

es résultats soient  $\dots$ . Par les formules d'EULER, on substitue à ces conditions les conditions équivalentes

$$\frac{f(a, 1)}{x^{p-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{p-1} f(a, 1)}{\partial x^{p-2} \partial y} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial^{p-1} f(a, 1)}{\partial y^{p-1}} = 0;$$

autres termes, il faut et il suffit que les  $p$  dérivées partielles de  $(p-1)$ , prises par rapport à  $x$  et  $y$ , s'annulent lorsque l'on remplace  $x$  par  $a$  et  $y$  par 1.

Proposition I. — Si  $f(x, y, z, \dots)$  est un polynôme homogène de degré  $n$ , l'identité

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \dots\right)^q f(x_0, y_0, \dots) = \frac{1}{(n-q)!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + \dots\right)^{n-q} f(x_1, y_1, \dots).$$

to be extended

### CHAPITRE XIII.

#### LE CALCUL SYMBOLIQUE.

On doit considérer le calcul symbolique comme une méthode rapide pour l'écriture des formules dans une suite de déductions théoriques; mais, lorsqu'il s'agit de déterminer les valeurs des nombres fournis par ce calcul, il est indispensable de remplacer la formule symbolique par le développement ordinaire. On fait de même lorsque la suite des raisonnements laisse dans l'esprit une certaine obscurité; alors on remplace encore la formule par les notations ordinaires. C'est donc, en quelque sorte, pour le développement des nouvelles théories, une sténographie des formules de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

Cette méthode est déjà ancienne; on la trouve comme procédé mnémorique dans les écrits de LEIBNIZ, pour les dérivées successives d'un produit de deux ou de plusieurs facteurs; on la retrouve dans la série de TAYLOR étendue au cas de plusieurs variables; nous l'avons déjà employée dans les formules fondamentales du calcul des différences. Développée plus tard par LAPLACE, par VANDERMONDE et par HERSCHEL, elle a été considérablement augmentée par les travaux de CAYLEY et de SYLVESTER, dans la théorie des formes.

Dans un ouvrage intitulé *Calculus of Operations*, CARMICHAEL a exposé les méthodes générales de ce calcul rapide; ses développements se rapportent surtout à l'emploi des symboles d'opération, comme ceux du calcul des sommes et des différences  $\Sigma$  et  $\Delta$ , et ceux du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Mais la méthode symbolique, que nous employons ici, diffère des précédentes sous ce rapport, que les symboles que nous considérons désignent des quantités et non des opérations; nous nous rapprochons ainsi pour une partie de la notation, employée par CAYLEY, pour les polynômes entiers (*quantics*). L'application de cette méthode nous a permis de simplifier, d'une manière très notable, les raisonnements et les

Lucas

166  
85  
165  
898  
899-903  
354  
1147  
2708

↑  
Extend

165  
166  
85  
898  
-903  
354  
1147  
2708  
2801

résultats sur le calcul des sommes et des différences, sur les nombres de BERNOULLI et d'EULER, sur la théorie des séries récurrentes et, par suite, sur la théorie générale des fonctions. Par notre méthode, les développements prennent une forme plus concise, plus condensée, qui conduit à des généralisations successives et indéfinies des propriétés qui concernent les nombres, et des formules qui les renferment. Ainsi, dit LAPLACE, « la langue de l'analyse, la plus parfaite de toutes, étant par elle-même un puissant instrument de découvertes, ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont les germes de nouveaux calculs. »

Ce Chapitre contient quelques principes généraux, et leur application à la solution de plusieurs problèmes considérés par EULER. Ceux-ci se rapportent aux Permutations figurées et à l'Arithmétique de position; le Chapitre suivant donne l'application du calcul symbolique au Calcul des sommes et au Calcul des différences.

121. Du symbole potentiel. — Considérons des nombres quelconques

$$(b) \quad b_0, b_1, b_2, \dots, b_p, \dots,$$

formant une suite limitée ou illimitée, de telle sorte qu'à chaque valeur de l'indice corresponde un nombre déterminé.

Nous désignerons par  $b$  le symbole des nombres de cette suite, et nous supposerons que, dans les formules transitoires,  $b$  est une quantité assujettie aux lois ordinaires du calcul algébrique et, en particulier, à la règle des exposants entiers et positifs,

$$b^m \cdot b^n \underline{\underline{=}} b^{m+n}.$$

A la fin des calculs, on doit remplacer les exposants de  $b$  par des indices et les nombres  $b$  par ceux de la suite.

