Scan

add to

these

sequences

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
1978, XXIII, fasc. 1-2, 57 - 74

806
6145
-6147
A79267

SUR LES PARTITIONS EN PAIRES D'UN ENSEMBLE FINI TOTALEMENT ORDONNE

G. KREWERAS et Y. POUPARD

1. INTRODUCTION

L'objet central de cet article est d'étudier diverses propriétés de l'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des partitions en n paires de $\{1,2,3,\dots,2n\} = [2n]$ (cette dernière notation servant à abréger l'écriture).

Il est bien connu que le nombre de partitions distinctes d'un ensemble de cardinal pq en p classes de q éléments est $(pq)!/(q!)^p\, p!$. Le cardinal d(n) de $\mathcal{D}(n)$ est donc

$$(1) \qquad d(n) = \frac{(2n)!}{2^n n!} = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$$

Cette dernière forme (produit des n premiers entiers impairs) résulte aussi, si l'on veut, de la récurrence $d_n = (2n-1)d_{n-1}$, qui exprime que si un élément de [2n] est donné celui qui lui sera apparié peut être choisi de 2n-1 manières, et qu'il ne reste plus ensuite qu'à partitionner les 2n-2 éléments restants en n-1 paires.

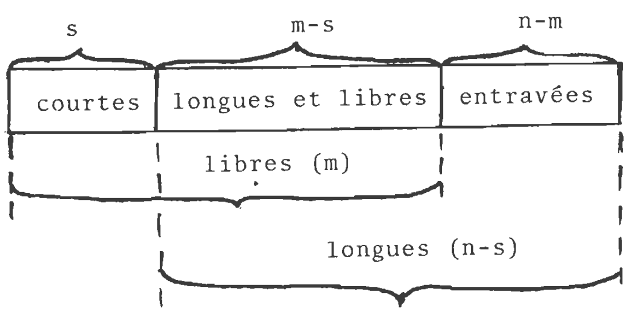
Soit $P \in \mathcal{D}(n)$. Une paire de la partition P sera dite courte si elle se compose de deux entiers consécutifs i et i+1 de [2n], longue dans le cas contraire. Une paire {a,b} de P sera dite entrelacée s'il existe dans P quelque autre paire dont un élément et un seul soit compris entre a et b ; une paire entrelacée ne peut être que longue. En outre nous dirons qu'une paire {a,b} de P est entravée soit si elle est elle-même entrelacée, soit s'il existe dans P une paire entrelacée dont les deux éléments sont compris entre a et b;bien entendu toute paire entrelacée est aussi entravée ; toute paire de P qui n'est pas entravée sera dite libre. Il est évident que toute paire courte est une paire libre.

Exemple (avec n=7) :
P = {{1,14},{2,3},{4,12},{5,13},{6,11},{7,8},{9,10}}

paires courtes : {2,3},{7,8},{9,10}
paires entrelacées : {4,12} et {5,13}
autre paire entravée : {1,14} $(1<4<12<14)$
paire libre : {6,11}

Nous considèrerons notamment le sous-ensemble $\mathcal{D}(n,s)$ de $\mathcal{D}(n)$ qui est formé des partitions de $[2n]$ en paires dont s exactement sont des paires courtes $(0 \leqslant s \leqslant n)$, et le sous-ensemble $\mathcal{D}(n,s,m)$ de $\mathcal{D}(n,s)$, qui est formé des partitions dont s paires sont courtes et dont m paires sont libres $(0 \leqslant s \leqslant m \leqslant n)$; les cardinaux respectifs de ces ensembles seront appelés d(n,s) et d(n,s,m).

L'exemple P ci-dessus appartient à $\mathcal{D}(7,3)$ et à $\mathcal{D}(7,3,4)$. Quant à la figure ci-dessous, elle résume la logique des oppositions "courte-longue" et "libre-entravée".



Nous commencerons par montrer que d(n,s) satisfait aux deux relations de récurrence suivantes :

$$(2)\quad d(n,s) = d(n-1,s) + \left(\frac{2n}{s} - 1\right) d(n-1,s-1) \qquad \forall\, s\geq 1$$

$$(3)\quad d(n,s) = (2n-1)d(n-1,s)+d(n-2,s)-2d(n-2,s-1)+d(n-2,s-2) \qquad \forall\, n\geq 2$$

L'une ou l'autre récurrence permettra la construction, de proche en proche, du tableau numérique des d(n,s).

