Voigt A19538 → A918-920

A117-8

A8277, A19538

$a\binom{x}{n}$ einem Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten äquivalent sein, so muß a den Faktor $n!$ enthalten, und soll ein Polyform $a\binom{x}{n}+b\binom{x}{n-1}+c\binom{x}{n-2}+\ldots+k\binom{x}{0}$ durch ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar sein, so müssen $a, b, c, \ldots, k$ der Reihe nach durch $n!$, $(n-1)!$, $(n-2)!$, ..., $1!$ teilbar sein. — Ein Potenzpolynom braucht daher nicht ganzzahlige Koeffizienten zu besitzen, um für alle ganzzahligen Werte des Terms ganze Zahlen zu liefern. — Ist aber ein Polyform gleich einem Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, so sind die Koeffizienten des Polyforms der Reihe nach durch $n!$, $(n-1)!$, $(n-2)!$, ..., $1!$ teilbar.

§ 21. Verwandlung von Potenzen in Polyforme.

Zur Verwandlung von x^n in ein Polyform bedürfen wir $n+1$ aufeinanderfolgende Glieder der durch x^n definierten arithmetischen Reihe. Wir wählen als solche die Glieder $0, 1, 2^n, 3^n, \ldots, n^n$. Bilden wir mit deren Hilfe das zugehörige Zahlendreieck, so ist die Form der Glieder der ersten (linken) Seite dieses Dreiecks

(1) $$\Delta^r 0^n = r^n - (r-1)^n\binom{r}{1} + (r-2)^n\binom{r}{2} - + \ldots + \binom{-1}{r-1}\binom{r}{r-1}.$$

Wir wollen diese Konstituente der Reihe kurz mit K_n^r bezeichnen und die r-te **Konformante** der n-ten Potenz nennen. Es ist dann

(2) $$x^n = K_n^1\cdot\binom{x}{1} + K_n^2\cdot\binom{x}{2} + K_n^3\cdot\binom{x}{3} + \ldots + K_n^n\cdot\binom{x}{n}.$$

Das **Bildungsgesetz** der Konformanten ergibt sich nun folgendermaßen: Es ist

$$K_n^r = r\Big\{r^{n-1} - (r-1)^{n-1}\binom{r-1}{1} + (r-2)^{n-1}\binom{r-1}{2} - + \ldots$$
$$+ \binom{-1}{r-1}\binom{r-1}{r-1}\Big\} = r\Gamma_{n-1}^r,$$

wenn wir die eingeklammerte Größe mit Γ_{n-1}^r bezeichnen. Mit Benutzung dieser Relation können wir schreiben:

$$(x+1)^{n+1} = \Gamma_n^1\binom{x+1}{1} + 2\Gamma_n^2\binom{x+1}{2} + 3\Gamma_n^3\binom{x+1}{3} + \ldots$$
$$+ (n+1)\Gamma_n^{n+1}\binom{x+1}{n+1},$$

woraus, da allgemein $\alpha\binom{x+1}{\alpha} = (x+1)\binom{x}{\alpha-1}$ ist, nach Division der Gleichung durch $x+1$

$$(x+1)^n = \Gamma_n^1 + \Gamma_n^2\binom{x}{1} + \Gamma_n^3\binom{x}{2} + \ldots + \Gamma_n^{n+1}\binom{x}{n}$$

hervorgeht.

Aus Gleichung (2) ergibt sich nun nach Umformung

$$(x+1)^n = K_n^1 + (K_n^1 + K_n^2)\binom{x}{1} + (K_n^2 + K_n^3)\binom{x}{2} + \ldots + K_n^n\binom{x}{n}.$$

Vergleichen wir nun die Koeffizienten dieser beiden Formen von $(x+1)^n$, so ergeben sich unter Berücksichtigung von $K^r_n = r\Gamma^r_n$ die Relationen

$$K^n_1 = K^1_{n+1}$$
$$2(K^1_n + K^2_n) = K^2_{n+1}$$
$$3(K^2_n + K^3_n) = K^3_{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n(K^{n-1}_n + K^n_n) = K^n_{n+1}$$
$$(n+1)K^n_n = K^{n+1}_{n+1}.$$

Von den beiden Endgleichungen abgesehen, lautet also das Bildungsgesetz der Konformanten

(3) $$r(K^{r-1}_n + K^r_n) = K^r_{n+1}$$

nach welchem die folgende Tabelle berechnet ist.

