Scan A5283

etc

Guy and others

Correspondence

75 pages

Add to many segs

f91

THE UNIVERSITY OF CALGARY

2500 University Drive N.W., Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4

Faculty of SCIENCE
Department of MATHEMATICS & STATISTICS

Telephone (403) 220-5202

707
1892
1893
1894
5283
5284
5285
5286
5287
5288
8302
140

88-03-14

Neil J.A. Sloane,
AT&T Bell Laboratories, Room 2C-376,
600Mountain Avenue,
Murray Hill, N.J. 07974

Dear Neil,

To save your having to wade through the enclosed, I enclose a copy of the article referred to, and I highlight items of possible interest in the enclosed table:

The leading diagonal & 3 diagonals above it are Sloane ## 644, 583, 1132, 1416. They can now be extended to the canonical two lines. You may want to add more diagonals. Rows 1 and 2 are Sloane ## 173 & 522. You might want to add further rows

1, 6, 15, 29, 49, 76, 111, 155,... → 5286
~~(1)~~, 5, 20, 49, 98, 174, 285, 440,... → 5287
(1), 2 or 3?, 22, 71, 169, 343, 628, 1068,... → 5288
1, 20, 90, 259, 602, 1230, 2298, 4015,...

which are given to about enough terms to fill two lines.

Best wishes,

Yours sincerely,

Richard.

RKG:1

Richard K. Guy.

encl: *Math. Mag.* article
letter to Moritz & Williams
Table)
pp.94-97 of Netto)

THE UNIVERSITY OF CALGARY

Faculty of SCIENCE
Department of MATHEMATICS & STATISTICS

2500 University Drive N.W., Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4

Telephone (403) 220-5202

88-03-12

Professors Roger H. Moritz and Robert C. Williams,
Alfred University,
ALFRED, N.Y. 14802

Dear Roger Moritz & Robert Williams,

I write in connexion with your note in the February *Math. Mag.* The maximum members of the rows of your Table 1 comprise sequence #655 in N.J.A. Sloane's *Handbook of Integer Sequences*, where they are called Kendall-Mann numbers. The references, which I haven't pursued, are to F.N. David, M.G. Kendall & D.E. Barton, Symmetric Function and Allied Tables, Cambridge University Press, London, 1966, and to *IEEE Trans. Electronic Comput.* **19** (1970) 1226. A 140

The leading diagonal, $n = k+1$, of the table is sequence #644 in Sloane. The reference is to E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, 1901, 1927, reprinted Chelsea, page 96 where your Table 1 occurs, with rows and columns interchanged. Netto (and Sloane) gives only one more entry than you do, but the beginnings of several more columns (your rows). I have extended the table quite a bit and enclose a copy. I will also copy this to Sloane, so that he can put more terms in sequence #644 in his second edition: A707

701 1, 1, 2, 6, 20, 71, 259, 961, 3606, 13640, 51909, 198497, 762007, 2934764, 11333950, 43874857, 170193528, 661386105, 2574320659, 10034398370, ... ✓

Some other diagonals of the table might qualify for inclusion in Sloane's next edition, as well as some (more) rows (your columns). At a second look, I find that he does have the next three above the main diagonal (sequences 583,1132,1416) but none below. For the rows he has sequence 173, of course, and sequence 522, but no others.

Netto also gives the recurrences equivalent to your Theorem 3. He also gives formulas for what I will write as $I(n,k)$ for $k \le 6$. This is an adaptation of his notation: your pointed bracket notation is used in some not unrelated parts of combinatorics, I think for Gaussian binomial coefficients in partition theory. Indeed, there are probably connexions with "q-series", where the q, curiously enough, is (formally) the same as in your article.

