

# Sur les ensembles AutoSimilaires\* d'intérieur non-vide

Projet du Semestre d'Hiver 97/98  
sous la direction du Prof. M. Troyanov

Melvyn J. Lafitte  
4ème Maths EPFL  
melvyn.lafitte@epfl.ch

13 février 1997

---

\*où similarité est à entendre comme remplaçant le terme affinité : c'est un abus de langage qui palie à l'impossibilité du masculin d'"affine".

9

## Table des matières

1	Introduction	3
2	Définitions et Préliminaires	4
3	Un et Deux	6
3.1	Démonstration de Un et Deux . . . . .	6
3.2	Les Propriétés de Discernement. . . . .	16
4	L'histoire continue ...	22
4.1	Un Contre-Exemple et des Exemples. . . . .	22
4.2	Perspectives et Problèmes. . . . .	26
5	Ce n'est pas nécessaire mais ça sert.	28
	Références	30

# 1 Introduction

Paul Lévy [13], raconte dans son autobiographie [13] que c'est au début de ce siècle, alors qu'il était taupien (l'année précédant la possible intégration de l'Ecole Polytechnique, dans son cas), qu'il s'intéressa à un ensemble très particulier, que l'on nomme aujourd'hui le "tile" de Lévy. Il garda sous sa manche cet exemple jusqu'en 1938 où un article dans le Journal de l'Ecole Polytechnique explicita cette curieuse trouvaille. En fait ce fut presque la première rencontre de Lévy avec ce que l'on appellerait aujourd'hui un ensemble fractal... Bien peu banal comme ensemble fractal ; au lieu de "tomber" sur un ensemble dont les caractéristiques, comme le flocon de von Koch [11] ou la courbe de Cesaro, sont extricables, il eu la chance ou le malheur de "tomber" sur ce qui s'avère être un cas critique de la géométrie fractale. C'est dans l'espoir de mieux comprendre cet aspect critique que nous avons entrepris ce projet de semestre. Pour cela il nous a semblé de bon augure que d'étudier, que d'approfondir un travail [1] de C. Bandt qui constitue en fait une généralisation de tout ce qui touche à ce problème : depuis Lévy jusqu'à Gosper [9] en passant par Dekking [6].

Nous tenons à remercier le Prof. M. Troyanov, pour avoir eu la gentillesse d'accepter l'étude proposée, pour sa disponibilité et sa patience, mais surtout pour son goût mathématique et son sens communicatif de l'élégance en Mathématiques.

## 2 Définitions et Préliminaires

**Définition 2.1.** Soit  $M$  une  $n \times n$ -matrice, on appelle la *norme spectrale* de  $M$  la quantité

$$\|M\| = \max_{x \neq 0} \left( \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$$

**Lemme 2.1.** Soit  $M$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  avec valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  où  $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ . Alors pour tout  $\lambda > |\lambda_n|$ , il existe un  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|M^n x\| \leq C \cdot \lambda^n \|x\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

*Preuve.* **Définition 2.2.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on dira que  $\mu \geq 0$  est une *valeur singulière* de  $A$  si  $\mu^2$  est valeur propre de  $A^T A$ .

**Lemme 2.2.** Si  $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$  sont les  $n$  valeurs singulières de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  alors

$$\|A\| = \mu_n.$$

*Preuve.* On pose  $B = A^T A$ ,  $B$  symétrique donc  $\exists Q \in M_n(\mathbb{R})$  orthogonale telle que  $B = Q^T D Q$  avec  $D = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$ .

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \max_{x \neq 0} \left( \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \right) \\ \|A\|^2 &= \max_{x \neq 0} \left( \frac{(Ax)^T (Ax)}{x^T x} \right) \\ &= \max_{x \neq 0} \left( \frac{x^T Q^T D Q x}{x^T x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{or } Q^T Q = I_n$$

$$\|A\|^2 = \max_{x \neq 0} \left( \frac{x^T Q^T D Q x}{x^T Q^T Q x} \right)$$

Soit  $y = Qx$

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \max_{y \neq 0} \left( \frac{y^T D y}{y^T y} \right) \\ \|A\|^2 &= \max_{y \neq 0} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j^2 y_j^2}{\sum_{j=1}^n y_j^2} \right) \end{aligned}$$

est obtenu pour  $y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 0$  et  $y_n = 1$ .

d'où  $\|A\|^2 = \mu_n^2$ . □

Notons que si  $A$  est symétrique, les valeurs singulières étant alors les valeurs propres de  $A$ , on aurait  $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} (|\lambda_j|)$ . Ainsi puisque  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ , on a  $\|A^2x\| = \|A \cdot Ax\| \leq \|A\| \|Ax\| \leq \|A\| \|A\| \|x\| = \|A\|^2 \|x\|$ , et on montre donc par induction le lemme 2.1 voulu pour  $M$  symétrique et on a  $C = 1$ .

Maintenant si  $M$  (ou  $A$  dans la démonstration) n'est pas symétrique on montre que  $\|A\| \geq \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$ . (par  $|\lambda| \cdot \|z\| = \|\lambda z\| = \|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$ , d'où  $|\lambda| \leq \|A\|, \forall \lambda$  v.p. de  $A$ ). Et partant de là, avec un peu de travail, on arrive à démontrer  $\exists C > 0$ , indépendant de  $n$ , tel que

$$\|A\|^n \leq C \cdot \left( \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| \right)^n.$$

Ce qui complète la preuve. □

**Définition 2.3.** Un groupe fini  $S$  d'applications linéaires, aux matrices entières et de déterminants  $\pm 1$ , sera appelé *groupe de symétrie* de  $g$  si  $gS = Sg$ . On pose  $K = \max\{\|s\|, s \in S\}$ .

Posons  $D(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \mathbf{G}, y \in \mathbf{H}\}$  pour des sous-ensembles  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  de notre espace métrique  $(X, d)$ . On notera  $\mathbf{G}^c$  le complément de  $\mathbf{G}$ ,  $U(\epsilon, x)$  le  $\epsilon$ -voisinage ouvert de  $x$ , et  $U(\epsilon, \mathbf{G}) = \bigcup\{U(\epsilon, x) \mid x \in \mathbf{G}\}$ .

On notera la mesure de Lebesgue par  $\lambda$  et la mesure de Hausdorff de dimension  $\alpha$  par  $H^\alpha$ . Aussi  $\dim_{\mathbf{H}}$  exprimera la dimension de Hausdorff.

**Définition 2.4.** Un ensemble  $\mathbf{A}$  de  $\mathbb{R}^n$  est appelé un *m-reptile* s'il existe une similitude  $g$  et  $m$  ensembles  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$  tels que  $\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$  soient congrus à  $g^{-1}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_1$ ;  $\text{int } \mathbf{A}_i \cap \text{int } \mathbf{A}_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  et  $\mathbf{A}_1 \cup \dots \cup \mathbf{A}_m = \mathbf{A} = g(\mathbf{A}_1)$ .

On considère  $\mathbf{L} \cong \mathbb{Z}^n$  un réseau de vecteurs aux composantes entières.

Soient  $f_1, \dots, f_m$  des contractions sur un espace métrique complet  $(X, d)$ ; c'est à dire que  $d(f_i(x), f_i(y)) \leq r_i \cdot d(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$ , où  $r_i < 1$ .

**Définition 2.5.** J.E.Hutchinson appela cet ensemble compact  $\mathbf{A} \neq \emptyset$  *autosimilaire* par rapport aux  $f_1, \dots, f_m$  (on peut aussi parler d'attracteur  $\mathbf{A}$  de l'IFS  $\{f_i\}$ ) si

$$\mathbf{A} = f_1(\mathbf{A}) \cup \dots \cup f_m(\mathbf{A}).$$

Il montra que  $F(\mathbf{B}) = f_1(\mathbf{B}) \cup \dots \cup f_m(\mathbf{B})$  est une contraction sur l'espace  $\mathcal{C}$  d'ensembles compacts non vides de  $X$  muni de la distance de Hausdorff.