Soit un polynôme de degré  $n$ , dans lequel nous mettons en évidence les coefficients du développement de  $(1+x)^n$ ,

$$f(x) = b_0 x^n + \frac{n}{1} b_1 x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} b_2 x^{n-2} + \dots + b_n x^0;$$

nous pouvons écrire ce polynôme sous la forme condensée

$$f(x) \underline{\underline{=}} (x+b)^n,$$

en ayant toujours le soin de tenir compte de l'exposant zéro de  $b$  et du nombre correspondant  $b_0$ .

On voit immédiatement que la dérivée  $f'(x)$  du polynôme  $f(x)$  peut s'écrire symboliquement

$$f'(x) \underline{\underline{=}} n(x+b)^{n-1},$$

et, par suite, on a pour la dérivée d'ordre  $p$ ,

$$f^{(p)}(x) \underline{\underline{=}} n(n-1)\dots(n-p+1)(x+b)^{n-p}.$$

Exemple I. — Si l'on suppose

$$u \underline{\underline{=}} (x+a)^n, \quad v \underline{\underline{=}} (x+b)^n,$$

et si l'on considère l'expression

$$y = u v^n - u' v^{n-1} + u'' v^{n-2} + \dots + (-1)^n u^n v,$$

dans laquelle les exposants sont des indices de dérivation, la fonction  $y$  est indépendante de  $x$ . (HALPHEN).

On voit, en effet, que la dérivée  $y'$  est nulle; on obtient la valeur de  $y$ , en remplaçant  $x$  par 0, ce qui donne

$$y \underline{\underline{=}} n!(a-b)^n.$$

Plus généralement, considérons le polynôme homogène

$$f(x, y) = b_0 a_n x^n y^0 + \frac{n}{1} b_1 a_{n-1} x^{n-1} y + \dots + \frac{n(n-1)}{1.2} b_2 a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \dots + b_n a_0 x^0 y^n;$$

nous pouvons l'écrire sous la forme symbolique condensée

$$f(x, y) \underline{\underline{=}} (ax + by)^n,$$

en supposant que l'on remplace, après le développement du second membre, les exposants de  $a$  et de  $b$  par des indices. On trouve, comme précédemment,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \underline{\underline{=}} na(ax + by)^{n-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \underline{\underline{=}} nb(ax + by)^{n-1}.$$

On peut donc appliquer à un polynôme symbolique les procédés

ordinaires de dérivation; d'ailleurs, on peut considérer des polynômes contenant un nombre quelconque de variables et de symboles, tels que

$$(ax + by + cz + \dots)^n.$$

Lorsqu'un polynôme  $f(x)$ , à une seule variable, n'est pas homogène, on peut toujours l'écrire sous la forme homogène  $f(x, y)$ ; il suffit, dans les résultats, de remplacer ensuite  $y$  par 1; cette remarque s'applique d'ailleurs aux polynômes contenant un nombre quelconque de variables. Ainsi les propriétés des formes homogènes s'appliquent aux polynômes symboliques.

Nous avons supposé que l'on peut représenter par une lettre le symbole d'une suite de quantités données; inversement, on peut calculer successivement les termes d'une suite définie par un symbole. Soit, par exemple, une suite donnée

$$(a) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots;$$

on peut, de bien des manières différentes, calculer des suites de nombres qui dépendent des nombres de la suite (a).

Posons, par exemple,

$$(1) \quad b_n \triangleq (a + 1)^n,$$

c'est-à-dire

$$b_n = a_n - \frac{n}{1} a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_{n-2} + \dots + a_0;$$

Nous allons montrer que l'on peut introduire, dans la relation (1), une variable quelconque  $z$ ; en effet, soit  $f(x)$  un polynôme quelconque

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n x^0;$$

nous avons, d'après la formule (1),

$$\begin{aligned} b_n &\triangleq (a - 1)^n, \\ b_{n-1} &\triangleq (a - 1)^{n-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ b_2 &\triangleq (a + 1)^2, \\ b_1 &\triangleq (a + 1)^1, \\ b_0 &\triangleq a_0. \end{aligned}$$

En multipliant respectivement ces égalités par  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  et en ajoutant, il vient

$$(2) \quad f(b) \triangleq f(a + 1).$$

Cette relation subsiste, quelle que soit la fonction entière  $f(x)$ . Nous pouvons donc écrire les égalités

$$\begin{aligned} f(b) &\triangleq f(a + 1), \\ f'(b) &\triangleq f'(a + 1), \\ f''(b) &\triangleq f''(a + 1), \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

en les multipliant respectivement par

$$1, \frac{z}{1!}, \frac{z^2}{2!}, \frac{z^3}{3!}, \dots, \frac{z^n}{n!},$$

il vient, en ajoutant et en tenant compte de la formule de TAYLOR, l'égalité symbolique

$$f(z + b) \triangleq f(z + a + 1).$$

Ce procédé d'extension d'une égalité symbolique s'applique évidemment à une fonction d'un nombre quelconque de variables et de symboles. Ainsi, dans la formule précédente, on pourra supposer que  $z$  représente un symbole au lieu d'un nombre.

