(Seq: 1, 3, 567, ... ~2306 is the key)

X

referred to by Carlitz, Coefficients of lemniscate fn 4781A

2770 + 2306

A. Hurwitz, Mathematische Werke, Birkhäuser, Basel, Volume 1-2, 1962-1963

(this - vol 2)

LXVII.

Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen[1]).

(Mathematische Annalen, Bd. 51, 1899, S. 196—226.)

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf gewisse Zahlen, welche ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Bernoulli'schen Zahlen. Die letzteren lassen sich bekanntlich durch die Gleichung

$$\sum \frac{1}{r^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definieren, wobei die Summe über alle positiven und negativen reellen ganzen Zahlen r mit Ausschluss der Null zu erstrecken ist und die Zahl π als Wert des Integrales

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

aufgefasst werden kann. In ähnlicher Weise können und sollen die hier zu untersuchenden Zahlen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ durch die Gleichung

$$\text{(D)} \qquad \sum \frac{1}{(r+is)^{4n}} = \frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!} E_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definiert werden. Dabei ist die Summe auf alle komplexen ganzen Zahlen $r + is$ mit Ausschluss der Null auszudehnen; ferner bedeutet ω den Wert des Integrales

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2{,}622057\ldots.$$

Die Zahlen E_n nehmen also, ihrer Definition nach, eine entsprechende Stellung in der Theorie der Gaussischen komplexen ganzen Zahlen

---

[1]) Vgl. eine vorläufige Mitteilung in den Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1897, S. 273—276 [diese Werke, Bd. II, S. 338—341].

ein, wie die Bernoulli'schen Zahlen in der Theorie der reellen ganzen Zahlen.

Die Zahlen E_n sind übrigens, ebenso wie die Bernoulli'schen Zahlen, positive reelle rationale Zahlen. Es wird sich dies weiterhin als unmittelbare Folge der Tatsache ergeben, dass die Zahlen E_n im wesentlichen mit den Entwicklungskoeffizienten einer gewissen lemniskatischen Funktion, d. h. einer doppeltperiodischen Funktion, deren Periodenparallelogramm ein Quadrat ist, identisch sind. Hierin liegt eine weitere Analogie der Zahlen E_n mit den Bernoulli'schen Zahlen. Denn die letzteren sind bekanntlich im wesentlichen die Entwicklungskoeffizienten einer einfach periodischen Funktion, der Kotangente.

Aber auch eine tiefer liegende Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen, nämlich diejenige, welche sich auf ihre Partialbruchzerlegung bezieht und in dem v. Staudt-Clausen'schen Satze ihren Ausdruck findet, besitzt ihr völlig entsprechendes Gegenbild bei den Zahlen E_n. Dieses nachzuweisen, also die Herleitung desjenigen Satzes über die Zahlen E_n, welcher dem v. Staudt-Clausen'schen Satze von den Bernoulli'schen Zahlen entspricht, bildet das Hauptziel der folgenden Untersuchungen. Dabei sind die Methoden, deren ich mich bediene, zum Teil von allgemeinem Charakter, so dass dieselben auch über den vorliegenden speziellen Zweck hinaus bei Untersuchungen ähnlicher Art brauchbar sein dürften.

§ 1.

Ganzzahlige Potenzreihen.

Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich hier einige allgemeine Sätze über Potenzreihen voraus, welche weiterhin zur Anwendung gelangen. Diese Sätze beziehen sich auf Potenzreihen einer komplexen Variabeln u, welche die Gestalt

$$\mathfrak{P} = c_0 + c_1 \frac{u}{1!} + c_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{u^n}{n!} + \cdots \tag{1}$$

besitzen, wo $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ ganze rationale Zahlen bezeichnen.

Zur Abkürzung will ich eine derartige Potenzreihe „ganzzahlig" nennen.

Der Inbegriff aller ganzzahligen Potenzreihen bildet einen „Integritätsbereich", d. h. Summe, Differenz und Produkt irgend zweier ganzzahliger Potenzreihen sind wiederum ganzzahlige Reihen. Oder in anderer Ausdrucksweise: im Systeme aller ganzzahligen Potenzreihen sind Addition, Subtraktion und Multiplikation unbeschränkt ausführbare Operationen. Für die Addition und Subtraktion leuchtet diese Tatsache unmittelbar ein. Für die Multiplikation folgt sie aus der Bemerkung, dass das Produkt der Reihe (1) in die Reihe

$$\mathfrak{P}_1 = d_0 + d_1 \frac{u}{1!} + d_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + d_n \frac{u^n}{n!} + \cdots \tag{2}$$

durch die Reihe

$$\mathfrak{P}_2 = e_0 + e_1 \frac{u}{1!} + e_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + e_n \frac{u^n}{n!} + \cdots \tag{3}$$

vorgestellt ist, wenn man allgemein

$$e_n = c_0 d_n + n_1 c_1 d_{n-1} + n_2 c_2 d_{n-2} + \cdots + c_n d_0$$

setzt, unter $n_1, n_2, \ldots$ die Binomialkoeffizienten zur Basis n verstanden.

In dem Systeme der ganzzahligen Reihen sind aber überdies auch die Operationen der Differentiation und der Integration von $u = 0$ ab unbeschränkt ausführbar.

Denn bedeutet $\mathfrak{P}$ die ganzzahlige Reihe (1), so sind offenbar auch

$$\frac{d\mathfrak{P}}{du} = c_1 + c_2 \frac{u}{1!} + \cdots + c_{n+1} \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

und

$$\int_0^u \mathfrak{P}\, du = c_0 u + c_1 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_{n-1} \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

ganzzahlige Reihen.

