E)$. Les *blocs* d'un système sont les parties de E dont il est constitué. Un *k-système* est un système constitué de k blocs.

DÉFINITION 1'. Un *agrégat* $\mathscr{A}$ de E est un ensemble non vide (non ordonné) de parties non vides de E, chacune pouvant apparaître plusieurs fois; la donnée d'un agrégat $\mathscr{A}$ équivaut donc à la donnée d'une fonction φ définie sur $\mathscr{P}'(E)$ et dont les valeurs sont des entiers $\geqq 0$, telle que $\varphi(A)$ soit le nombre de fois qu'apparaît dans $\mathscr{A}$ la partie $A\in\mathscr{P}'(E)$. Il pourra être utile de partager $\mathscr{P}'(E)$ en classes $\varepsilon_h(\mathscr{A})$, h entier $\geqq 0$, définies par:

$$\varepsilon_h(\mathscr{A}) = \varphi^{-1}(h) = \{A \mid A\in\mathscr{P}'(E),\ \varphi(A) = h\}.$$

Les *blocs* d'un agrégat sont encore les parties de E dont il est constitué. Un *k-agrégat* est un agrégat constitué de k blocs, distincts ou non:

$$\sum_{A\in\mathscr{P}'(E)} \varphi(A) = k;$$

en d'autre termes, c'est une k-combinaison avec répétition dans $\mathscr{P}'(E)$.

DÉFINITION 2. Un système $\mathscr{S}$ est un „*birecouvrement*” si chaque $x \in E$ appartient exactement à 2 blocs (distincts) de $\mathscr{S}$; on note $\mathbf{c}(E)$ l'ensemble des birecouvrements de E, et l'on pose $c(n) \equiv |\mathbf{c}(E)|$. Un *$k$-birecouvrement* est un birecouvrement constitué de k blocs; on note $\mathbf{c}(E, k)$ l'ensemble des k-birecouvrements de E, et l'on pose $c(n, k) \equiv |\mathbf{c}(E, k)|$. Evidemment:

$$c(n) = \sum_k c(n, k).$$

DÉFINITION 2'. Un agrégat $\mathscr{A}$ est un „*birevêtement*” si chaque $x \in E$ appartient exactement à 2 blocs, distincts ou non, de $\mathscr{A}$; on note $\mathbf{v}(E)$ l'ensemble des birevêtements de E, et l'on pose $v(n) \equiv |\mathbf{v}(E)|$. Un *$k$-birevêtement* est un birevêtement constitué de k blocs; on notera $\mathbf{v}(E, k)$ l'ensemble des k-birevêtements de E, et l'on pose $v(n, k) \equiv |\mathbf{v}(E, k)|$. Evidemment:

$$v(n) = \sum_k v(n, k).$$

Il est clair que $\mathbf{c}(E) \subset \mathbf{v}(E)$. Par exemple, pour $E \equiv \{1, 2, 3, 4\}$,

$\mathscr{A}_1 \equiv \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\big\}$, $\quad \mathscr{A}_2 \equiv \big\{\{1\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{2, 3, 4\}\big\}$,

$\mathscr{A}_3 \equiv \big\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}\big\}$, on a $\mathscr{A}_1 \notin \mathbf{v}(E)$, $\mathscr{A}_2 \in \mathbf{v}(E)$ et $\notin \mathbf{c}(E)$ $\mathscr{A}_3 \in \mathbf{c}(E)$.

Donnons un exemple de problème de dénombrement où interviennent les nombres $c(n, k)$ et $v(n, k)$. Soient deux jeux absolument identiques de 52 cartes à jouer; on les mélange ensemble et l'on obtient ainsi un jeu de 104 cartes deux par deux indiscernables. On répartit les 104 cartes en 5 tas tels que dans chaque tas, toutes les valeurs des cartes soient différentes, l'ordre des tas et des cartes n'intervenant pas. Il est facile de voir que le nombre des répartitions de cartes en 5 tas ayant la propriété requise est égal à $v(52,5)$; en effet, soit E l'ensemble des 52 valeurs possibles de cartes; chaque tas détermine un bloc de E et une répartition des cartes en 5 tas équivaut à la donnée d'un 5-birevêtement de E, puisque chacune des 52 valeurs apparait dans deux tas différents. Si l'on ajoute la condition que deux tas distincts ne sont pas composés de valeurs toutes égales, le nombre des répartitions possibles devient $c(52, 5)$.

2. Relation entre les $c(n, k)$ et les $v(n, k)$

A tout k-birevêtement ϑ de E, $|E| = n$, associons les 4 ensembles suivants:

(1) l'ensemble $\varepsilon_1(\vartheta)$ ($\in \mathscr{P}'(E)$, voir définition 1').
(2) l'ensemble $\varepsilon_2(\vartheta)$.
(3) la partie $E_2(\vartheta) \equiv \bigcup_{B \in \varepsilon_2(\vartheta)} B$ de E; pour $a \equiv |E_2(\vartheta)|$, on a évidemment $0 \leqq a \leqq n$.
(4) la partie $E_1(\vartheta) \equiv E \setminus E_2(\vartheta)$ de E.

Si $\varepsilon_2(\vartheta)$ est vide, $\varepsilon_1(\vartheta)=\vartheta$ est un k-birecouvrement de E. Si $\varepsilon_1(\vartheta)$ est vid $\varepsilon_2(\vartheta)$ est une $\frac{k}{2}$-partition de E. Sinon,

$$1 \leqq a = |E_2(\vartheta)| \leqq n-1$$

et, si l'on pose $u \equiv |\varepsilon_2(\vartheta)|$, il apparaît que $|\varepsilon_1(\vartheta)| = k-2u$; dans ces condition $\varepsilon_2(\vartheta)$ est une u-partition de $E_2(\vartheta)$ et $\varepsilon_1(\vartheta)$ est un $(k-2u)$-birecouvrement c $E_1(\vartheta)$, $1 \leqq u \leqq \{k/2, a\}$.

Réciproquement, la donnée des quatre ensembles $E_1, E_2, \mathbf{p}, \mathbf{q}$, définis c après, équivaut à la donnée d'un k-birevêtements:

(1) E_1 et E_2, parties de E, telles que

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cup E_2 = E, \quad 0 \leqq |E_2| \equiv a \leqq n$$

(2) $\mathbf{p}$ qui est une u-partition de E_2 quand $E_2 \neq \emptyset$ avec $1 \leqq u \leqq \{k/2, a\}$, et qu est vide dans le cas contraire.

(3) $\mathbf{q}$ qui est un $(k-2u)$-birecouvrement de E_1 quand $E_1 \neq \emptyset$, et qui est vid autrement.

