Nordisk Mat Tid 10 (1962) 2575 - 2577

~~Please enter 3 on p. 65~~

8

OM MYNTVÄXLING

GUNNAR BLOM och CARL-ERIK FRÖBERG

Inledning. En journalist vid en kvällstidning ringde nyligen till universitetet i Lund och frågade på hur många sätt man kan växla en tia. Författarna till denna artikel hörde härom och löste problemet oberoende av varandra, varvid den ene (med hjälp av papper och penna och diverse approximationer) erhöll värdet ca. 260 miljoner, medan den andre (med hjälp av SMIL) erhöll resultatet 266016628.

Problemet har förmodligen ställts otaliga gånger förut och antagligen även lösts många gånger (ett exempel härpå erbjuder Schuberts klassiska *Mathematische Mussestunden*, del I, 1:a uppl. 1897, flera följ. upplagor, där flera resultat ges liknande dem som återges i vår Tabell 2). I uppsatsen skall vi lämna en översikt över vad som går att åstadkomma med enkla medel. I avd. 1 återges kända resultat, medan avd. 2 och 3 torde innehålla en del nya ting.

Till professor Selmer, som omsorgsfullt granskat manuskriptet och framfört en rad värdefulla synpunkter, riktar vi ett varmt tack.

1. Allmänna resultat i exakt form.

1.1. Problemet. Låt oss beteckna myntenheterna med a_1, a_2, a_3, ... och det givna beloppet med n. Problemet är att bestämma på hur många olika sätt detta belopp kan växlas med hjälp av de m lägsta myntsorterna. Det sökta antalet betecknar vi med $D(m, n)$. Tydligen är detta lika med antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = n \,. \tag{1}$$

Med talteoretisk terminologi kan man säga att $D(m, n)$ är antalet partitioner av n i de givna delarna $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Sylvester införde termen *denumerant* för ett dylikt antal. Vi skall emellertid helt enkelt kalla $D(m, n)$ för *antalet växlingar*.

Vi definierar $D(m, 0) = 1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ och $D(0, n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. I $D(m, n)$ inräknas det fall att ingen växling äger rum. Enligt denna konvention kan alltså beloppet 1 öre växlas i 1-öringar på ett sätt, beloppet 2 öre växlas i 1- och 2-öringar på två sätt, osv. Vi säger att myntsorterna är *multiplikativa*, om varje a_m är en hel multipel av a_{m-1}. Myntsorterna 1, 2, 10, 50, 100 är alltså multiplikativa, däremot inte 1, 2, 5, 10, 25. Ett specialfall av de multiplikativa myntsorterna utgör de *binära*, dvs. 1, 2, 4, 8, 16, ...

1.2. Genererande funktionen för $D(m, n)$. Låt $\varphi_m(t)$ vara genererande funktionen för sviten $D(m, n)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), dvs.

$$\varphi_m(t) = \sum D(m, n) t^n .$$

Man inser lätt att

$$\varphi_m(t) = \{(1-t^{a_1})(1-t^{a_2}) \ldots (1-t^{a_m})\}^{-1} . \tag{2}$$

Problemet är härmed på sätt och vis redan löst; man har bara att beräkna koefficienten för t^n i detta uttryck och får då $D(m, n)$. Eller annorlunda uttryckt: det är just detta problemet gäller.

1.3. En rekursionsformel. Det förefaller naturligt att beräkna $D(m, n)$ rekursivt genom att börja med myntet a_1 och sedan lägga till en ny myntsort i taget. Man kan därvid använda den grundläggande rekursionsformeln

$$\begin{aligned} D(m, n) &= D(m-1, n) + D(m-1, n-a_m) + D(m-1, n-2a_m) \\ &\quad + D(m-1, n-3a_m) + \ldots \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) , \end{aligned} \tag{3}$$

där summationen fortsätter så länge $n - ia_m$ är *positivt eller noll*. Denna formel följer av uttrycket för $\varphi_m(t)$ eller direkt på följande sätt. Om beloppet n skall växlas, kan myntet a_m tänkas ingå 0 gånger, 1 gång, 2 gånger, osv. Det återstående beloppet, dvs. resp. n, $n - a_m$, $n - 2a_m$, ... skall sedan växlas i de övriga mynten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, vilket kan ske på resp. $D(m-1, n)$, $D(m-1, n-a_m)$, $D(m-1, n-2a_m)$, ... sätt. Den angivna proceduren blir tidsödande, om den skall utföras för hand, men kan naturligtvis utan svårighet genomföras med hjälp av en snabb siffermaskin. — Om speciellt n är en multipel av högsta myntsorten a_m, kan (3) skrivas

$$D(m, ka_m) = \sum_{i=0}^{k} D(m-1, ia_m) . \tag{4}$$

1.4. Explicita uttryck för antalet växlingar. Att ange ett explicit uttryck för $D(m, n)$ i $a_1, a_2, \ldots, a_m$ och n är tyvärr inte möjligt utom i speciella fall (vi bortser därvid från uttryck innehållande den genererande funktionen). Det allmännaste resultat man känner i den vägen är följande sats som bevisades 1943 av Bell [2] men som nog varit åtminstone delvis bekant tidigare. Låt d_m vara den minsta gemensamma dividenden till $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Då gäller följande:

Antalet växlingar av beloppet

$$n = kd_m + e_m \qquad (0 \leq e_m < d_m) \tag{5}$$

är ett polynom i k av graden $m-1$ vars koefficienter beror av $a_1, a_2, \ldots, a_m$ och e_m men ej av k.