After a lot of experimentation I was able to combine his formulas into a single formula, which presumably extends to all k, though I have checked it only for $k \le 19$. It is not a closed formula, because the number of terms is unbounded, but, as their number is only about $\sqrt{8k/3}$, it is quite practical. The pentagonal numbers which occur are well-known in partition theory (see for example Euler's theorem, Theorem 353 (page 284) in Hardy & Wright's *Introduction to the Theory of Numbers* 4th edition, 1960) and I will also copy this to George Andrews, who can confirm that the formula is well known to those who well know it.

$$I(n,k) = \sum (-1)^r \begin{Bmatrix} n-1+k-\tfrac{1}{2}r(3r+1) \\ n-1 \end{Bmatrix} \qquad (n \ge k)$$

where the sum is taken over those (positive, negative and zero) values of r for which $\tfrac{1}{2}r(3r+1) \le k$. For example,

$$I(n,16) = \begin{Bmatrix} n+15 \\ 16 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+14 \\ 15 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+13 \\ 14 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n+10 \\ 11 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n+8 \\ 9 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+3 \\ 4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

It is possible to correct the formula for values of $n < k$, and the following examples presumably extend in the way suggested for the main formula:

For $1 \le n = k-1$, add $\quad 1 = \begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k-1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

For $1 \le n = k-2$, add $\quad n = \begin{Bmatrix} n+1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k-1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k-2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

For $2 \le n = k-3$, add $\quad \begin{Bmatrix} n+2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k-1 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k-2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k-3 \\ 0 \end{Bmatrix}$

For $3 \le n = k-4$, add $\quad \begin{Bmatrix} n+3 \\ 3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k-1 \\ 3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k-2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k-3 \\ 1 \end{Bmatrix}$

For $4 \le n = k-5$, add $\quad \begin{Bmatrix} n+4 \\ 4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+3 \\ 3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k-1 \\ 4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k-2 \\ 3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k-3 \\ 2 \end{Bmatrix}$

As you imply in your article, it would be nice if this array of numbers appeared in other contexts. At a cursory glance, the other references that I've found seem, essentially, to address similar situations.

Yours sincerely,

Richard K. Guy

RKG:1

Richard K. Guy.

P.S. [Stop press] The formula follows almost immediately from Euler's theorem and your generating function. We want the coefficient of x^k in the expansion of

$$(1+x)(1+x+x^2) \;\ldots\ldots\; (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$$

$$= \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \;\ldots\ldots\; (1-x^n)}{(1-x)^n}$$

= (by Euler's identity, a suitable truncation of)

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r \, x^{\frac{1}{2}r(3r+1)} \, (1-x)^{-n}$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r \, x^{\frac{1}{2}r(3r+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n-1+s \\ s \end{Bmatrix} x^s$$

for $I(n,k)$,

and the formula given in the body of the letter, pops out (summation over s, with $s + \frac{1}{2}r(3r+1) = k$).

It would be nice to find a purely combinatorial proof, like Franklin's proof of Theorem 358 in Hardy & Wright. Perhaps a Ferrers's diagram with binomial coefficients instead of dots?