On obtiendra donc tous les k-birevêtements en faisant varier a et u indépendam ment de manière convenable; ainsi, $S(a, u)$ désignant le nombre de u-partition d'un ensemble à a éléments (nombres de Stirling de seconde espèce, [3] p. 32 prolongé par $S(0, 0) \equiv 1$, il vient, avec k et $n \geqq 1$:

$$v(n,k) = \sum_{\substack{0 \leqq a \leqq n \\ 0 \leqq u \leqq \{k/2,\, a\}}} \left\{ \binom{n}{a} \cdot S(a,u) \cdot c(n-a, k-2u) \right\},$$

le facteur $\binom{n}{a}$ correspondant au nombre de choix de $E_2 \subset E$, $|E_2| = a$. En définitive

Proposition 1. *Les nombres $c(n, k)$ de k-birecouvrements et $v(n, k)$ de k birevêtements de E, $|E| = n \geqq 1$, $k \geqq 1$, sont liés par:*

(1) $$v(n,k) = c(n,k) + \sum_{1 \leqq a \leqq n} \left\{ \binom{n}{a} \sum_{1 \leqq u \leqq \{a,\, k/2\}} S(a,u) \cdot c(n-a, k-2u) \right\}.$$

Cette formule (1) permet le calcul de proche en proche des $v(n, k)$ en fonction de $c(n, k)$. Pour inverser cette formule, faisons la

Convention de prolongement. Prolongeons les suites doubles

$$S(n,k), \quad c(n,k), \quad v(n,k), \quad \binom{n}{k}$$

de la manière suivante:

$$S(n,k) \equiv 0 \quad \text{si} \quad k > n \quad \text{ou si} \quad k \leqq 0 \quad \text{ou si} \quad n \leqq 0, \quad \text{sauf} \quad S(0,0) \equiv 1.$$

$$c(n,k) \quad \text{et} \quad v(n,k) = 0 \quad \text{si} \quad k \leqq 0 \quad \text{ou si} \quad n \leqq 0, \quad \text{sauf} \quad c(0,0) \equiv v(0,0) \equiv 1.$$

$\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ ou si $k < 0$ ou si $n < 0$, avec

$$\binom{n}{0} \equiv \binom{n}{n} \equiv 1, \quad \text{si} \quad n \geqq 0.$$

Compte tenu de cette convention, la formule (1) s'écrit alors:

$$v(n, k) = \sum_{a,\, u \geqq 0} \left\{ \binom{n}{a} \cdot S(a, u) \cdot c(n-a, k-2u) \right\}, \qquad n, k \geqq 0. \tag{2}$$

Définissons alors les fonctions génératrices formelles $C(y, z)$ et $V(y, z)$ des $c(n, k)$ et $v(n, k)$ par:

$$C(y, z) \equiv \sum_{n,\, k \geqq 0} c(n, k) y^k \frac{z^n}{n!}; \quad V(y, z) \equiv \sum_{n,\, k \geqq 0} v(n, k) y^k \frac{z^n}{n!}. \tag{3}$$

(2) et (3) entraînent:

$$V(y, z) = \sum_{n,\, k,\, a,\, u \geqq 0} \binom{n}{a} \cdot S(a, u) \cdot c(n-a, k-2u) \cdot y^k \frac{z^n}{n!}$$

ou encore, en faisant le changement de variable de sommation: $b \equiv n-a$, $w \equiv k-2u$:

$$V(y, z) = \sum_{a,\, b,\, u,\, w \geqq 0} S(a, u) \cdot c(b, w) \frac{z^{a+b}}{a!\, b!} \cdot y^{2u+w}.$$

Utilisant l'identité bien connue ([3], p. 43)

$$\sum_{a \geqq 0} S(a, u) \frac{z^a}{a!} = \frac{(e^z - 1)^u}{u!} \tag{4}$$

il vient:

$$V(y, z) = \sum_{b,\, u,\, w \geqq 0} \frac{\{y^2 (e^z - 1)\}^u}{u!} \cdot c(b, w) \cdot y^w \cdot \frac{z^b}{b!} =$$

$$= \exp\{y^2 (e^z - 1)\} \sum_{b,\, w \geqq 0} c(b, w) \cdot y^w \cdot \frac{z^b}{b!}.$$

PROPOSITION 2. *Les fonctions génératrices $C(y, z)$ et $V(y, z)$ des $c(n, k)$ et $v(n, k)$, définies en* (3) *sont liées par:*

$$V(y, z) = \exp\{y^2 (e^z - 1)\} \cdot C(y, z). \tag{5}$$

Il est alors facile d'inverser (1): en effet, d'après (4) et (5):

$$C(y, z) = \exp\{-y^2 (e^z - 1)\} \cdot \sum_{n,\, k \geqq 0} v(n, k) \cdot y^k \cdot \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n,\, k,\, s \geqq 0} (-1)^s \frac{y^{2s} (e^z - 1)^s}{s!} v(n, k) \cdot y^k \cdot \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n,\, k,\, s,\, t \geqq 0} (-1)^s S(t, s) \cdot v(n, k) \cdot y^{2s+k} \cdot \frac{z^{n+t}}{n!\, t!}.$$

Faisons le changement de variables de sommations $N \equiv n+t$, $K \equiv 2s+k$ et identifions les coefficients de $y^K \cdot \frac{z^N}{N!}$ de chaque membre:

$$c(N, K) = \sum_{s, t \geqq 0} \binom{N}{t} (-1)^s \cdot S(t, s) \cdot v(N-t, K-2s),$$

ou encore, après le nouveau changement de variables $n \equiv N$, $k \equiv K$, $a \equiv t$, $u \equiv s$ et avec notre *convention:*

PROPOSITION 3. *On peut calculer les* $c(n, k)$ *à partir des* $v(n, k)$ *par la formule suivante, inverse de* (1), n *et* $k \geqq 1$:

$$(6) \qquad c(n, k) = v(n, k) + \sum_{1 \leqq a \leqq n} \left\{ \binom{n}{a} \sum_{1 \leqq u \leqq \{a, k/2\}} (-1)^u \cdot S(a, u) \cdot v(n-a, k-2u) \right\}.$$

3. Récurrence sur les nombres $c(n, k)$ de k-birecouvrements de E, $|E| = n$

Tout ce paragraphe n'utilise que des observations élémentaires sans le moindre recours à la théorie des fonctions génératrices.

(I) *Notations.* Il est important, dans ce qui suit, de ne pas oublier la *convention* faite plus haut. Une légère réflexion montre d'abord que: $c(i, 0) = c(i, 1) = c(i, 2) = 0$ pour $i \geqq 1$ et que $c(1, j) = 0$ si $j \geqq 1$. Adjoignons à E, $|E| = n \geqq 1$, un $(n+1)^{\text{ème}}$ élément x et soit $F \equiv E \cup \{x\}$. Considérons l'ensemble $\mathbf{c}(F, k+1)$, $k \geqq 3$ (définition 2) des birecouvrements de F, à $(k+1)$ blocs. Pour $\mathscr{R} \in \mathbf{c}(F, k+1)$, soient $A(\mathscr{R})$ et $B(\mathscr{R})$ les deux blocs (distincts) de $\mathscr{R}$, qui contiennent x, leur ordre n'intervenant évidemment pas; soient aussi $A_0(\mathscr{R}) \equiv A(\mathscr{R}) \setminus \{x\}$, $B_0(\mathscr{R}) \equiv B(\mathscr{R}) \setminus \{x\}$. Partageons alors $\mathbf{c}(F, k+1)$ en les cinq classes disjointes suivantes:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{a} \equiv \{\mathscr{R} | \mathscr{R} \in \mathbf{c}(F, k+1); & A_0(\mathscr{R}) \neq \emptyset, \quad A_0(\mathscr{R}) \notin \mathscr{R}; & B_0(\mathscr{R}) = \emptyset\} \\
\mathbf{b} \equiv \{\mathscr{R} | \qquad d^\circ & ; \quad A_0(\mathscr{R}) \neq \emptyset, \quad A_0(\mathscr{R}) \notin \mathscr{R}; & B_0(\mathscr{R}) \neq \emptyset, \quad B_0(\mathscr{R}) \notin \mathscr{R}\} \\
\mathbf{d} \equiv \{\mathscr{R} | \qquad d^\circ & ; \quad A_0(\mathscr{R}) \in \mathscr{R}; & B_0(\mathscr{R}) = \emptyset\} \\
\mathbf{e} \equiv \{\mathscr{R} | \qquad d^\circ & ; \quad A_0(\mathscr{R}) \in \mathscr{R}; & B_0(\mathscr{R}) \neq \emptyset, \quad B_0(\mathscr{R}) \notin \mathscr{R}\} \\
\mathbf{f} \equiv \{\mathscr{R} | \qquad d^\circ & ; \quad A_0(\mathscr{R}) \in \mathscr{R}; & B_0(\mathscr{R}) \in \mathscr{R}\}
\end{array}$$

