~~punching~~ 5

Netto

707
1892
-1894

Lehrbuch der Combinatorik aus

8302

Er nimmt m Reihen von Elementen an, etwa

$$a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1\nu_1},$$
$$a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2\nu_2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots a_{m\nu_m}$$

und denkt sich gleichzeitig m Kästen, deren erster ν_1 Plätze hat, deren zweiter ν_2 Plätze hat, u. s. f. Die Verteilung der Elemente findet in die Plätze der Kästen statt. Dann heissen zwei Verteilungen „verwandt" oder „conjugiert", wenn bei der ersten Verteilung das Element $a_{\kappa\varrho}$ im Kasten λ und bei der zweiten Verteilung das Element $a_{\lambda\varrho}$ im Kasten κ sich befindet.

Mac Mahon setzt dabei alle Elemente mit gleichem ersten Index einander gleich.

Capitel 4.

Inversionen und Sequenzen.

§ 54. Wir wollen uns in diesem Capitel mit dem Studium einiger bei den Permutationen vorkommenden Verhältnisse beschäftigen.

Folgt in einer Complexion auf ein seiner Ordnung nach späteres Element entweder unmittelbar oder durch andere Elemente getrennt ein früheres, so heisst dieses Vorkommniss eine Inversion.*) Sind als Elemente die natürlichen Zahlen gegeben, dann besitzt eine Complexion so viele Inversionen, als höhere vor niederen Zahlen stehen; es hat z. B. die Complexion 2 5 1 6 4 3 die 7 Inversionen 2 1, 5 1, 5 4, 53, 64, 63, 43. Die kleinstmögliche Anzahl von Inversionen ist 0; sie tritt bei der natürlichen Ordnung der Elemente $1, 2, 3, \ldots n$ auf; die grösstmögliche Anzahl ist $\binom{n}{2}$; sie tritt bei der umgekehrten Ordnung der Elemente $n, n-1, \ldots 3, 2, 1$ auf.

*) Die ersten derartigen Betrachtungen stammen von G. Cramer, Introd. à l'Analyse des lignes courbes (1750), Genève. Appendix p. 658; É. Bézout, Mém. Par. (1764) p. 292; P. S. Laplace, Mém. Paris pour 1772; partie II. (1776) p. 294. Laplace benutzt den Namen Variation, der also, wie hieraus zu ersehen ist, sich damals noch nicht für die jetzt so benannte combinatorische Operation eingebürgert hatte. In ziemlich ungefüger Weise behandelt H. A. Rothe (Samml. combinat.-analyt. Abhandlungen, herausgeg. v. Hindenburg, zweite Sammlung, 1800, Leipzig, p. 263) die Anfangsgründe der Theorie der Inversionen mit Hülfe der von ihm eingeführten „Stellenelemente" und „Stellenexponenten".

Allgemeiner gilt der Satz, dass die Z
Complexion von n Elementen sich mit de
gekehrten, von rechts nach links gelesene
plexion gehört, zu $\binom{n}{2}$ ergänzt. Denn es gieb
von n Elementen $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, ein
Element a_κ und a_λ mit einander zu vergleic
Inversion, so liefert $a_\lambda a_\kappa$ keine, und umgek
keiten liefert also in der einen von beiden C

Vertauscht man zwei auf einander fol
plexion, dann ändert sich die Anzahl de
plexion um ± 1. Denn durch Vertauschu
in dem Verhalten zu den übrigen Elemente
gerufen; in dem Verhalten der beiden u
eine Aenderung eintreten; lieferte $a_\kappa a_{\kappa+1}$
$a_{\kappa+1} a_\kappa$ keine solche und umgekehrt. Ferne
Vertauschung des κ^{ten} Elementes a_κ mit de
durch $(2\nu-1)$ Vertauschungen unmittel
Elemente bewirkt werden kann. Jede sol
Aenderung in der Inversionenanzahl um
Einheit hervor. Folglich verändert si
zweier beliebiger Elemente die Anz
eine ungerade Zahl.