Le théorème du point fixe implique :

**Théorème 2.1 (de Hutchinson).** *Étant donné  $f_1, \dots, f_m$ , il existe un unique ensemble autosimilaire  $\mathbf{A}$ , et pour tout compact  $\mathbf{B}_0 \neq \emptyset$  la suite  $\mathbf{B}_k = F(\mathbf{B}_{k-1})$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , converge vers  $\mathbf{A}$  dans  $\mathcal{C}$ .*

### 3 Un et Deux

- **Théorème 3.1 (Un).** Soit  $g$  une application linéaire expansive (toutes les valeurs propres de la matrice  $M$  de  $g$  sont en valeur absolue  $> 1$ ) sur  $\mathbb{R}^n$ , de matrice entière (afin que  $g : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ ) ( $m = |\det M|$ ) et  $\{y_1, \dots, y_m\}$  un système résiduel de  $g$  (i.e.  $\{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbf{L}$  tel que  $y_1 = 0$  et

$$\mathbf{L} = \bigcup_i \{y_i + g(\mathbf{L})\}, \quad i \in \mathbb{N}^*$$

alors il existe un unique ensemble autosimilaire  $\mathbf{A}$  (par rapport à  $g$ ) qui est aussi un  $m$ -reptile :

$$\mathbf{A} = g(\mathbf{A}_1) = \mathbf{A}_1 \cup \dots \cup \mathbf{A}_m, \quad \text{avec } \mathbf{A}_i = y_i + \mathbf{A}_1.$$

- **Théorème 3.2 (Deux).** On peut étendre le théorème Un à une auto-similarité en  $s_i^{-1} \circ g$ , au lieu de celle simplement en  $g$ , ayant ce coup-ci  $\{s_1, \dots, s_m\}$  dans un groupe de symétrie de  $g$ , et  $\mathbf{L} = \cup \{s_i^{-1}(y_i + g(\mathbf{L})) \mid i = 1, \dots, m\}$ .

Énoncé  
Trop  
imprécis

#### 3.1 Démonstration de Un et Deux

Pour commencer, voici une esquisse de la preuve : Se ramenant au cadre habituel des IFS, on montre que l'attracteur  $\mathbf{A}$  est inclus dans une boule fermée et que cette dernière contient une union finie de translatés de l'attracteur  $\mathbf{A}$  ; on en déduit que  $\mathbf{A}$  est d'intérieur non vide, et par la théorie élémentaire de la mesure que c'est un reptile.

Nous abordons maintenant la preuve formelle qui s'étendra sur 4 lemmes, 2 observations et autres remarques :

*Preuve. Remarque 3.1.* Le lemme qui suit nous démontre quelque chose de simple en apparence mais dont l'approche directe (montrer  $g^{-1}$  contractante) ne parait pas aboutir facilement (ceci est dû aux cas où  $g$  n'est pas diagonalisable) usant des lemmes portés à notre connaissance. L'approche ici est détournée et notons qu'une condition de contractivité faible sur les  $f_i$  impliquerait (par la définition des  $f_i$ ) que  $g^{-1}$  serait contractante et donc que les  $f_i$  seraient aussi, en fin de compte, contractantes (pas seulement faiblement) !

**Lemme 3.1 (ISH).** Posant les  $f_i$ , on peut appliquer le théorème 2.1.

Préciser !

On l'appelle ISH pour "Ici sévit Hutchinson".

*Preuve.* • Le cas UN :

$$f_i(x) = y_i + g^{-1}(x)$$

Soit  $r$  tel que  $\max\{1/\lambda|\lambda \text{ valeur propre de } g\} < r < 1$ .

Le lemme 2.1 fourni dans les préliminaires est fort utile ici : Il existe donc  $C > 0$  tel que  $|g^{-p}(x)| \leq C \cdot r^p \cdot |x|$  pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

On remarque aisément par récurrence que

$$|f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x) - f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(y)| = |g^{-p}(x - y)|.$$

$$(|f_{i_1}(x) - f_{i_1}(y)| = |y_{i_1} + g^{-1}(x) - y_{i_1} - g^{-1}(y)| = |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)| = |g^{-1}(x - y)|);$$

$$|f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p} \circ f_{i_{p+1}}(x) - f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p} \circ f_{i_{p+1}}(y)| = |f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(y_{i_{p+1}} + g^{-1}(x)) - f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(y_{i_{p+1}} + g^{-1}(y))| = |g^{-p}(y_{i_{p+1}} + g^{-1}(x) - y_{i_{p+1}} - g^{-1}(y))|, \text{ par hypothèse de récurrence} \\ = |g^{-(p+1)}(x) - g^{-(p+1)}(y)|, \text{ par la linéarité de } g.)$$

et donc que

$$|f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x) - f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(y)| \leq C \cdot r^p \cdot |x - y| \quad p \in \mathbb{N}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'avère que c'est en fait la condition (mais avec une distance euclidienne) qu'un lemme affirme (dans le cas d'une contractivité faible i.e. tous les  $r_i$  ne sont pas  $< 1$ ) comme impliquant qu'une certaine  $F^p$  deviendrait contractante (dans un espace de compacts muni de la distance de Hausdorff ce coup-ci), permettant alors le même résultat du Théorème 2.1 (par l'application du théorème du point fixe, comme fait précédemment).

- Dans le cas Deux, l'argument est le même mais cela se fait posant

$$f_i(x) = y_i + s_i \circ g^{-1}(x), \quad \text{ce coup-ci.}$$

Ayant  $\mathbf{S}$  un groupe et la propriété que  $s \in \mathbf{S} \Rightarrow g^{-1}sg \in \mathbf{S}$ , on montre trivialement par récurrence que si  $s_{i_1}, \dots, s_{i_p} \in \mathbf{S}$  alors  $t = s_{i_p}g^{-1}s_{i_{p-1}}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_1}g^{-1}g^p$  appartient aussi à  $\mathbf{S}$ . (On fonde la récurrence en  $p = 2$  :  $s_{i_1} \in \mathbf{S} \Rightarrow g^{-1}s_{i_1}g \in \mathbf{S} \Leftrightarrow g^{-1}s_{i_1}g^{-1}g^2 \in \mathbf{S} \Rightarrow s_{i_2}(g^{-1}s_{i_1}g^{-1}g^2) \in \mathbf{S}$ ,  $s_{i_2}$  étant de ce même groupe  $\mathbf{S}$ ; Supposant vrai au rang  $p$ , on regarde au rang  $p+1$  :  $s_{i_p}g^{-1}s_{i_{p-1}}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_1}g^{-1}g^p \in \mathbf{S} \Rightarrow g^{-1}(s_{i_p}g^{-1}s_{i_{p-1}}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_1}g^{-1}g^p)g \in \mathbf{S}$ , (par l'action de groupe)  $\Rightarrow s_{i_{p+1}}g^{-1}s_{i_p}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_1}g^{-1}g^{p+1} \in \mathbf{S}$ )

En conséquence,

$$\|t\| \geq \frac{|s_{i_p}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_1}g^{-1}(x)|}{|g^p(x)|}$$

et ainsi

$$|s_{i_p}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_1}g^{-1}(x)| \leq \|t\| \cdot |g^{-p}(x)| \leq K \cdot |g^{-p}(x)|$$

nous donnant

$$\begin{aligned} |f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x) - f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(y)| &\leq K \cdot |g^{-p}(x) - g^{-p}(y)| \\ &= K \cdot |g^{-p}(x - y)|, \text{ par la linéarité de } g \\ &\leq C' \cdot r^p \cdot |x - y|, \text{ où } C' = C \cdot K \end{aligned}$$