Vi skriver detta polynom så:

$$D(m, kd_m + e_m) = c_0 + c_1\binom{k}{1} + c_2\binom{k}{2} + \ldots + c_{m-1}\binom{k}{m-1}. \tag{6}$$

Om $e_m = 0$ har man alltid $c_0 = 1$. Under förutsättning att $a_1 = 1$ gäller vidare, som vi skall se i **2.3**:

$$c_{m-1} = \frac{d_m^{m-1}}{a_1 a_2 \ldots a_m}. \tag{7}$$

Vi kallar (6) för *Bells formel.*

För att bestämma koefficienterna $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ har man åtminstone två möjligheter.

Metod 1. Polynomet härledes direkt med ledning av rekursionsformeln (3). Detta går relativt lätt för små värden på m, men metoden blir ohanterlig för större m.

Exempel. Antag att $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ och $e_m = 0$. Vi skall då beräkna $D(3, 10k)$.

Steg 1: Genom direkt räkning finner man genast $D(2, 2k) = k + 1$ och $D(2, 2k-1) = k$.

Steg 2: För $m = 3$ ger rekursionsformeln relationen

$$D(3, 10k) = D(2, 10k) + D(2, 10k-5) + \ldots + D(2, 0).$$

Enligt steg 1 blir detta lika med

$$(5k+1) + (5k-2) + (5k-4) + (5k-7) + \ldots = 5k^2 + 4k + 1 = 1 + 9\binom{k}{1} + 10\binom{k}{2}.$$

Metod 2. Vänstra membrum i (6) beräknas numeriskt för $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, varefter koefficienterna $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ erhålles genom lösning av ett lineärt ekvationssystem. Med en elektronisk siffermaskin till sitt förfogande finner man, att metod 2 i allmänhet är att föredraga.

Mest som kuriositet anföres i Tabell 1 och 2 några exakta resultat i vårt vanliga myntsystem. I Tabell 1 ges antalet växlingar av alla mynt upp till 10 kronor, varvid bör observeras att den identiska växlingen är inräknad.

Tabell 1.

Antal växlingar i vanligt myntsystem.

Belopp	2	5	10	25	50	100	200	500	1000
Växlingar	2	4	11	65	407	3954	61985	5167237	266016629

I Tabell 2 ges koefficienterna c_i i Bells formel vid växling av hela multipler av myntsorterna. Även här bör observeras, att den identiska växlingen i förekommande fall är medräknad.

Tabell 2.

Koefficienter i BELLS formel vid växling i vanligt myntsystem.
(Med t. ex. beteckningen 1–10 avses myntsorterna 1, 2, 5, 10.)

Myntsorter	Belopp	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
1	k	1						
1–2	$2k$	1	1					
1–5	$10k$	1	9	10				
1–10	$10k$	1	10	19	10			
1–25	$50k$	1	405	2735	4825	2500		
1–50	$50k$	1	406	3140	7560	7325	2500	
1–100	$100k$	1	3953	54077	213505	360580	277200	80000

Om beloppen inte är hela multipler av k, modifieras koefficienterna. Den högsta koefficienten förblir dock oförändrad. Vi ger två exempel härpå: Vid växling av beloppen $50k+1$ resp. $50k+2$ i myntsorterna 1–25 finner man för $c_0, c_1, \ldots, c_4$ värdena 1, 426, 2805, 4875, 2500 resp. 2, 453, 2880, 4925, 2500.

2. Allmänna resultat i approximativ form.

2.1. Allmänt. Det har förut nämnts att man inte känner några allmänna explicita uttryck för $D(m, n)$. Däremot existerar det flera olikheter som har generell giltighet. Vi skall här ange endast några av de enklaste resultaten av detta slag. Det är alltså ej tal om att åstadkomma så precisa olikheter som möjligt; då behövs andra hjälpmedel än dem som här begagnas. — I hela avdelningen antages att den lägsta myntsorten a_1 är 1, vilket inte är någon väsentlig inskränkning.

I **2.2** bevisas ett förberedande lemma. I **2.3** bevisas en enkel men tämligen grov olikhet, som sedan förbättras i **2.4**.

2.2. Ett lemma. Vi skall bevisa ett lemma, som är besläktat med Euler–Maclaurins summationsformel. Sätt

$$f_k(x) = \sum_{\nu=0} (x-\nu)^k$$

där k är ett positivt helt tal och där summationen fortsättes så länge $x-\nu \geqq 0$.