	K^1_n	K^2_n	K^3_n	K^4_n	K^5_n	K^6_n	K^7_n	K^8_n	K^9_n
K^r_0	1	918							
K^r_1	1	0	1117						
K^r_2	1	2	0	919					
K^r_3	1	6	6	0	1118				
K^r_4	1	14	36	24	0	920			
K^r_5	1	30	150	240	120	0			
K^r_6	1	62	540	1560	1800	720	0		
K^r_7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	
K^r_8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0
K^r_9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880

$\Delta = 19538$

Kann man eine Potenz in eine Polyform verwandeln, so auch ein Polynom, indem man jeden Posten für sich verwandelt. — Eine praktische Methode daneben ist die, mit Hilfe des gegebenen Polynoms die erforderliche Anzahl aufeinanderfolgender Glieder zu berechnen, was am besten nach der von Descartes angegebenen Methode[1]) geschieht, um aus diesen dann mittels des Zahlendreiecks die Konstituenten der Reihe zu gewinnen.

Nach (2) ist das Polyform $K^1_n\binom{x}{1} + K^2_n\binom{x}{2} + \ldots + K^n_n\binom{x}{n}$ gleich einem (aus einem Posten bestehenden) Polynom mit ganzzahligen

[1]) Enzyklopädie der math. Wissenschaften I, S. 409.

Koeffizienten, und darum, nach § 20 (Schlußsatz), jeder Koeffizient des Polyforms durch die entsprechende Fakultät teilbar. Es sind also $\frac{K^2_n}{2!}, \frac{K^3_n}{3!}, \frac{K^4_n}{4!}, \ldots, \frac{K^n_n}{n!}$ ganze Zahlen.

Wir nennen sie die gekürzten Konformanten und bezeichnen sie mit K'^n_r. Aus dem Bildungsgesetz der ungekürzten ergibt sich dann einfach das der gekürzten Konformanten. Es ist

$$K'^{r-1}_n + rK'^r_n = K'^r_{n+1}$$

nach welchem die folgende Tabelle berechnet ist.

	K'^1_n	K'^2_n	K'^3_n	K'^4_n	K'^5_n	K'^6_n	K'^7_n	K'^8_n	K'^9_n
K'^r_0	1								
K'^r_1	1	0							
K'^r_2	1	1	0						
K'^r_3	1	3	1	0					
K'^r_4	1	7	6	1	0				
K'^r_5	1	15	25	10	1	0			
K'^r_6	1	31	90	65	15	1	0		
K'^r_7	1	63	301	350	140	21	1	0	
K'^r_8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0
K'^r_9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Die Glieder K'^{r-1}_n und K'^r_{n+1} stellen aufeinanderfolgende Glieder einer Diagonalreihe dar. Die Differenzreihe der Diagonalreihe ist also

$$\Delta(K'^{r-1}_n) = K'^r_{n+1} - K'^{r-1}_n = rK'^r_n.$$

Die Beziehung der Diagonalreihen zueinander ist daher die analoge wie die der Kolonnen der Kombinanten. Ist eine Diagonalreihe eine arithmetische Reihe, so ist es auch die Differenzreihe der folgenden Diagonale und damit auch diese selbst. Die Ordnung der folgenden Reihe ist um 2 höher als die der vorhergehenden. — Nun ist tatsächlich die zweite Diagonalreihe eine arithmetische Reihe 0-ter Ordnung: Sie besteht aus lauter Einheiten. Also sind es auch alle folgenden. Die dritte insbesondere ist die Reihe der Formanten 2-ter Ordnung. — Die Kolonnen der Tabelle dagegen sind, von der ersten abgesehen, keine arithmetischen Reihen. Die zweite Kolonne hat die Form $2^n - 1$.