□

Ce dernier lemme nous ramène donc dans le cadre habituel des IFS. Ainsi  $\mathbf{A} = g(\mathbf{A}_1)$  (pour Deux :  $s_1^{-1}g(\mathbf{A}_1)$ ) est l'ensemble autosimilaire par rapport aux  $f_1, \dots, f_m$ . On parle aussi de l'attracteur  $\mathbf{A}$  de l'IFS  $\{f_1, \dots, f_m\}$ . Construisons (par la méthode émise par le théorème 2.1 (de Hutchinson))  $\mathbf{A}$  partant de  $\mathbf{B}_0 = 0$ . On obtient  $\mathbf{B}_1 = \{y_1, \dots, y_m\}$  et

- $\mathbf{B}_k = \{y_{i_k} + g^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + g^{-k+1}(y_{i_1}) \mid i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}\}$  (1)
- $\mathbf{B}_k = \{y_{i_k} + s_{i_k}g^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + s_{i_k}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_3}g^{-1}s_{i_2}g^{-1}(y_{i_1}) \mid i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}\}$

respectivement pour les cas Un et Deux. (le premier cas est trivial, le second s'obtient aisément inductivement :  $\mathbf{B}_1 = \{y_{i_1} + s_{i_1}g^{-1}(0) \mid i_1 \in \{1, \dots, m\}\} = \{y_j \mid j \in \{1, \dots, m\}\} = \{y_1, \dots, y_m\}$ , ce qui est vrai ; Supposons vrai au rang  $k$ , regardons pour  $k+1$  :  $B_{k+1} = \{y_{i_{k+1}} + s_{i_{k+1}}g^{-1}(y_{i_k} + s_{i_k}g^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + s_{i_k}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_3}g^{-1}s_{i_2}g^{-1}(y_{i_1})) \mid i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, m\}\} = \{y_{i_{k+1}} + s_{i_{k+1}}(g^{-1}(y_{i_k} + g^{-1}(s_{i_k}g^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + g^{-1}(s_{i_k}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_3}g^{-1}s_{i_2}g^{-1}(y_{i_1}))) \mid i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, m\}\} = \{y_{i_{k+1}} + s_{i_{k+1}}g^{-1}(y_{i_k}) + \dots + s_{i_{k+1}}g^{-1} \circ \dots \circ s_{i_3}g^{-1}s_{i_2}g^{-1}(y_{i_1}) \mid i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, m\}\}$ .)

Cette suite d'ensembles est emboîtée de façon croissante ; aussi,  $\mathbf{A} = \overline{\cup \mathbf{B}_k}$ .

Puisque  $\mathbf{A}$  est compact (en tant que limite d'une suite dans un espace de compacts), et travaillant dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{A}$  est fermé et borné, et il existe donc un  $c$  tel que  $\mathbf{A}$  soit inclus dans une boule fermée de rayon  $c$ .

$$(\mathbf{A} \subseteq \mathbf{U}_c = \{y \mid |y| \leq c\})$$

Par le lemme 3.4(PAVE), on a l'autre sens d'une inclusion très proche :

$$\begin{aligned} \{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{A} &\supseteq \mathbf{U}_c. \\ &(\text{pour Deux : } \supseteq \mathbf{U}_\delta, \delta > 0) \end{aligned}$$

(avec  $q \in \mathbb{N}$  (donc fini) et  $x_1, \dots, x_q$  dans  $\mathbf{L}$ )



**Remarque 3.2.** On va maintenant appliquer le théorème de Baire pour obtenir  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset$ . Il est vrai que l'utilisation d'un tel théorème n'est en fait pas nécessaire. En effet utilisant le résultat de topologie de base comme quoi l'intersection de deux ouverts denses est encore un ouvert dense, on peut éviter l'application du théorème de Baire mais à y regarder de plus près on réalise que c'est plus ou moins le même principe que celui derrière la démonstration du théorème de Baire... mais dans un cas fini (prenant les  $U_j = \emptyset$  à partir d'un certain  $j = q$ ). Aussi dans un souci autant pédagogique qu'historique nous avons souhaité laisser le théorème de Baire dans cette démonstration. (Notons que travaillant en tout généralité dans un espace métrique complet, l'utilisation du théorème de Baire, qui fait usage de la complétude de l'espace métrique, ne paraît pas dénuée de sens. Les théorèmes que nous démontrons ici sont vrais dans  $\mathbb{R}^n$ , mais aussi dans tout espace pouvant être muni d'une métrique complète). Maintenant il ne nous paraît pas superflu d'exhiber 3 des tentatives les plus intéressantes pour contourner l'utilisation de ce théorème : en effet ces tentatives illustrent bien les qualités de la démonstration de ces théorèmes Un et Deux.

ici, c'est vous qui avez raison !

- On serait tenté de croire qu'en prenant  $U_c$  ouvert (au lieu de fermé) et  $\{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{A}$  le contenant, par l'intérieur d'un ensemble vu comme la réunion des ouverts contenus dans cet ensemble, on ait  $\text{int}(\{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{A}) \supseteq U_c$  et donc (par  $U_c \neq \emptyset$ )  $\text{int } A \neq \emptyset$ . Mais cela ne fonctionne pas, car  $U_c$  ouvert ne permet pas de conclure tout à la fin du raisonnement quand on prend l'adhérence de l'union infinie. (Ceci est dû au passage obligé par l'obtention de  $\overline{\cup B_k}$ , ayant des  $B_k$  fermés qui ne permettent donc pas de conclure quant à la fermeture de leur réunion infinie.) (On a donc illustré le choix judicieux d'une boule fermée  $U_c$ )
- Par de la topologie élémentaire, on peut chercher à démontrer  $A \cup B \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \neq \emptyset$  ou  $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ . Mais nous n'y arrivons simplement (sans redondance avec la démonstration du théorème de Baire) que si nous connaissons certaines choses sur  $A$  et  $B$ . Par exemple si nous savions que  $\overline{A} \cup \overline{B} = \emptyset$  alors on aurait  $A \cup B = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ , ce qui entraînerait  $\emptyset \neq (A \cup B)$  (par l'hypothèse de départ)  $= (\overline{A} \cup \overline{B})$  (car  $A$  et  $B$  fermés)  $= \overline{A} \cup \overline{B}$  (car  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  disjoints)  $\Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \neq \emptyset$  ou  $\overline{B} \neq \emptyset$ . Mais le problème ici réside dans le fait que nous ne savons encore rien sur des intersections entre ces ensembles... En fait nous l'apprenons à l'étape suivante de notre démonstration. On "se morderait donc la

queue" ! Pour le choix de l'ordonnancement dans cette démonstration, cf premier point de la partie 4.2.

- Il est aussi vite tentant de passer directement à un argument de théorie de la mesure et ainsi de contourner un quelconque argument topologique :  $A \cup B \supset \text{boule-fermée} \Rightarrow \lambda(A) + \lambda(B) \geq \lambda(A \cup B) \geq \lambda(\text{boule}) = O > 0 \Rightarrow \lambda(A) > 0$  et/ou  $\lambda(B) > 0$ . Mais de pouvoir conclure ici directement à  $\lambda(\mathbf{A}) > 0$  n'est pas intéressant car on doit obtenir (pour la démonstration des théorèmes Un et Deux)  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset \dots$  Or on a bien que  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset \Rightarrow \lambda(\mathbf{A}) > 0$  mais  $\lambda(\mathbf{A}) > 0 \Rightarrow \text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset$  n'est pas bien clair généralement. En fait cette dernière implication sera étudiée dans la partie 3.2.