LEMMA. *För varje $x \geqq 0$ gäller*

$$(8) \qquad \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} \leqq f_k(x) \leqq \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{kx^{k-1}}{8}.$$

BEVIS. Vi visar först att olikheten är sann för $k=1$. Sätt $x-[x]=\delta$, där alltså $0 \leqq \delta < 1$. Antalet termer i $f_1(x)$ är $[x]+1 = x+1-\delta$, så att

$$f_1(x) = x+(x-1)+\ldots+\delta = \tfrac{1}{2}(x+\delta)(x+1-\delta) = \tfrac{1}{2}x(x+1)+\tfrac{1}{2}\delta(1-\delta)\,.$$

Härav inses att

$$\tfrac{1}{2}x(x+1) \leqq f_1(x) \leqq \tfrac{1}{2}x(x+1)+\tfrac{1}{8}\,,$$

vilket visar att (8) håller för $k=1$.

Vi antager nu att (8) är sann för $k-1$ $(k>1)$ och skall visa att den i så fall är sann även för k. Sätt

$$g_k(x) = f_k(x) - \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^k}{2}.$$

Om man deriverar i avseende på x finner man lätt

$$g_k'(x) = k g_{k-1}(x)\,.$$

Eftersom (8) antogs vara sann för $k-1$ är $g_{k-1}(x) \geqq 0$ för alla $x \geqq 0$, och följaktligen $g_k'(x) \geqq 0$ för alla $x \geqq 0$. Men $g_k(0)=0$; alltså är $g_k(x) \geqq 0$ för alla $x \geqq 0$, dvs. första hälften av olikheten håller för k. Analogt bevisas att

$$h_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{kx^{k-1}}{8} - f_k(x) \geqq 0\,,$$

så att även andra hälften av (8) är sann.

2.3. Olikhet A. *Om $m \geqq 1$ gäller*

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{n^{m-1}}{a_1a_2\ldots a_m} \leqq D(m,n) \leqq \frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{(n+\Delta_m)^{m-1}}{a_1a_2\ldots a_m},$$

där $\Delta_1=0$, $\Delta_2=a_2$ och $\Delta_m=a_2+\tfrac{1}{2}(a_3+\ldots+a_m)$ för $m \geqq 3$.

Bevis. Av lemmat i **2.2** följer att för varje $x \geqq 0$ och $k \geqq 1$ gäller

$$(9) \qquad \frac{x^{k+1}}{k+1} \leqq x^k + (x-1)^k + (x-2)^k + \dots \leqq \frac{(x+\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1},$$

ty högra membrum i olikheten (8) innehåller precis de tre första termerna av binomialutvecklingen för högra membrum i (9).

Vi använder ett induktionsbevis. (A) håller för $m=1$, ty gränserna blir då 1, och vi har ju $D(1, n) = 1$. Olikheten håller även för $m=2$, ty det är lätt att se direkt — eller med hjälp av rekursionsformeln (3) — att

$$\frac{n}{a_2} \leqq D(2, n) \leqq \frac{n}{a_2} + 1 = \frac{n+a_2}{a_2} = \frac{n+A_2}{a_2},$$

vilket är just vad olikheten utsäger.

Vi antager nu, att (A) är sann för $m \geqq 2$ och skall bevisa att den då håller även för $m+1$. Enligt (3) gäller

$$(10) \qquad D(m+1, n) = D(m, n) + D(m, n-a_{m+1}) + D(m, n-2a_{m+1}) + \dots .$$

Användes undre gränsen i (A) på varje term i högra membrum erhålles

$$(11) \qquad D(m+1, n) \geqq \frac{\sum_i' (n-ia_{m+1})^{m-1}}{(m-1)!\, a_1 a_2 \dots a_m}.$$

Tages $x = n/a_{m+1}$ och $k = m-1$ i första hälften av olikheten (9), får man

$$\sum_i' (n-ia_{m+1})^{m-1} = a_{m+1}^{m-1} \sum_i' \left(\frac{n}{a_{m+1}} - i\right)^{m-1} \geqq \frac{a_{m+1}^{m-1}}{m}\left(\frac{n}{a_{m+1}}\right)^m = \frac{n^m}{m a_{m+1}},$$

varav genom insättning i (11):

$$D(m+1, n) \geqq \frac{n^m}{m!\, a_1 a_2 \dots a_{m+1}}.$$

Undre gränsen i (A) håller alltså för m ersatt med $m+1$, såsom skulle visas.

På motsvarande sätt bevisas att, om man i den övre gränsen i (9) tager $x = (n+A_m)/a_{m+1}$ och $k = m-1$,

$$\sum_i' (n+A_m-ia_{m+1})^{m-1} = a_{m+1}^{m-1} \sum_i' \left(\frac{n+A_m}{a_{m+1}} - i\right)^{m-1}$$

$$\leqq \frac{a_{m+1}^{m-1}}{m}\left(\frac{n+A_m}{a_{m+1}} + \frac{1}{2}\right)^m = \frac{(n+A_{m+1})^m}{m a_{m+1}},$$

varav ses att även övre gränsen i (A) håller för m ersatt med $m+1$. Härmed är (A) bevisad.