encl: Table
pp.94-97 of Netto

φc. G.L. Alexanderson
N.J.A. Sloane
G.E. Andrews

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
2			2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	119	135	152	170	189	
3			1	6	15	29	49	76	111	155	209	274	351	441	545	664	799	951	1121	1310	→ 5286
4				5	20	49	98	174	285	440	649	923	1274	1715	2260	2924	3723	4674	5795	7105	→ 5287
5				3	22	71	169	343	628	1068	1717	2640	3914	5629	7889	10813	14536	19210	25005	32110	→ 5288
6				1	20	90	259	602	1230	2298	4015	6655	10569	16198	24087	34900	49436	68646	93651	125761	
7					15	101	359	961	2191	4489	8504	15159	25728	41926	66013	100913	150349	218995	312646	438407	
8					9	101	455	1415	3606	8095	16599	31758	57486	99412	165425	266338	416687	635682	948328	1386735	
9					4	90	531	1940	5545	13640	30239	61997	119483	218895	384320	650658	1067345	1703027	2651355	4038090	
10					1	71	573	2493	8031	21670	51909	113906	233389	452284	836604	1487262	2554607	4257634	6908989	10947079	
11						49	573	3017	11021	32683	84591	198497	431886	884170	1720774	3208036	5762643	10020277	16929266	27876345	
12						29	531	3450	14395	47043	131625	330121	762007	1646177	3366951	6574987	12337630	22357907	39287173	67163518	
13						14	455	3736	17957	64889	196470	526581	1288587	2934764	6301715	12876702	25214332	47572239	86859412	154022930	→ 5285
14						5	359	3836	21450	86054	282369	808896	2097472	5032235	11333950	24210652	49424984	96997223	183856635	337879565	→ 5284
15						1	259	3736	24584	110010	391939	1200626	3298033	8330256	19664205	43874857	93299841	190297064	374153699	712033264	→ 5283
16							169	3450	27073	135853	526724	1726701	5024460	13354639	33018831	76893687	170193528	360490592	734644291	1446677555	→ 1894
17							98	3017	28675	162337	686763	2411747	7435284	20789572	53808313	130701986	300875513	661386105	1396030396	2842707951	→ 1893
18							49	2493	29228	187959	870233	3277965	10710609	31498907	85306779	216008661	516904159	1178290263	2574320659	5417028610	→ 1892
19							20	1940	28675	211089	1073227	4342688	15046642	46541635	131846699	347854815	864758855	2043049102	4617369760	10034398370	→ 707
20							6	1415	27073	236131											
21							1	961	24584	243694											
22								602	21450	250749											
23								343	17957	250749											
24								174	14395	243694											
25								76	11021	230131											
26								27	8031	211089											
27								7	5545	187959											
28								1	3606	162337											
29									2191	135853											
30									1230	110010											

k=0
k=1
k=2
k=3

Mahonian nos

$\Delta = 8302$

k \ n	1	2
0	(0)	∅
1	(0)	∅
2	(-1)	(0)
3	(-1)	(-1)
4	(-1)	(-2)
5	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]
7	(1)	[illegible]
8	(1)	[illegible]
9	(1)	[illegible]
10	(1)	(2)
11	(1)	(3)
12	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	
15	[illegible]	

NETTO

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Anzahl der Inversionen, welche zu 3. gehören. Die Anzahl ist gleich

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} i_\alpha - \binom{\mu+1}{2}.$$

Um dies zu beweisen, denken wir uns zunächst die Elemente $i_1, i_2, \ldots$ ihrer ansteigenden Grösse nach geordnet; sie mögen $j_1, j_2, \ldots j_\mu$ heissen. Diese Anordnung ändert die zu 3. gehörige Inversionenanzahl nicht. Dann giebt j_1 genau $(j_1 - 1)$ Inversionen, weil ja die Elemente $1, 2, \ldots (j_1 - 1)$ unter den k vorkommen; das Element j_2 giebt gegen die k genau $(j_2 - 2)$ Inversionen, weil ja die Elemente $1, 2, \ldots (j_1 - 1), (j_1 + 1), \ldots (j_2 - 1)$ unter den k vorkommen, u. s. f. Also erhält man für die Anzahl bei 3. die Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} (j_\alpha - \alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\mu} i_\alpha - \binom{\mu+1}{2}.$$

Zählt man folglich die Inversionen der i für sich, ebenso die der k für sich und fügt der Summe beider Zahlen den soeben für 3. berechneten Ausdruck bei, so erhält man die Gesammtzahl der Inversionen.

§ 56. Alle $n!$ Permutationen von n Elementen teilen sich in $\frac{1}{2}n!$ Paare von inversen (§ 54) Complexionen. Jedes Paar enthält $\binom{n}{2}$ Inversionen; also besitzen alle Permutationen zusammen

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}n!$$

Inversionen bei der Elementenzahl n.

Wir wollen die Anzahl der Permutationen von n Elementen, welche gerade $\varkappa$ Inversionen besitzen, mit $I_\varkappa^{(n)}$ bezeichnen. Dann ist

$$(\alpha) \qquad \sum_\varkappa I_\varkappa^{(n)} = n! \qquad \left(\varkappa = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right),$$

denn die linke Seite liefert die Zahl aller Permutationen.