Die Division ist im Gebiete der ganzzahligen Reihen nicht unbeschränkt ausführbar, und hierauf gründet sich die Definition:

„Eine ganzzahlige Reihe $\mathfrak{P}_1$ heisst durch eine andere $\mathfrak{P}$ teilbar, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}}$ ebenfalls eine ganzzahlige Reihe ist."

Die Teilbarkeit einer Reihe $\mathfrak{P}_1$ durch eine andere $\mathfrak{P}$ deute ich auch an durch die Kongruenz

$$\mathfrak{P}_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}},$$

und allgemeiner schreibe ich

$$\mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{P}_2 \pmod{\mathfrak{P}},$$

wenn $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist.

Im folgenden werde ich namentlich solche Kongruenzen zu betrachten haben, deren Modul $\mathfrak{P}$ sich auf eine ganze nicht verschwindende Zahl m reduziert. Offenbar ist eine derartige Kongruenz

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}_1 \pmod{m},$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ die Reihen (1) und (2) bezeichnen mögen, völlig gleichbedeutend mit den unzählig vielen gewöhnlichen Kongruenzen

$$c_n \equiv d_n \,(\text{mod. } m) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wenn die ganzzahlige Reihe (1) Divisor jeder beliebigen ganzzahligen Reihe, also insbesondere auch Divisor der Zahl 1, sein soll, so ist offenbar erforderlich, dass $c_0 = \pm 1$ ist[1]). Diese notwendige Bedingung ist aber auch hinreichend, wie aus der Gleichung

$$\frac{1}{\pm\mathfrak{P}(u)} = 1 + [1 \mp \mathfrak{P}(u)] + [1 \mp \mathfrak{P}(u)]^2 + \cdots$$

hervorgeht. In dem Gebiete der ganzzahligen Reihen spielen also diejenigen Reihen, welche sich für $u = 0$ auf ± 1 reduzieren, die Rolle der Einheiten. Diese Reihen will ich deshalb „Einheitsreihen" nennen.

Von Wichtigkeit wird weiterhin der folgende

Satz I. *Ist $\mathfrak{P}$ eine ganzzahlige Reihe, die mit u verschwindet, also kein konstantes Glied enthält, so ist für jede positive Zahl m*

$$\mathfrak{P}^m \equiv 0 \,(\text{mod. } m!). \tag{4}$$

Die Behauptung des Satzes, dass $\frac{1}{m!}\mathfrak{P}^m$ ganzzahlig ist, bedarf für $m = 1$ keines Beweises. Daher genügt es die Richtigkeit des Satzes nachzuweisen unter der Voraussetzung, dass der Satz schon für den Fall bewiesen sei, wo die Zahl $m - 1$ an die Stelle der Zahl m tritt. Nun ist aber

$$\frac{1}{m!}\mathfrak{P}^m = \int_0^u \frac{1}{(m-1)!}\mathfrak{P}^{m-1} \cdot \mathfrak{P}' du,$$

und da $\frac{1}{(m-1)!}\mathfrak{P}^{m-1}$ und $\mathfrak{P}'$ ganzzahlige Reihen sind, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, dass $\frac{1}{m!}\mathfrak{P}^m$ ebenfalls ganzzahlig ist, w.z.b.w.

An den Satz I knüpft sich ein anderer, welcher ebenfalls Bezug hat auf die m^{te} Potenz einer ganzzahligen Reihe ohne konstantes Glied. Es sei

$$\mathfrak{P} = c_1 u + c_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

eine solche Reihe und es werde

$$\mathfrak{P}^m = C_m \frac{u^m}{m!} + C_{m+1} \frac{u^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + C_k \frac{u^k}{k!} + \cdots$$

gesetzt. Dann ist $\frac{C_m}{m!} = c_1^m$, $\frac{C_{m+1}}{(m+1)!} = m c_1^{m-1} \cdot \frac{c_2}{2!}$, usw.; allgemein ist

[1]) [[Nach dem Handexemplar von Hurwitz sind hier und im folgenden beide Vorzeichen berücksichtigt.]]

$\frac{C_k}{k!}$ eine ganze ganzzahlige Funktion von $c_1, \frac{c_2}{2!}, \cdots \frac{c_{k-m+1}}{(k-m+1)!}$ und folglich wird der Nenner von $\frac{C_k}{k!}$, wenn man diese Zahl auf die kleinste Benennung bringt, keinen Primfaktor enthalten, der grösser ist als $k-m+1$. Wenn daher $k!$ durch eine Primzahl $p > k-m+1$ teilbar ist, so muss p notwendig in C_k aufgehen. Somit gilt der

Satz II. *Wenn die Reihe*

$$C_m \frac{u^m}{m!} + C_{m+1} \frac{u^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + C_k \frac{u^k}{k!} + \cdots$$

die m^{te} *Potenz einer ganzzahligen Reihe ist, so enthält* C_k *jede Primzahl als Faktor, die zwischen* $k-m+1$ *und* $k+1$ *liegt.*

Eine unmittelbare Folge des Satzes I ist der weitere Satz:

Setzt man in einer beliebigen ganzzahligen Reihe an Stelle von u *eine andere ganzzahlige Reihe ohne konstantes Glied und ordnet sodann nach Potenzen von* u, *so erhält man wiederum eine ganzzahlige Reihe.*

Wenn beispielsweise $\mathfrak{P}(u)$ eine mit u verschwindende ganzzahlige Reihe ist, so wird die Entwicklung von $e^{\mathfrak{P}(u)}$ nach Potenzen von u eine ganzzahlige Reihe, und zwar offenbar eine Einheitsreihe sein. Ebenso ist die Entwicklung des Logarithmus einer Einheitsreihe mit $c_0 = +1$ eine ganzzahlige Reihe, und man erkennt hieraus, dass die aus der Funktion $\pm e^{\mathfrak{P}(u)}$ entspringende Reihe die allgemeinste Einheitsreihe vorstellt. —

Man kann dieser ganzen Betrachtung eine andere, für manche Zwecke geeignetere Wendung geben, indem man an die Stelle der Potenzreihen die analytischen Funktionen setzt, welche sie definieren. Dann hat man es offenbar mit dem Inbegriff derjenigen analytischen Funktionen zu tun, welche an der Stelle $u = 0$ regulär sind und an dieser Stelle ebenso wie alle ihre Ableitungen ganzzahlige Werte annehmen.