Die Anzahl der Inversionen einer Co
wenn man ihre Elemente so durch and
folge beider in ihrer natürlichen Anordnu
man also in einer Complexion aus 1, 2,
einführt 1, 3, 5, 7, so dass z. B. 2 3 1 4
haben beide Complexionen dieselbe Anza

§ 55. Ist die Anzahl der Elemente
zur Abzählung der Inversionen einer
folgenden Methode bedienen.*)

Wir teilen die Complexion in zwei
die erste Gruppe enthält der Reihe na
die zweite Gruppe enthält der Reihe na
Dabei ist $\mu + \nu = n$.

Dann bildet man die Anzahl sämm
1. die von den Elementen i_1, i_2
2. die von den Elementen k_1, k
3. die von den Elementen i_1, i_2
$k_1, k_2, \ldots k_\nu$ herrühren.

*) P. Gordan-G. Kerschensteiner, Vorle

Allgemeiner gilt der Satz, dass die Zahl der Inversionen einer Complexion von n Elementen sich mit derjenigen, welche zur umgekehrten, von rechts nach links gelesenen, der „inversen" Complexion gehört, zu $\binom{n}{2}$ ergänzt. Denn es giebt bei einer jeden Complexion von n Elementen $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, ein früheres und ein späteres Element $a_\varkappa$ und a_λ mit einander zu vergleichen. Liefert nun $a_\varkappa a_\lambda$ eine Inversion, so liefert $a_\lambda a_\varkappa$ keine, und umgekehrt. Jede dieser Möglichkeiten liefert also in der einen von beiden Complexionen eine Inversion.

Vertauscht man zwei auf einander folgende Elemente einer Complexion, dann ändert sich die Anzahl der Inversionen dieser Complexion um ± 1. Denn durch Vertauschung von $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ wird in dem Verhalten zu den übrigen Elementen keine Aenderung hervorgerufen; in dem Verhalten der beiden unter einander dagegen wird eine Aenderung eintreten; lieferte $a_\varkappa a_{\varkappa+1}$ eine Inversion, dann liefert $a_{\varkappa+1} a_\varkappa$ keine solche und umgekehrt. Ferner sieht man leicht, dass die Vertauschung des $\varkappa^{\text{ten}}$ Elementes $a_\varkappa$ mit dem $(\varkappa+\nu)^{\text{ten}}$ Elemente $a_{\varkappa+\nu}$ durch $(2\nu-1)$ Vertauschungen unmittelbar auf einander folgender Elemente bewirkt werden kann. Jede solche Vertauschung ruft eine Aenderung in der Inversionenanzahl um eine positive oder negative Einheit hervor. Folglich verändert sich bei der Vertauschung zweier beliebiger Elemente die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Die Anzahl der Inversionen einer Complexion ändert sich nicht, wenn man ihre Elemente so durch andere ersetzt, dass die Reihenfolge beider in ihrer natürlichen Anordnung die gleiche bleibt. Wenn man also in eine Complexion aus $1, 2, 3, 4$ statt dieser Elemente einführt $1, 3, 5, 7$, so dass z. B. $2\,3\,1\,4$ in $3\,5\,1\,7$ übergeht, dann haben beide Complexionen dieselbe Anzahl von Inversionen.

§ 55. Ist die Anzahl der Elemente gross, dann kann man sich zur Abzählung der Inversionen einer Complexion mit Vorteil der folgenden Methode bedienen.*)

Wir teilen die Complexion in zwei beliebige Teile;
die erste Gruppe enthält der Reihe nach die Elemente $i_1, i_2, \ldots i_\mu$,
die zweite Gruppe enthält der Reihe nach die Elemente $k_1, k_2, \ldots k_\nu$.
Dabei ist $\mu + \nu = n$.