En outre la récurrence (3) se réduit, si s=0, à

$$(4)\quad d(n,0) = (2n-1)d(n-1,0)+d(n-2,0) ,$$

ce qui permettra de reconnaître dans la suite des d(n,0) des nombres déjà rencontrés, mais uniquement comme outils d'analyse et sans signification énumérative, dans [4].

Nous montrerons également que l'on a les expressions "condensées" :

$$(5)\quad d(n,s) = \frac{1}{s!} \sum_{h=s}^{n} (-1)^{h-s} \frac{(2n-h)!}{2^{n-h}(n-h)!(h-s)!}$$

et

$$(6)\quad d(n,s,m) = \frac{2n-2m+1}{m} \binom{m}{s} \binom{2n-m}{s-1} d(n-m,0)$$

2. <u>DEMONSTRATION DE (2)</u>

Si l'on convient que d(0,0)=1, comme il est évident que d(0,1)=0, la validité de (2) est triviale pour n=1. Nous supposerons donc $n \geq 2$ et toujours, bien entendu, $s \geq 1$.

Appelons $\mathcal{D}^{i,k}(n,s)$ le sous-ensemble (éventuellement vide) des partitions de $\mathcal{D}(n,s)$ pour lesquelles $\{i,i+1\}$ est l'une des s paires courtes, à savoir la k-ième dans l'ordre croissant ($1 \leq k \leq s$, $1 \leq i \leq 2n-1$), et appelons $d^{i,k}(n,s)$ le cardinal de $\mathcal{D}^{i,k}(n,s)$. Il y a deux manières possibles de calculer la somme $\sum_{(i,k)} d^{i,k}(n,s)$; à savoir, en passant soit par l'ensemble

$$\mathcal{D}^{\cdot k}(n,s) = \bigcup_{i=1}^{2n-1} \mathcal{D}^{i,k}(n,s), \text{ de cardinal } d^{\cdot k}(n,s)$$

soit par l'ensemble

$$\mathcal{D}^{i}(n,s) = \bigcup_{k=1}^{s} \mathcal{D}^{i,k}(n,s), \text{ de cardinal } d^{i}(n,s).$$

On a ainsi

$$\sum_{i=1}^{2n-1} d^{i}(n,s) = \sum_{k=1}^{s} d^{\cdot k}(n,s)$$

Le nombre à sommer du 2ème membre n'est autre que le nombre de partitions de $[2n]$ en n paires dont s sont courtes et pour lesquelles l'une de ces s paires courtes est la k-ième dans l'ordre croissant ; ce nombre est donc <u>indépendant de k</u> et simplement égal à $d(n,s)$, ce qui montre que

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{2n-1} d^{i}(n,s) = s\, d(n,s)$$

On voit d'abord immédiatement que, dans les deux cas extrêmes où $i=2n-1$ ou bien $i=1$, on a, par suppression de l'une ou l'autre des paires extrêmes,

et (8)
$$d^1(n,s) = d(n-1,s-1)$$
$$d^{2n-1}(n,s) = d(n-1,s-1)$$

Supposons donc dorénavant que $2 \leqslant i \leqslant 2n-2$, donnons-nous P dans $\mathcal{D}^i(n,s)$ et partitionnons $\mathcal{D}^i(n,s)$ en deux classes $\mathcal{D}^i(n,s)'$ et $\mathcal{D}^i(n,s)''$ suivant que la paire {i-1, i+2} figure ou non dans P.

Appelons alors $T_i(P)$ la partition Q de [2n-2] en n-1 paires obtenue en supprimant la paire {i,i+1} de P et en "tassant", c'est-à-dire en diminuant de 2 unités chacun des entiers $\geqslant i+2$ sans changer leurs appariements.