Von dieser Auffassung ausgehend, beweist man leicht noch die folgenden Sätze, welche ich hier anführe, weil sie weiterhin — freilich in speziellerer Form — zur Geltung kommen.

Erstens: Es sei $\varphi(u)$ eine analytische Funktion, welche an der Stelle $u = 0$ regulär ist und einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi^{(n)}(u) = G\big(\varphi(u), \varphi'(u), \ldots \varphi^{(n-1)}(u)\big) \tag{5}$$

genügt. Dabei soll G eine ganze rationale Funktion der eingeklammerten Argumente bedeuten mit Koeffizienten, welche ganzzahlige Reihen sind. Wenn dann

$$\varphi(0), \varphi'(0), \ldots \varphi^{(n-1)}(0)$$

ganze Zahlen sind, so ist die Entwicklung von $\varphi(u)$ nach Potenzen von u eine ganzzahlige Reihe.

In der Tat ergibt sich sukzessive, indem man die Differentialgleichung (5) wiederholt nach u differenziert, dass

$$\varphi^{(n)}(0),\ \varphi^{(n+1)}(0),\ \varphi^{(n+2)}(0),\ \ldots$$

sämtlich ganze Zahlen sind[1]).

Zweitens: Durch Umkehrung der Reihe

$$t = \mathfrak{P}(u) = u + c_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

möge die Reihe

$$u = \mathfrak{P}_1(t) = t + d_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + d_n \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

entstehen. Wenn nun $\mathfrak{P}(u)$ eine ganzzahlige Reihe ist, so gilt das Nämliche von der Reihe $\mathfrak{P}_1(t)$.

Es ist nämlich $\frac{d^n u}{dt^n} \cdot \left(\frac{dt}{du}\right)^{2n-1}$ eine ganze ganzzahlige Funktion von $\frac{dt}{du}, \frac{d^2 t}{du^2}, \ldots \frac{d^n t}{du^n}$ und folglich (wie die Annahme $t = u = 0$ ergibt) d_n eine ganzzahlige Funktion von $c_2, \ldots c_n$, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die vorstehenden Betrachtungen und Sätze ohne wesentliche Änderung auch dann noch gelten, wenn man an die Stelle der „ganzzahligen" Reihen diejenigen Potenzreihen (1) treten lässt, für welche $c_0, c_1, c_2, \ldots$ komplexe ganze Zahlen $a + ib$ im Gaussischen Sinne oder, noch allgemeiner, ganze algebraische Zahlen eines endlichen Zahlkörpers sind.

§ 2.

Die Zahlen E_n als Entwicklungskoeffizienten.

Aus der Definitionsgleichung (D) der Zahlen E_n ist ersichtlich, dass diese Zahlen bei der Entwicklung der Weierstrass'schen Funktion

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum \left\{ \frac{1}{(u - (r + is)\omega)^2} - \frac{1}{((r + is)\omega)^2} \right\} \tag{6}$$

---

1) Der Satz gilt, falls $\varphi(0) = 0$ ist, auch dann noch, wenn die rechte Seite der Differentialgleichung (5) eine ganze rationale Funktion von

$$\varphi(u),\ \varphi'(u), \ldots \varphi^{(n-1)}(u)$$

der Gestalt

$$\sum A \frac{(\varphi)^r}{r!} (\varphi')^{r_1} \cdots (\varphi^{(n-1)})^{r_{n-1}}$$

ist, wobei die Koeffizienten A ganzzahlige Reihen bedeuten.

nach aufsteigenden Potenzen von u zum Vorschein kommen werden. In der Tat ergibt sich ohne Schwierigkeit, dass

$$(7)\quad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{2^4 E_1}{4}\cdot\frac{u^2}{2!} + \frac{2^8 E_2}{8}\cdot\frac{u^6}{6!} + \cdots + \frac{2^{4n}E_n}{4n}\cdot\frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!} + \cdots$$

ist. Durch die Substitution $x = \frac{1}{\sqrt{s}}$ erhält man für die reelle Periode ω die Darstellung

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\int_1^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3-4s}}.$$

Folglich haben die Invarianten von $\wp(u)$ die Werte

$$g_2 = 4,\quad g_3 = 0,$$

und die Differentialgleichung der Funktion $\wp(u)$ lautet daher:

$$(8)\qquad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - 4\wp(u).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich zunächst in bekannter Weise eine Rekursionsformel für die Zahlen $E_1, E_2, E_3, \ldots$. Man differenziere nämlich (8) nach u, wodurch man

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - 2$$

findet; hierin setze man nach (7)

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_1^\infty \frac{2^{4n}E_n}{4n}\cdot\frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!},$$

$$\wp''(u) = \frac{6}{u^4} + \sum_1^\infty \frac{2^{4n}E_n}{4n}\cdot\frac{u^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

Der Vergleich der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von u ergibt dann

$$E_1 = \frac{1}{10}$$

und

$$(9)\qquad \begin{gathered}(2n-3)(4n-1)(4n+1)E_n = 3\sum_{r+s=n}(4r-1)(4s-1)(4n)_{4r}\cdot E_r E_s \\ (n = 2, 3, 4, \ldots),\end{gathered}$$

wobei die Summation auf alle positiven Zahlen r, s auszudehnen ist, welche der Bedingung $r + s = n$ genügen. Unter $(4n)_{4r}$ ist der $4r^{\text{te}}$ Binomialkoeffizient zur Basis $4n$ zu verstehen.