Non seulement les formules symboliques déterminent des nombres par des relations avec des nombres donnés à l'avance, mais elles peuvent servir à déterminer les termes successifs d'une suite inconnue. Ainsi, par exemple, la formule

$$(B + 1)^n - B^n \triangleq 0,$$

pour  $n > 1$ , en supposant  $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$ , permet de déterminer successivement des nombres  $B_2, B_3, B_4, \dots$ , et ainsi indéfiniment; nous verrons plus loin que ces nombres sont fort importants dans les développements de l'Arithmétique et de l'Algèbre; on les appelle *nombres de BERNOULLI*. Nous devons ajouter que, pour la simplification des raisonnements et des formules, il nous a paru indispensable de modifier légèrement les notations ordinaires de ces nombres.

122. Du symbole exponentiel. — Au lieu de mettre en évidence, dans le développement de  $f(x)$ , les coefficients du binôme, on peut y mettre telle suite régulière ou irrégulière de coefficients donnés à l'avance; ainsi, par exemple, nous pouvons toujours écrire un polynôme  $f(x)$ , de degré  $n$ , sous la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n!}x^n.$$

Nous désignerons ce polynôme par la notation condensée  $\exp ax$ , que nous appellerons la *forme symbolique exponentielle*. Nous allons d'abord donner les dérivées successives d'un polynôme écrit sous cette forme. Soit donc

$$f(x) \triangleq \exp ax.$$

En supposant le polynôme développé et en prenant la dérivée, on vérifie immédiatement que l'on a

$$\begin{aligned} f'(x) &\triangleq a \exp ax, \\ f''(x) &\triangleq a^2 \exp ax, \end{aligned}$$

et, en général,

$$f^{(p)}(x) \triangleq a^p \exp ax.$$

Le développement de la puissance d'un binôme peut s'écrire sous la forme exponentielle; ainsi, si l'on désigne par  $p_n$  le nombre des arrangements simples de  $p$  lettres prises  $n$  à  $n$ , c'est-à-dire si l'on pose

$$p_n = p(p-1)\dots(p-n+1),$$

on a la formule

$$(1+x)^p \triangleq \exp px;$$

on a, de même, pour d'autres valeurs de l'exposant,

$$\begin{aligned} (1+x)^q &\triangleq \exp qx; \\ (1+x)^r &\triangleq \exp rx; \end{aligned}$$

supposons  $r = p + q$ ; la formule du binôme de VANDERMONDE peut s'écrire sous la forme condensée

$$(1) \quad r_n \triangleq (p+q)^n;$$

et, par suite,

$$(2) \quad \exp px \times \exp qx \triangleq \exp (p+q)x.$$

D'ailleurs, puisque les développements des binômes de NEWTON et de VANDERMONDE ne reposent que sur la règle des exposants, à savoir

$$p^m \cdot p^n = p^{m+n},$$

il en résulte que l'identité (2) subsiste pour deux polynômes exponentiels quelconques,  $\exp px$  et  $\exp qx$ , et que le produit de ceux-ci est un polynôme exponentiel,  $\exp rx$ , dont les coefficients se déterminent par la formule (1).

Le théorème précédent s'applique au produit d'un nombre quelconque de polynômes exponentiels, et ainsi

$$\begin{aligned} \exp(ax) \cdot \exp(bx) \cdot \exp(cx) &\triangleq \exp(a+b+c)x, \\ \exp(ax) \cdot \exp(bx) \cdot \exp(cx) \cdot \exp(dx) &\triangleq \exp(a+b+c+d)x. \end{aligned}$$

Cependant, on doit observer que, si deux polynômes deviennent identiques, on n'a pas le droit d'écrire

$$(\exp ax)^2 \triangleq \exp 2ax;$$

mais il faut calculer les coefficients  $b$  du carré de la forme  $\exp ax$ , par la relation

$$b^n \triangleq (a+a')^n,$$

en considérant d'abord comme distincts  $a$  et  $a'$ , et en remplaçant ensuite, dans le résultat final,  $a^n$  et  $a'^n$  par  $a_n$ .