Weil ferner $\varkappa I_\varkappa^{(n)}$ angiebt, wie viele Inversionen in allen $I_\varkappa^{(n)}$ vorkommen, so wird nach dem obigen Satze*)

$$(\beta) \qquad \sum_\varkappa \varkappa I_\varkappa^{(n)} = \frac{1}{2}\binom{n}{2}n!; \qquad \left(\varkappa = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right).$$

*) Stern hat, Journ. f. Math. 18 (1838) p. 100, die Frage gestellt; Terquem hat sie, Journ. de math. 3 (1838) p. 559, beantwortet.

Da die $n!$ Permutationen in Paare inverser Permutationen geteilt werden können, so giebt es zu jeder mit $\varkappa$ Inversionen eine inverse mit $\binom{n}{2} - \varkappa$ Inversionen. Folglich ist

$$(\gamma) \qquad I_\varkappa^{(n)} = I_{\binom{n}{2}-\varkappa}^{(n)}.$$

Wir werden jetzt eine Reductionsformel für $I_\varkappa^{(n)}$ herleiten. Diejenigen zu $I_\varkappa^{(n)}$ gehörigen Permutationen, welche mit 1 beginnen, haben $\varkappa$ Inversionen zwischen den Elementen $2, 3, \ldots n$. Ihre Anzahl ist demnach $I_\varkappa^{(n-1)}$. Diejenigen zugehörigen Permutationen, welche mit 2 beginnen, haben nur $(\varkappa - 1)$ Inversionen zwischen den übrigen Elementen $1, 3, 4, \ldots n$; denn 2 liefert gegenüber 1 schon eine Inversion. Nach der Schlussbemerkung in § 54 giebt dies $I_{\varkappa-1}^{(n-1)}$. So geht es fort bis zu $I_{\varkappa-n+1}^{(n-1)}$ als der Anzahl derjenigen zugehörigen Permutationen, die mit n beginnen. Wir haben somit

$$(\delta) \qquad I_\varkappa^{(n)} = \sum_\alpha I_{\varkappa-\alpha}^{(n-1)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots (n-1));$$

dabei fallen diejenigen Summanden rechts fort, bei denen $\varkappa < \alpha$ ist.

Hiernach wird

$$\begin{aligned}
I_0^{(n)} &= I_0^{(n-1)} \\
I_1^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots \\
I_{n-1}^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} \\
I_n^{(n)} &= \phantom{I_0^{(n-1)} +{}} I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} \\
I_{n+1}^{(n)} &= \phantom{I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} +{}} I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} + I_{n+1}^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots \\
I_{\binom{n}{2}}^{(n)} &= \cdots\cdots + I_{\binom{n-1}{2}}^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Tabelle tritt in jeder Spalte dasselbe $I_\alpha^{(n-1)}$ genau n-mal auf. Addiert man alle diese Gleichungen spaltenweise, so gelangt man zu

$$\sum_\varkappa I_\varkappa^{(n)} = n\sum_\varkappa I_\varkappa^{(n-1)},$$

und dies führt auf die frühere Formel (α). Multipliciert man die Gleichungen abwechselnd mit $+1$ und -1 und summiert sie dann, so ergiebt sich für ein gerades n direct

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - I_3^{(n)} + \cdots = 0.$$

goes with Guy's letter

Für ein ungerades n folgt zunächst

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - \cdots = I_0^{(n-1)} - I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} - \cdots$$

und da $(n-1)$ ungerade ist, wiederum Null. Man findet demnach allgemein

$$(\varepsilon) \qquad \sum_\alpha (-1)^\alpha I_\alpha^{(n)} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right),$$

d. h. die Anzahl aller Permutationen von n Elementen mit einer geraden Zahl von Inversionen ist gleich derjenigen mit einer ungeraden Zahl von Inversionen.