Aus der Formel (9) geht hervor, dass die Zahlen E_n positive, reelle rationale Zahlen sind. Am Schlusse dieser Arbeit findet man eine Tabelle der Zahlen E_n, die ich auf Grund der Formel (9) hergestellt habe.

§ 3.

Die Funktion $\varphi(u)$.

Die Funktion

$$(10)\quad \varphi(u) = \sqrt{\frac{1}{\wp(u)}} = u + k_1 \frac{u^5}{5!} + k_2 \frac{u^9}{9!} + \cdots + k_n \frac{u^{4n+1}}{(4n+1)!} + \cdots$$

befriedigt die Differentialgleichung

$$(11)\quad \varphi'^2(u) = 1 - \varphi^4(u).$$

Sie ist diejenige eindeutige doppeltperiodische Funktion, welche Eisenstein seinen Untersuchungen über die biquadratischen Reste zugrunde gelegt hat[1]). Die Werte

$$2\omega, (1+i)\omega$$

bilden ein Paar primitiver Perioden von $\varphi(u)$. Das Additionstheorem dieser Funktion spricht sich in der Gleichung aus:

$$(12)\quad \varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\varphi'(v) + \varphi(v)\varphi'(u)}{1 + \varphi^2(u)\varphi^2(v)}.$$

Ferner geht aus (10) hervor, dass

$$(13)\quad \varphi(iu) = i\varphi(u)$$

ist. Durch Differentiation von (11) ergibt sich

$$(14)\quad \varphi''(u) = -2\varphi^3(u),$$

und diese Differentialgleichung hat die Gestalt (5) in § 1. Daraus folgt, dass die Entwicklungskoeffizienten

$$k_0 = 1, k_1, k_2, \ldots k_n, \ldots$$

der Funktion $\varphi(u)$ sämtlich reelle ganze Zahlen sind.

Bemerkenswert und für die weiteren Untersuchungen wichtig ist die Tatsache, dass sich die Entwicklungskoeffizienten der Funktionen $\frac{1}{\varphi(u)}$ und $\frac{1}{2}\varphi^2(u)$ in einfacher Weise durch die Zahlen E_n ausdrücken lassen. Die Entwicklungen dieser Funktionen will ich in folgender Form ansetzen:

$$(15)\quad \sqrt{\wp(u)} = \frac{1}{\varphi(u)} = \frac{1}{u} + \frac{F_1}{4}\cdot\frac{u^3}{3!} + \frac{F_2}{8}\cdot\frac{u^7}{7!} + \cdots + \frac{F_n}{4n}\cdot\frac{u^{4n-1}}{(4n-1)!} + \cdots,$$

$$(16)\quad \frac{1}{2\wp(u)} = \frac{1}{2}\varphi^2(u) = e_0 \frac{u^2}{2!} + e_1 \frac{u^6}{6!} + e_2 \frac{u^{10}}{10!} + \cdots + e_n \frac{u^{4n+2}}{(4n+2)!} + \cdots.$$

---

[1]) Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen I, Crelles Journal, Bd. 30 (1846), S. 185—210, oder Mathem. Abhandlungen, Berlin 1847, S. 129—154.

Wenn nun m eine zweigliedrige komplexe Primzahl ist, so wird $\mu = N(m)$ eine reelle Primzahl von der Form $4k+1$. In diesem Falle ist keine der Zahlen $5, 9, 13, \ldots \mu - 4$ durch m teilbar. Daher folgt aus der Tatsache, dass $c_0, c_1, c_2, \ldots$ durch m teilbar sind, sukzessive $a_1 \equiv 0, a_2 \equiv 0, a_3 \equiv 0, \ldots a_{\frac{\mu-5}{4}} \equiv 0 \pmod{m}$. D. h. es sind alle Koeffizienten des Zählers mit Ausnahme des Koeffizienten von x^{μ}, welcher gleich 1 ist, durch m teilbar.

Wenn zweitens $m = -q$ ist, wo q eine reelle Primzahl von der Form $4k+3$ bezeichnet, so ist die erste Zahl der Reihe $5, 9, 13, \ldots$, welche durch m teilbar ist, offenbar gleich $3q$. In diesem Falle sind also wenigstens die ersten $\frac{3q-1}{4}$ Koeffizienten des Zählers $U(x)$, nämlich

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{\frac{3q-5}{4}}$$

durch $m = -q$ teilbar.

§ 5.

Der Nenner der Zahl E_n.

Die Zahl E_n ist eine reelle positive rationale Zahl und lässt sich also auf die Form bringen

$$E_n = \frac{Z_n}{N_n}, \tag{25}$$

wo Z_n, N_n positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind.

Mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln gelingt es nun, Näheres über die Primfaktoren des Nenners N_n festzustellen.

Zu diesem Zwecke betrachte ich die Funktion

$$F(u) = m^2\wp(mu) - \wp(u) = \frac{m^2}{\varphi^2(mu)} - \frac{1}{\varphi^2(u)}, \tag{26}$$

wobei m eine ungerade primäre komplexe ganze Zahl bedeutet. Die Entwicklung dieser Funktion nach aufsteigenden Potenzen von u lautet:

$$F(u) = \sum_1^{\infty} 2^{4n}(m^{4n}-1)\frac{E_n}{4n}\frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!}. \tag{27}$$