123. Problème des rencontres. — Nous appliquerons les méthodes du calcul symbolique à plusieurs problèmes sur les permutations et, en particulier, au célèbre problème du chevalier de MONTMORT, traité par EULER, et connu sous le nom de *problème des rencontres*. Il s'agit de déterminer le nombre des permutations de  $n$  éléments

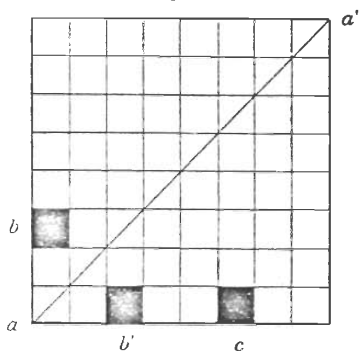
$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

dans lesquelles aucun élément n'est placé à un rang égal à son indice. Ce problème revient évidemment à déterminer le nombre des permutations figurées (problème des tours, n° 43), dans lesquelles il ne se trouve aucun élément sur l'une des diagonales, telle que  $ad'$  (fig. 68).

Désignons par  $Q_n$  le nombre des permutations dans lesquelles

aucun élément n'est à son rang naturel, et par  $P_n$  le nombre total  $n!$  des permutations. Soit  $b$  l'une des  $(n-1)$  positions de la tour, sur la première colonne, la case  $a$  du coin étant exceptée, d'après l'hypothèse. Nous devons considérer deux cas, suivant que, dans la ligne inférieure, il y a une tour  $b'$  symétrique de  $b$  par rapport à la diagonale  $aa'$ , ou en une autre position quelconque  $c$ . Dans le premier cas, en supprimant les lignes et les colonnes con-

Fig. 68.



Problème des rencontres.

tenant  $b$  et  $b'$ , il reste un ensemble de cases qui correspond, dans la question présente, à un échiquier de  $(n-2)$  cases de côté. Dans le second cas, échangeons les colonnes contenant  $b$  et  $c$ ; alors  $c$  vient en  $a$ , et  $b$  sur une case non située sur la diagonale; par suite, en supprimant la première ligne et la première colonne, il reste une solution sur l'échiquier de  $(n-1)$  cases de côté; on a donc la relation de récurrence

$$(1) \quad Q_n = (n-1)[Q_{n-1} + Q_{n-2}].$$

On trouve ainsi successivement, pour les premières valeurs de  $n$ ,

$n$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
$Q_n$	1,	0,	1,	2,	9,	44,	265,	1854,	14833.

On observe immédiatement, pour les premières valeurs de  $n$ , en divisant chaque nombre  $Q$  par le précédent, la loi suivante

$$(2) \quad Q_n = nQ_{n-1} + (-1)^n;$$

nous allons démontrer que cette relation est générale. En effet, si dans la relation (1) nous changeons  $n$  en  $(n+1)$ , il vient

$$Q_{n+1} = n(Q_n + Q_{n-1});$$

en retranchant de la précédente, on trouve

$$Q_{n+1} = (n+1)Q_n + (-1)^{n+1};$$

c'est précisément la relation (2), dans laquelle on remplace  $n$  par  $(n+1)$ . Ainsi, cette formule est générale. En divisant ses deux membres par  $P_n = n!$ , nous avons

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{P_n};$$

si l'on fait successivement  $n = 2, 3, 4, \dots$ , et si l'on ajoute les égalités obtenues, il vient

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

La méthode précédente ne diffère de la solution donnée par EULER que par la forme géométrique (1). Nous exposerons une autre méthode fondée sur le calcul symbolique; cette solution, très remarquable par son élégante simplicité, est due à M. NEUBERG (voir *Mathesis*, t. I, p. 25).

Considérons l'ensemble de toutes les permutations, c'est-à-dire de toutes les solutions du problème des tours, en nombre  $P_n$ . Parmi celles-ci, le nombre des solutions ne contenant aucun élément à son rang, c'est-à-dire aucune tour sur la diagonale, est, par définition, égal à  $Q_n$ . Le nombre des solutions contenant une seule tour sur la diagonale est, comme on le voit en supprimant la ligne et la colonne contenant cette tour,  $nQ_{n-1}$ . En général, le nombre des solutions qui contiennent  $p$  tours sur la diagonale est

(1) *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques* (Mémoires de la Société des Sciences de Flessingue, t. IX; 1779). — A propos de la relation (2), EULER ajoute: « Mais je dois avouer que je n'ai trouvé la propriété de déterminer chaque nombre par le seul précédent que par induction, et je ne vois pas trop bien comment on pourrait la déduire de la nature de la série. » Cette difficulté, signalée par EULER, a été résolue par M. NEUBERG.