Dann bildet man die Anzahl sämmtlicher Inversionen

1. die von den Elementen $i_1, i_2, \ldots i_\mu$ herrühren,
2. die von den Elementen $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ herrühren,
3. die von den Elementen $i_1, i_2, \ldots i_\mu$ in Beziehung auf $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ herrühren.

*) P. Gordan-G. Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie I, p. 2.

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Anzahl der Inversionen, welche zu 3. gehören. Die Anzahl ist gleich

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} i_\alpha - \binom{\mu+1}{2}.$$

Um dies zu beweisen, denken wir uns zunächst die Elemente $i_1, i_2, \ldots$ ihrer ansteigenden Grösse nach geordnet; sie mögen $j_1, j_2, \ldots j_\mu$ heissen. Diese Anordnung ändert die zu 3. gehörige Inversionenanzahl nicht. Dann giebt j_1 genau $(j_1 - 1)$ Inversionen, weil ja die Elemente $1, 2, \ldots (j_1 - 1)$ unter den k vorkommen; das Element j_2 giebt gegen die k genau $(j_2 - 2)$ Inversionen, weil ja die Elemente $1, 2, \ldots (j_1 - 1), (j_1 + 1), \ldots (j_2 - 1)$ unter den k vorkommen, u. s. f. Also erhält man für die Anzahl bei 3. die Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} (j_\alpha - \alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\mu} i_\alpha - \binom{\mu+1}{2}.$$

Zählt man folglich die Inversionen der i für sich, ebenso die der k für sich und fügt der Summe beider Zahlen den soeben für 3. berechneten Ausdruck bei, so erhält man die Gesammtzahl der Inversionen.

§ 56. Alle $n!$ Permutationen von n Elementen teilen sich in $\frac{1}{2}\, n!$ Paare von inversen (§ 54) Complexionen. Jedes Paar enthält $\binom{n}{2}$ Inversionen; also besitzen alle Permutationen zusammen

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\, n!$$

Inversionen bei der Elementenzahl n.

Wir wollen die Anzahl der Permutationen von n Elementen, welche gerade $\varkappa$ Inversionen besitzen, mit $I_\varkappa^{(n)}$ bezeichnen. Dann ist

$$(\alpha) \qquad \sum_\varkappa I_\varkappa^{(n)} = n! \qquad \left(\varkappa = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right),$$

denn die linke Seite liefert die Zahl aller Permutationen.

Weil ferner $\varkappa I_\varkappa^{(n)}$ angiebt, wie viele Inversionen in allen $I_\varkappa^{(n)}$ vorkommen, so wird nach dem obigen Satze*)

$$(\beta) \qquad \sum_\varkappa \varkappa I_\varkappa^{(n)} = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\, n!; \qquad \left(\varkappa = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right).$$

*) Stern hat, Journ. f. Math. 18 (1838) p. 100, die Frage gestellt; Terquem hat sie, Journ. de math. 3 (1838) p. 559, beantwortet.

Da die $n!$ Permutationen in Paare inverser Permutationen geteilt werden können, so giebt es zu jeder mit $\varkappa$ Inversionen eine inverse mit $\binom{n}{2} - \varkappa$ Inversionen. Folglich ist

$$(\gamma) \qquad I_\varkappa^{(n)} = I_{\binom{n}{2}-\varkappa}^{(n)}.$$

Wir werden jetzt eine Reductionsformel für $I_\varkappa^{(n)}$ herleiten. Diejenigen zu $I_\varkappa^{(n)}$ gehörigen Permutationen, welche mit 1 beginnen, haben $\varkappa$ Inversionen zwischen den Elementen $2, 3, \ldots n$. Ihre Anzahl ist demnach $I_\varkappa^{(n-1)}$. Diejenigen zugehörigen Permutationen, welche mit 2 beginnen, haben nur $(\varkappa - 1)$ Inversionen zwischen den übrigen Elementen $1, 3, 4, \ldots n$; denn 2 liefert gegenüber 1 schon eine Inversion. Nach der Schlussbemerkung in § 54 giebt dies $I_{\varkappa-1}^{(n-1)}$. So geht es fort bis zu $I_{\varkappa-n+1}^{(n-1)}$ als der Anzahl derjenigen zugehörigen Permutationen, die mit n beginnen. Wir haben somit

$$(\delta) \qquad I_\varkappa^{(n)} = \sum_\alpha I_{\varkappa-\alpha}^{(n-1)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots (n-1));$$

dabei fallen diejenigen Summanden rechts fort, bei denen $\varkappa < \alpha$ ist.