En viktig konsekvens av olikhet (A) är att man för stora n har den enkla asymptotiska formeln

(12) $$D(m, n) \sim \frac{n^{m-1}}{(m-1)!\, a_1 a_2 \ldots a_m}.$$

Denna kan användas för beräkning av antalet växlingar så snart n är tillräckligt stort i förhållande till myntsorterna $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_m$. Hur stort n bör vara kan lätt bedömas genom beräkning av storheten Δ_m i olikhet (A). Det framgår av olikheten att (12) kan begagnas, om Δ_m är tillräckligt litet i förhållande till n.

Exempel: Antag att $n = 100$ kr. växlas i mynt av valörerna 1, 2, 5, 10, 25, 50 och 100 öre. Man har $m = 7$ och $\Delta_m = 2 + \frac{1}{2}(5 + 10 + \ldots + 100) = 97$ vilket är litet i förhållande till $n = 10000$ öre. Enligt formel (12) blir antalet växlingar ungefär

$$\frac{10000^6}{6!\, 2 \cdot 5 \ldots 100} = 1{,}11 \cdot 10^{14}.$$

Slutligen skall det påpekas att vi nu lätt kan bevisa det i (7) angivna uttrycket för högsta koefficienten i Bells formel (6). Av sistnämnda formel följer nämligen att, om n (och därmed också k) är stort i förhållande till myntsorterna, så gäller

$$D(m, n) \sim c_{m-1} \cdot \frac{k^{m-1}}{(m-1)!} \sim c_{m-1} \cdot \frac{(n/d_m)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Sättes det sista uttrycket lika med uttrycket i högra membrum av (12), kan man lösa ut c_{m-1} och får därvid det i (7) givna uttrycket.

2.4. Olikhet B. Vi skall nu förbättra den i föregående sektion bevisade olikheten genom att höja den undre gränsen. Det pris man måste betala härför är att den nya olikheten blir mer komplicerad.

Sätt $S_{0,m} = 1$ och

$$S_{i,m} = \sum (\tfrac{1}{2}a_{r_1}) \cdot (\tfrac{1}{2}a_{r_2}) \ldots (\tfrac{1}{2}a_{r_i}) \qquad (1 \leqq i \leqq m-2),$$

där summan utsträckes över $3 \leqq r_1 < r_2 < \ldots < r_m \leqq m$. Storheten $S_{i,m}$ är alltså helt enkelt summan av alla produkter av talen $\frac{1}{2}a_3, \frac{1}{2}a_4, \ldots, \frac{1}{2}a_m$, tagna i stycken i sänder. Vi noterar för senare bruk att man har rekursionsformlerna

(13) $$\begin{cases} S_{0,m-1} = S_{0,m} = 1;\ S_{m-1,m-1} = \frac{1}{2}a_{m-1}S_{m-2,m}; \\ S_{i,m-1} = \frac{1}{2}a_{m-1}S_{i-1,m} + S_{i,m} \quad (1 \leqq i \leqq m-2). \end{cases}$$

Storheterna Δ_i har samma betydelse som i föregående sektion.

Om $m \geqq 2$ *gäller*

$$\text{(B)} \quad \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_m} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{n^{m-i-1}}{(m-i-1)!} S_{i,m} \leqq D(m, n) \leqq \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_m} \cdot \frac{(n+\Delta_m)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Bevis. Eftersom den övre gränsen är densamma som i (A), behöver vi endast syssla med den undre.

Vi ser lätt att undre gränsen håller för $m = 2$. Vi antager nu, att denna gräns håller för m och skall visa att den då håller även för $m+1$. Av rekursionsformeln (10) följer

$$D(m+1, n) \geqq \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_m} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{S_{i,m}}{(m-i-1)!} \sum_j (n - j a_{m+1})^{m-i-1}.$$

Tag nu $x = n/a_{m+1}$ och $k = m-i-1$ i första hälften av olikheten (8), så erhålles

$$\sum_j (n - j a_{m+1})^{m-i-1} = a_{m+1}^{m-i-1} \sum_j \left(\frac{n}{a_{m+1}} - j\right)^{m-i-1}$$

$$\geqq a_{m+1}^{m-i-1} \left[\frac{1}{m-i}\left(\frac{n}{a_{m+1}}\right)^{m-i} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{a_{m+1}}\right)^{m-i-1}\right] = \frac{n^{m-i}}{(m-i) a_{m+1}} + \frac{1}{2} n^{m-i-1}.$$

Insättes detta i den dubbla summan ovan erhålles

$$D(m+1, n) \geqq \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{m+1}} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{n^{m-i}}{(m-i)!} S_{i,m}$$

$$+ \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{m+1}} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{n^{m-i-1}}{(m-i-1)!} \left(\tfrac{1}{2} a_{m+1} S_{i,m}\right).$$

Ersätter man i andra termen i med $i-1$, slår ihop summorna och därvid använder formlerna (13), så får man

$$D(m+1, n) \geqq \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{m+1}} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{n^{m-i}}{(m-i)!} S_{i,m+1}.$$

Härmed är det bevisat att undre gränsen i (B) håller för $m+1$, varmed hela olikheten är bevisad.