Si $P \in \mathcal{D}^i(n,s)'$, on a $Q \in \mathcal{D}^{i-1}(n-1,s)$

mais si $P \in \mathcal{D}^i(n,s)''$, on a $Q \in \overline{\mathcal{D}}^{i-1}(n-1,s-1)$

dans cette dernière expression $\overline{\mathcal{D}}^{i-1}(n-1,s-1)$ désigne l'ensemble de celles des partitions de [2n-2] en s-1 paires pour lesquelles {i-1,i} <u>n'est pas</u> l'une des paires.

On a évidemment, pour les cardinaux correspondants, $\bar{d}^{i-1}(n-1,s-1) = d(n-1,s-1) - d^{i-1}(n-1,s-1)$.

Dans les deux cas l'application $T_i : P \to Q$ est bijective puisque, pour revenir de Q à P, il suffit de raugmenter de deux unités tous les entiers dépassant i-1 sans changer leurs appariements, puis de réintercaler la paire supplémentaire {i,i+1}.

On a donc finalement, en réunissant les deux cas :

$$d^i(n,s) = d^{i-1}(n-1,s) + \bar{d}^{i-1}(n-1,s-1),$$

soit

$$d^i(n,s) = d^{i-1}(n-1,s) + d(n-1,s-1) - d^{i-1}(n-1,s-1).$$

Sommons maintenant les deux membres pour $2 \leqslant i \leqslant 2n-2$, donc pour $1 \leqslant i-1 \leqslant 2n-3$, et en tenant compte des relations (7) et (8) ; il vient alors

$$s\, d(n,s) - 2d(n-1,s-1) = s\, d(n-1,s) + (2n-3)d(n-1,s-1) - (s-1)d(n-1,s-1)$$

ou encore

$$(9) \quad s\, d(n,s) = s\, d(n-1,s) + (2n-s)d(n-1,s-1),$$

ce qui établit la récurrence (2) annoncée.

Notons que $\mathcal{D}(n,n)$ se réduit à la partition unique $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$, donc que $d(n,n)=1$; cette récurrence permet donc de former le tableau complet, ligne par ligne et de droite à gauche, des nombres $d(n,s)$ tabulés plus loin, à l'exception de la colonne 0, qui résultera, si l'on veut, de

$$\sum_{s=0}^{n} d(n,s) = d(n)$$

3. <u>DEMONSTRATION DE (3)</u>

Appelons $\mathcal{D}_i(n,s)$ l'ensemble de celles des partitions de $\mathcal{D}(n,s)$ dans lesquelles l'entier $2n$ est apparié avec i ($i \in [2n-1]$), et $d_i(n,s)$ le cardinal de $\mathcal{D}_i(n,s)$. On a bien entendu $\sum_{i=1}^{2n-1} d_i(n,s) = d(n,s)$.

Il est évident que $\mathcal{D}_{2n-1}(n,s) = \mathcal{D}^{2n-1}(n,s)$, ce qui permet d'affirmer, compte-tenu de (8), que

(10) $d_{2n-1}(n,s) = d(n-1,s-1)$.

Supposons donc dorénavant que $1 \leq i \leq 2n-2$, donnons-nous P dans $\mathcal{D}_i(n,s)$ et appelons $H_i(P)$ la partition R de [2n] obtenue en remplaçant la paire $\{i,2n\}$ par la paire $\{i,i+1\}$ et en augmentant en même temps d'une unité les $2n-1-i$ entiers $\geq i+1$ figurant dans les autres paires de P. On a alors

$$R \in \mathcal{D}^i(n,s+1)$$

puisque R a certainement une paire courte de plus que P du fait de l'hypothèse $i \leq 2n-2$. L'application H_i de $\mathcal{D}_i(n,s)$ dans $\mathcal{D}^i(n,s+1)$ ainsi définie est bijective puisqu'il suffit, pour revenir de R à P, de remplacer la paire $\{i,i+1\}$ par $\{i,2n\}$ et de diminuer en même temps d'une unité les $2n-1-i$ entiers $\geq i+2$ figurant dans les autres paires de R.

Il en résulte, pour les cardinaux, l'égalité

$$d_i(n,s) = d^i(n,s+1),$$

valable seulement pour $i \leq 2n-2$.