Hiernach wird

$$\begin{aligned}
I_0^{(n)} &= I_0^{(n-1)} \\
I_1^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
I_{n-1}^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} \\
I_n^{(n)} &= \qquad\quad I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} \\
I_{n+1}^{(n)} &= \qquad\qquad\qquad I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} + I_{n+1}^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
I_{\binom{n}{2}}^{(n)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots + I_{\binom{n-1}{2}}^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Tabelle tritt in jeder Spalte dasselbe $I_\alpha^{(n-1)}$ genau n-mal auf. Addiert man alle diese Gleichungen spaltenweise, so gelangt man zu

$$\sum_\varkappa I_\varkappa^{(n)} = n \sum_\varkappa I_\varkappa^{(n-1)},$$

und dies führt auf die frühere Formel (α). Multipliciert man die Gleichungen abwechselnd mit $+1$ und -1 und summiert sie dann, so ergiebt sich für ein gerades n direct

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - I_3^{(n)} + \cdots = 0.$$

Für ein ungerades n folgt zunächst

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - \cdots = I_0^{(n-1)} - I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} - \cdots$$

und da $(n-1)$ ungerade ist, wiederum Null. Man findet demnach allgemein

$$(\varepsilon) \qquad \sum_\alpha (-1)^\alpha I_\alpha^{(n)} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right),$$

d. h. die Anzahl aller Permutationen von n Elementen mit einer geraden Zahl von Inversionen ist gleich derjenigen mit einer ungeraden Zahl von Inversionen.

Man kann dieses Resultat leicht erweitern. Sind $q_1, q_2, \ldots q_n$ Zahlen, deren Summe 0 beträgt, und multipliciert man die Gleichungen des Schemas der Reihe nach mit $q_1, q_2, \ldots q_n$, $q_{n+1} = q_1$, $q_{n+2} = q_2$, $\ldots$, $q_{2n+1} = q_1, \ldots$, so wird auch hier

$$(\zeta) \qquad \sum_\alpha q_\alpha I_\alpha^{(n)} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right).$$

§ 57. Man hat $I_0^{(n)} = 1$, wie oben gezeigt worden ist. Ferner ist $I_1^{(n)} = (n-1)$. Denn für die n Elemente $1, 2, \ldots n$ giebt es nur als Permutationen mit einer einzigen Inversion die folgenden

$$2\,1\,3\,4 \ldots n; \quad 1\,3\,2\,4 \ldots n; \quad \ldots \quad 1\,2\,3\,4 \ldots (n-2)\,n\,(n-1).$$

Mit Hülfe der Reductionsformel (δ) kann man jetzt die Werte der I leicht berechnen; wir stellen sie für die kleinsten n und $\varkappa$ im Folgenden zusammen.*)

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\varkappa = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2			2	5	9	14	20	27	35	44	54
3			1	6	15	29	49	76	111	155	209
4				5	20	49	98	174	285	440	649
5				3	22	71	169	343	628	1068	1717
6				1	20	90	259	602	1230	2298	4015
7					15	101	359	961	2191	4489	8504

707

*) Vgl. J. Bourget, Nouv. Ann. (2) 10 (1871) p. 254. Hier werden als conjugierte Permutationen solche bezeichnet, deren Inversionen in gewissen, sich ergänzenden Beziehungen stehen.