166

égal au produit de  $Q_{n-p}$  par le nombre des manières de placer  $p$  objets sur  $n$  cases, ou le nombre  $C_n^p$  des combinaisons de  $n$  objets pris  $p$  à  $p$ . Enfin le nombre des solutions contenant  $n$  tours sur la diagonale est 1; par conséquent, en posant conventionnellement  $Q_0 = 1$ , on a

$$P_n = Q_n + \frac{n}{1} Q_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} Q_{n-2} + \dots + Q_0,$$

ou, symboliquement,

$$P^n \triangleq (Q+1)^n;$$

ainsi, les symboles  $P$  et  $(Q+1)$  sont équivalents dans les formules algébriques; on a donc, avec une variable  $x$ , l'identité

$$(P+x)^n \triangleq (Q+1+x)^n,$$

et en supposant  $x = -1$ , il vient

$$Q^n \triangleq (P-1)^n \quad \text{ou} \quad Q^n \triangleq \Delta^n P_0.$$

Plus généralement, si l'on désigne par  $A_m^n$  le nombre des arrangements simples de  $m$  éléments pris  $n$  à  $n$  et par  $B_m^n$  le nombre des arrangements discordants avec un arrangement, c'est-à-dire des arrangements tels qu'aucun des éléments n'occupe la même place que dans l'arrangement donné, on a encore les formules suivantes, indiquées par M. NEUBERG :

$$\begin{array}{ll} A_m^n \triangleq (1-u)^n, & \text{avec } u_p = B_{m-p}^n; \\ B_m^n \triangleq (1-v)^n, & \text{'' } v_p = A_{m-p}^n; \\ B_m^n \triangleq n! \exp(-w), & \text{'' } w_p = C_{m-p}^n. \end{array}$$

Après le développement des seconds membres, on doit remplacer les exposants de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  par des indices, puis  $u_p$ ,  $v_p$ ,  $w_p$  par les valeurs indiquées,  $C$  désignant des combinaisons simples.

*Exemple I.* — Développer l'expression  $(Q_n : P_n)$  en produit continu. On déduit des formules (1) et (2)

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} \cdot \frac{Q_n}{Q_n - (-1)^n};$$

par suite, en remplaçant successivement  $n$  par 2, 3, ...,  $n$ , et en multipliant, membre à membre, les égalités obtenues, il vient

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{44}{45} \dots \frac{Q_n}{Q_n - (-1)^n}.$$

Ce calcul a été indiqué par M. HERMÈS (*Archives de GRUNERT*).

*Exemple II.* — *Problème des ménages.* — Des femmes, en nombre  $n$ , sont rangées autour d'une table, dans un ordre déterminé; on demande quel est le nombre des manières de placer leurs maris respectifs, de telle sorte qu'un homme soit placé entre deux femmes, sans se trouver à côté de la sienne?

Le problème revient évidemment à déterminer le nombre des permutations discordantes avec les deux permutations

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, \dots, (n-1), n, \\ 2, 3, 4, 5, \dots, n, 1, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire à déterminer le nombre des manières de placer  $n$  tours sur l'échiquier, de telle sorte que ces tours ne soient pas mutuellement en prise, et ne se trouvent pas situées sur les cases de la diagonale ascendante  $\nearrow$ , ni sur celles de la parallèle immédiatement au-dessus, ni sur le coin inférieur à droite.

Nous ne connaissons aucune solution simple de cette question, dont l'énoncé donne lieu à l'étude du nombre des permutations discordantes de deux permutations déjà discordantes et, plus généralement, du nombre des permutations discordantes de deux permutations quelconques.

124. Des permutations figurées, symétriques par rapport à la diagonale de l'échiquier. — Nous commencerons par déterminer le nombre  $D_n$  des permutations qui sont symétriques par rapport à la diagonale  $aa'$  (*fig. 69*). Deux cas peuvent se présenter, suivant que la tour placée dans la première colonne est au coin  $a$  de la diagonale, ou en  $b$ , case quelconque de cette colonne autre que  $a$ . Dans le premier cas, en supprimant la ligne et la colonne qui contiennent  $a$ , il reste un échiquier de  $(n-1)$  cases de côté. Dans le second cas, à la tour  $b$  correspond nécessairement la tour  $b'$ , symétrique par rapport à la diagonale. En supprimant les lignes et les colonnes qui contiennent  $b$  et  $b'$ , il reste un ensemble de cases que l'on peut considérer comme celles d'un échiquier de  $(n-2)$  cases de côté; mais  $b$  peut occuper  $(n-1)$  places. On a donc la relation de récurrence

$$(1) \quad D_n = D_{n-1} + (n-1)D_{n-2},$$

ou, en posant  $D_n = u_n$ , et en changeant  $n$  en  $(n+1)$ ,

$$(2) \quad \Delta u_n = n u_{n-1};$$

et, en général,

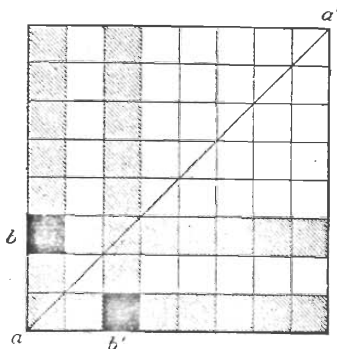
$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta u} \approx \frac{df(u)}{du}.$$