L'ordre de $A_0(\mathscr{R})$ et $B_0(\mathscr{R})$ n'intervenant pas, il est clair que tous les cas possibles pour les $\mathscr{R}$ ont été épuisés, donc que:

$$(7) \qquad c(n+1, k+1) = |\mathbf{c}(F, k+1)| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{d}| + |\mathbf{e}| + |\mathbf{f}|.$$

(II) *Calcul de* $|\mathbf{a}|$. Soit α la fonction définie sur $\mathbf{a}$ et à valeurs dans $\mathbf{c}(E, k)$, telle que, pour $\mathscr{R} \in \mathbf{a}$: $\alpha(\mathscr{R}) \equiv$ trace de $\mathscr{R}$ sur $E = \{R \cap E | R \in \mathscr{R}\}$. α est visiblement surjective: tout $\mathscr{R}' \in \mathbf{c}(E, k)$ est atteint. Posons alors, comme d'habitude, pour $\mathscr{R}' \in \mathbf{c}(E, k)$:

$$\alpha^{-1}(\mathscr{R}') \equiv \{\mathscr{R} | \mathscr{R} \in \mathbf{a}, \alpha(\mathscr{R}) = \mathscr{R}'\}$$

et cherchons le nombre d'éléments de $\alpha^{-1}(\mathscr{R}')$. Pour construire les $\mathscr{R}\in\alpha^{-1}(\mathscr{R}')$ à partir de $\mathscr{R}'$, il suffit de choisir un bloc $B\in\mathscr{R}'$, puis de le border par x, c'est-à-dire de le remplacer par $B\cup\{x\}$; comme $\mathscr{R}'$ possède k blocs, il y a k choix possibles du bloc B; donc $|\alpha^{-1}(\mathscr{R}')|=k$ pour tout $\mathscr{R}'\in\mathbf{c}(E,k)$. Ainsi:

$$|\mathbf{a}| = \sum_{\mathscr{R}'\in\mathbf{c}(E,k)} |\alpha^{-1}(\mathscr{R}')| - k\cdot c(n,k).$$

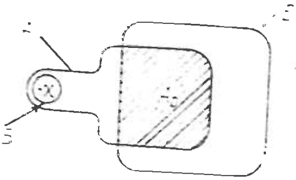

Abb. 1

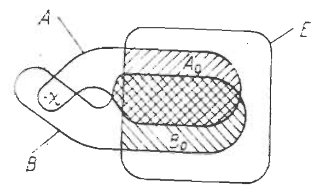

Abb. 2

(III) *Calcul de* $|\mathbf{b}|$. Définissons sur $\mathbf{b}$ la fonction β à valeurs dans $\mathbf{c}(E,k+1)$ par: $\beta(\mathscr{R})\equiv$ trace de $\mathscr{R}$ sur $E=\{R\cap E|R\in\mathscr{R}\}$. β est surjective et, pour $\mathscr{R}'\in\mathbf{c}(E,k+1)$, on a $|\beta^{-1}(\mathscr{R}')|=\binom{k+1}{2}$; en effet, pour construire tous les $\mathscr{R}\in\mathbf{b}$ tels que $\beta(\mathscr{R})=\mathscr{R}'$, il suffit de choisir une paire (non ordonnée) de blocs de $\mathscr{R}'$, puis de les border chacun par x. Ainsi:

$$|\mathbf{b}| = \sum_{\mathscr{R}'\in\mathbf{c}(E,k+1)} |\beta^{-1}(\mathscr{R}')| = \binom{k+1}{2}\cdot c(n,k+1).$$

(IV) *Calcul de* $|\mathbf{d}|$. Pour $A_0\subset E$, $A_0\neq\emptyset$, soit $\mathbf{d}(A_0)$ l'ensemble des recouvrements $\mathscr{R}\in\mathbf{d}$ tels que $A_0(\mathscr{R})=A_0$ (et que $A_0\in\mathscr{R}$). Définissons alors sur $\mathbf{d}(A_0)$ la fonction δ_{A_0}, à valeurs dans $\mathbf{c}(E\backslash A_0, k-2)$ par: $\delta_{A_0}(\mathscr{R})\equiv$ trace de $\mathscr{R}$ sur $E\backslash A_0=\dots$; δ_{A_0} est surjective, et pour tout $\mathscr{R}'\in\mathbf{c}(E\backslash A_0, k-2)$, on a $|\delta_{A_0}^{-1}(\mathscr{R}')|=1$ évidemment. Donc, en posant $u\equiv|A_0|$, $1\leqq u\leqq n$, il vient:

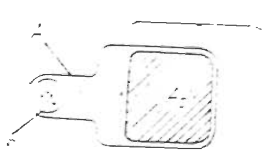

Abb. 3

$$|\mathbf{d}(A_0)| = \sum_{\mathscr{R}'\in\mathbf{c}(E\backslash A_0,k-2)} |\delta_{A_0}^{-1}(\mathscr{R}')| = c(n-u,k-2).$$

c'est-à-dire:

$$|\mathbf{d}| = \sum_{A_0\in\mathscr{F}(E)} |\mathbf{d}(A_0)| = \sum_{1\leqq u\leqq n}\Big\{\sum_{|A_0|=u} |\mathbf{d}(A_0)|\Big\} = \sum_{1\leqq u\leqq n}\binom{n}{u}\cdot c(n-u,k-2).$$