1892 1893 1894

Δ A8302

Man erkennt, dass, sobald ein gew
schritten ist, bei jedem $\varkappa$ die einfache

(η) $I_\varkappa^{(n)} = I_{\varkappa-1}^{(n)} +$

auftritt. Dies ergiebt sich aus (δ), we

$I_\varkappa^{(n)} = I_\varkappa^{(n-1)} + \sum_\alpha$

$I_{\varkappa-1}^{(n)} = \sum_\alpha I_{(\varkappa-1)-\alpha}^{(n-1)}$

Die Formel (η) ist also richtig, sobal
$\varkappa < n$ ist. Für jede Horizontalreihe gil
ab das Gesetz (η); in der Tafel sind
gedruckt.

Man überzeugt sich leicht von
Formeln, indem man die Werte für
Formel (η) zur Anwendung bringt;

$I_0^{(n)} = 1;$

$I_1^{(n)} = n - 1;$

$I_2^{(n)} = \binom{n}{2} - 1$

$I_3^{(n)} = \binom{n+1}{3}$

$I_4^{(n)} = \binom{n+2}{4}$

$I_5^{(n)} = \binom{n+3}{5}$

$I_6^{(n)} = \binom{n+4}{6}$

Die vorletzte Formel gilt erst
sie 2 statt 3. Die letzte Formel gi

§ 58. Eine Complexion verschi
oder zur zweiten Classe gerechn
ungerade Complexion bezeichnet
oder eine ungerade Anzahl von In
alle $n!$ Permutationen von n versch
Classen, so enthält nach (ε) eine je
Permutationen.

*) É. Bézout (l. c.). A. L. Cauc
p. 41. — K. G. Jacobi, Journ. f. Math.
von positiver und negativer Classe.

folgt zunächst

$$-\cdots = I_0^{(n-1)} - I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} - \cdots$$

e ist, wiederum Null. Man findet demnach

$$\sum_\alpha (-1)^\alpha I_\alpha^{(n)} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right),$$

Permutationen von n Elementen mit
on Inversionen ist gleich derjenigen
Zahl von Inversionen.

esultat leicht erweitern. Sind $q_1, q_2, \ldots q_n$
eträgt, und multipliciert man die Gleichungen
nach mit $q_1, q_2, \ldots q_n$, $q_{n+1} = q_1$, $q_{n+2} = q_2$,
ird auch hier

$$\sum_\alpha q_\alpha I_\alpha^{(n)} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right).$$

wie oben gezeigt worden ist. Ferner
für die n Elemente $1, 2, \ldots n$ giebt es nur
iner einzigen Inversion die folgenden

$$4\ldots n; \quad \ldots \quad 1234\ldots(n-2)\,n\,(n-1).$$

uctionsformel (δ) kann man jetzt die Werte
wir stellen sie für die kleinsten n und $\varkappa$ im

5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1
4	5	6	7	8	9	10
9	14	20	27	35	44	54
15	29	49	76	111	155	209
20	49	98	174	285	440	649
22	**71**	169	343	628	1068	1717
20	90	**259**	602	1230	2298	4015
15	101	359	**961**	2191	4489	8504

uv. Ann. (2) 10 (1871) p. 254. Hier werden als con-
bezeichnet, deren Inversionen in gewissen, sich
ien.

Man erkennt, dass, sobald ein gewisser Anfangswert von n überschritten ist, bei jedem $\varkappa$ die einfache Relation

$$(\eta) \qquad I_\varkappa^{(n)} = I_{\varkappa-1}^{(n)} + I_\varkappa^{(n-1)}$$

auftritt. Dies ergiebt sich aus (δ), wenn wir schreiben

$$I_\varkappa^{(n)} = I_\varkappa^{(n-1)} + \sum_\alpha I_{(\varkappa-1)-\alpha}^{(n-1)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots (n-2));$$

$$I_{\varkappa-1}^{(n)} = \sum_\alpha I_{(\varkappa-1)-\alpha}^{(n-1)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots (n-1))$$