Par le théorème de Baire, qui nous affirme qu'un espace métrique complet non-vide (ou tout espace topologique non-vide qui peut être muni d'une métrique complète) n'est pas réunion dénombrable d'ensembles dont l'intérieur de l'adhérence est vide, et partant de notre dernière inclusion, on peut affirmer ( $\{g(x_1), \dots, g(x_q)\}$  étant évidemment fini donc dénombrable) que l'intérieur de  $(g(x_i) + \mathbf{A})$  est non vide, donc que l'intérieur de  $\overline{\mathbf{A}}$  est aussi non vide et finalement que  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset$  ( $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$  étant fermé). Par le lemme 3.2 (de la Crédulité) on conclut. Ceci est la fin de la preuve des théorèmes Un et Deux.  $\square$

**Lemme 3.2 (de la Crédulité).**  $\mathbf{A}$  et les  $f_i$  définis précédemment,  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset \implies \mathbf{A}$  est un  $m$ -reptile.

On l'appelle Lemme de la Crédulité car on a ici un principe du style "Plus c'est gros. Mieux ça passe" : On montre en effet que du moment que l'on sait que  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset$ , il n'y a alors pas d'*overlapping* (cf partie 3.2).

*Preuve.*  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset$  implique que la mesure de Lebesgue  $\lambda(\mathbf{A})$  est positive. Étant donné que chaque  $f_i$  a son déterminant égal à  $\frac{1}{m}$ ,  $\lambda(\mathbf{A}_i) = \lambda(\mathbf{A})/m$ , pour  $\mathbf{A}_i = f_i(\mathbf{A})$ .

Par un simple raisonnement géométrique sur les mesures, et ne considérant que les intersections de couples d'ensembles, nous savons que

$$\begin{aligned} \sum_k \lambda(\mathbf{A}_k) &\geq \sum_{s \neq t} \lambda(\mathbf{A}_s \cap \mathbf{A}_t) + \lambda(\cup_k \mathbf{A}_k) \\ &\geq \lambda(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j) + \lambda(\cup_k \mathbf{A}_k) \quad \text{pour tout } i, j \text{ avec } i \neq j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais comme } \mathbf{A} = \cup_k \mathbf{A}_k, \text{ on a } \sum_k \lambda(\mathbf{A}_k) &\geq \lambda(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j) + \lambda(\mathbf{A}) \\ \Leftrightarrow \lambda(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j) &\leq \sum_{k=1}^m \frac{\lambda(\mathbf{A})}{m} - \lambda(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \lambda(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j) \leq 0 \Rightarrow \lambda(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j) = 0 \\ &\Rightarrow \overset{\circ}{\mathbf{A}}_i \cap \overset{\circ}{\mathbf{A}}_j = \emptyset. \end{aligned}$$

Cette dernière expression revient ici à parler de  $\mathbf{A}$  en tant que  $m$ -reptile.  $\square$

**Lemme 3.3 (du Recul).**  $g^{-k+1}(\mathbf{L}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbb{R}^n$

*Preuve.* Soit  $\delta = \text{codiam}(\mathbf{L}, \mathbb{R}^n)$ .

Puisque  $r < 1$ , pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $k$  tel que  $\delta \cdot C \cdot r^{k-1} < \epsilon$  or par le lemme 2.1 déjà utilisé pour la démonstration du lemme 3.1 ISH, on sait que

$$|g^{-k+1}(x)| \leq C \cdot r^{k-1}|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi chaque  $u$  dans  $\mathbb{R}^n$  est à une distance du réseau  $g^{-k+1}(\mathbf{L})$

$$\begin{aligned} &\leq |g^{-k+1}(\text{codiam}(\mathbf{L}, \mathbb{R}^n))| \\ &\leq C \cdot r^{k-1} |\text{codiam}(\mathbf{L}, \mathbb{R}^n)| = C \cdot r^{k-1} \cdot \delta < \epsilon \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

On peut donc reexprimer ce résultat en disant :

$\forall \epsilon > 0, \exists k$  tel que  $\text{codiam}(g^{1-k}(\mathbf{L}), \mathbb{R}^n) = \epsilon$ .

En outre, quand  $k \rightarrow \infty, g^{-k+1}(\mathbf{L}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Observation 3.1 (zdsL).** Chaque  $z$  dans  $\mathbf{L}$  peut s'exprimer,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , comme

- $z = g^k(x) + g^{k-1}(y_{i_k}) + \dots + g(y_{i_2}) + y_{i_1}$ , dans le cas Un
- $z = g^{k-1}t^{-1}g(x) + s_{i_1}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_k}^{-1}(y_{i_k}) + s_{i_1}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_{k-1}}^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + s_{i_1}^{-1}(y_{i_1})$ , dans le cas Deux

où  $y_{i_k}, \dots, y_{i_1}$  sont certains des résidus (i.e.  $y_{i_j} \in \{y_1, \dots, y_m\} \forall j$ ) et  $x \in \mathbf{L}$ .

*Preuve.* • Le cas Un : On peut démontrer ce résultat comme corollaire d'un théorème de géométrie des nombres utilisant les classes résiduelles. Mais ce n'est pas nécessaire et on peut tout simplement faire comme suit :

Démontrons le par récurrence ; en la fondant en  $k = 1$  :

$$z = g^1(x) + z_1 = g(x) + z_1,$$

par

$$\mathbf{L} = \bigcup_i \{y_i + g(\mathbf{L})\} \quad (2)$$

$\exists x \in \mathbf{L}$  et  $z_1 \in \{y_i\}$  tels que  $z = z_1 + g(x)$ .

Supposons vrai pour  $k$ , regardons pour  $k + 1$  :

par la linéarité de  $g$ , on obtient,  $z = g^{k+1}(x) + g^k(z_{k+1}) + \dots + g(z_2) + z_1 = g(g^k(x) + g^{k-1}(z_{k+1}) + \dots + z_2) + z_1$  or par hypothèse de récurrence, si on prend  $\tilde{z} = g^k(x) + g^{k-1}(z_{k+1}) + \dots + z_2$ , du fait que  $\tilde{z} \in \mathbf{L}$  (car  $g(\mathbf{L})$  est un sous-groupe de  $\mathbf{L}$ ), on sait que  $x \in \mathbf{L}$  existe et les  $\{z_2, \dots, z_{k+1}\}$  existent  $\subset \{y_i\}$ .

Il nous reste à montrer qu'alors  $z_1 \in \{y_i\}$ . On a  $z = g(\tilde{z}) + z_1$ . Or  $z$  et  $\tilde{z}$  appartenant à  $\mathbf{L}$ , on peut affirmer par l'équation (2) qu'il existe  $z_1 \in \{y_i\}$  tel que  $z = g(\tilde{z}) + z_1$ .

On a donc démontré par récurrence ce résultat.

- dans le cas Deux, la technique est la même : on construit  $z$  inductivement sachant que ce coup-ci

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \bigcup \{s_i^{-1}(y_i + g(\mathbf{L})) \mid i = 1, \dots, m\} \\ &= \bigcup \{s_i^{-1}(g(\mathbf{L})) + s_i^{-1}(y_i) \mid i = 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (3)$$

Ainsi pour tout  $z$  dans  $\mathbf{L}$ , il existe des  $i_1, i_2, \dots \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $z = s_{i_1}^{-1}g(u) + s_{i_1}^{-1}(y_{i_1})$ ,  $u \in \mathbf{L}$  (par (3)) et ceci fonctionnant donc aussi pour  $u : u = s_{i_2}^{-1}g(v) + s_{i_2}^{-1}(y_{i_2})$ ,  $v \in \mathbf{L}$  ... nous donnant  $z = s_{i_1}^{-1}gs_{i_2}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_k}^{-1}g(x) + s_{i_1}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_k}^{-1}(y_{i_k}) + s_{i_1}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_{k-1}}^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + s_{i_1}^{-1}(y_{i_1})$  avec  $x$  dans  $\mathbf{L}$ , pour tout  $k$ .