(V) *Calcul de* $|\mathbf{e}|$. Dans ce cas, $A_0(\mathscr{R})\cap B_0(\mathscr{R})=\emptyset$, puisque, s'il existait un élément y commun à $A_0(\mathscr{R})$ et $B_0(\mathscr{R})$, il appartiendrait à $A(\mathscr{R})$: il serait donc trois fois recouvert et $\mathscr{R}$ ne serait plus un birecouvrement. Pour $A_0\subset E$, $A_0\neq\emptyset$, soit $\mathbf{e}(A_0)$ l'ensemble des birecouvrements $\mathscr{R}\in\mathbf{e}$ tels que $A_0(\mathscr{R})=A_0$ (et que $A_0\in\mathscr{R}$). Définissons alors sur $\mathbf{e}(A_0)$ la fonction ε_{A_0} à valeurs dans $\mathbf{c}(E\backslash A_0, k-1)$ par: $\varepsilon_{A_0}(\mathscr{R})\equiv$ trace de $\mathscr{R}$ sur $E\backslash A_0=\dots$: ε_{A_0} est surjective, et pour tout $\mathscr{R}'\in\mathbf{c}(E\backslash A_0, k-1)$, on a $|\varepsilon_{A_0}^{-1}(\mathscr{R}')| = k-1$, puisque chaque $\mathscr{R}\in\varepsilon_{A_0}^{-1}(\mathscr{R}')$ s'obtient en choisissant l'un des $(k-1)$ blocs de $\mathscr{R}'$, en le bordant par x, et en adjoignant au système ainsi obtenu les deux blocs A_0 et $A_0\cup\{x\}$. Donc, en posant $|A_0|=u$, $1\leqq u\leqq n$,

$$|\mathbf{e}(A_0)| = \sum_{\mathscr{R}'\in \mathbf{c}(E\setminus A_0,\, k-1)} |\varepsilon_{A_0}^{-1}(\mathscr{R}')| = (k-1)\cdot c(n-u,k-1),$$

c'est-à-dire:

$$|\mathbf{e}| = \sum_{A_0\in\mathscr{P}'(E)} |\mathbf{e}(A_0)| = \sum_{1\leqq u\leqq n}\ \sum_{|A_0|=u} |\mathbf{e}(A_0)| = \sum_{1\leqq u\leqq n} \binom{n}{u}\cdot(k-1)\cdot c(n-u,k-1).$$

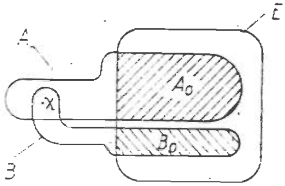

Abb. 4

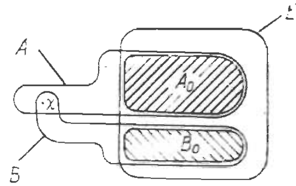

Abb. 5

(VI) *Calcul de* $|\mathbf{f}|$. On a encore $A_0(\mathscr{R})\cap B_0(\mathscr{R})=\emptyset$. Pour $A_0\subset E$, $B_0\subset E$, $A_0\neq\emptyset$, $B_0\neq\emptyset$, $A_0\cap B_0=\emptyset$, la paire (A_0, B_0) n'étant pas ordonnée, soit $\mathbf{f}(A_0, B_0)$ l'ensemble des $\mathscr{R}\in\mathbf{f}$ tels que $A_0(\mathscr{R})=A_0$ et $B_0(\mathscr{R})=B_0$ (alors $A_0, B_0\in\mathscr{R}$). Définissons sur $\mathbf{f}(A_0, B_0)$ la fonction φ_{A_0,B_0} à valeurs dans $\mathbf{c}(E\setminus(A_0\cup B_0), k-3)$ par:

$$\varphi_{A_0,B_0}(\mathscr{R}) \equiv \text{trace de } \mathscr{R} \text{ sur } E\setminus(A_0\cup B_0) = \dots$$

On voit aisément que $|\varphi^{-1}_{A_0,B_0}(\mathscr{R}')|=1$, donc que $|\mathbf{f}(A_0, B_0)| = c(n-v,k-3)$ où l'on a posé: $v\equiv|A_0|+|B_0|$; il s'ensuit, après un calcul facile:

$$|\mathbf{f}| = \sum_{\substack{A_0,\, B_0\in\mathscr{P}'(E)\\ (A_0,B_0)\text{ non ordonné; } A_0\cap B_0\neq\emptyset}} c(n-v,k-3) = \sum_{1\leqq v\leqq n}(2^{v-1}-1)\cdot\binom{n}{v}\cdot c(n-v,k-3)$$

(VII) *Récapitulation.* (7) entraîne

$$c(n+1,k+1) = kc(n,k)+\frac{k(k+1)}{2}\cdot c(n,k+1)+$$
$$+\sum_{1\leqq u\leqq n}\binom{n}{u}\{(k-1)\cdot c(n-u,k-1)+c(n-u,k-2)\}+$$
$$+\sum_{1\leqq v\leqq n}(2^{v-1}-1)\binom{n}{v}\cdot c(n-v,k-3),$$

ou encore, en réunissant les deux Σ en un seul:

PROPOSITION 4. *Le nombre $c(n, k)$ de k-birecouvrements de E, $|E|=n\geqq 1$ satisfait la relation de récurrence suivante, où $k\geqq 3$:*

$$\begin{aligned} c(n+1, k+1) &= kc(n,k)+\frac{k(k+1)}{2}\cdot c(n,k+1)+ \\ &+\sum_{0\leqq v\leqq n-1}\binom{n}{v}\{(k-1)\cdot c(v,k-1)+c(v,k-2)+(2^{n-v-1}-1)\cdot c(v,k-3)\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Observons enfin que la méthode employée permet aussi, de proche en proche, *l'énumération* des systèmes $\mathscr{R}\in \mathfrak{c}(E, k)$.

4. Valeurs de $c(n, k)$

Soit $k(n)$ le plus grand entier k tel que $c(n, k)\neq 0$; montrons que $k(n)=[\frac{3}{2}n]$, ou $[z]$ désigne le plus grand entier $\leqq z$. Celà revient à prouver que pour tout bi-recouvrement $\mathscr{R}$ de E, $|E|=n$, on a $|\mathscr{R}|\leqq\frac{3}{2}n$, et qu'il existe un birecouvrement ayant $[\frac{3}{2}n]$ blocs. Pour celà, associons à tout $\mathscr{R}\in\mathfrak{c}(E)$ et tout entier $h\geqq 0$, le système $\mathscr{R}_h$:

$$\mathscr{R}_h\equiv\{R|R\in\mathscr{R}, |R|=h\}.$$

Utilisant les deux égalités suivantes (la seconde provient de ce que chaque $x\in E$ est deux fois recouvert par $\mathscr{R}$):

$$|\mathscr{R}|=\sum_{h\geqq 1}|\mathscr{R}_h|,\quad 2n=\sum_{R\in\mathscr{R}}|R|,$$

il vient:

$$\begin{aligned} 2n=\sum_{R\in\mathscr{R}}|R| &= \sum_{h\geqq 1}\sum_{R\in\mathscr{R}_h}|R|=\sum_{h\geqq 1}h|\mathscr{R}_h|\geqq|\mathscr{R}_1|+2\sum_{h\geqq 2}|\mathscr{R}_h|= \\ &= |\mathscr{R}_1|+2(|\mathscr{R}|-|\mathscr{R}_1|)=2|\mathscr{R}|-|\mathscr{R}_1|; \end{aligned}$$

donc, puisque $|\mathscr{R}_1|\leqq n$:

$$2|\mathscr{R}|\leqq 2n+|\mathscr{R}_1|\leqq 3n,\qquad \text{q.e.d.}$$

La valeur $\left[\dfrac{3n}{2}\right]$ est atteinte par $|\mathscr{R}|$: il suffit pour celà d'envisager, pour $E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, le recouvrement $\mathscr{R}_0$ suivant, défini par ses blocs:

$$\mathscr{R}_0\equiv\begin{cases}\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_n\};\ \{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\},\ldots,\{x_{n-1},x_n\} & \text{si } n \text{ est pair,}\\ \qquad d^\circ \qquad ;\ \{x_1,x_2\},\ldots,\{x_{n-4},x_{n-3}\},\ \{x_{n-2},x_{n-1},x_n\} & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

De ce résultat se déduit sans peine que $n(k)$, plus petit entiern tel que $c(n,k)\neq 0$, vaut $\lfloor\frac{2}{3}k\rfloor$, où $\lfloor z\rfloor$ désigne le plus petit entier $\geqq z$. Révélons les valeurs de $c(n,k)$ et celles de $c(n)=\sum_{k\geqq 3}c(n,k)$, $2\leqq n\leqq 7$ (voir page 145).