Andererseits ist nach dem vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{m^2 V^2(x)}{U^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{[mV(x)x - U(x)][mV(x)x + U(x)]}{x^2 U^2(x)} \\ &= \frac{[(mb_1 - a_1)x^2 + (mb_2 - a_2)x^6 + \cdots][2m + (mb_1 + a_1)x^4 + (mb_2 + a_2)x^8 + \cdots]}{[m + a_1 x^4 + a_2 x^8 + \cdots + x^{\mu-1}]^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung u durch mu, so geht

$$x = \varphi(u) = u + k_1 \frac{u^5}{5!} + k_2 \frac{u^9}{9!} + \cdots$$

in eine durch m teilbare ganzzahlige Reihe über. Dasselbe gilt von allen Potenzen von x, so dass die Gleichung (28), nachdem man Zähler und Nenner rechts durch m^2 dividiert hat, die Form erhält

$$F(mu) = \frac{\mathfrak{P}_1(u)}{\mathfrak{P}_2(u)},$$

wo $\mathfrak{P}_1(u)$ und $\mathfrak{P}_2(u)$ ganzzahlige Reihen sind, von denen die letztere das Anfangsglied 1 besitzt, also eine Einheitsreihe ist. Folglich ist $F(mu)$ selbst eine ganzzahlige Reihe. Man erkennt somit:

Wenn m eine ungerade komplexe ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$(2m)^{4n-2}(m^{4n}-1)\frac{E_n}{n} = G_{m,n} \tag{29}$$

eine ganze Zahl.

Die beim Beweise gemachte Voraussetzung, dass m primär sei, darf unterdrückt werden, weil die linke Seite von (29) höchstens das Vorzeichen ändert, wenn man m durch eine assoziierte Zahl $i^s \cdot m$ ersetzt.

Für den Fall, wo $m = -q$ ist, unter q eine Primzahl der Form $4k+3$ verstanden, lässt sich der vorstehende Satz noch wesentlich verschärfen. Auf der rechten Seite der Gleichung (28) ist dann nämlich im Nenner

$$m + a_1 x^4 + a_2 x^8 + \cdots + x^{\mu-1}$$

eine durch m teilbare ganzzahlige Reihe. In der Tat sind die Koeffizienten

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{3q-5}{4}}$$

durch m teilbar und die Glieder $a_r x^{4r}$, in welchen $r \geq \frac{3q-1}{4}$, also $4r$ sicher $> q$ ist, sind ebenfalls durch m teilbar, weil $\frac{x^{4r}}{(4r)!}$ nach § 1 eine ganzzahlige Reihe ist und $(4r)!$ den Faktor q mindestens einmal enthält. Aus entsprechenden Gründen ist jeder Faktor im Zähler auf der rechten Seite der Gleichung (28) eine durch m teilbare ganzzahlige Reihe. Hieraus folgt nun, dass in dem jetzt betrachteten Falle schon $F(u)$ eine ganzzahlige Reihe ist, oder:

Wenn q eine reelle Primzahl von der Form $4k+3$ bezeichnet, so ist

$$2^{4n}(q^{4n}-1)\cdot\frac{E_n}{4n} = H_{q,n} \tag{30}$$

eine ganze Zahl.

Wenn hier $2n$ den grössten zulässigen Wert $q-1$ erhält, so ergibt sich, weil

$$\varepsilon_{q-1}^{(q-1)} = (q-1)! \equiv -1 \pmod{q}$$

ist,

$$e_{\frac{q-3}{4}} \equiv -\frac{1}{2}\cdot\frac{5.9\ldots(q-2)}{3.7\ldots(q-4)} \pmod{q}$$

oder

(72) $$e_{\frac{q-3}{4}} \equiv \frac{1.5\ldots(q-6)}{3.7\ldots(q-4)} \pmod{q},$$

und die Kongruenz (71) lässt sich infolgedessen auch so schreiben:

(73) $$\varepsilon_{q-1}^{(2n)} \equiv -\frac{(2n+3)(2n+7)\ldots(q-2)}{(2n+1)(2n+5)\ldots(q-4)} \pmod{q}.$$

§ 10.

Die Partialbruchzerlegung der Zahl E_n.

Aus den Kongruenzen (40) und (66) geht nun hervor, dass

$$\varepsilon \equiv (2a)^{\frac{4n}{p-1}} \pmod{p}$$

ist und dass folglich die Partialbruchzerlegung der Zahl E_n die Gestalt hat:

(74) $$E_n = G + \frac{\varepsilon_0}{2^a} + \sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p}.$$

Hier ist die Summe über diejenigen Primzahlen p von der Form $4k+1$ auszudehnen, für welche $p-1$ ein Divisor von $4n$ ist, und für jede einzelne dieser Primzahlen p bedeutet a den reellen Teil ihres primären komplexen Primfaktors $a+ib$. Die Zahl a kann hiernach auch definiert werden als die Basis des ungeraden Quadrates bei der Zerlegung von p in die Summe zweier Quadrate:

$$p = a^2 + b^2,$$

und zwar diese Basis mit solchem Vorzeichen genommen, dass die Kongruenz

$$a \equiv b + 1 \pmod{4}$$

besteht.

Es erübrigt noch, den auf die Primzahl 2 bezüglichen Teil $\frac{\varepsilon_0}{2^a}$ der Partialbruchzerlegung von E_n zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bediene ich mich der Rekursionsformel (9).