Man kann dieses Resultat leicht erweitern. Sind $q_1, q_2, \ldots q_n$ Zahlen, deren Summe 0 beträgt, und multipliciert man die Gleichungen des Schemas der Reihe nach mit $q_1, q_2, \ldots q_n$, $q_{n+1} = q_1$, $q_{n+2} = q_2$, $\ldots$, $q_{2n+1} = q_1, \ldots$, so wird auch hier

$$(\zeta) \qquad \sum_\alpha q_\alpha I_\alpha^{(n)} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right).$$

§ 57. Man hat $I_0^{(n)} = 1$, wie oben gezeigt worden ist. Ferner ist $I_1^{(n)} = (n-1)$. Denn für die n Elemente $1, 2, \ldots n$ giebt es nur als Permutationen mit einer einzigen Inversion die folgenden

$$2\,1\,3\,4 \ldots n; \quad 1\,3\,2\,4 \ldots n; \quad \ldots \quad 1\,2\,3\,4 \ldots (n-2)\, n\, (n-1).$$

Mit Hülfe der Reductionsformel (δ) kann man jetzt die Werte der I leicht berechnen; wir stellen sie für die kleinsten n und $\varkappa$ im Folgenden zusammen.*)

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\varkappa = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2			2	5	9	14	20	27	35	44	54
3			1	**6**	15	29	49	76	111	155	209
4				5	**20**	49	98	174	285	440	649
5				3	22	**71**	169	343	628	1068	1717
6				1	20	90	**259**	602	1230	2298	4015
7					15	101	359	**961**	2191	4489	8504

A8302

9 101 455
4 90 531
1 71 573

*) Vgl. J. Bourget, Nouv. Ann. (2) 10 (1871) p. 254. Hier werden als conjugierte Permutationen solche bezeichnet, deren Inversionen in gewissen, sich ergänzenden Beziehungen stehen.

49 573
29 531
14 455
5 359

Man erkennt, dass, sobald ein gewisser Anfangswert von n überschritten ist, bei jedem $\varkappa$ die einfache Relation

$$(\eta) \qquad I_\varkappa^{(n)} = I_{\varkappa-1}^{(n)} + I_\varkappa^{(n-1)}$$

auftritt. Dies ergiebt sich aus (δ), wenn wir schreiben

$$I_\varkappa^{(n)} = I_\varkappa^{(n-1)} + \sum_\alpha I_{(\varkappa-1)-\alpha}^{(n-1)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots (n-2));$$

$$I_{\varkappa-1}^{(n)} = \sum_\alpha I_{(\varkappa-1)-\alpha}^{(n-1)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots (n-1))$$

Die Formel (η) ist also richtig, sobald $I_{\varkappa-n}^{(n-1)} = 0$ wird, d. h. sobald $\varkappa < n$ ist. Für jede Horizontalreihe gilt also von dem $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab das Gesetz (η); in der Tafel sind die betreffenden Glieder fett gedruckt.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Formeln, indem man die Werte für kleine n prüft und dann die Formel (η) zur Anwendung bringt;

$$I_0^{(n)} = 1;$$
$$I_1^{(n)} = n - 1;$$
$$I_2^{(n)} = \binom{n}{2} - 1;$$
$$I_3^{(n)} = \binom{n+1}{3} - n;$$
$$I_4^{(n)} = \binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{2};$$
$$I_5^{(n)} = \binom{n+3}{5} - \binom{n+2}{3} + 1;$$
$$I_6^{(n)} = \binom{n+4}{6} - \binom{n+3}{4} + n.$$

Die vorletzte Formel gilt erst von $n = 5$ an; bei $n = 4$ ergiebt sie 2 statt 3. Die letzte Formel gilt erst von $n = 6$ ab.

§ 58. Eine Complexion verschiedener Elemente wird zur ersten oder zur zweiten Classe gerechnet, oder auch als gerade bezw. ungerade Complexion bezeichnet*), je nachdem sie eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Inversionen besitzt. Verteilt man alle $n!$ Permutationen von n verschiedenen Elementen in die beiden Classen, so enthält nach (ε) eine jede der beiden Classen gleich viele Permutationen.

*) É. Bézout (l. c.). A. L. Cauchy, Journ. de l'Éc. pol. cah. 17 (1815) p. 41. — K. G. Jacobi, Journ. f. Math. 22 (1841) p. 286 = Werke 3 p. 359 spricht von positiver und negativer Classe.