Die Formel (η) ist also richtig, sobald $I_{\varkappa-n}^{(n-1)} = 0$ wird, d. h. sobald $\varkappa < n$ ist. Für jede Horizontalreihe gilt also von dem $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab das Gesetz (η); in der Tafel sind die betreffenden Glieder fett gedruckt.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Formeln, indem man die Werte für kleine n prüft und dann die Formel (η) zur Anwendung bringt;

$$I_0^{(n)} = 1;$$

$$I_1^{(n)} = n - 1;$$

$$I_2^{(n)} = \binom{n}{2} - 1;$$

$$I_3^{(n)} = \binom{n+1}{3} - n;$$

$$I_4^{(n)} = \binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{2};$$

$$I_5^{(n)} = \binom{n+3}{5} - \binom{n+2}{3} + 1;$$

$$I_6^{(n)} = \binom{n+4}{6} - \binom{n+3}{4} + n.$$

Die vorletzte Formel gilt erst von $n = 5$ an; bei $n = 4$ ergiebt sie 2 statt 3. Die letzte Formel gilt erst von $n = 6$ ab.

§ 58. Eine Complexion verschiedener Elemente wird zur ersten oder zur zweiten Classe gerechnet, oder auch als gerade bezw. ungerade Complexion bezeichnet*), je nachdem sie eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Inversionen besitzt. Verteilt man alle $n!$ Permutationen von n verschiedenen Elementen in die beiden Classen, so enthält nach (ε) eine jede der beiden Classen gleich viele Permutationen.

*) É. Bézout (l. c.). A. L. Cauchy, Journ. de l'Éc. pol. cah. 17 (1815) p. 41. — K. G. Jacobi, Journ. f. Math. 22 (1841) p. 286 = Werke 3 p. 359 spricht von positiver und negativer Classe.

Durch eine Vertauschung zweier Elemente unter einander geht aus einer Complexion einer der beiden Classen eine Complexion der andern Classe hervor. Eine solche Umstellung von zwei Elementen wird **Transposition** genannt. Jede Permutation P_2 ist aus jeder anderen P_1 durch eine Reihe von auf einander folgenden Transpositionen ableitbar. Denn ist die α^{te} Stelle die erste, in der beide Permutationen P_1 und P_2 nicht übereinstimmen, so kann man durch eine Transposition die Permutation P_1 so ändern, dass die neue mit der gegebenen zweiten P_2 jetzt auch in der α^{ten} Stelle übereinstimmt, u. s. w. Z. B. erhält man aus $P_1 = 3\,2\,1\,5\,6\,8\,7\,4$ die Permutation $P_2 = 4\,2\,8\,3\,6\,1\,5\,7$ durch die Schritte

$$\begin{aligned}
&(34)\ldots 4\,2\,1\,5\,6\,8\,7\,3,\\
&(18)\ldots 4\,2\,8\,5\,6\,1\,7\,3,\\
&(53)\ldots 4\,2\,8\,3\,6\,1\,7\,5,\\
&(57)\ldots 4\,2\,8\,3\,6\,1\,5\,7.
\end{aligned}$$

Hierbei deuten (34), (18), ... die Transpositionen an, durch welche 3 und 4, ebenso 1 und 8 u. s. f. umgestellt werden.

Man kann einen solchen Uebergang durch Transpositionen auf unendlich viele Arten machen. Für das eben behandelte Beispiel genügen auch u. a. die Transpositionsfolgen

$$\begin{aligned}
&(12),\ (23),\ (24),\ (12),\ (38),\ (35),\ (57),\ (17);\\
&(13),\ (14),\ (13),\ (18),\ (15),\ (13),\ (17),\ (15);\ \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Wie aber auch hierbei die Folge der Transpositionen gewählt werde, stets lässt ihre Anzahl, durch 2 dividiert, denselben Rest 0 oder denselben Rest 1; die Anzahl ist demnach entweder stets gerade oder stets ungerade. Dies kann aus den früheren Darlegungen ohne Weiteres entnommen werden. Denn da durch eine gewisse Anzahl von Transpositionen die Classe der Complexionen eben so oft gewechselt wird, als jene Anzahl angiebt, und da die Classe der Anfangs-Complexion und die der Schluss-Complexion feststeht, so wird in allen Fällen, in denen beide Complexionen zu derselben Classe gehören, eine gerade Anzahl von Transpositionen nötig werden, und im entgegengesetzten Falle eine ungerade Anzahl.