För att ge en uppfattning om med vilken noggrannhet man med olikhet (B) kan beräkna antalet växlingar återger vi i Tabell 3 några beräkningar, som avser beloppet $n = 1000$ öre. Man ser, att noggrannheten avtager med växande antal myntsorter, men att den är ganska god, möjligen med undantag av sista raden i tabellen. Vid givna myntsorter avtager givetvis felet, när n växer, och olikheten (B) kan därför användas för ganska noggranna uppskattningar om n är någorlunda stort i förhållande till myntsorterna.

Tabell 3.

Antalet växlingar av 1000 öre beräknat med olikhet (B).

Myntsorter	Undre gräns	Exakt	Övre gräns	Faktor
1–5	5.025	5.040	5.045	10^4
1–10	1.704	1.712	1.715	10^6
1–25	1.802	1.814	1.818	10^7
1–50	8.248	8.347	8.388	10^7
1–100	1.844	1.905	1.936	10^8
1–200	2.344	2.608	2.794	10^8

3. Binärt myntsystem.

3.1. Allmänt. Vi skall ägna hela denna avdelning åt det binära myntsystemet. Vårt problem är att exakt bestämma antalet växlingar av ett givet belopp i de binära myntsorterna $a_1=1,\ a_2=2,\ \ldots,\ a_m=2^{m-1}$. Detta kan ske på åtminstone två sätt, nämligen genom *rekursiv beräkning* och med *Bells formel*.

Vad det rekursiva beräkningssättet beträffar kan vi som vanligt använda den grundläggande rekursionsformeln (3). En ny möjlighet finns emellertid nu, såsom framgår av följande sats.

Sats. *För varje helt tal $p>1$ gäller rekursionsformeln*

(14) $$D(m+1,\,2p)-D(m+1,\,2p-2) \;=\; D(m,\,p)\,.$$

Vi har här som synes förutsatt att de belopp som förekommer i vänstra membrum är jämna. Detta är emellertid ingen inskränkning, ty man inser omedelbart, att ett udda belopp kan växlas på lika många sätt som närmast lägre jämna belopp, dvs. man har $D(m,\,2p+1)=D(m,\,2p)$. (Ett undantag från denna regel finns dock; man har ju nämligen $D(0,\,1)=0$ men $D(0,\,0)=1$.)

Bevis. Satsen kan lätt bevisas induktivt eller också med hjälp av genererande funktioner på följande sätt: Av (2) följer att

$$\varphi_m(t) \;=\; \{(1-t)(1-t^2)\,\ldots\,(1-t^{2^{m-1}})\}^{-1};\quad \varphi_{m+1}(t) \;=\; \{(1-t)(1-t^2)\,\ldots\,(1-t^{2^m})\}^{-1}\,.$$

Härav inses att

$$\varphi_{m+1}(t) \;=\; \frac{1}{1-t}\,\varphi_m(t^2)\,.$$

Jämföres koefficienterna för t^{2p} i båda membra, erhålles

(15) $$D(m+1,\,2p) \;=\; D(m,\,0)+D(m,\,1)+\,\ldots\,+D(m,\,p)\,.$$

Bildas differenserna mellan denna relation och den relation som erhålles om p ersättes med $p-1$, får man den sökta rekursionsformeln (14). — Det bör tilläggas att formel (15) givetvis också har sitt intresse som rekursionsformel på grund av sin enkla uppbyggnad.

Som illustration anges i Tabell 4 antalet växlingar $D(m, n)$ av beloppet n för några låga värden på m och n.

Tabell 4.

Antal växlingar $D(m, n)$ av beloppet n i de binära myntsorterna $1, 2, \ldots, 2^{m-1}$.

$m \diagdown n$	0	1	2, 3	4, 5	6, 7	8, 9	10, 11	12, 13	14, 15	16, 17	18, 19	20, 21
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
4	1	1	2	4	6	10	14	20	26	35	44	56
5	1	1	2	4	6	10	14	20	26	36	46	60

Återstoden av denna avdelning skall vi huvudsakligen ägna åt Bells formel (6), som är av särskilt intresse i det binära fallet, därför att koefficienterna kan beräknas explicit. I överensstämmelse med (5) skriver vi det belopp som skall växlas:

$$n = k \cdot 2^{m-1} + e_m \qquad (0 \leq e_m < 2^{m-1}) .$$

I **3.2** behandlas fallet $e_m = 0$ och i **3.3** fallet $e_m \neq 0$. Avdelningen avslutas med ett bevis för en identitet som användes i **3.2**.

3.2. Växling av multipel av tvåpotens. Antalet växlingar av beloppet $k \cdot 2^{m-1}$ i binära mynt kan enligt vår allmänna beteckning skrivas $D(m, k \cdot 2^{m-1})$. Det är bekvämt att nu införa den speciella beteckningen

$$u_{m,k} = D(m, k \cdot 2^{m-1}) .$$

Rekursionsformeln (4) antager då formen

$$u_{m,k} = \sum_{i=0}^{k} u_{m-1,2i} . \tag{16}$$

Denna formel kan lätt användas för direkt beräkning av antalet växlingar, åtminstone för små värden på m. I Tabell 5 ges några värden på $u_{m,k}$. Ur tabellen avläses $u_{6,3} = 8148$, vilket innebär att beloppet $3 \cdot 2^{6-1} = 96$ öre kan växlas i myntsorterna 1, 2, 4, 8, 16 och 32 öre på 8148 olika sätt.