On trouve, par un calcul direct, les valeurs suivantes :

$$D_n \begin{array}{l} n \quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots; \\ \hline 1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, \dots \end{array}$$

La relation (1) ne permet pas d'obtenir facilement  $D_n$  en fonction de  $n$ ; mais on y parvient de la manière suivante. Lorsque, dans une solution quelconque  $D_n$ , symétrique par rapport à la diagonale  $aa'$ , on échange les colonnes contenant deux positions symétriques, telles que  $b$  et  $b'$ , et qu'on fait la même opération pour tous les couples de positions symétriques, on replace toutes les tours sur la diagonale  $aa'$ . On voit donc que le nombre des solutions, dans lesquelles toutes les tours, à l'exception de deux, sont

Fig. 69.



$$\frac{1}{1.2} C_n^2 C_{n-2}^2;$$

puis on reconnaît que le nombre des solutions dans lesquelles

toutes les tours, à l'exception de six, sont situées sur la diagonale  $aa'$ , est

$$\frac{1}{1.2.3} C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2,$$

et ainsi de suite. On a donc

$$D_n = 1 + \frac{1}{1} C_n^2 + \frac{1}{1.2} C_n^2 C_{n-2}^2 + \frac{1}{1.2.3} C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2 + \dots,$$

c'est-à-dire

$$D_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.4.6} + \dots,$$

ou encore, sous forme symbolique exponentielle,

$$D_n \approx \exp ax, \quad \text{avec} \quad a_p = \frac{A_n^2 p}{2^p}.$$

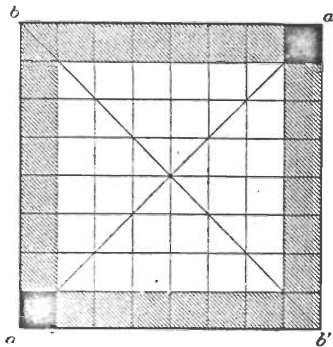
125. Des permutations figurées qui sont symétriques par rapport aux deux diagonales de l'échiquier. — Nous observerons d'abord que toute solution symétrique par rapport aux deux diagonales est symétrique par rapport au centre; inversement, toute solution symétrique par rapport au centre et à l'une des diagonales l'est aussi par rapport à l'autre diagonale. Il suffit donc de considérer l'échiquier pair de  $2n$  cases de côté, et, si l'on désigne par  $B$  le nombre des solutions, on a

$$B_{2n+1} = B_{2n}.$$

Il existe nécessairement une tour sur la première colonne; si on la suppose en un coin,  $a$  ou  $b$  (fig. 70), il en résulte la position d'une seconde au coin opposé  $a'$  ou  $b'$ . Mais si l'on suppose la tour de la première colonne à une case  $b$  (fig. 71) distincte d'un coin, il en résulte la position de trois autres tours en  $b', c, c'$ . Donc, en supprimant les lignes et les colonnes qui renferment des tours, il reste, dans le premier cas, un échiquier de  $(2n-2)$  cases de

côté, et, dans le second, un ensemble de cases que l'on peut considérer comme un échiquier de  $(2n - 4)$  cases de côté; mais,

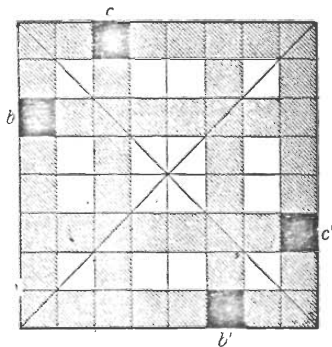
Fig. 70.



dans le second cas,  $b$  peut occuper  $(2n - 2)$  positions. On a donc la relation de récurrence

$$B_{2n} = 2B_{2n-2} + (2n - 2)B_{2n-4}$$

Fig. 71.



On trouve ainsi, pour les premières valeurs de  $n$ , les nombres suivants :

$n$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
$B_n$	1,	1,	2,	2,	6,	6,	20,	20,	76.