Si l'on somme pour $1 \leq i \leq 2n-2$, on trouve, compte-tenu de (8) et (10),

$d(n,s)-d(n-1,s-1)=(s+1)d(n,s+1)-d(n-1,s)$,

ce qui peut aussi s'écrire

(11) $(s+1)d(n,s+1)=d(n,s)+d(n-1,s)-d(n-1,s-1)$.

Cette formule peut être utilisée pour transformer la formule (9) précédemment établie, qui peut d'abord s'écrire

$$s\,d(n,s)-s\,d(n-1,s)+(s-1)d(n-1,s-1)=(2n-1)d(n-1,s-1),$$

puis en remplaçant s par s+1,

$$(s+1)d(n,s+1)-(s+1)d(n-1,s+1)+s\,d(n-1,s)=(2n-1)d(n-1,s).$$

Il suffit alors de remplacer chacun des trois termes de cette dernière formule par l'expression tirée de (11) avec les arguments appropriés, pour voir que

$$\left.\begin{array}{l} d(n,s) + \underline{d(n-1,s)} - \underline{\underline{d(n-1,s-1)}} \\ \underline{-d(n-1,s)} - d(n-2,s) + d(n-2,s-1) \\ \underline{\underline{+d(n-1,s-1)}} + d(n-2,s-1) - d(n-2,s-2) \end{array}\right) = (2n-1)d(n-1,s).$$

En neutralisant les termes soulignés une fois et deux fois et en laissant d(n,s) seul au 1er membre, on obtient précisément la formule de récurrence (3), qui est ainsi établie.

La récurrence (3) permet, plus commodément que la récurrence (2), de former de proche en proche le tableau ci-dessous des nombres d(n,s). Elle se réduit notamment, pour s=0, à

$$(12)\quad d(n,0) = (2n-1)d(n-1,0)+d(n-2,0)$$

et pour s=1, à

$$d(n,1) = (2n-1)d(n-1,1)+d(n-2,1)-2d(n-2,0)\ ;$$

à partir de ces deux formules il est notamment facile d'établir, par récurrence sur n, que d(n,1)=d(n,0)+d(n-1,0).

806 / new new new

6198 6199 6200

A79267

d(n,s)	s = 0	1	2	3	4	5	6	7
n = 0	1							
1	0	1						
2	1	1	1					
3	5	6	3	1				
4	36	41	21	6	1			
5	329	365	185	55	10	1		
6	3655	3984	2010	610	120	15	1	
7	47844	51499	25914	7980	1645	231	21	1

4. MOMENTS ET LOI LIMITE

La ligne n du tableau ci-dessous répartit les $d(n)$ partitions de $[2n]$ en n paires suivant le nombre s des paires courtes, et l'on a

$$\sum_{s=0}^{n} d(n,s) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

On va poser plus généralement

$$\mu(n,h) = \sum_{s} (s)_h\, d(n,s),$$

où $(s)_h = s(s-1)\ldots(s-h+1)$ (notation de Vandermonde) et où la sommation s'étend indifféremment soit à $s \in \{h,h+1,\ldots,n\}$ soit à $s \in \mathbb{N}$ (les termes étant nuls pour $s<h$ et pour $s>n$) ; montrons qu'on a alors

$$(13) \quad \mu(n,h) = \frac{(2n-h)!}{2^{n-h}(n-h)!} .$$

En effet la récurrence (2) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$s\, d(n,s) = s\, d(n-1,s) - (s-h)d(n-1,s-1) + (2n-h)d(n-1,s-1)$$

Si l'on multiplie les deux membres par $(s-1)_{h-1}$ et que l'on somme pour $s \in \mathbb{N}$, on voit que

$$\begin{aligned}\mu(n,h) &= \mu(n-1,h)-\mu(n-1,h)+(2n-h)\mu(n-1,h-1)\\ &=(2n-h)\mu(n-1,h-1)\ ;\end{aligned}$$

de là la formule (13) résulte immédiatement par récurrence sur h, puisqu'on a vu qu'elle était vraie pour n quelconque quand h=0.