Nous pouvons amplement simplifier cette expression, ramenant le  $t$  utilisé précédemment :

$$t^{-1} = g^{-k+1}s_{i_1}^{-1}gs_{i_2}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_k}^{-1},$$

en

$$z = g^{k-1}t^{-1}g(x) + s_{i_1}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_k}^{-1}(y_{i_k}) + s_{i_1}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_{k-1}}^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + s_{i_1}^{-1}(y_{i_1}).$$

□

**Lemme 3.4 (PAVE).** *Il existe un nombre fini de points  $x_1, \dots, x_q$  tels que*

$$\{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{A} \supseteq \mathbf{U}_c.$$

*Preuve.* • Cas Un : À présent utilisons l'observation 3.1 zds $\mathbf{L}$ , par application de  $g^{-k+1}$ , des 2 côtés de l'égalité,

$$g^{-k+1}(z) = g(x) + y_{i_k} + g^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + g^{-k+1}(y_{i_1}),$$

qui par l'expression générale des  $\mathbf{B}_k$  (1) s'identifie comme étant :

$$g^{-k+1}(z) = g(x) + \mathbf{B}_k.$$

Pour chaque  $z$  dans  $\mathbf{L}$ , prenant "son"  $x$  dans  $\mathbf{L}$ , on a

$$\begin{aligned} g^{-k+1}(\mathbf{L}) &= g(\mathbf{L}) + \mathbf{B}_k \\ \Leftrightarrow g^{-k+1}(\mathbf{L}) &= \bigcup \{g(x) | x \in \mathbf{L}\} + \mathbf{B}_k. \end{aligned}$$

Si on prend l'intersection par  $\mathbf{U}_c$  des deux côtés on a :

$$\begin{aligned} g^{-k+1}(\mathbf{L}) \cap \mathbf{U}_c &= \left( \bigcup \{g(x) | x \in \mathbf{L}\} + \mathbf{B}_k \right) \cap \mathbf{U}_c \\ &\subseteq \{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{B}_k, \end{aligned} \quad (4)$$

où  $x_1, \dots, x_q$  sont ces points dans  $\mathbf{L}$  tels que l'inclusion fonctionne pour un rayon  $d$  suffisamment grand,  $|g(x)| \leq d$ .

- pour le cas Deux c'est de nouveau tres semblable : Observant que les exposants des  $s_j$  dans l'égalité de l'observation 3.1 zds $\mathbf{L}$  sont ceux des  $g$  dans l'expression des  $B_k$  et ceux des  $g$  dans zds $\mathbf{L}$  sont ceux des  $s_j$  dans l'expression des  $B_k$ , on constate aisément que grâce à  $g^{k-1}t^{-1} = s_{i_1}^{-1}g s_{i_2}^{-1}g \circ \dots \circ s_{i_k}^{-1}$  on peut exprimer les derniers termes (tous sauf le premier) de l'observation 3.1 zds $\mathbf{L}$  comme étant  $g^{k-1}t^{-1}(b)$  avec  $b \in \mathbf{B}_k$ .

Ainsi on a  $g^{-k+1}(z) = t^{-1}g(x) + t^{-1}(b)$ ,  $b \in \mathbf{B}_k$

nous donnant généralement l'inclusion suivante

$$g^{-k+1}(\mathbf{L}) \subseteq \bigcup \{t^{-1}(g(x) + \mathbf{B}_k) | x \in \mathbf{L}, t \in \mathbf{S}\}.$$

(il n'y a pas égalité ici car dans le terme de droite on "ballaye" tous les  $t \in \mathbf{S}$ . On perd exprès la spécificité de  $t$  pour le voir à présent comme n'importe quel élément de  $\mathbf{S}$ .)

Avec l'intersection de  $U_c$  on désire choisir les  $x_1, \dots, x_q$ , avec un rayon  $d$  suffisamment grand comme dans le cas Un, de sorte que

$$g^{-k+1}(\mathbf{L}) \cap U_c \subseteq t^{-1}(\{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{B}_k).$$

Pour une meilleure compréhension du problème, notons que  $d = c$  ne fonctionnerait pas car il pourrait y avoir un  $w \in g(\mathbf{L})$  qui ne soit pas inclus dans notre voisinage  $U_d = U_c$  mais dont l'ensemble  $w + \mathbf{B}_k$  pourrait être d'intersection non vide avec  $U_c$ .

Comme  $\mathbf{A} \subseteq U_c$  et  $\mathbf{A} = \overline{\cup \mathbf{B}_k}$ ,

$$\mathbf{B}_k \subseteq U_c$$

donc le "rayon" de  $\mathbf{B}_k$  est au plus égal à  $c$ .

**Observation 3.2 (de la Suffisance).**  $E, F, G \subset \mathbb{R}^n$  tels que

$$E = F + G$$

et  $G \subset U_c = \{x \mid \|x\| \leq c\}$

alors

$$E \cap U_\kappa \subset F \cap U_{c+\kappa} + G.$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} z &\in E \cap U_\kappa \\ \text{donc } z &= x + y \text{ avec } x \in F, y \in G \\ &\Rightarrow x = z - y \in U_{c+\kappa} \text{ car } z \in U_\kappa \text{ et } y \in U_c \\ &\Rightarrow x \in F \cap U_{c+\kappa} \end{aligned}$$

□

Par la définition de  $K$  ( $K = \max\{\max_x \frac{\|s(x)\|}{\|x\|} \mid s \in \mathbf{S}\}$ ), on sait que

$$z \in U_c \Rightarrow w(z) \in U_{K \cdot c}, \quad w \in \mathbf{S}.$$

Ainsi les solutions pour  $d$  sont respectivement :  $d = 2c$  et  $d = K \cdot c + c = c \cdot (K + 1)$ , pour les cas Un et Deux.

Grâce à notre observation de la suffisance, les inclusions dans des unions finies que nous traitions précédemment existent donc, ainsi nous concluons ce Lemme PAVE par

- Cas Un : Prenant l'adhérence de l'union pour  $k = 1, 2, \dots$  de l'inclusion (4), on obtient grâce au lemme 3.3 du Recul et à  $\overline{\cup \mathbf{B}_k} = \mathbf{A}$  :

$$\mathbf{U}_c = \mathbb{R}^n \cap \mathbf{U}_c \subseteq \{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{A}.$$

- même procédé pour le cas Deux mais donnant :

$$\mathbf{U}_c \subseteq t^{-1}(\{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{A})$$

$$\implies \exists \delta > 0 \text{ tel que } \mathbf{U}_\delta \subseteq \{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + \mathbf{A}.$$

□

## 3.2 Les Propriétés de Discernement.

Sortons de notre cadre spécifique des théorèmes un et Deux et reprenons  $m$  similitudes  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) aux constantes de Lipschitz  $r_i \in ]0, 1[$ . Soit toujours  $\mathbf{A}$  l'unique compact non-vide tel que  $\mathbf{A} = \cup_{i=1}^m f_i(\mathbf{A})$ . Notons que nous considérons toujours  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne  $d$ .

**Définition 3.1.** Nous disons que  $\{f_1, \dots, f_m\}$  (ou par abus,  $\mathbf{A}$ ) vérifie l'“Open Set Condition” (*OSC*) ssi il existe un ouvert non-vide  $G$  tel que les ensembles  $f_i(G)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , sont deux à deux disjoints et tous contenus dans  $G$ . De plus, si  $G \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$  l'OSC est dite forte (*SOSC*).

La première observation que l'on fait habituellement dans ce contexte est que la dimension de similarité  $\alpha$  et la dimension de Hausdorff de  $\mathbf{A}$  coïncident si les “pièces”  $f_i(\mathbf{A})$  sont deux à deux disjointes. Ce résultat reste vrai si les pièces n'ont qu'un petit “recouvrement” (ou “overlapping” en anglais), ce qui est certaines fois appelé “just-touching”. Voilà pourquoi nous parlons de problème de “discernement”, car tout revient à savoir quand on peut discerner une pièce d'une autre. C'est pour décrire cette propriété du “just-touching” que Hutchinson formula la définition de l'OSC. Puisque  $G$  et  $\mathbf{A}$  peuvent être d'intersection vide, Lalley renforça la définition par la formulation de l'SOSC.