Please enter 3

Tabell 5.

Antal växlingar $u_{m,k}$ av beloppet $k \cdot 2^{m-1}$ i de binära myntsorterna $1, 2, \ldots, 2^{m-1}$.

$m \backslash k$	0	1	2	3	4
		25787			
1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5
3	1	4	9	16	25
4	1	10	35	84	165
5	1	36	201	656	1625
6	1	202	1827	8148	25509

Tabell 6.

Koefficienter $c_{m,i}$ i BELLS formel (17).

$m \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
		2575	2576				
1	1						
2	1	1	1				
3	1	3	2				
4	1	9	16	8			
5	1	35	130	160	64		
6	1	201	1424	3272	3072	1024	
7	1	1827	23682	91040	151104	114688	32768

Vi använder nu Bells formel (6) och skriver

$$u_{m,k} = \sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i} \binom{k}{i} . \tag{17}$$

Koefficienterna $c_{m,i}$ återges i Tabell 6 för låga värden på m.

Vi skall nu visa hur man kan beräkna en godtycklig rad i Tabell 6 ur närmast föregående. Låt $\Delta^p \binom{2n}{j}$ vara p:te differensen av talen $\binom{2n}{j}$, $\binom{2n+2}{j}$, $\binom{2n+4}{j}$, ..., där n är ett godtyckligt helt tal. Om $2n < j$, definierar vi $\binom{2n}{j} = 0$. Vi inför även beteckningen

$$a_{i,j} = \Delta^{i-1} \binom{2n}{j}_{n=1} , \tag{18}$$

där indexbeteckningen avser att n skall sättas lika med 1 efter differensbildningen. (Vi skall senare diskutera hur storheterna $a_{i,j}$ kan beräknas numeriskt.) Man har då följande sats:

SATS. *För $m \geqq 1$ gäller rekursionsformeln*

$$c_{m-1,i} = \sum_{j=i-1}^{2i} a_{i,j} c_{m,j} . \tag{19}$$

Bevis. Insätter man Bells formel (17) i båda membra av (16) och ersätter m med $m+1$ får man

$$\sum_{i=0}^{m} c_{m+1,i}\binom{k}{i} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-1} c_{m,j}\binom{2i}{j} = \sum_{j=0}^{m-1} c_{m,j}\sum_{i=0}^{k}\binom{2i}{j}.$$

Vi får alltså relationen

$$c_{m+1,0}+c_{m+1,1}\binom{k}{1}+\ldots+c_{m+1,m}\binom{k}{m}$$

$$=(k+1)c_{m,0}+c_{m,1}\sum_{i=0}^{k}\binom{2i}{1}+\ldots+c_{m,m-1}\sum_{i=0}^{k}\binom{2i}{m-1}.$$

Om speciellt $k=0$ erhålles

$$c_{m+1,0}=c_{m,0}.$$

Vi fortsätter och sätter $k=1, 2, \ldots, m$ samt bildar differensen mellan varje ekvation och närmast föregående. Detta ger följande ekvationssystem i de obekanta storheterna $c_{m+1,1}, \ldots, c_{m+1,m}$:

$$c_{m+1,1}=c_{m,0}+\binom{2}{1}c_{m,1}+\binom{2}{2}c_{m,2}$$

$$c_{m+1,1}+\binom{1}{1}c_{m+1,2}=c_{m,0}+\binom{4}{1}c_{m,1}+\binom{4}{2}c_{m,2}+\binom{4}{3}c_{m,3}+\binom{4}{4}c_{m,4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{m+1,1}+\binom{m-1}{1}c_{m+1,2}+\ldots+\binom{m-1}{m-1}c_{m+1,m}$$

$$=c_{m,0}+\binom{2m}{1}c_{m,1}+\ldots+\binom{2m}{2m}c_{m,2m}.$$

Man löser detta system enklast genom att upprepade gånger bilda differensen mellan varje ekvation och närmast föregående och därvid utnyttja relationen

$$\binom{n}{\nu}-\binom{n-1}{\nu}=\binom{n-1}{\nu-1}.$$

Koefficienten $c_{m+1,1}$ får man som synes direkt ur första ekvationen ovan; efter den första differensbildningen får man $c_{m+1,2}$, efter den andra $c_{m+1,3}$, osv. Härav inser man, att allmänt

$$c_{m+1,i}=c_{m,0}\cdot\Delta^{i-1}\binom{2n}{0}_{n=1}+c_{m,1}\cdot\Delta^{i-1}\binom{2n}{1}_{n=1}+\ldots+c_{m,2i}\cdot\Delta^{i-1}\binom{2n}{2i}_{n=1}.$$

Eftersom $\Delta^{i-1}\binom{2n}{j}=0$ så snart $j\leq i-2$, inses att i högra membrum termerna med $c_{m,0}, \ldots, c_{m,i-2}$ faller bort. Därmed är satsen bevisad.