Si, pour n donné, on considère toutes les partitions de $[2n]$ en n paires comme également probables, le nombre s de paires courtes est une variable aléatoire dont le h-ième moment factoriel est

$$m(n,h) = \mu(n,h) \times \frac{2^n\ n!}{(2n)!} = \frac{2^h (n)_h}{(2n)_h}$$

(la 2ème égalité résulte immédiatement de (13)). Si, pour h fixe, n augmente indéfiniment, cette dernière expression est le quotient de deux polynômes en n qui ont même terme de plus haut degré ; elle tend donc vers 1. Comme la propriété d'avoir tous ses moments factoriels égaux à 1 caractérise la loi de Poisson de moyenne 1, il en résulte que la loi limite du nombre s de paires courtes est précisément cette loi de Poisson.

Une remarque complémentaire importante résulte du fait que la formule (13) peut, après division de ses deux membres par h!, s'écrire sous la forme

$$(14) \qquad \sum_{s=h}^{n} \binom{s}{h} d(n,s) = d(n-h)\,.\binom{2n-h}{h}$$

Or sous cette forme, qui aurait pu ainsi être établie directement, les deux membres représentent deux manières de dénombrer un même ensemble, à savoir celui des partitions de [2n-h] en n classes dont n-h paires et h singletons.

Dans le 1er membre on part de l'une des d(n,s) partitions de [2n] en n paires dont s courtes, et l'on choisit, de l'une des $\binom{s}{h}$ manières possibles, h de ces paires courtes pour les "contracter" en singletons : une contraction consiste à remplacer la paire {i,i+1} par le singleton {i} en diminuant d'une unité tous les entiers $\geq i+2$. Ces h contractions aboutissent, de manière évidemment bijective, à une partition de [2n-h] en h singletons et n-h paires.

Dans le 2ème membre, on procède directement, à partir de [2n-h], au choix des h singletons, de l'une des $\binom{2n-h}{h}$ manières possibles, puis on partitionne en n-h paires l'ensemble des 2n-2h éléments non choisis.

5. EXPRESSION CONDENSEE DE d(n,s)

L'intérêt de la formule (14), qui est du type "triangulaire"

$$\sum_{s=h}^{n} \binom{s}{h} d(n,s) = \delta(n,h),$$

c'est qu'elle se résout par rapport aux d par une inversion très simple :

$$\sum_{s=h}^{n} (-1)^{s-h} \binom{s}{h} \delta(n,s) = d(n,h),$$

ou encore, en permutant les rôles de h et de s,

$$d(n,s) = \sum_{h=s}^{n} (-1)^{h-s} \binom{s}{h} \delta(n,h).$$

En remplaçant simplement $\delta(n,h)$ par sa valeur

$$d(n-h) \times \binom{2n-h}{h} = \frac{(2n-h)!}{2^{n-h}(n-h)!h!},$$

on trouve finalement l'expression

$$\boxed{d(n,s) = \frac{1}{s!} \sum_{h=s}^{n} (-1)^{h-s} \frac{(2n-h)!}{2^{n-h}(n-h)!(h-s)!}},$$

qui n'est autre que l'expression "condensée" (5) annoncée. Cette expression, qui demeure bien entendu valable pour s=0, avait été trouvée dans ce cas particulier par Touchard [4] pour les d(n,0), qu'il calculait d'abord par la récurrence (12).

Les nombres d(n,0), qui dans [4] sont appelés c_{n+1}, étaient définis, sans aucune référence énumérative, comme les coefficients du développement

$$1 - e^{\sqrt{1-2x}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$$

La formule donnée ici n'est, bien entendu, condensée qu'en apparence et ne se prête qu'assez mal au calcul numérique puisqu'elle définit d(n,s) par une somme alternée.

6. EXPRESSION CONDENSEE DE d(n,s,m)

6.1 On a vu que l'on a nécessairement $0\leq s\leq m\leq n$, donc $m=0 \Rightarrow s=0$. Montrons qu'inversement $s=0 \Rightarrow m=0$. En effet supposons que dans une partition P, toutes les paires soient longues ($s=0$), et considérons une paire quelconque $\{a,b\}$; on a $b-a\geq 2$. On dira que cette paire embrasse une autre paire $\{c,d\}$ de P si l'on a $a<c<d<b$; cette relation d'embrassement est transitive.

Supposons la paire $\{c,d\}$ choisie de telle manière qu'elle n'embrasse aucune autre paire de P, et prenons un x tel que $c<x<d$, qui est possible puisque $d-c \geq 2$.