L'intérêt des théorèmes Un et Deux réside dans le fait qu'ils fournissent la première approche systématique permettant de générer des ensembles auto-similaires vérifiant l'OSC. (Rappelons que l'on a en fait montré que l'OSC était vérifiée par  $G = \text{int } \mathbf{A}$ .) L'ensemble ouvert  $G$  peut toujours être choisi borné et on pourrait s'attendre à ce que d'autres propriétés puissent être imposées... comme, par exemple, d'être simplement connexe. On a ici la preuve du contraire par, entre autres, notre triangle “quasi-rempli” (la figure 5 de Bandt) dont l'intérieur est clairement non simplement connexe.

Notons que nous traitons ici (Thm Un et Deux) un cas critique d'SOSC, nous n'avons pas seulement  $G \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$ , mais  $G \subset \mathbf{A}$  ! On pourrait parler d'échelle de séparation (ou “discernement”), à une extrémité on aurait des ensembles de Cantor et à l'autre extrémité nos autosimilaires d'intérieur non-vide.

La chaîne d'implications suivante est bien connue ([7], [8], [15])

$$\text{SOSC} \Rightarrow \text{OSC} \Rightarrow H^\alpha(\mathbf{A}) > 0 \Rightarrow \dim_{\text{H}} \mathbf{A} = \alpha$$

Bien des exemples montrent que la dernière implication ne peut pas être inversée. Nous nous intéresserons ici à savoir si les autres implications seraient en fait des équivalences. Bandt et Graf ont dernièrement développé (cf



[2]) une condition algébrique qui est équivalente à  $H^\alpha(\mathbf{A}) > 0$ . Nous nous servons d'un de leur résultat :  $\gamma < \infty$  (cela sera expliciter dans la preuve du théorème qui suit), dont la démonstration, très technique, ne sera pas incluse dans ce rapport. D'ailleurs il faut admettre que la possibilité de cette investigation provient de leur article et les démonstrations sont amplement dues aux leurs.

Notons que sans plus on peut affirmer que  $H^\alpha(\mathbf{A}) < \infty$  pour tout ensemble auto-similaire (cf [8], p.735).

**Notation 3.1.** Nous appellerons  $\mathcal{J}$  l'ensemble des vecteurs finis  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ ,  $k \geq 0$ . La longueur de  $(i_1, \dots, i_m)$  sera notée  $|\mathbf{i}| = k$ . Etant donné  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_l)$  nous ferons l'abréviation  $\mathbf{ij} = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ .  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$  sont incomparables s'il n'existe pas de  $\mathbf{k}$  tel que  $\mathbf{i} = \mathbf{jk}$  ou  $\mathbf{j} = \mathbf{ik}$ . Les abréviations suivantes sont importantes :  $f_{\mathbf{i}} = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{i}} = f_{\mathbf{i}}(\mathbf{A})$ ,  $r_{\mathbf{i}} = r_{i_1} \dots r_{i_k}$ . En plus, notons  $r_{\max} = \max\{r_1, \dots, r_k\}$  et  $r_{\min} = \min\{r_1, \dots, r_k\}$ .

$\alpha$  étant la dimension de similarité, ici c'est l'unique solution de

$$\sum_{i=1}^m r_i^\alpha = 1.$$

**Théorème 3.3.** *Si  $H^\alpha(\mathbf{A}) > 0$  alors l'OSC est vérifiée.*

*Preuve.* En tout premier lieu, puisque les constantes  $r_i$  peuvent être différentes, nous devons introduire l'abréviation suivante : étant donné  $1 \geq b > 0$  nous notons

$$\mathbf{I}_b = \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \mid r_{\mathbf{i}} < b < r_{(i_1, \dots, i_{k-1})}\}.$$

Les éléments de  $\mathbf{I}_b$  sont évidemment incomparable et vérifient  $\mathbf{A} = \cup_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_b} \mathbf{A}_{\mathbf{i}}$ , où  $\mathbf{A}_{\mathbf{i}}$  sont des copies de  $\mathbf{A}$ , toutes de "taille approximativement égale".

1. Soit  $x > 0$ . Alors il existe des ensembles ouverts  $U_1, \dots, U_n$  tels que

$$U = \bigcup_{i=1}^k U_i \supset \mathbf{A}$$

et

$$\sum_{i=1}^k (\text{diam } U_i)^\alpha \leq (1 + x^\alpha) H^\alpha(\mathbf{A}).$$

Soit  $\delta = D(\mathbf{A}, U^c)$ . Nous montrons que pour tout  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  incomparables tels que  $r_j > x r_i$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$d(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j) \geq \delta r_i.$$

Sinon, puisque clairement  $D(\mathbf{A}_i, f_i(U)^c) = \delta r_i$ , nous obtiendrions  $\mathbf{A}_j \subset f_i(U)$ . Ceci impliquerait

$$\begin{aligned} H^\alpha(\mathbf{A}) r_i^\alpha (1 + x^\alpha) &< H^\alpha(\mathbf{A}) (r_i^\alpha + r_j^\alpha) = H^\alpha(\mathbf{A}_i) + H^\alpha(\mathbf{A}_j) \\ &= H^\alpha(\mathbf{A}_i \cup \mathbf{A}_j) \leq \sum_{i=1}^k (\text{diam } f_i(U_i))^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^k r_i^\alpha (\text{diam } U_i)^\alpha \leq H^\alpha(\mathbf{A}) r_i^\alpha (1 + x^\alpha), \end{aligned}$$

qui constitue une contradiction. (L'avant dernière inégalité est une conséquence de [[2], Proposition 3], et la dernière inégalité peut être comprise comme suit : Soit  $l$  la longueur maximale de  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$ . Alors l'égalité

$$\sum_{|\mathbf{k}|=l} H^\alpha(\mathbf{A}_\mathbf{k}) = \sum_{|\mathbf{k}|=l} H^\alpha(\mathbf{A}) r_\mathbf{k}^\alpha = H^\alpha(\mathbf{A})$$

implique que l'intersection de deux de ces "atomes" est un ensemble  $H^\alpha$ -nul.)

2. Soit  $1/3 > \epsilon > 0$ . Nous abrègerons (supposant sans perte de généralité  $\text{diam } \mathbf{A}$  assez petit pour permettre  $\text{diam } \mathbf{G}_\mathbf{k} \leq 1$ )

$$\mathbf{G}_\mathbf{k} = U(\epsilon r_\mathbf{k}, \mathbf{A}_\mathbf{k}), \quad \mathbf{I}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_{\text{diam } \mathbf{G}_\mathbf{k}} \mid \mathbf{A}_\mathbf{i} \cap \mathbf{G}_\mathbf{k} \neq \emptyset\},$$

$$\text{et } \gamma = \sup_{\mathbf{k}} \#\mathbf{I}(\mathbf{k})$$

(où  $\#C$  dénote la cardinalité de  $C$ ). Bandt et Graf démontrent que  $\gamma < \infty$  en exhibant une borne supérieure, pour  $\#\mathbf{I}(\mathbf{k})$ , indépendante de  $\mathbf{k}$ .