Aus dieser Formel ergibt sich leicht, dass $\frac{\varepsilon_0}{2^a} = \frac{1}{2}$, oder was dasselbe besagt, dass

$$2E_n \equiv 1 \pmod{2} \tag{75}$$

ist. In der Tat: die Formel (9) lässt sich, je nachdem n gerade oder ungerade ist, in die Gestalt bringen:

$$(2n-3)(16n^2-1).(2E_n) \tag{76}$$
$$=3\left\{\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}(4r-1)(4n-4r-1)(4n)_{4r}(2E_r).(2E_{n-r})+(2n-1)^2(4n)_{2n}\frac{1}{2}(2E_{\frac{n}{2}})^2\right\}$$

resp.

$$(2n-3)(16n^2-1)(2E_n) = 3\cdot\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}(4r-1)(4n-4r-1)(4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r}). \tag{77}$$

Hierbei ist, wie man leicht erkennt, der Faktor $(4n)_{2n}\cdot\frac{1}{2}$ in (76) eine ganze Zahl. Nimmt man nun an, die Kongruenz (75) sei schon für die Zahlen $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ als richtig nachgewiesen, so folgt aus (76) resp. (77)

$$2E_n \equiv \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}(4n)_{4r}+\frac{1}{2}(4n)_{2n}=\frac{1}{8}[(1+1)^{4n}+(1+i)^{4n}+(1-1)^{4n}+(1-i)^{4n}-8)] \pmod{2}$$

resp.

$$2E_n \equiv \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}(4n)_{4r}=\frac{1}{8}[(1+1)^{4n}+(1+i)^{4n}+(1-1)^{4n}+(1-i)^{4n}-8] \pmod{2},$$

oder

$$2E_n \equiv 1 \pmod{2}.$$

Da aber für $E_1 = \frac{1}{10}$ die Kongruenz (75) erfüllt ist, so gilt sie allgemein.

Hiermit ist nun das Hauptziel dieser Untersuchung erreicht: *Die Partialbruchzerlegung der Zahl E_n lautet wie folgt:*

$$E_n = G_n + \frac{1}{2} + \sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p}. \tag{78}$$

Dabei bezeichnet G_n eine ganze Zahl und die Summe ist über diejenigen Primzahlen p von der Form $4k+1$ zu erstrecken, für welche $p-1$

ein Divisor von $4n$ ist. Die der einzelnen Primzahl p entsprechende Zahl a ist die Basis des ungeraden Quadrates in der Zerlegung

$$p = a^2 + b^2,$$

und zwar mit solchem Vorzeichen genommen, dass

$$a \equiv b + 1 \pmod{4}$$

ist.

§ 11.

Die ganzzahligen Teile in der Partialbruchzerlegung der Zahlen E_n.

Vermöge der Gleichungen (76) und (77) gelingt es, den Rest der Zahl $2E_n$ nach dem Modul 16 zu bestimmen. Für die niedrigen Werte von n findet man nach dem Modul 16:

$$2E_1 = \frac{1}{5} \equiv -3,\quad 2E_2 = \frac{3}{5} \equiv 7,\quad 2E_3 = \frac{3^4.7}{5.13} \equiv 7,$$
$$2E_4 = \frac{3^4.7^2.11}{5.17} \equiv -1,\quad 2E_5 = \frac{3^6.7^2.11}{5} \equiv 7 \text{ usw.}$$

Durch Fortsetzung der Rechnung wird man auf die Vermutung geführt, dass vom Index $n = 3$ ab die Kongruenz

$$2E_n \equiv 8n - 1 \pmod{16} \tag{79}$$

besteht, dass also $2E_n \equiv 7$ oder $-1 \pmod{16}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Diese Vermutung bestätigt sich durch folgende Schlüsse. Aus den Gleichungen (76) und (77) folgen zunächst nach dem Modul 16 die Kongruenzen:

$$(2n-3)(2E_n) \equiv (4n-1).3.\left\{\sum_{r=1}^{r=\frac{n}{2}-1} (4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r}) + \frac{1}{2}(4n)_{2n}(2E_{\frac{n}{2}})^2\right\}$$

resp.

$$(2n-3)(2E_n) \equiv (4n-1).3.\left\{\sum_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} (4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r})\right\},$$

und hieraus, durch Multiplikation mit $4n+1$, in beiden Fällen

$$(4n+1)(2n-3).(2E_n) \equiv -\frac{3}{2}\sum_{r=1}^{r=n-1} (4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r}).$$

Sei nun $n > 5$ und überdies die Kongruenz (79) schon bewiesen für $n = 3, 4, \ldots, n-1$. Dann folgt[1])

$$\begin{aligned}
&(4n+1)(2n-3)(2E_n)\\
&\equiv -\frac{3}{2}\left[2.(4n)_4(2E_1)(2E_{n-1}) + 2(4n)_8(2E_2)(2E_{n-2}) + \sum_{r=3}^{r=n-3}(4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r})\right]\\
&\equiv +\frac{3}{2}\Big[2.(4n)_4.3.(8(n-1)-1) - 2.(4n)_8.7.(8(n-2)-1)\\
&\qquad\qquad - \sum_{r=3}^{r=n-3}(4n)_{4r}(8r-1)(8n-8r-1)\Big].
\end{aligned}$$

Nach leichten Reduktionen und unter Benutzung der Kongruenz[2])

$$(4n)_{4r} \equiv (2n)_{2r} \pmod{16}$$

kommt:

$$\begin{aligned}
&(4n+1)(2n-3)(2E_n)\\
&\equiv 3\left[(2n)_2(8n+5) + (2n)_4(8n+7) + (8n-1)\cdot\frac{1}{2}\sum_{r=3}^{r=n-3}(2n)_{2r}\right].
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{r=3}^{r=n-3}(2n)_{2r} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1+1)^{2n} + \frac{1}{2}(1-1)^{2n} - 2 - 2(2n)_2 - 2(2n)_4\right]\\
&\equiv -1 - (2n)_2 - (2n)_4 \pmod{16},
\end{aligned}$$

so erkennt man, dass die vorhergehende Kongruenz

$$\begin{aligned}
(4n+1)(2n-3)(2E_n) &\equiv 3[6.(2n)_2 + 8(2n)_4 - (8n-1)]\\
&\equiv 2n(2n-1) + 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) + 8n + 3\\
&\equiv 2n(2n-1) + 4n(n-1) + 8n + 3\\
&\equiv 8n^2 + 2n + 3
\end{aligned}$$

liefert. Da $8n^2 \equiv 8n \pmod{16}$, so ergibt sich schliesslich

$$2E_n \equiv \frac{10n+3}{(4n+1)\cdot(2n-3)} \equiv \frac{10n+3}{-2n-3} \equiv 8n-1 \pmod{16},$$

---

[1]) Die folgenden Kongruenzen beziehen sich sämtlich auf den Modul 16, sofern nicht ein anderer Modul ausdrücklich angegeben ist.