La paire $\{c,d\}$ est alors entrelacée et ses deux éléments sont compris entre a et b ; la paire $\{a,b\}$ est donc entravée. (S'il n'existe pas de paire $\{c,d\}$ embrassée par $\{a,b\}$, il suffit de prendre un x quelconque entre a et b pour être assuré que $\{x,y\}$ est une paire entrelacée ayant un élément compris entre a et b, donc que $\{a,b\}$ est toujours entravée). Toute paire étant entravée, on a bien $m=0$. Exiger qu'il n'y ait aucune paire libre équivaut donc à exiger qu'il n'y ait aucune paire courte ; d'où

(15) $d(n,0,0) = d(n,0)$.

6.2 Dans un autre cas extrême, toutes les paires de P sont libres ($m=n$), et s d'entre elles sont courtes. L'hypothèse que toutes les paires sont libres empêche l'existence dans P de deux paires entrelacées. En employant le langage, plus commode ici, des segments (segment $[a,b]$ au lieu de paire $\{a,b\}$), cela signifie que les segments de P forment une hiérarchie (cf. [2]) : deux segments quelconques tirés de P sont ou disjoints, ou inclus l'un dans l'autre. A chacune des s paires courtes de P correspond un segment qui n'en inclut aucun autre.

Une telle hiérarchie P peut être représentée par un mot M de 2n lettres écrit dans l'alphabet $\{\gamma,\delta\}$, et obtenu de la manière suivante : on passe en revue les 2n extrémités gauches ou droites des segments dans l'ordre croissant, et l'on écrit à la suite γ ou δ suivant que l'extrémité rencontrée est gauche ou droite. Exemple (n=3) :

$$P = \{\{1,6\},\{2,3\},\{4,5\}\} \Rightarrow M = \gamma\gamma\delta\gamma\delta\delta$$

Il est clair que dans M il y a n occurrences de γ et n occurrences de δ et que, $\forall i$, la i-ième occurrence de δ est postérieure à la i-ième occurrence de γ. Le même mot M définit donc, dans le plan $\mathbb{Z}^2$, un chemin C surdiagonal (ou "pont") de 2n étapes joignant (0,0) à (n,n) ; chaque γ désigne une étape ascendante et chaque δ une étape horizontale. Il est d'ailleurs facile de revenir d'un tel pont C à la partition P, par l'intermédiaire du mot M : il suffit pour cela de numéroter les γ, lus de gauche à droite, par des indices de 1 à n, puis de donner à chacun des δ, lus également de gauche à droite, un indice égal au plus grand des numéros utilisés pour un γ situé avant lui et non encore utilisés pour un δ antérieur, puis enfin d'associer en n paires les positions où se trouvent un γ et un δ de même indice. Dans l'exemple ci-dessus

$$M = \gamma_1\gamma_2\delta_2\gamma_3\delta_3\delta_1 \; ; \quad \begin{array}{lcl} \text{indice } 1 & \Rightarrow & \{1,6\} \\ \text{indice } 2 & \Rightarrow & \{2,3\} \\ \text{indice } 3 & \Rightarrow & \{4,5\} \end{array}$$

Dire qu'il y a s paires courtes dans P, c'est dire qu'il y a dans M s occurrences de $\gamma\delta$ (s=2 dans l'exemple ci-dessus), ou qu'il y a dans C s paliers (successions maximales d'étapes horizontales). Le nombre de ponts C répondant à cette condition est connu (cf. [1]) ; c'est le nombre (dit parfois "de Narayana")

$$\frac{1}{n}\binom{n}{s}\binom{n}{s-1} = d(n,s,n) \quad . \tag{16}$$

6.3 Dans le cas général où $0<s\leq m<n$, il y a $e=n-m$ paires entravées, dont on peut d'abord placer l'ensemble E des 2e extrémités arbitrairement sur (par exemple) la droite rationnelle $\mathbb{Q}$; une fois ces points placés et numérotés dans l'ordre croissant, il résulte de (6.1) que le nombre de manières d'en faire les extrémités d'une partition de [2e] en e paires toutes entravées est $d(e,0) = d(n-m,0)$.