3. Maintenant choisissons  $\mathbf{k}$  tel que  $\gamma = \#\mathbf{I}(\mathbf{k})$ . Nous montrons que pour tout  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{I}(\mathbf{j}\mathbf{k}) = \{\mathbf{j}\mathbf{i} \mid \mathbf{i} \in \mathbf{I}(\mathbf{k})\}.$$

Par un argument de "maximalité", on a uniquement à montrer le sens "⊃". Mais celui ci est clair puisque  $\emptyset \neq \mathbf{A}_i \cap \mathbf{G}_k$  implique

$$\begin{aligned} \emptyset \neq f_j(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{G}_k) &= f_j(\mathbf{A}_i) \cap f_j(\mathbf{G}_k) = \mathbf{A}_{ji} \cap f_j(U(\epsilon r_k, \mathbf{A}_k)) \\ &= \mathbf{A}_{ij} \cap U(\epsilon r_{jk}, \mathbf{A}_{jk}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_{ji} \cap \mathbf{G}_{jk}. \end{aligned}$$

Maintenant prenons  $h \neq j_1$ . Puisque  $\mathbf{A}_h$  est recouvert par  $\{\mathbf{A}_h \mid \mathbf{h} \in \mathbf{I}_{\text{diam } \mathbf{G}_{jk}}, h_1 = h\}$ , nous obtenons immédiatement

$$D(\mathbf{A}_{jk}, \mathbf{A}_h) \geq \epsilon r_{jk}.$$

4. Nous sommes maintenant en mesure d'explicitier l'ensemble ouvert "discernant" voulu

$$\mathbf{U} = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathbf{G}_{jk}^*,$$

où  $\mathbf{G}_i^* = U(\epsilon r_i/2, \mathbf{A}_i)$ . Nous avons alors  $\mathbf{A}_k \subset \mathbf{G}_k^* \subset \mathbf{U}$ , et pour chaque  $i$  (cf étape 3.)

$$f_i(\mathbf{U}) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} f_i(\mathbf{G}_{jk}^*) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathbf{G}_{ijk}^* \subset \mathbf{U},$$

et finalement pour chaque  $i \neq j$

$$f_i(\mathbf{U}) \cap f_j(\mathbf{U}) = \emptyset.$$

En effet, si ce n'était pas le cas, il y aurait des  $i$  et  $j$  tels que  $\mathbf{G}_{iik}^* \cap \mathbf{G}_{jjk}^* \neq \emptyset$  et  $r_{iik} \geq r_{jjk}$ . Soit  $y$  un élément de cette intersection, alors il existe  $y_1 \in \mathbf{A}_{iik}$  et  $y_2 \in \mathbf{A}_{jjk}$  tels que  $d(y, y_1) < \epsilon r_{iik}/2$  et  $d(y, y_2) < \epsilon r_{jjk}/2$ . Nous avons alors  $d(y_1, y_2) < \epsilon r_{iik}$ ; ainsi,  $D(\mathbf{A}_{iik}, \mathbf{A}_j) < \epsilon r_{iik}$ , ce qui contredit l'étape 3. □

**Théorème 3.4 (de la Crédulité Généralisée).**  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset \Rightarrow \text{OSC}$ .

C'est en fait la généralisation du lemme de la Crédulité vu dans le cadre de notre démonstration des théorèmes Un et Deux. Ce n'est donc pas seulement vrai dans notre cas bien préparé, mais c'est vrai généralement pour tout ensemble auto-similaire  $\mathbf{A}$ .

*Preuve.*  $\text{int } \mathbf{A} \neq \emptyset \Rightarrow \lambda(\mathbf{A}) > 0 \Rightarrow H^\alpha(\mathbf{A}) > 0$  or on vient de démontrer que  $H^\alpha(\mathbf{A}) > 0 \Rightarrow \text{OSC}$ , ainsi on a bien l'implication voulue. □

**Conjecture 3.1.** Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. SOSC est vérifiée avec un ensemble ouvert  $\mathbf{U}$  tel que pour une certaine mesure  $\mu$ ,  $\mu(\mathbf{U}) = 1$ .
2. SOSC.
3. OSC.
4.  $H^\alpha(\mathbf{A}) > 0$ .
5. Pour chaque  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma$  est bien borné.
6. Il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $\gamma$  soit borné.

Ce qui suit est ce que nous croyons être la voie à suivre en vue de démontrer cette conjecture... il n'y a "qu'une" étape à régler.

*Preuve.* Les implications  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$  et  $(5) \Rightarrow (6)$  sont triviales ;  $(3) \Rightarrow (4)$  est bien connu ; et  $(4) \Rightarrow (5)$  est utilisé dans la preuve du théorème 3.3. Pour l'implication restante  $(4) \Rightarrow (1)$ , nous croyons, au niveau actuel de notre recherche, qu'il suffirait de continuer la preuve du théorème 3.3, prenant  $s = |\mathbf{k}|$ ,  $U_k = \bigcup_{|j|=sk} \mathbf{G}_{j\mathbf{k}}^*$ , et sachant qu'il existerait une mesure  $\mu$  telle qu'ayant  $q = \mu(\mathbf{A}_k)$ , on ait une borne supérieure (dépendante de  $q$  et de  $t$ ) de

$$\mu \left( \left( \bigcup_{k < t} U_k \right)^c \right).$$

Cette dernière permettrait de compléter la preuve. □

Bien que n'étant pas vraiment arrivé au bout du dernier point de cette "démonstration" il nous a semblé intéressant d'exposer la possible existence de ce résultat car bien qu'utilisant une implication un peu barbare, il nous permettrait l'obtention d'une équivalence précieuse entre OSC et SOSC!

**Corollaire 3.1.** Soit  $\alpha = n$ , alors  $\mathbf{A}$  contient des points intérieurs si et seulement si  $\lambda(\mathbf{A}) > 0$ .

Pour l'exprimer en mot, notons que ce corollaire du théorème 3.3 signifie que du moment que la dimension de similarité (obtenue très facilement) est celle (topologique) de l'espace ambiant, l'existence de points intérieurs dans notre ensemble serait équivalente à la positivité de sa mesure de Lebesgue.

*Preuve.* 1. Comme on l'a déjà dit lors de la démonstration des théorèmes Un et Deux, il n'y a évidemment qu'une seule implication qui demande à être démontrée, la " $\Leftarrow$ ". Supposons  $\lambda(\mathbf{A}) > 0$ , ce qui signifie  $H^\alpha(\mathbf{A}) > 0$ , ainsi par le théorème 3.3 nous avons un ouvert  $\mathbf{U}$  répondant aux conditions d'une OSC. Prenant  $\mathbf{G} = \mathbf{U} \cap U(1, \mathbf{A})$  nous obtenons un ensemble ouvert borné vérifiant cette dernière propriété.

2. On montre maintenant  $\mathbf{G} \subset \mathbf{A}$ . Un calcul facile indique que

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^m f_i(\mathbf{G})\right) = \sum_{i=1}^m \lambda(f_i(\mathbf{G})) = \sum_{i=1}^m r_i^n \lambda(\mathbf{G}) = \lambda(\mathbf{G}),$$

ce qui implique immédiatement que l'ensemble  $\mathbf{G} \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^m f_i(\mathbf{G})}$  est vide. Ainsi  $\overline{\mathbf{G}} = \overline{\bigcup_{i=1}^m f_i(\mathbf{G})}$ . Donc,

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(\overline{\mathbf{G}}) = \bigcup_{i=1}^m \overline{f_i(\mathbf{G})} = \overline{\bigcup_{i=1}^m f_i(\mathbf{G})} = \overline{\mathbf{G}},$$

et, par l'unicité de  $\mathbf{A}$ ,  $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{A}$ . Trivialement par  $\mathbf{G} \subset \overline{\mathbf{G}}$  on a bien l'inclusion voulue :  $\mathbf{G} \subset \mathbf{A}$ . □

Remarquons que la question de savoir si dans le cas d'"overlapping"  $\alpha > n$  chaque ensemble autosimilaire de mesure de Lebesgue positive aurait des points intérieurs demeure toujours ouverte.

