to be entd

[R ~~160~~ 265 160 67] → 2578 2579

GÉOMÉTRIE DES NOMBRES. — *Deux corollaires de la loi de réciprocité du polyèdre rationnel.* Note (*) de M. EUGÈNE EHRHART, présentée par M. René Garnier.

MR # 1393 1968

Les dénombrants i_n, j_n d'un polyèdre rationnel à k dimensions vérifient une même relation de récurrence linéaire. La relation relative à j_n, par exemple, subsiste si l'on descend aux indices négatifs, en convenant que $j_{-r} = (-1)^k i_r$. On en déduit qu'une même fraction génératrice donne les j_n ou les i_n, suivant qu'on la développe en puissances croissantes ou décroissantes.

Dans une Note récente (1), dont je conserve ici les notations, on a vu que j_n et i_n ont des fractions génératrices de la forme

$$\frac{f(t)}{\pi(t)} = \sum_0^{\infty} j_n t^n, \qquad \frac{g(t)}{\pi(t)} = \sum_1^{\infty} i_n t^n,$$

où

$$\pi(t) = \prod_{i=1}^{s} (1 - t^{\alpha_i}) = 1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_s t^s.$$

Les entiers positifs α_i sont les dénominateurs des sommets du polyèdre; le degré du polynome $g(t)$ est s, celui de $f(t)$ est au plus $s-1$.

On en déduit facilement que j_n (et i_n) vérifient la relation de récurrence

$$j_n + \alpha_1 j_{n-1} + \alpha_2 j_{n-2} + \ldots + \alpha_s j_{n-s} = 0, \tag{1}$$

que nous écrivons $\{\pi(j)\} = 0$.

THÉORÈME 1. — *Soit $\pi(t)$ le produit caractéristique d'un polyèdre rationnel k-dimensionnel. La relation de récurrence linéaire $\{\pi(j)\} = 0$ vérifiée par son dénombrant j_n subsiste si l'on descend aux indices négatifs, en convenant que $j_{-r} = (-1)^k i_r$. De même pour $\{\pi(i)\} = 0$ avec $i_{-r} = (-1)^k j_r$.*

En effet (1), identité en n, subsiste si n est inférieur à s (2); or d'après la loi de réciprocité (1), $j_{-r} = (-1)^k i_r$.

Remarque. — Il suffit donc de compter $j_1, j_2, \ldots, j_s$; on prend $j_0 = 1$ par convention pour pouvoir calculer par récurrence seulement tout j_n, mais aussi tout i_n.

THÉORÈME 2. — *Pour tout polyèdre rationnel normal à k dimensions la même fraction génératrice fournit les j_n ou les i_n, suivant qu'on effectue la division par puissances croissantes ou décroissantes :*

$$F(t) = \sum_0^{\infty} j_n t^n = (-1)^{k+1} \sum_1^{\infty} i_n t^{-n} \quad (*); \tag{2}$$

réciproquement

$$G(t) = \sum_1^{\infty} i_n t^n = (-1)^{k+1} \sum_0^{\infty} j_n t^{-n}. \tag{3}$$

Les relations (2) *et* (3) *s'échangent évidemment, si l'on remplace* t *par* $1/t$.

Démontrons ce théorème en supposant que $\pi(t)$ soit, par exemple, de degré 3 :

$$\pi(t) = 1 + at + bt^2 + ct^3.$$

On a donc, en tenant compte de $j_n + aj_{n-1} + bj_{n-2} + cj_{n-3} = 0$,

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + at + bt^2 + ct^3)(j_0 + j_1 t + j_2 t^2 + \ldots + j_n t^n + \ldots) \\ &= j_0 + (j_1 + aj_0)t + (j_2 + aj_1 + bj_0)t^2. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathrm{F}(t) = -\frac{f(t)}{\pi(t)} = -\frac{(j_2 + aj_1 + bj_0)t^2 + (j_1 + aj_0)t + j_0}{ct^3 + bt^2 + at + 1}.$$

Le coefficient de t^{-1} dans ce quotient Q par puissances décroissantes est

$$\frac{j_2 + aj_1 + bj_0}{c} = -j_{-1} = (-1)^k i_1, \quad \text{car } j_2 + aj_1 + bj_0 + cj_{-1} = 0 \text{ d'après } \pi(j) = 0.$$

Le premier terme de $\mathrm{F}(t)$, développé en puissances de t^{-1}, est donc bien $(-1)^{k+1} i_1 t^{-1}$. Le coefficient de t^{-2} dans Q est

$$\frac{j_1 + aj_0 + bj_{-1}}{c} = -j_{-2} = (-1)^k i_2,$$

de sorte que le second terme de $\mathrm{F}(t)$ est $(-1)^{k+1} i_2 t^{-2}$, et ainsi de suite.