Quelle que soit celle des $d(n-m,0)$ manières choisies, il reste à placer les m paires libres, qui, par suite de 6.2, forment une hiérarchie. Si l'on considère le segment de $\mathbb{Q}$ défini par l'une de ces m paires libres, il est clair que ce segment devra être inclus tout entier dans le segment formé par deux points <u>consécutifs</u> de E, faute de quoi la paire correspondante ne serait pas libre mais entravée. Inversement toute hiérarchie de m segments de $\mathbb{Q}$ assujettie à la condition que chacun de ses segments soit inclus dans l'un des 2e+1 intervalles définis par $\mathbb{Q}$ - E engendrera (à un isomorphisme ordinal près) une partition de [2m+2e] en m+e=n paires dont m libres et e entravées. Il s'agira donc de compter ces hiérarchies de m segments, avec la condition que s d'entre eux correspondent à des paires courtes, puis de multiplier le nombre trouvé par d(n-m,0).

Or ce dénombrement s'apparente étroitement à celui des "quasi-ponts" étudiés et dénombrés par Y. Poupard [3]. Un quasi-pont diffère d'un pont ordinaire en ce que l'on y permet des étapes obliques, mais seulement le long de la diagonale, c'est-à-dire de (x,x) à (x+1,x+1) ; les mots correspondants sont écrits dans l'alphabet $\{\gamma,\delta,\varepsilon\}$, avec la condition que toutes les séquences maximales de γ et δ seuls définissent des ponts, entre lesquels s'intercalent des séquences de ε correspondant aux étapes obliques.

Il est clair qu'à toute disposition admissible (à un isomorphisme ordinal près) des m paires libres dans les intervalles formés par $\mathbb{Q}$ - E correspond un quasi-pont défini comme suit : on passe en revue les 2m+2e extrémités dans l'ordre croissant et l'on écrit

γ pour toute extrémité gauche d'une paire libre
δ pour toute extrémité droite d'une paire libre
ε pour toute extrémité (gauche ou droite) d'une paire entravée.

Cette correspondance est manifestement bijective, et le nombre s de paires courtes correspond au nombre d'occurrences de $\gamma\delta$ dans le mot ainsi écrit.

Le résultat établi par Poupard (avec des notations un peu différentes de celles utilisées ici) est que le nombre de manières distinctes de faire cela est

$$\frac{(2e+1)(m+2e)_{s-1}(m-1)_{s-1}}{s!(s-1)!} = \frac{2n-2m+1}{m}\binom{m}{s}\binom{2n-m}{s-1} .$$

Il s'en suit, en fin de compte, que

$$d(n,s,m) = \frac{2n-2m+1}{m} \binom{m}{s} \binom{2n-m}{s-1} d(n-m,0),$$

ce qui est la formule (6) annoncée.

Les valeurs numériques pour $n \leq 5$ sont données par les tableaux suivants :

n = 2	s= 0	1	3
m = 0	1		
1	0	0	
2	0	1	1

n = 3	s= 0	1	2	3
m = 0	5			
1	0	5		
2	0	0	0	
3	0	1	3	1

n = 4	s= 0	1	2	3	4
m = 0	36				
1	0	35			
2	0	5	15		
3	0	0	0	0	
4	0	1	6	6	1

n = 5	s= 0	1	2	3	4	5
m = 0	329					
1	0	324				
2	0	35	140			
3	0	5	35	35		
4	0	0	0	0	0	
5	0	1	10	20	10	1

les sommes en colonnes redonnent le tableau du §3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KREWERAS G., Sur les éventails de segments, Cahiers du B.U.R.O., 15 (1970), 3-41.

[2] KREWERAS G., Sur les hiérarchies de segments, Cahiers du B.U.R.O., 20 (1973), 3-60.

[3] POUPARD Y., Sur les quasi-ponts (en cours de publication).

[4] TOUCHARD J., Nombres exponentiels et nombres de Bernoulli , Canadian J. of Math., 8 (1956), 305-320.

Reçu en novembre 1977

M. Germain KREWERAS
M. Yves POUPARD

Université Panthéon-Sorbonne, Paris I
12, place du Panthéon
75005 Paris