Wir können auch hier, der von uns fast ununterbrochen benutzten Methode der strengen Induction folgend, noch einen zweiten Beweis des gleichen Satzes geben. Dazu wird es ausreichen, zu zeigen, dass stets eine gerade Anzahl von Transpositionen nötig ist, um eine Complexion in sich selbst überzuführen. Denn führen einmal σ und einmal τ Transpositionen die Complexion A in die Complexion B über, so wird B durch die umgekehrte Folge der τ Transpositionen in A verwandelt, und daher A durch $(\sigma + \tau)$ in sich

selbst. Ist nun $\sigma + \tau \equiv 0$ (mod. 2
$\sigma \equiv \tau$ (mod. 2).

Für zwei Elemente 1, 2 ist d
bar klar. Es genügt daher, seine
zu zeigen, unter der Voraussetzung
ist. Ferner können wir, da dies j
Elemente involviert, die Annahme
lichen Anordnung

(α) $1, 2, 3, \ldots (n -$

ausgehen und durch eine Folge vo
kehren.

Wir bilden demnach, von (α)
plexionen

(β) $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$

von denen eine jede durch eine ei
gehenden abgeleitet ist. Es sollen
liegen, deren erste und deren letzt
ist die Richtigkeit der Congruenz

$N \equiv 0$

nachzuweisen.

Wir tilgen in allen $(N+1)$
erhalten dann $(N+1)$ Zeilen, dere
mente $1, 2, \ldots n$ darstellt. Bei ih
von einer Zeile zur folgenden nicht
zweien der n übrigen Elemente erf
sicher der Fall, wenn die vorige Tr
Elementen dieses letzte nun getilgte
also schon vorher als Transposition
darstellte. Machte dagegen beim
$(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile der ursprünglichen C
eine Stellenänderung um eine Einhe

k^{te} Zeile $i_1, i_2, .$
$(k+1)^{\text{te}}$ Zeile $i_1, i_2, .$

so erscheint nach der Unterdrückung
zweimal nach einander. Wollen wir
drückung des Elementes $(n+1)$ ent
Uebergang von einer jeden zur folg
bewirken, so müssen wir im vorl
Zeilen die k^{te} oder die $(k+1)^{\text{te}}$ tilg

Macht beim Uebergange von d
Element $(n+1)$ in der ersten Ordnu
von α Einheiten

ung zweier Elemente unter einander geht
er der beiden Classen eine Complexion der
ne solche Umstellung von zwei Elementen
annt. Jede Permutation P_2 ist aus jeder
Reihe von auf einander folgenden Trans-
n ist die α^{te} Stelle die erste, in der beide
nicht übereinstimmen, so kann man durch
mutation P_1 so ändern, dass die neue mit
$_2$ jetzt auch in der α^{ten} Stelle überein-
ält man aus $P_1 = 3\,2\,1\,5\,6\,8\,7\,4$ die Permu-
durch die Schritte

)... 4 2 1 5 6 8 7 3,
)... 4 2 8 5 6 1 7 3,
)... 4 2 8 3 6 1 7 5,
)... 4 2 8 3 6 1 5 7.