126. Des permutations figurées qui sont symétriques par rapport à une diagonale et qui n'ont aucune tour sur cette diagonale. — Nous désignerons par  $T_n$  le nombre des solutions pour

l'échiquier de  $n$  cases de côté; il est évident que le problème ne comporte aucune solution pour  $n$  impair; d'autre part, on voit facilement, par la considération de la *fig.* 69, que l'on a

$$T_{2n} = (2n - 1)T_{2n-2};$$

par suite,

$$T_{2n} = 1.3.5 \dots (2n - 1),$$

et

$$T_0 = 1, \quad T_{2n+1} = 0.$$

Nous avons obtenu précédemment (n° 124) le nombre  $D_n$  des permutations figurées qui sont symétriques par rapport à une diagonale. En appliquant le raisonnement de M. NEUBERG (n° 123), au cas qui nous occupe, on trouve la formule symbolique

$$D^n \stackrel{\Delta}{=} (T + 1)^n,$$

et, par suite (n° 121),

$$T^n \stackrel{\Delta}{=} (D - 1)^n.$$

127. Des permutations figurées qui sont symétriques par rapport au centre et qui n'ont aucune tour sur une diagonale. — Désignons par  $S_n$  le nombre cherché pour l'échiquier de  $n$  cases; on a d'abord, pour l'échiquier impair,

$$S_{2n+1} = 0.$$

Lorsque le côté  $2n$  de l'échiquier est pair, on a trois cas à considérer :

1° La tour de la première colonne, à gauche, est au coin qui ne fait pas partie de la diagonale considérée  $\nearrow$ ; alors, en supprimant les bords de l'échiquier, il reste un échiquier de  $(2n - 2)$  cases de côté; on a ainsi  $S_{2n-2}$  solutions.

2° La tour  $a$  de la première colonne n'étant pas dans un coin peut occuper  $(2n - 2)$  places; s'il existe, dans la ligne inférieure, une tour  $a'$  symétrique de  $a$  par rapport à la diagonale  $\nearrow$ , la suppression des lignes et des colonnes, contenant  $a$ ,  $a'$  et les cases symétriques par rapport au centre, donne un ensemble de cases qui correspond à l'échiquier de  $(2n - 4)$  cases de côté; on a ainsi  $(2n - 2)S_{2n-4}$  solutions.

3° La tour est en  $a$  et la tour de la ligne inférieure n'est pas la symétrique de  $a$  par rapport à la diagonale; alors on échange les



deux colonnes, comme au n° 123, ainsi que les colonnes symétriques par rapport au centre, et l'on supprime les bords de l'échiquier; il reste alors un échiquier de  $(2n - 2)$  cases de côté; d'ailleurs  $\alpha$  peut occuper  $(2n - 1)$  places. On a donc

$$S_{2n} = (2n - 2)S_{2n-2} + (2n - 2)S_{2n-4}.$$

Par la méthode de M. NEUBERG, on trouvera, comme au n° 123, l'identité symbolique

$$G^{2n} \triangleq (S^2 + 1)^n, \quad \text{avec} \quad S_0 = 1, \quad G_0 = 1,$$

dans laquelle  $G_{2n}$  désigne le nombre des permutations figurées qui sont symétriques par rapport au centre de l'échiquier (n° 43, Ex. II). Ainsi les symboles  $G^2$  et  $(S^2 + 1)$  sont équivalents, et l'on a

$$S^{2n} \triangleq (G^2 - 1)^n;$$

ou, en se reportant à la valeur de  $G_{2n}$ ,

$$S_{2n} = 2^n n! - \frac{n}{1} 2^{n-1} (n-1)! + \dots + (-1)^n;$$

d'ailleurs, on a encore

$$G_{2n} = 2^n P_n, \quad \text{et} \quad S^{2n} \triangleq (2P - 1)^n.$$

128. Des permutations figurées qui sont symétriques par rapport aux deux diagonales de l'échiquier et qui ne contiennent aucune tour sur une ou deux diagonales. — Nous désignerons respectivement par  $U_n$  et par  $V_n$  les nombres des permutations qui ne contiennent aucune tour sur une diagonale, ou sur deux diagonales, dans l'échiquier de  $n$  cases de côtés. On a d'abord

$$U_{2n+1} = 0, \quad V_{2n+1} = 0, \quad V_2 = 0.$$

En se servant des méthodes employées précédemment, on obtient les formules de récurrence

$$U_{2n} = U_{2n-2} + (2n - 2)U_{2n-4},$$

$$V_{2n} = (2n - 2)V_{2n-4},$$

d'où l'on déduit

$$V_{1n} = 2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n - 2).$$

$$V_{4n+2} = 0.$$

Par l'analyse de M. NEUBERG, on obtient les identités symboliques

$$B^{2n} \triangleq (U^2 + 1)^n,$$

$$U^{2n} \triangleq (B^2 - 1)^n,$$

et aussi

$$U^{2n} \triangleq (V^2 + 1)^n,$$

$$V^{2n} \triangleq (U^2 - 1)^n;$$

enfin, par comparaison avec les précédentes,

$$B^{2n} \triangleq (V^2 + 2)^n.$$

En résumé, les permutations figurées étant désignées par les notations suivantes

$P_n$  permutations figurées;

$G_n$  symétriques au centre;

$D_n$  symétriques à une diagonale;

$B_n$  symétriques aux deux diagonales;