Enfin, la formule (8) fournit facilement:

$$c(n,3)=(1/2)(3^{n-1}-1);\quad c(n,4)=(1/2)(3^{n-1}-1)(2^{n-2}-1);$$
$$c(2v, 3v)=(2v-1)!!$$

2718

$n \backslash k$	3	4	5	6	7	8	9	10...	$c(n)$
2	1								1
3	4	4							8
4	13	39	25	3					80
5	40	280	472	256	40				1088
6	121	1815	6185	7255	3306	535	15		19232
7	364	11284	70700	149660	131876	51640	8456	420	424400
⋮									

5. Calcul des nombres $v(n, k)$ de k-birevêtements de E, $|E| = n$, par le théoreme de Pólya—De Bruijn

(1) et (8) permettent le calcul de proche en proche des $v(n, k)$ à partir des $c(n, k)$. Nous allons cependant établir une formule donnant $v(n, k)$ sous forme compacte; nous aurons par là un procédé de vérification des valeurs de $c(n, k)$ déjà trouvées; de plus cette formule sera utilisée ultérieurement pour l'estimation de $c(n)$; enfin, elle fournira parmi tant d'autres un exemple d'application du grand théorème de Pólya—De Bruijn, que nous commençons par rappeler ([4] p. 162 et [5]):

Théorème de Pólya—De Bruijn. *Soient deux ensembles finis D et R; G (resp. H) un groupe de permutations de D (resp. de R); $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de D dans R; $\hat{\mathcal{F}}$ l'ensemble quotient de $\mathcal{F}$ par la relation d'équivalence:*

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists g \in G, \ \exists h \in H \quad \text{telles que} \quad f_1 g = h f_2.$$

Soit W une application qui á toute $f \in \mathcal{F}$ associe un entier $W(f)$ — le poids de f — et telle que:

(9)
$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow W(f_1) = W(f_2),$$

ce qui légitime la définition du poids $W(F)$ d'une classe d'équivalence (ou modèle) $F \in \hat{\mathcal{F}}$ par:

$$W(F) \equiv W(f), \quad f \in F.$$

Soit aussi $i(g, h)$ la somme des poids des fonctions $f \in \mathcal{F}$ telles que $fg = hf$, ce que l'on note:

(10)
$$i(g, h) \equiv \sum_{f}^{(g,h)} W(f).$$

De toutes ces hypothèses s'ensuit que l'„inventaire" des modèles vaut:

(11)
$$I(\hat{\mathcal{F}}) \equiv \sum_{F \in \hat{\mathcal{F}}} W(F) = \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G, h \in H} i(g, h).$$

Spécialisons ce théorème de De Bruijn au problème qui nous préoccupe. Soit $D \equiv \{a_1, a_1', a_2, a_2', \ldots, \ldots, a_n, a_n'\}$ un ensemble à $2n$ éléments associés 2 à 2, a_i et

a_i' étant dits *homologues* ($1 \leqq i \leqq n$); soit G le groupe des permutations de D engendré par les n transpositions $(a_i a_i')$, $1 \leqq i \leqq n$; donc $|G| = 2^n$; soit $R \equiv \{1, 2, \dots, k\}$; soit enfin H le groupe symétrique de R; donc $|H| = k!$. Il apparaît que la donnée de $F \in \hat{\mathscr{F}}$ équivaut à la donnée d'un agrégat de $E \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ayant *au plus k blocs*, et *au plus birecouvrant*, en ce sens que chaque a_i, $1 \leqq i \leqq n$ appartient à 1 ou 2 blocs; en effet, la donnée de $f \in \mathscr{F}$ définit un ensemble ordonné de blocs de D: $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(k)$ en nombre $\leqq k$, puisque certains $f^{-1}(i)$ peuvent être vides; le groupe G identifie a_1 et a_1', a_2 et a_2', ... donc transforme les blocs précédents en blocs de E, et le groupe H efface le numérotage de ces blocs. Introduisons la condition:

$$f(a_i) \neq f(a_i'), \quad 1 \leqq i \leqq n, \tag{12}$$

et définissons le poids $W(f)$ comme étant égal à 1 si f satisfait cette condition (12) et à 0 dans le cas contraire. (On voit sans trop d'effort que W satisfait la condition (9)). Alors l'inventaire des modèles $I(\hat{\mathscr{F}}) = \Sigma\, W(F)$ vaut le nombre des birevêtements de E, ayant au plus k blocs, puisque tout agrégat défini par F et qui ne recouvre pas deux fois chaque $a_i \in E$ a une participation nulle dans l'inventaire: c'est le mérite de la définition de W. En d'autres termes, posant:

$$\bar{v}(n, k) \equiv v(n, 1) + v(n, 2) + \dots + v(n, k),$$

on a, d'après le théorème de PÓLYA—DE BRUIJN:

$$I(\hat{\mathscr{F}}) = \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G,\, h \in H} i(g, h) = \bar{v}(n, k). \tag{13}$$

Passons maintenant au calcul effectif de $i(g, h)$ pour $g \in G$, $h \in H$. Supposons que g est du type $(1^{2s} 2^t)$, $2s + 2t = |D| = 2n$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, et que g est du type $(1^{c_1} 2^{c_2} 3^{c_3} \dots)$, $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots = k$ ([3], p. 67); compte tenu de (10), (12), $i(g, h)$ est exactement le nombre des $f \in \mathscr{F}$ telles que, pour tout $d \in D$, on ait $fg(d) = hf(d)$ et $f(a_i) \neq f(a_i')$, $1 \leqq i \leqq n$. Or deux cas peuvent se présenter pour d:

(1°) d appartient à un 1-cycle de g: $g(d) = d$, et la condition $fg(d) = hf(d)$ implique que $f(d) = hf(d)$, ce qui prouve que $f(d)$ appartient lui aussi à un 1-cycle de h; par ailleurs, la condition (12) exige que, pour l'homologue d' de d, on ait $f(d) \neq f(d')$; en conséquence, l'image de tout couple (d, d') de points homologues invariants est un couple ordonné de 2 points (distincts) appartenant l'un et l'autre aux 1-cycles de h.

(2°) d appartient à un 2-cycle de h: $g(d) \neq d$, $g^2(d) = d$, et la condition $fg(d) = hf(d)$ combinée avec (12) implique que $hf(d) \neq f(d)$; par ailleurs $h^2 f(d) = h(hf)d = (hf)g(d) = fg^2(d) = f(d)$, ce qui prouve que $f(d)$ appartient à un 2-cycle de h.