§ 22. Symmetrische Reihen.

Von besonderer Bedeutung sind diejenigen Reihen, deren Glieder einander paarweis gleich sind, wobei die gleichen Glieder zugleich symmetrisch angeordnet erscheinen. Die allgemeine Bedingung der Symmetrie einer Reihe $\binom{v^m}{r}$ ist daher, daß jedem ihrer Glieder eines in der konversen Reihe $\binom{v^{-m+p}}{r}$ gleich ist, wo p einen zu bestimmenden konstanten Term bedeutet. Es muß also für jeden Wert von m die Gleichung $\binom{v^m}{r}=\binom{v^{-m+p}}{r}$ erfüllbar sein. Diese Bedingungsgleichung löst sich nun in ein System von $r+1$ Gleichungen auf, wenn

$$\binom{v^m}{r}=a\binom{m}{r}+b\binom{m}{r-1}+c\binom{m}{r-2}+d\binom{m}{r-3}+\ldots+f\binom{m}{3}+g\binom{m}{2}+h\binom{m}{1}+k$$

ist, die konverse Reihe sich also durch die Form 6 in § 15 darstellen läßt und in der so entstehenden Gleichung die Koeffizienten verglichen werden. — In dem sich daraus ergebenden System der Bedingungsgleichungen ist die erste $a=\binom{-1}{r}a$. Aus ihr geht unmittelbar hervor, daß eine Reihe nur dann symmetrisch sein kann, wenn r eine gerade Zahl ist. Nur eine Reihe von gerader Ordnung kann also symmetrisch sein. Eine Reihe von ungerader Ordnung kann jedoch die Gleichung $\binom{v^m}{r}=-\binom{v^{-m+p}}{r}$ erfüllen, d. h. jedem Gliede der Reihe kann ein zu ihm symmetrisch gelegenes gleich sein, wenn man das Vorzeichen des letzteren umkehrt. Jedem Gliede entspricht also ein gleiches in der inversen Reihe. Wir nennen daher Reihen ungerader Ordnung, welche dieser Bedingung genügen, invers-symmetrisch. Jede Reihe, einerlei welcher Ordnung, kann also entweder symmetrisch oder invers-symmetrisch sein. Wenn wir im Folgenden von der Symmetrie der Reihen im allgemeinen sprechen, so ist darunter die eigentliche Symmetrie zu verstehen, wenn es sich um Reihen gerader, die inverse dagegen, wenn es sich um Reihen ungerader Ordnung handelt.

Die Bedingungsgleichungen der Symmetrie sind dann allgemein die folgenden:

$$\begin{array}{lr}
\binom{r-1}{1}a-b' & =b\\
\binom{r-1}{2}a-\binom{r-2}{1}b'+c' & =c\\
\binom{r-1}{3}a-\binom{r-2}{2}b'+\binom{r-3}{1}c'-d' & =d\\
\binom{r-1}{4}a-\binom{r-2}{3}b'+\binom{r-3}{2}c'-\binom{r-4}{1}d'+e' & =e\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\\
\binom{r-1}{2}a-\binom{r-2}{2}b'+\binom{r-3}{2}c'-\binom{r-4}{2}d'+\ldots\mp f' & =f\\
\binom{r-1}{1}a-\binom{r-2}{1}b'+\binom{r-3}{1}c'-\binom{r-4}{1}d'+\ldots\mp\binom{2}{1}f'\pm g' & =g\\
a-b'+c'-d'\mp f'\pm g'\mp h' & =h\\
\pm k' & =k
\end{array}$$