[2]) Es ist

$$(4n)_{4r} = (2n)_{2r} \prod_{k=0}^{r-1}\frac{[4(n-k)-1][4(n-k)-3]}{(4k+1)(4k+3)},$$

und für jeden Wert von k

$$[4(n-k)-1][4(n-k)-3] \equiv (4k+1)(4k+3) \equiv 1\cdot 3 \pmod{16}.$$

Ist $n > 1$, so lässt die Zahl G_n durch 4 dividiert den Rest 1 oder den Rest 3, je nachdem $4n+1$ Primzahl ist oder nicht.

Dass die Zahlen G_n, abgesehen von $G_1 = 0$, sämtlich ungerade sind, ist eine selbstverständliche Folge der vorstehenden Sätze.

§ 12.

Die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\frac{1}{2}\varphi^2(u)$.

Die Kongruenzen (62) und (67) bestehen unter der Voraussetzung, dass $2n < p$ resp. $2n < q$ ist.

Diese Voraussetzung ist für $n = 1$ stets erfüllt. In diesem Falle ist überdies, wie schon oben bemerkt wurde, $\varepsilon_{2k}^{(2n)} = \varepsilon_{2k}^{(2)} = 0$ oder $= 2e_{\frac{k-1}{2}}$, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Daher führt die Annahme $n = 1$ zu folgendem Satze über die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\frac{1}{2}\varphi^2(u)$, welche durch die Gleichung (16), nämlich

$$\frac{1}{2\wp(u)} = \frac{1}{2}\varphi^2(u) = e_0\frac{u^2}{2!} + e_1\frac{u^6}{6!} + \cdots + e_n\frac{u^{4n+2}}{(4n+2)!} + \cdots,$$

definiert sind:

Bezeichnet p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$ und ist $p' = \frac{p-1}{4}$, so besteht die Kongruenz

$$e_{n+p'} \equiv e_{p'}e_n \pmod{p}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{81}$$

durch welche die Reste der Zahlen $e_n \pmod{p}$ auf die der ersten $p'+1$ unter ihnen zurückgeführt werden. Überdies ist nach (63) und (64)

$$e_{p'} \equiv \frac{3.7.11\ldots(p-2)}{1.5.9\ldots(p-4)} \equiv 2a \pmod{p}.$$

Bezeichnet andererseits q eine Primzahl $\equiv 3 \pmod{4}$ und ist $q' = \frac{q-3}{4}$, so ist nach (72)

$$e_{q'} \equiv \frac{1.5.9\ldots(q-6)}{3.7.11\ldots(q-4)} \pmod{q}$$

und die Zahlen $e_{q'+1}, e_{q'+2}, \ldots$ sind sämtlich durch q teilbar.

Diese Eigenschaften der Zahlen e_n lassen sich, vermöge der Gleichung (19), auf die Zahlen E_n übertragen.

Beispielsweise ergibt sich so, dass der Zähler der Zahl

$$\left(1-(1+i)^{4n}\right)\frac{E_n}{n}$$

den Faktor q besitzt, sobald $n > \frac{q+1}{4}$ ist. Indessen dürften diese Sätze nur ein untergeordnetes Interesse beanspruchen, da für die Zahlen E_n allgemeinere Kongruenzen zu gelten scheinen, welche jene Sätze in sich enthalten.

Zur Berechnung der Zahlen e_n kann man sich einer Rekursionsformel bedienen, die sich folgendermassen ergibt. Die Funktion $z = \varphi^2(u)$ genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4(z - z^3), \tag{82}$$

aus welcher durch Differentiation

$$\frac{d^2 z}{du^2} = 2 - 6z^2 \tag{83}$$

folgt. Setzt man hier

$$z = 2\sum_{n=0}^{\infty} e_n \frac{u^{4n+2}}{(4n+2)!},$$

so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung

$$e_{n+1} = -12\sum (4n+4)_{4r+2}\, e_r e_s, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{84}$$

wobei die Summe über alle nicht negativen Zahlen r, s zu erstrecken ist, welche die Bedingung $r + s = n$ befriedigen.

Die Rekursionsformel (84) vereinfacht sich noch etwas, wenn man

$$e_n = (-12)^n \cdot \partial_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{85}$$

setzt. Man erhält dann offenbar für die Zahlen ∂_n die Gleichung

$$\partial_{n+1} = \sum (4n+4)_{4r+2}\, \partial_r \partial_s, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{86}$$

aus welcher hervorgeht, dass diese Zahlen positive ganze Zahlen sind.

I. Tabelle der Zerfällungen $p = a^2 + b^2$, $(a \equiv b + 1 \pmod{4})$.

p	a	b	$2a$
5	-1	2	-2
13	3	2	6
17	1	4	2
29	-5	2	-10
37	-1	6	-2
41	5	4	10

II. Tabelle der Zahlen $E_n = G_n + \frac{1}{2} + \sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p}$.

Please enter 2770 ✓

(Wegen des raschen Anwachsens der ganzzahligen Teile G_n sind diese nur bis $n = 6$ in der Tabelle angegeben.)