Réciproquement, on voit facilement que toute fonction f transformant les 1-cycles de g en des 1-cycles de h avec la condition $f(d) \neq f(d')$, et transformant les 2-cycles de g en des 2-cycles de h, satisfait les conditions $fg = hf$ et $f(a_i) \neq f(a_i')$, $1 \leqq i \leqq n$. Compte tenu de l'ordre à choisir sur les 2-cycles de h, et de la condition exprimée à la fin du (1°) ci-dessus, le nombre des choix pour f est:

$$i(g, h) = \{c_1(c_1 - 1)\}^s \{2c_2\}^t.$$

Ainsi, d'après (13) et [3], p. 67:

$$\bar{v}(n,k) = \frac{1}{2^n \cdot k!} \sum_{\substack{g \in G \\ h \in H}} \{c_1(c_1-1)\}^s \{2c_2\}^t =$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot k!} \sum_{h \in H} \sum_{s+t=n} \binom{n}{s} \{c_1(c_1-1)\}^s \{2c_2\}^t = \frac{1}{2^n \cdot k!} \sum_{h \in H} \{c_1(c_1-1)+2c_2\}^n =$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot k!} \sum_{c_1+2c_2+\ldots+kc_k=k} \{c_1(c_1-1)+2c_2\}^n \frac{k!}{1^{c_1} c_1!\, 2^{c_2} c_2! \ldots k^{c_k} c_k!} =$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot k!} \sum_{c_1+2c_2+\nu=k} \frac{x_\nu}{\nu!} \frac{\{c_1(c_1-1)+2c_2\}^n}{c_1!\, 2^{c_2} c_2!},$$

où l'on a posé

$$x_\nu \equiv \sum_{3c_3+4c_4+\ldots=k} \frac{\nu!}{3^{c_3} c_3!\, 4^{c_4} c_4! \ldots}.$$

x_ν est précisément égal au nombre de permutations sans 1-cycle ni 2-cycle d'un ensemble à ν éléments. En utilisant [3], p. 70, on trouve facilement que:

$$\sum_{\nu \geqq 0} x_\nu \frac{t^\nu}{\nu!} = (1-t)^{-1} \exp\left\{-t-\frac{t^2}{2}\right\}; \tag{14}$$

d'où une formule compacte pour $\bar{v}(n,k)$:

$$\bar{v}(n,k) = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqq \nu \leqq k} \left\{ \frac{x_\nu}{\nu!} \sum_{c_1+2c_2=k-\nu} \frac{\{c_1(c_1-1)+2c_2\}^n}{2^{c_2} c_1!\, c_2!} \right\}, \tag{15}$$

les x_ν étant fournis par (14).

Il s'en déduit une formule pour $v(n,k) = \bar{v}(n,k) - \bar{v}(n,k-1)$ après quelques manipulations simples:

PROPOSITION 5. *Le nombre $v(n,k)$ des k-birevêtements de E, $|E| = n \geqq 0$, est donné par la formule suivante, où $k \geqq 0$:*

$$v(n,k) = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqq \nu \leqq k} \left\{ \frac{y_\nu}{\nu!} \sum_{c_1+2c_2=k-\nu} \frac{\{c_1(c_1-1)+2c_2\}^n}{2^{c_2} c_1!\, c_2!} \right\},$$

avec

$$\sum_{\nu \geqq 0} y_\nu \frac{t^\nu}{\nu!} = \exp\left(-t-\frac{t^2}{2}\right).$$

Livrons les valeurs de $v(n,k)$ et celles de $v(n) = \sum_k v(n,k)$, $1 \leqq n \leqq 7$: 2719.

$n \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14...	$v(n)$
1	1													1
2	1	1	1											3
3	1	4	7	3	1									16
4	1	13	46	47	25	6	1							139
5	1	40	295	587	516	235	65	10	1					1750
6	1	121	1846	6715	9690	7053	3006	800	140	15	1			29388
7	2	364	11347	72003	170051	189458	118231	46795	12201	2170	266	21	1	623909

6. Estimations de $c(n)$ et $v(n)$

Il est clair que:

(16) $$c(n, k) \leqq v(n, k); \quad c(n) \leqq v(n) \qquad (n, k \geqq 0).$$

Etablissons d'abord une minoration de $c(n)$. La formule (8) montre que:

$$c(n, k) \geqq \frac{k(k-1)}{2} c(n-1, k)$$

$$\text{-------------------------}$$

$$c(n(k)+1, 1) \geqq \frac{k(k-1)}{2} c(n(k), k), \quad n \geqq 2, \; n \geqq n(k), \; k \geqq 3,$$

où $n(k)$ désigne le plus petit entier n tel que $c(n, k) \neq 0$, donc $\geqq 1$: d'après le paragraphe 4, $n(k) = \left\lfloor \frac{2}{3} k \right\rfloor$.

Multiplions membre à membre les $(n-n(k))$ inégalités ci-dessus; il vient

$$c(n, k) \geqq \left\{\frac{k(k-1)}{2}\right\}^{n-n(k)} \geqq \left\{\frac{k(k-1)}{2}\right\}^{n-\frac{2}{3}k-1} \equiv \gamma(n, k)$$

$$c(n) = \sum_{3 \leqq k \leqq \left[\frac{3}{2} n\right]} c(n, k) \geqq \sum_{\cdots} \gamma(n, k) \geqq \gamma(n, k_n),$$

où $k_n \equiv \left[\dfrac{3n}{2 \log n}\right]$ est proche de l'abcisse du maximum de la fonction $\gamma(n, t)$ de la variable t. On trouve, après un calcul facile que

$$\log \gamma(n, k_n) = (2n \log n)(1+o[1]);$$

donc

(17) $$\log c(n) \geqq (2n \log n)(1+o[1]) \qquad (n \to \infty).$$

Etablissons maintenant une majoration de $v(n)$. Tout birevêtement ayant au plus $2n$ blocs, on aura

$$v(n) = \bar{v}(n, 2n),$$

donc, d'après (15):

$$v(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqq v \leqq 2n} \left\{\frac{x_v}{v!} \sum_{c_1+2c_2=2n-v} \frac{(c_1(c_1-1)+2c_2)^n}{2^{c_2} c_1! \, c_2!}\right\}$$

Posons

$$\mu \equiv 2n - v \quad \text{et} \quad \frac{h_\mu}{\mu!} \equiv \sum_{c_1+2c_2=\mu} \frac{1}{2^{c_2} c_1! \, c_2!}.$$

Un calcul simple prouve que

(18) $$(1^\circ) \max_{c_1+2c_2=\mu} \{c_1(c_1-1)+2c_2\} \leqq \mu^2; \quad (2^\circ) \sum_{\mu \geqq 0} h_\mu \frac{t^\mu}{\mu!} = \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right).$$

En conséquence:

$$v(n) \leqq \frac{1}{2^n} \sum_{\mu+v=2n} \frac{x_v h_\mu}{v! \, \mu!} \cdot \mu^{2n} \leqq \frac{(2n)^{2n}}{2^n} \sum_{\mu+v=2n} \frac{x_v}{v!} \cdot \frac{h_\mu}{\mu!}.$$

Le dernier Σ est égal (voir (14), (18)) au coefficient de t^{2n} dans $(1-t)^{-1}$, soit 1; donc

$$v(n) \leqq 2^n \cdot n^{2n};$$

d'où résulte, d'après (16):