$R_n$  symétriques par rotation d'un quart;

on forme, pour les premières valeurs de  $n$ , le Tableau :

165 85 298

$n$ .	$P_n$ .	$G_n$ .	$D_n$ .	$B_n$ .	$R_n$ .
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	0
3	6	2	4	2	0
4	24	8	10	6	2
5	120	8	26	6	2
6	720	48	76	20	0
7	5040	48	232	20	0
8	40320	384	764	76	12
9	362880	384	2620	76	12
10	3628800	3840	9496	312	0
11	39916800	3840	35696	312	0
12	479001600	46080	140152	1384	120

On peut facilement déterminer le nombre des solutions *primordiales*, en ne considérant pas comme distinctes les solutions que l'en peut déduire d'une première par rotation de l'échiquier pour un ou deux quarts de tour, ou par symétrie par rapport à l'une des médianes, ou à l'une des diagonales

de l'échiquier. Nous désignerons par la lettre grecque correspondante le nombre des solutions primordiales de chacun des groupes précédents.

En exceptant l'échiquier d'une case, toute solution *bisymétrique* soit par deux diagonales, soit par rotation d'un quart de tour, donne une autre solution; on a donc

$$B_n = 2\beta_n, \quad R_n = 2\rho_n.$$

Toute solution *monosymétrique*, c'est-à-dire symétrique par rapport au centre ou par rapport à une seule diagonale, en produit trois autres; mais on doit tenir compte des solutions bisymétriques; on trouve ainsi

$$4\delta_n + 4\beta_n = 2D_n, \quad 4\gamma_n = G_n - B_n - R_n;$$

ce qui détermine  $\gamma_n$ ; on a ensuite

$$\beta_n = \frac{1}{2}B_n, \quad \rho_n = \frac{1}{2}R_n, \quad \delta_n = \frac{1}{2}D_n - \frac{1}{2}B_n.$$

Si  $\alpha_n$  désigne le nombre des permutations primordiales qui ne présentent aucun caractère de symétrie, on a, puisque chacune d'elles en donne huit,

$$8\alpha_n + 4\delta_n + 4\gamma_n + 4\beta_n + 2\rho_n = P_n,$$

et ainsi

$$8\alpha_n = P_n + B_n - G_n - D_n.$$

Enfin, le nombre total  $\sigma_n$  des solutions primordiales est

$$\sigma_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n + \rho_n.$$

On forme ainsi, pour les premières valeurs de  $n$  le Tableau suivant :

$n$ .	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\gamma_n$	$\delta_n$	$\rho_n$	$\sigma_n$
2	0	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	2
4	1	2	0	3	1	7
5	9	10	0	3	1	23
6	70	28	7	10	0	115
7	571	106	7	10	0	694
8	4820	344	74	38	6	5282
9	44676	1272	74	38	6	46066
10	450824	4592	882	156	0	456454
11	4980274	17692	882	156	0	4999004
12	59834748	69384	11144	692	60	59916028

Il nous reste à donner les valeurs numériques des solutions qui corres-

pondent aux premières valeurs de  $n$  pour les permutations restreintes, c'est-à-dire des permutations figurées qui n'ont aucune tour sur l'une des diagonales; ou sur les deux. Nous laissons au lecteur le soin de déterminer les nombres des solutions primordiales correspondantes.

- $Q_n$  permutations figurées simplement restreintes;
- $S_n$  symétriques au centre et restreintes par une diagonale;
- $T_n$  symétriques et restreintes par une diagonale;
- $U_n$  symétriques aux deux diagonales et restreintes par l'une d'elles;
- $V_n$  symétriques et restreintes pour les deux diagonales.

166 354 1147

$n$ .	$Q_n$	$S_n$	$T_n$	$U_n$	$V_n$
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0
3	2	0	0	0	0
4	9	5	3	3	2
5	44	0	0	0	0
6	265	29	15	7	0
7	1854	0	0	0	0
8	14833	233	105	25	12
9	133496	0	0	0	0
10	1334961	2329	945	81	0
11	14684570	0	0	0	0
12	176214841	27949	10395	331	120

*Exemple I.* — Déterminer le nombre des permutations figurées, symétriques par rapport à une diagonale de l'échiquier, et n'ayant aucune tour sur l'autre diagonale.

*Exemple II.* — On considère la suite

$$1, 1, 2, 8, 50, 418, \dots,$$

dans laquelle  $u_0 = u_1 = 1$ , et

$$u_n = (2n - 1)u_{n-1} - (n - 1)u_{n-2};$$

démontrer que l'on a

$$2^n u_n = 1 + 1 \cdot C_n^1 + 1 \cdot 5 \cdot C_n^2 + 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot C_n^3 + \dots$$

(SYLVESTER).

Extend!

= 2702  
= 25801