$$E_1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$$

$$E_2 = \frac{3}{10} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{2^2}{5}$$

$$E_3 = \frac{3^4.7}{10.13} = 5 + \frac{1}{2} - \frac{2^3}{5} + \frac{6}{13}$$

$$E_4 = \frac{3^4.7^2.11}{10.17} = 253 + \frac{1}{2} + \frac{2^4}{5} + \frac{2}{17}$$

$$E_5 = \frac{3^6.7^2.11}{10} = 39299 + \frac{1}{2} - \frac{2^5}{5}$$

$$E_6 = \frac{3^7.7^3.11^2.19}{10.13} = 13265939 + \frac{1}{2} + \frac{2^6}{5} + \frac{6^2}{13}$$

$$E_7 = \frac{3^9.7^4.11^2.19.23}{10.29} = G_7 + \frac{1}{2} - \frac{2^7}{5} - \frac{10}{29}$$

$$E_8 = \frac{3^{10}.7^4.11^2.19.23.223}{10.17} = G_8 + \frac{1}{2} + \frac{2^8}{5} + \frac{2^2}{17}$$

$$E_9 = \frac{3^{14}.7^5.11^3.19.23.31.61}{10.13.37} = G_9 + \frac{1}{2} - \frac{2^9}{5} + \frac{6^3}{13} - \frac{2}{37}$$

$$E_{10} = \frac{3^{13}.7^5.11^3.19^2.23.31.2381}{10.41} = G_{10} + \frac{1}{2} + \frac{2^{10}}{5} + \frac{10}{41}$$

$$E_{11} = \frac{3^{15}.7^6.11^4.19^4.23.31}{10} = G_{11} + \frac{1}{2} - \frac{2^{11}}{5}$$

$$E_{12} = \frac{3^{16}.7^5.11^4.19^2.23^2.31.43.1162253}{10.13.17} = G_{12} + \frac{1}{2} + \frac{2^{12}}{5} + \frac{6^4}{13} + \frac{2^3}{17}$$

III. Tabelle der Zahlen e_n.

Reste nach dem Modul p:	$p=5$ $(p'=1)$	$p=13$ $(p'=3)$	$p=17$ $(p'=4)$	$p=29$ $(p'=7)$	$p=37$ $(p'=9)$	$p=41$ $(p'=10)$
$e_0 = 1$	1	1	1	1	1	1
$e_1 = -2^3.3^2$	−2	6	−4	15	2	10
$e_2 = 2^8.3^3.7$	−1	−2	2	12	25	4
$e_3 = -2^{10}.3^5.7^2.11$	2	6	−2	−1	1	23
$e_4 = 2^{16}.3^6.7^2.11.41$	1	10	2	13	9	0
$e_5 = -2^{19}.3^8.7^4.11^2.19$	−2	1	−8	7	1	−14
$e_6 = 2^{24}.3^9.7^3.11^2.19.23.113$	−1	10	4	12	14	38
$e_7 = -2^{25}.3^{11}.7^4.11^2.19.23.223.257$	2	−5	−4	−10	25	−6
$e_8 = 2^{32}.3^{12}.7^5.11^3.19.23.31.61.109$	1	6	4	24	18	10
$e_9 = -2^{35}.3^{14}.7^5.11^4.19^2.23.31^2.2381$	−2	−5	1	25	−2	−4
$e_{10} = 2^{40}.3^{15}.7^6.11^3.19^4.23.31.397.2113$	−1	9	8	10	−4	10
$e_{11} = -2^{42}.3^{17}.7^6.11^4.19^2.23^2.31.43.241.1162253$	2	10	−8	15	24	18

Two sequences.

R8

BAMS 32(1926)

→ 2307
2308

[May-June,

j. Let W denote the set
vals of Q and all intervals
it of G plus its endpoints.
$K_1+K_2+K_3+\cdots$. It
set of measure zero and
by the set of intervals W.
hat $\overline{W}$ covers F and such
ntervals of $\overline{W}$ exists (as a

GENERAL MEAN OF
HE TRUE VALUE*

DD

ements x_i suppose that the
tive ... er bound b in some
value a, and that for each

(*finite*); $m_0=1$.

reasing function $f(x)$, *with*
and

$f(x_i)\}$, $i=1, 2, \cdots, n$,
probability $>1-\eta$ *that*

ndition† is

$(x)\,dx$.

27, 1926.
der general laws of error, SKANDI-
), pp. 133–158. Apply theorem,
$(a)=z$; then $\Sigma f(x_i)<nf(a-\epsilon)$.

If $f(x)=x^r$, (4) requires that $a^r=m_r$. This can be satisfied if $m_r<a^r$ for some r; since m_r is a continuous function of r, and if r is large enough,

$$m_r \geqq b\int_a^{a+k} x^r\,dx > a^r .$$

In any case, however, (4) can be satisfied by

$$f(x)=cx^r+z;\quad z=2x-x^2/a,\quad x\leqq a;\quad z=a,\quad x\geqq a,$$

because a positive c can be found satisfying $ca^r+a=cm_r+g$, where $g<a$, noting that $z\leqq\alpha$, and $z<a$ inside $(a-k, a)$ where $\phi(x)\geqq b$.

This M satisfying (3) reduces to the arithmetic mean only if $m_1=a$.

THE UNIVERSITY OF TEXAS

CONSECUTIVE QUADRATIC RESIDUES* ‡

BY A. A. BENNETT

By an extension of the methods described in a paper to appear shortly in the TÔHOKU MATHEMATICAL JOURNAL, I have succeeded in proving that for each prime greater than 193 there is at least one sequence of five consecutive positive reduced quadratic residues. The proof entails the examination of many hundred linear forms which together include all primes. Since the method would prove excessively laborious for even the next case, that of six consecutive quadratic residues, the computational details seem hardly to warrant the space required for their complete publication. As a result of the actual construction of a complete table of quadratic residues for all primes less than 331, we obtain the brief table subjoined. Here p denotes in turn each prime number, r denotes for the given p the maximum number of positive reduced quadratic residues which appear

*Presented to the Society, October 31, 1925.

‡ and consecutive quadratic non-residues.

Type 4.