(19) $$\log c(n) \leqq \log v(n) \leqq (2n \log n)(1+o[1]) \qquad (n\to\infty).$$

(17) et (19) impliquent en définitive:

PROPOSITION 6. *Le nombre $c(n)$ de birecouvrements de E et le nombre $v(n)$ de birevêtements de E, $|E|=n$, sont tels que:*

(20) $$\log c(n) \sim \log v(n) \sim 2n \log n \qquad (n\to\infty).$$

7. Fonctions génératrices des $c(n)$ et $v(n)$

(I) *Recouvrement $\varrho(\mathscr{S})$ associé à un birecouvrement $\mathscr{S}$; les nombres $c(n, k, a)$.*
Soit $\mathscr{S}$ un birecouvrement de E, $|E|=n$, ayant k blocs $(\mathscr{S}\in \mathrm{c}(E, k))$ que nous numérotons de 1 à k; $\mathscr{S}$ est ainsi transformé en un birecouvrement ordonné que nous désignons par $\bar{\mathscr{S}}$:

$$\bar{\mathscr{S}} \equiv \{S_1, S_2, \dots, S_k\}.$$

Associons à $\mathscr{S}$ la partition $\pi(\mathscr{S})$ de E dont les blocs sont les classes de l'équivalence $\alpha_{\mathscr{S}}$ sur E, définie pour $x, x'\in E$ par:

$$x \overset{\alpha}{\approx} x' \Leftrightarrow x'\in\alpha_{\mathscr{S}}(x) \equiv \Big(\bigcap_{x\in M\in\mathscr{S}} M\Big) \cap \Big(\bigcap_{x\notin N\in\mathscr{S}} (E\backslash N)\Big).$$

Appelons *atome* chaque bloc de $\pi(\mathscr{S})$ et supposons qu'il y en ait le nombre a:

$$1 \leqq a = |\pi(\mathscr{S})| \leqq n.$$

Soit aussi K l'ensemble des k premiers nombres entiers:

$$K \equiv \{1, 2, \dots, k\}:$$

Nous pouvons maintenant associer au système ordonné $\bar{\mathscr{S}}$ de E un certain système (non ordonné) $\varrho(\bar{\mathscr{S}})$ de K, constitué uniquement des *paires* (i.e. blocs à 2 éléments) définies ainsi:

i et j appartiennent à une paire de $\varrho(\bar{\mathscr{S}})$ $(i\neq j) \Leftrightarrow S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

Ce nouveau système $\varrho(\bar{\mathscr{S}})$ de K a les 3 propriétés suivantes:

(1) $\varrho(\bar{\mathscr{S}})$ est un recouvrement en paires de K: ceci résulte de ce que $\mathscr{S}$ est un birecouvrement de E.

(2) Il y a correspondance biunivoque entre les paires qui constituent $\varrho(\bar{\mathscr{S}})$ et les atomes de $\pi(\mathscr{S})$; donc $|\varrho(\bar{\mathscr{S}})| = |\pi(\mathscr{S})| = a$.

(3) Aucune paire n'est isolée en ce sens que toute paire en rencontre au moins une autre: ceci résulte de ce que tous les blocs du birecouvrement $\mathscr{S}$ sont distincts.

Observons d'ailleurs que $\varrho(\overline{\mathscr{S}})$ pourrait être considérée comme un graphe de K.

Soit $\mathbf{r}(K, a)$ l'ensemble des recouvrements $\mathscr{R}$ de K ayant les 3 propriétés ci-dessus, et soit $r(k, a) = |\mathbf{r}(K, a)|$. Tout $\mathscr{R} \in \mathbf{r}(K, a)$ est l'image d'un nombre de k-birecouvrements $\mathscr{S} \in \mathbf{c}(E, k)$ égal à:

$$c(n, k, a) \equiv \frac{1}{k!} \cdot S(n, a) \cdot r(k, a) \cdot a!\,; \tag{21}$$

en effet, il y a $S(n, a)$ choix possibles pour la partition $\pi(\mathscr{S})$, puis $r(k, a)$ choix pour le recouvrement $\mathscr{R} = \varrho(\overline{\mathscr{S}}) \in \mathbf{r}(K, a)$ de K, et $a!$ choix pour la bijection entre $\pi(\mathscr{S})$ et $\varrho(\overline{\mathscr{S}})$; enfin le terme $1/k!$ provient de l'effacement du numérotage des blocs de $\mathscr{S}$. En définitive, les choix précédents étant indépendants, *le nombre $c(n, k, a)$ des k-birecouvrements de E, ayant a atomes*, $|E| = n$, vaut bien la valeur indiquée en (21). En faisant une convention analogue à celle du paragraphe 2, il en résulte que:

$$c(n, k) = \sum_{a \geqq 0} c(n, k, a) = \sum_{a \geqq 0} \frac{a!}{k!} S(n, a) \cdot r(k, a)$$

(II) *Calcul de* $r(k, a)$. Désignons par $\mathbf{r}'(K, a)$ l'ensemble des recouvrements de K avec a paires non nécessairement isolées, et posons $r'(k, a) \equiv |\mathbf{r}'(K, a)|$, $|K| = k$. Ce nombre $r'(k, a)$ se calcule facilement par la méthode que nous avons donnée en [6]; on trouve:

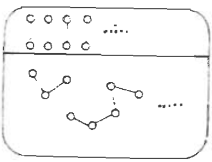

Abb. 6

$$r'(k, a) = \sum_{0 \leqq s \leqq k} (-1)^{k-s} \cdot \left(\begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} \atop a\right) \binom{k}{s}, \qquad k, a \geqq 0. \tag{22}$$

Dans ces conditions, pour $\mathscr{R}' \in \mathbf{r}'(K, a)$, posons $P \equiv \bigcup_{M \in \mathscr{R}'} M$, les paires M étant toutes *isolées*, $p \equiv |P|$, et $Q \equiv \bigcup_{N \in \mathscr{R}'} N$, aucune des paires N n'étant isolées, $q \equiv |Q|$. Un calcul facile prouve que:

$$r'(k, a) = \sum_{\substack{2p+q=k \\ p+r=a}} \frac{k!}{2^p \cdot p!\, q!} r(q, r), \qquad k, a \geqq 0$$

où les $r(q, r)$ ont été définis dans le paragraphe (7. (I)).