Det återstår nu att diskutera hur talen $a_{i,j}$, definierade av formel (18), skall beräknas numeriskt. Det finns flera möjligheter:

1) Formel (18) användes direkt.

2) Talen beräknas rekursivt med ledning av rekursionsformeln

$$a_{i+1,j+1} = 2a_{i,j} + a_{i,j-1} \qquad (i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ a_{0,0} = 1)\,. \tag{20}$$

Denna formel bevisas lätt av

$$\begin{aligned} a_{i+1,j+1} &= \Delta^i \binom{2n}{j+1}_{n=1} = \Delta^{i-1}\left\{\binom{2n+2}{j+1} - \binom{2n}{j+1}\right\}_{n=1} \\ &= \Delta^{i-1}\left\{\binom{2n+1}{j} + \binom{2n+1}{j+1} - \binom{2n}{j+1}\right\}_{n=1} = \Delta^{i-1}\left\{\binom{2n+1}{j} + \binom{2n}{j}\right\}_{n=1} \\ &= \Delta^{i-1}\left\{2\binom{2n}{j} + \binom{2n}{j-1}\right\}_{n=1} = 2a_{i,j} + a_{i,j-1}\,. \end{aligned}$$

3) Följande explicita formel begagnas:

$$a_{i,j} = \binom{i}{j-i} 2^{2i-j} + \binom{i-1}{j-i+1} 2^{2i-j-2}\,. \tag{21}$$

Denna formel kan man lätt bevisa med hjälp av (20). Den kan också erhållas såsom ett specialfall av en identitet, som har ett visst självständigt intresse och som därför skall diskuteras separat i **3.4.**

Vi återger slutligen i Tabell 7 talen $a_{i,j}$ för några låga värden på i och j. Man kan lätt vid behov utvidga tabellen med hjälp av (20) eller (21) och har sedan möjlighet att via (17) och (19) beräkna antalet växlingar $u_{m,k}$ för varje givet värde på m och k.

Tabell 7.

Koefficienter $a_{i,j}$ i rekursionsformeln (19).

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	5	4	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	4	12	13	6	1	0	0	0	0
4	0	0	0	8	28	38	25	8	1	0	0
5	0	0	0	0	16	64	104	88	41	10	1

3.3. Växling av belopp som ej är multipel av tvåpotens. Vi skall nu utvidga diskussionen av Bells formel i föregående avsnitt till det fallet, att det belopp som skall växlas icke är en multipel av en tvåpotens. Formeln lyder då

$$D(m, k \cdot 2^{m-1} + e_m) = \sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i} \binom{k}{i}, \tag{22}$$

där $0 < e_m < 2^{m-1}$. Vi påpekar att ett udda värde på e_m ger samma antal växlingar som närmast lägre jämna värde, varför vi kan antaga, att e_m är jämnt. Beträffande koefficienterna $c_{m,i}$ gäller följande:

För $m = 2$ har vi beloppet $2k$, vilket representeras genom $c_{2,0} = c_{2,1} = 1$. För $m = 3$ får vi två fall: $4k$ resp. $4k + 2$, vilka är bestämda genom $c_{3,0} = 1$, $c_{3,1} = 3$, $c_{3,2} = 2$ resp. $c_{3,0} = 2$, $c_{3,1} = 4$, $c_{3,2} = 2$. Allmänt betraktar vi $k \cdot 2^{m-1} + e_m$ för två konsekutiva värden på m och ställer upp schemata för koefficienterna $c_{m,i}$ radvis för successiva e_m-värden, vilka enligt vad som förut sagts sammanförts parvis. Bildar vi nu differenserna mellan konsekutiva rader i ett sådant schema, återfår vi närmast föregående schema, varvid första raden kommer i enkel och alla de andra raderna i dubbel upplaga. Nu är ju första raden i ett godtyckligt schema känd enligt föregående utredning (Tabell 6), och därmed kan vi successivt bilda samtliga sådana schemata. Vi illustrerar detta i Tabell 8, i vilken vi för fullständighets skull även medtagit udda e_m-värden samt fallet $e_m = 0$.

För att bevisa de påståenden som här gjorts rörande koefficienterna $c_{m,i}$ har man endast att tillämpa den sats som bevisades i **3.1.** De angivna relationerna mellan koefficientraderna i Tabell 8 är som man lätt ser en omedelbar följd av den i satsen angivna rekursionsformeln (14).

Tabell 8.