),... die Transpositionen an, durch welche
u. s. f. umgestellt werden.
Uebergang durch Transpositionen auf
achen. Für das eben behandelte Beispiel
ranspositionsfolgen

), (12), (38), (35), (57), (17);
), (18), (15), (13), (17), (15); u. s. w.

ei die Folge der Transpositionen gewählt
zahl, durch 2 dividiert, denselben Rest 0
Anzahl ist demnach entweder stets gerade
kann aus den früheren Darlegungen ohne
len. Denn da durch eine gewisse Anzahl
lasse der Complexionen eben so oft ge-
ahl angiebt, und da die Classe der Anfangs-
hluss-Complexion feststeht, so wird in allen
omplexionen zu derselben Classe gehören,
ranspositionen nötig werden, und im ent-
ngerade Anzahl.
er, der von uns fast ununterbrochen be-
gen Induction folgend, noch einen zweiten
s geben. Dazu wird es ausreichen, zu
rade Anzahl von Transpositionen nötig ist,
ch selbst überzuführen. Denn führen ein-
positionen die Complexion A in die Com-
durch die umgekehrte Folge der τ Trans-
lt, und daher A durch $(\sigma + \tau)$ in sich

selbst. Ist nun $\sigma + \tau \equiv 0 \pmod{2}$, so ist, wie behauptet wurde, $\sigma \equiv \tau \pmod{2}$.

Für zwei Elemente 1, 2 ist der jetzt formulierte Satz unmittelbar klar. Es genügt daher, seine Richtigkeit für $(n+1)$ Elemente zu zeigen, unter der Voraussetzung, dass er bei n Elementen richtig ist. Ferner können wir, da dies ja nur eine andere Benennung der Elemente involviert, die Annahme machen, dass wir von der natürlichen Anordnung

$$(\alpha) \qquad 1, 2, 3, \ldots (n-1),\ n,\ (n+1)$$

ausgehen und durch eine Folge von Transpositionen zu ihr zurückkehren.

Wir bilden demnach, von (α) ausgehend, eine Reihe von Complexionen

$$(\beta) \qquad i_1, i_2, i_3, \ldots i_{n-1}, i_n, i_{n+1},$$

von denen eine jede durch eine einzige Transposition aus der vorhergehenden abgeleitet ist. Es sollen $(N+1)$ derartige Zeilen (β) vorliegen, deren erste und deren letzte mit (α) übereinstimmen. Dann ist die Richtigkeit der Congruenz

$$N \equiv 0 \qquad \pmod{2}$$

nachzuweisen.

Wir tilgen in allen $(N+1)$ Zeilen das Element $(n+1)$ und erhalten dann $(N+1)$ Zeilen, deren jede eine Complexion der Elemente $1, 2, \ldots n$ darstellt. Bei ihnen braucht aber der Uebergang von einer Zeile zur folgenden nicht durch eine Transposition zwischen zweien der n übrigen Elemente erfolgt zu sein. Dies ist nur dann sicher der Fall, wenn die vorige Transposition zwischen den $(n+1)$ Elementen dieses letzte nun getilgte Element nicht berührte und sich also schon vorher als Transposition zweier der Elemente $1, 2, \ldots n$ darstellte. Machte dagegen beim Uebergang von der k^{ten} zur $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile der ursprünglichen Complexionen das Element $(n+1)$ eine Stellenänderung um eine Einheit, etwa

$$\begin{array}{ll} k^{\text{te}} \text{ Zeile} & i_1, i_2, \ldots i_\mu, n+1, \ldots i_n, \\ (k+1)^{\text{te}} \text{ Zeile} & i_1, i_2, \ldots n+1, i_\mu, \ldots i_n, \end{array}$$

so erscheint nach der Unterdrückung von $(n+1)$ dieselbe Anordnung zweimal nach einander. Wollen wir also in der neuen, durch Unterdrückung des Elementes $(n+1)$ entstehenden Zeilen-Anordnung den Uebergang von einer jeden zur folgenden durch eine Transposition bewirken, so müssen wir im vorliegendem Falle eine der beiden Zeilen die k^{te} oder die $(k+1)^{\text{te}}$ tilgen.

Macht beim Uebergange von der k^{ten} zur $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile das Element $(n+1)$ in der ersten Ordnung dagegen eine Stellenänderung von α Einheiten