Inversant cette formule par les techniques habituelles de fonction génératrice, et compte tenu de (22), il vient:

$$\begin{aligned} r(k, a) &= \sum_{\substack{2p+q=k \\ p+r=a}} (-1)^p \cdot \frac{k!}{2^p \cdot p!\, q!} r'(q, r) = \\ &= k! \cdot \sum_{\substack{2p+q=k \\ p+r=a \\ 0 \leqq s \leqq k}} \frac{(-1)^{p+q-s}}{2^p \cdot p!\, q!} \cdot \binom{q}{s} \cdot \left(\begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} \atop r\right), \qquad k, a \geqq 0. \end{aligned} \tag{23}$$

(21) et (23) impliquent finalement:

$$c(n,k,a) = \sum_{\substack{2p+q=k \\ p+r=a \\ 0\leqq s\leqq k}} a!\,S(n,a)\frac{(-1)^{p+q-s}}{2^p\cdot p!\,q!}\cdot\begin{pmatrix} q \\ s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2\end{pmatrix} \\ r\end{pmatrix} \qquad n,k,a\geqq 0. \tag{24}$$

(III) *Valeur de la fonction génératrice $\Gamma(x, y, z)$ des $c(n, k, a)$.* Posons

$$\Gamma(x,y,z) \equiv \sum_{n,k,a\geqq 0} c(n,k,a)\cdot x^a\cdot y^k\cdot\frac{z^n}{n!}. \tag{25}$$

On a successivement, d'après (24), et en prenant pour nouvelle variable de sommation $t\equiv q-s$, p, r, s, n, (auquel cas $a=p+r$, $q=s+t$, $k=2p+s+t$):

$$\Gamma(x,y,z) = \sum_{\substack{n,k,a\geqq 0 \\ 2p+q=k,\ p+r=a,\ 0\leqq s\leqq q}} a!\,S(n,a)\frac{(-1)^{p+q+s}}{2^p\cdot p!\,q!}\cdot\begin{pmatrix} q \\ s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2\end{pmatrix} \\ r\end{pmatrix}\cdot x^a y^k\cdot\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{p,r,s,t,n\geqq 0}(p+r)!\,S(n,p+r)\frac{(-1)^{p+t}}{2^p\cdot p!\,s!\,t!}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2\end{pmatrix} \\ r\end{pmatrix}\cdot x^{p+r}y^{2p+s+t}\cdot\frac{z^n}{n!} =$$

$$= e^{-y}\sum_{p,r,s\geqq 0}\left\{\frac{(-1)^p}{2^p\cdot p!\,s!}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2\end{pmatrix} \\ r\end{pmatrix} y^{2p+s}x^{p+r}\sum_{n\geqq 0}(p+r)!\,S(n,p+r)\frac{z^n}{n!}\right\}.$$

Le dernier Σ vaut, d'après (4), $(e^z-1)^{p+r}$, d'où

$$\Gamma(x,y,z) = e^{-y}\sum_{p,r,s\geqq 0}\frac{1}{p!\,s!}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2\end{pmatrix} \\ r\end{pmatrix}\cdot\left\{-\frac{xy^2}{2}(e^z-1)\right\}^p\{x(e^z-1)\}^r\cdot y^s =$$

$$= e^{-y}\cdot\exp\left\{-\frac{xy^2}{2}(e^z-1)\right\}\sum_{s\geqq 0}\left\{\frac{y^s}{s!}\sum_{r\geqq 0}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2\end{pmatrix} \\ r\end{pmatrix}\{x(e^z-1)\}^r\right\}.$$

Donc formellement:

$$\Gamma(x,y,z) = \sum_{n,k,a\geqq 0} c(n,k,a)x^a y^k\frac{z^n}{n!} = \tag{26}$$

$$= \exp\left\{-y-\frac{xy^2}{2}(e^z-1)\right\}\sum_{s\geqq 0}\frac{y^s}{s!}\{1+x(e^z-1)\}^{\frac{s(s-1)}{2}}.$$

(IV) *Valeur des fonctions génératrices des $c(n, k)$, $v(n, k)$, $c(n)$, $v(n)$.* Compte tenu de ce que $c(n, k) = \sum_{a \geqq 0} c(n, k, a)$, il vient, d'après (3), (5) et (25):

$$C(y, z) = \sum_{n, k \geqq 0} c(n, k) \cdot y^k \frac{z^n}{n!} = \sum_{n, k, a > 0} c(n, k, a) \cdot y^k \frac{z^n}{n!} = \Gamma(1, y, z)$$

$$V(y, z) = \sum_{n, k \geqq 0} v(n, k) y^k \frac{z^n}{n!} = \exp\{y^2(e^z - 1)\} \cdot \Gamma(1, y, z)$$

Introduisons les fonctions génératrices $\mathscr{C}(z)$ et $\mathscr{V}(z)$ des $c(n)$ et $v(n)$:

$$\mathscr{C}(z) \equiv \sum_{n \geqq 0} c(n) \cdot \frac{z^n}{n!}; \qquad \mathscr{V}(z) \equiv \sum_{n \geqq 0} v(n) \frac{z^n}{n!}.$$

Compte tenu de $c(n) = \sum_{k \geqq 0} c(n, k)$ et de $v(n) = \sum_{k \geqq 0} v(n, k)$, il vient:

$$\mathscr{C}(z) = \sum_{n, k \geqq 0} c(n, k) \frac{z^n}{n!} = C(1, z) = \Gamma(1, 1, z)$$

$$\mathscr{V}(z) = \sum_{n, k \geqq 0} v(n, k) \frac{z^n}{n!} = V(1, z) = \exp(e^z - 1) \cdot \Gamma(1, 1, z) = \exp(e^z - 1) \cdot \mathscr{C}(z).$$

Donc, par utilisation de (26):

PROPOSITION 7. *Les fonctions $C(y, z)$, $V(y, z)$, $\mathscr{C}(z)$, $\mathscr{V}(z)$, génératrices respectivement des nombres $c(n, k)$, $v(n, k)$, $c(n)$, $v(n)$, satisfont les identités formelles suivantes:*

$$C(y, z) = \sum_{n, k \geqq 0} c(n, k) \cdot y^k \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{-y - \frac{y^2}{2}(e^z - 1)\right\} \sum_{s \geqq 0} \frac{y^s}{s!} \cdot \exp\left\{\frac{s(s-1)}{2} z\right\}$$

$$V(y, z) = \sum_{n, k \geqq 0} v(n, k) \cdot y^k \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{-y + \frac{y^2}{2}(e^z - 1)\right\} \sum_{s \geqq 0} \frac{y^s}{s!} \cdot \exp\left\{\frac{s(s-1)}{2} z\right\}$$

$$\mathscr{C}(z) = \sum_{n \geqq 0} c(n) \cdot \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{-1 - \frac{1}{2}(e^z - 1)\right\} \sum_{s \geqq 0} \frac{1}{s!} \exp\left\{\frac{s(s-1)}{2} z\right\}$$

$$\mathscr{V}(z) = \sum_{n \geqq 0} v(n) \cdot \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{-1 + \frac{1}{2}(e^z - 1)\right\} \sum_{s \geqq 0} \frac{1}{s!} \exp\left\{\frac{s(s-1)}{2} z\right\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROTA, G. C.: The number of partitions of a set, *Amer. Math. Monthly* **71** (1964) 498—504.
[2] DE BRUIJN, N. G.: *Asymptotic Method in Analysis*, 2ème éd. North Holland, Amsterdam, 1961.
[3] RIORDAN, J.: *An introduction to combinatorial Analysis*, John Wiley, N. Y. 1958.
[4] DE BRUIJN, N. G.: *Pólya's theory of counting*, in "Applied Combinatorial Mathematics", John Wiley 1964.
[5] DE BRUIJN, N. G.: Generalization of Pólya's fundamental theorem, *Indag. Math.* **21** (1959) 59—69.
[6] COMTET, L.: Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini, *C. R. Acad. Sci. Paris* **262** (1966) 1091—1094.

Faculté des Sciences d'Orsay, Département des Mathématiques, France

(Reçu le 10 février 1967.)