Koefficienter $c_{m,i}$ i BELLs formel (22).

m	Belopp	e_m	$c_{m,0}$	$c_{m,1}$	$c_{m,2}$	$c_{m,3}$	$c_{m,4}$
2	$2k+e_2$	0, 1	1	1			
3	$4k+e_3$	0, 1	1	3	2		
		2, 3	2	4	2		
4	$8k+e_4$	0, 1	1	9	16	8	
		2, 3	2	12	18	8	
		4, 5	4	16	20	8	
		6, 7	6	20	22	8	
5	$16k+e_5$	0, 1	1	35	130	160	64
		2, 3	2	44	146	168	64
		4, 5	4	56	164	176	64
		6, 7	6	68	182	184	64
		8, 9	10	84	202	192	64
		10, 11	14	100	222	200	64
		12, 13	20	120	244	208	64
		14, 15	26	140	266	216	64

3.4. En identitet. Vi skall bevisa följande

SATS.

$$\Delta^r \binom{2n}{s} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{r+n-\nu}{s-r-n+\nu} \binom{n}{\nu} 2^{2(r+n-\nu)-s}. \tag{23}$$

BEVIS. Vi sätter $r+n-\nu=k$ och antar satsen riktig t. o. m. $r-1$. Således är

$$\Delta^{r-1} \binom{2n+2}{s} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{k}{s-k} \binom{n+1}{\nu} 2^{2k-s}.$$

Härav följer

$$\Delta^r \binom{2n}{s} = \Delta^{r-1}\left\{\Delta \binom{2n}{s}\right\} = \Delta^{r-1}\left\{\binom{2n+2}{s} - \binom{2n}{s}\right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{k}{s-k}\binom{n+1}{\nu} 2^{2k-s} - \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{k}{s-k}\binom{n}{\nu-1} 2^{2k-s} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{k}{s-k}\binom{n}{\nu} 2^{2k-s},$$

vilket är ekvation (23).

Därmed återstår endast att visa, att (23) gäller för $r=0$, dvs. att

$$\binom{2n}{s} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu}{s-n+\nu}\binom{n}{\nu} 2^{2(n-\nu)-s}. \tag{24}$$

Sätt

$$P(x) = (1+2x)^n + \binom{n}{1}(1+2x)^{n-1}x^2 + \binom{n}{2}(1+2x)^{n-2}x^4 + \ldots + x^{2n}.$$

Koefficienten för x^{2n-s} i denna utveckling är tydligen lika med

$$2^{2n-s}\left\{\binom{n}{s-n} + 2^{-2}\binom{n-1}{s-n+1}\binom{n}{1} + 2^{-4}\binom{n-2}{s-n+2}\binom{n}{2} + \ldots\right\},$$

vilket är lika med högra membrum av (24). Å andra sidan är $P(x) = \{(1+2x)+x^2\}^n = (1+x)^{2n}$, och koefficienten för x^{2n-s} i denna utveckling är lika med $\binom{2n}{s}$, varmed (24) och följaktligen även (23) är bevisad.

Man erhåller formel (21) i **3.2** genom att i (23) sätta $r=i-1$, $s=j$ samt $n=1$.

LITTERATUR

[1] P. BACHMANN: *Niedere Zahlentheorie*. Leipzig 1910. Zweiter Teil, Kap. 3.

[2] E. T. BELL: *Interpolated denumerants and Lambert series*. Amer. Journal of Math. 65 (1943), pp. 382–386.

[3] G. H. HARDY: *Trois problèmes célèbres de la théorie des nombres*. Paris 1931.

[4] J. RIORDAN: *An introduction to combinatorial analysis*. New York 1958. Ch. 6.

SUMMARY IN ENGLISH

C. L. Godske: *Oddvar Bjørgum in memoriam.* (Norwegian.)

An orbituary on professor Oddvar Bjørgum, February 7, 1916 – December 22, 1961.

A. Schinzel: *On the composite integers of the form* $c(ak+b)! \pm 1$. (English.)

The author raises the problem whether there exist infinitely many composite integers of the form $c(ak+b)! \pm 1$. An affirmative answer in many cases when $c=1$ follows immediately from Wilson's theorem; other cases are answered in the Theorem p. 8.

Torkil Heiede and Hans Jørgen Helms: *Set theory and transfinite cardinal numbers, I.* (Danish.)

In part I of this expository article, elementary (naive) set theory is introduced and treated up to and including the theorem of well-ordering.

Helge Tverberg: *On a combinatorial problem.* (Norwegian.)

The following result was first proved by Philip Hall: We want to select n different representatives, one from each of n non-empty sets. This is possible if and only if every union of k of the n sets contains at least k elements.

In the present paper, a simple proof is given of Hall's theorem. Instead of the systematic selection of representatives used in most proofs, elements are now *removed* from the sets until a system of representatives is left.

Gunnar Blom and Carl-Erik Fröberg: *On money changing.* (Swedish.)

Let $D(m, n)$ be the number of ways in which a given amount of money n can be changed by means of m given species of coins $a_1, a_2, \ldots, a_m$. The paper contains a survey of various methods by which $D(m, n)$ can be calculated.

In Part 1, an account is given of general and exact results concerning $D(m, n)$, including Bell's formula (6) p. 57. In Part 2, proofs are given of two inequalities (A) and (B) pp. 59 and 62, which are possibly new. Part 3 is devoted to a detailed examination of the binary coin system $a_1=1$, $a_2=2$, $\ldots$, $a_m=2^{m-1}$. It is proved in **3.2** and **3.3** that, in this special case, the coefficients of Bell's formula can be calculated explicitly by means of simple recurrence relations.