Exemple. — Pour le quadrilatère (0, 0) (1, 0) (1/2, 1/3) (0, 1) (où l'on peut simplifier la fraction génératrice par $1 - t$)

$$\frac{t^5 + t^4 + t^3 + t + 1}{(1-t)^2(1-t^6)} = \sum_0^{\infty} j_n t^n = (-1)\sum_1^{\infty} i_n t^{-n},$$

qui donne, en remplaçant t par $1/t$,

$$\frac{t^8 + t^7 + t^5 + t^4 + t^3}{(1-t)^2(1-t^6)} = \sum_0^{\infty} i_n t^n = (-1)\sum_0^{\infty} j_n t^{-n}.$$

Pour n de 1 à 10, par exemple, l'une et l'autre de ces formules donnent bien

$$i_n = 0, 0, 1, 3, 6, 9, 13, 18, 24, 31, \qquad j_n = 1, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 37, 45, 54,$$

2578 2579

comme le décompte direct des points entiers du quadrilatère respectivement ouvert ou fermé.

Please enter 2

Domaines polyédriques réciproques. — Soit un polyèdre normal k-dimensionnel, rationnel dans un réseau G_k. Répartissons arbitrairement ses faces $(k-1)$-dimensionnelles en deux catégories, dites noires et blanches. Considérons le domaine obtenu en supprimant du polyèdre fermé les faces noires et l'intersection $\mathcal{J}$ des ensembles noirs et blancs. Si l'on supprime au contraire les faces blanches et $\mathcal{J}$, on obtient le *domaine réciproque*. En particulier, le polyèdre ouvert et le polyèdre fermé sont des domaines réciproques.

Les théorèmes 1 *et* 2 (comme la loi de réciprocité) *restent vrais si i_n et j_n désignent les dénombrants de deux domaines polyédriques rationnels réciproques* (²). (Par convention, j_0 a alors la valeur déduite de $j_1, j_2, \ldots, j_k$ au moyen de $\{\pi(j)\} = 0$.)

Remarque. — Si un domaine polyédrique est défini par un nombre quelconque d'inéquations de la forme $\sum a_i X_i > b_i$ et $\sum \alpha_i X_i \geq \beta_i$, les unes strictes, les autres larges, le domaine réciproque s'obtient en y échangeant les signes $>$ et $\geq$. Les dénombrants i_n, j_n des deux domaines comptent alors le nombre de solutions du système diophantien

$$\sum a_i X_i > b_i n, \quad \sum \alpha_i X_i \geq \beta_i n$$

et du système réciproque.

(*) Séance du 24 juillet 1967.

(¹) *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 91.

(²) On sait que $j(n)$ est un polynome mixte, qui a pour pseudopériode le plus petit commun multiple m des a_i, c'est-à-dire

$$j_n = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \ldots + b_0,$$

où les b sont des expressions trigonométriques en n, de période m. Par suite, pour une congruence $n = n_0 + \lambda m$ (λ entier), j_n et donc $\{\pi(j)\}$ sont de vrais polynomes en λ, soit $J_0(\lambda)$ et $P_0(\lambda)$. Comme $P_0(\lambda)$ s'annule pour toute valeur de λ telle que $n_0 + \lambda m \geq 0$, il s'annule quel que soit λ. L'entier n_0 étant arbitraire, on voit que $\{\pi(j)\} = 0$ *quel que soit n, positif, négatif ou nul.*

Remarquons que du fait que (1) subsiste si l'on descend aux indices négatifs, on peut déduire sans trop de peine la formule (7) de ma précédente Note sur la loi de réciprocité (¹), formule que j'avais empruntée à T. Popoviciu.

(³) L'écriture correcte serait naturellement

$$F(t) = \sum_0^{\infty} j_n t^n, \quad |t| < 1; \qquad F(t) = -\sum_1^{\infty} i_n t^{-n}, \quad |t| > 1,$$

mais il n'intervient pas de valeur de t dans la détermination de j_n ou de i_n.

(⁴) J'ai en effet démontré dans ma thèse (*Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire, Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 226, propos. 6.6), que si $j(n) = (-1)^k i(-n)$ s'applique quand $i(n)$ et $j(n)$ sont respectivement les dénombrants du polyèdre rationnel ouvert et du polyèdre fermé, cette relation s'applique encore quand ils désignent les dénombrants de deux domaines polyédriques rationnels réciproques quelconques.

(11, *rue de Bruges, Strasbourg, Bas-Rhin.*)