Notons pour terminer que ce corollaire nous donnerait une autre façon d'aborder la démonstration des théorèmes Un et Deux... ce coup-ci nous n'aurions plus à chercher l'obtention d'int  $\mathbf{A} \neq \emptyset$  mais plus simplement celle de  $\lambda(\mathbf{A}) > 0$ . On pourrait alors conclure étant donné la facilité, dans le cadre fourni pour les théorèmes Un et Deux, d'établir l'égalité entre la dimension de similarité de  $\mathbf{A}$  et  $n$ .

## 4 L'histoire continue ...

Nous énoncerons les exemples les uns à la suite des autres : des exemples qui nous paraissent intéressants à noter car nous ont amenés à poser des questions qui formeront la partie sur les perspectives qui nous sont ouvertes.

### 4.1 Un Contre-Exemple et des Exemples.

- Le contre-exemple de la méthode fournie par les théorèmes Un et Deux :  $g(x) = 4x$  et  $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 8, y_4 = 9$ . On voit manifestement que  $\mathbf{A} = [0, 1] \cup [2, 3]$  vérifie  $g(\mathbf{A}) = \bigcup_i (y_i + \mathbf{A})$ . Etudiant donc ce 4-reptile dans  $\mathbb{R}$ , on constate rapidement  $\bigcup_i \{y_i + g(\mathbf{L})\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 0 \pmod{4} \text{ ou } n = 1 \pmod{4}\} \neq \mathbf{L}$ . Or on montre aisément que les  $y_i$  sont bien unique pour l'obtention de  $[0, 1] \cup [2, 3]$ . Ainsi on a un exemple d'un 4-reptile que la méthode, donnée par les théorèmes Un et Deux, ne fournit pas ! cf premier point des perspectives.
- Nous avons écrit un programme fonctionnel sous *Mathematica* permettant l'obtention de points de l'attracteur d'un IFS, quel que soit la dimension de l'espace dans lequel on travaille. C'est par lui que la page de garde de ce rapport fut calculée. Ici il a été écrit pour  $n = 3$ , mais il suffit de changer

```
{x0_, y0_, z0_}
```

en un vecteur plus long et le tour est joué. L'exemple plus bas est un de nos ensembles pour  $n = 3$ . Le programme en calculerait, comme demandé, 100 points.

```
f[{a_, b_}, x_] := a.x + b;  
  
RitIFS[ifs_, pr_, {x0_, y0_, z0_}, n_] :=  
Module[{cum, r, i, j},  
  cum = Rest[FoldList[Plus, 0.0, pr]];  
  NestList[  
    (r = Random[]; i = 1;  
     j = Scan[If[# > r, Return[i], i++]&, cum];  
     f[ifs[[j]], #])&, {x0, y0, z0}, n ] ]  
  
id3= IdentityMatrix[3];
```

```

essai={ {1/2 id3,{0,0,0}},
        {1/2 id3,{0,0,1}},
        {1/2 id3,{0,-1,0}},
        {1/2 id3,{0,-1,1}},
        {1/2 id3,{-1,0,0}},
        {1/2 id3,{-1,0,1}},
        {1/2 id3,{1,-1,0}},
        {1/2 id3,{1,-1,-1}} } // N;

RitIFS[essai,{1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8},{0.5,0.5,0.5}, 100];

Show[Graphics3D[Map[Cuboid[#,#+{0.05,0.05,0.05}] &, %]]]

```



FIG. 1: Le 'tile' de Lévy.

- Le "tile" de Paul Lévy zal (la figure 10 de [1]) : un 2-reptile non simplement connexe. (et en cela répondant au problème C7 de [5] : à partir de quel  $k$  existe-t-il un  $k$ -reptile non simplement connexe ? dès  $k=2$ .) Cet ensemble de Lévy est engendré ici par  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $s_1 = id$ ,  $s_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ +y \end{pmatrix}$ ,  $y_1 = (0, 0)$ ,  $y_2 = (1, 0)$ .

Notons que comme pour beaucoup de ces exemples, une infinité de trous sont plus faciles à détecter qu'un seul point intérieur. C'est d'ailleurs pour cela que dans son papier original [12], Lévy a inclus un énorme dessin plié pour indiquer la position d'un point intérieur !

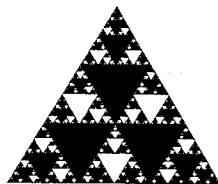


FIG. 2: "Notre" triangle quasi-rempli.

- "notre" triangle quasi-rempli (la figure 5 de [1]) : un 4-reptile engendré par  $g(x) = 2x$ ,  $y_2 = (1, 0)$ ,  $y_3 = (0, 1)$ ,  $y_4 = (-1, -1)$  (mais ici le réseau

$L$  a été généré par la base  $b_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2), b_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ . C'est cet ensemble qui a en fait motivé l'existence de ce projet de semestre. Nous sommes "tombé" dessus tout à fait fortuitement en étudiant différents cas d'IFS présentant de l'"overlapping". R.W.Gosper avait déjà "mis la main" dessus en 1990 et une illustration de [14] indique que B.B.Mandelbroyt l'avait obtenu bien avant Gosper.

Il y a une propriété qui est tellement flagrante dans cet exemple : l'autocomplémentarité.

**Définition 4.1.** Un ensemble  $A$  a la propriété de *l'autocomplémentarité* s'il existe  $B$  et  $G$ , 2 sous-ensembles de  $A$ , et une isométrie  $t$ , tels que  $B$  non simplement connexe et

$$B \cup t(G) \text{ simplement connexe .}$$

Visuellement notre triangle quasi-rempli est clairement autocomplémentaire mais partant directement de sa relation d'autosimilarité, ce n'est pas bien clair.

Il nous apparaît intéressant de noter une curiosité dans la configuration de cet ensemble : il y a 3 suites de triangles équilatéraux pleins de tailles décroissantes par moitié qui sont dirigées vers les trois sommets ; et vers le "centre" de notre ensemble ce sont trois suites de triangles équilatéraux "vides" de tailles décroissantes par moitié. Or en observant plus longuement on constate qu'apparemment pour chaque suite de triangles équilatéraux pleins, il y a 2 suites de triangles "vides" allant vers le point opposé du point limite des triangles pleins. C'est aussi le cas pour chaque suite de triangles équilatéraux "vides" : il y a 2 suites de triangles pleins... En fait on peut démontrer, depuis la relation d'autosimilarité, (c'est trop rébarbatif pour qu'on l'expose ici mais c'est une généralisation des démonstrations, de ce genre de cas, qui serait intéressante à trouver) que partant des 3 suites (les plus "grosses" géométriquement) de triangles remplis, commençant par les 3 plus grands triangles remplis de cet ensemble, et appliquant les 2 lois (' pour chaque suite... , il y a 2 suites ... ') on peut générer, ad infinitum, notre 4-reptile ! On a donc ici une double formulation de ce 4-reptile : une par autosimilarité, l'autre par son agencement géométrique entre ses "vides" et ses "pleins".

Maintenant observons que par cette propriété d'autocomplémentarité, on peut connaître l'aire de notre ensemble : Soit  $T$  l'aire d'un triangle équilatéral rempli de même "taille" que notre ensemble. Alors on a



3 triangles remplis ( $3 \times \frac{T}{9}$ ) et 3 paires d'ensembles (6 "triangles") se complétant, ce qui nous donne

$$\frac{3 + (1 \text{ ( par complément ) } ) \times 3}{9} T = \frac{2T}{3}.$$

Ainsi notre 4-reptile triangulaire non simplement connexe a une aire 1.5 fois plus petite que celle d'un triangle de même "taille"

**Définition 4.2.** On appelle *Frontière extérieure* d'un ensemble **A** la frontière de la composante non-bornée du complément de cet ensemble **A**.

Ici, notre 4-reptile a une frontière extérieure triangulaire, donc régulière. Notons que nous avons un autre exemple d'un ensemble autosimilaire d'intérieur non-vide, non simplement connexe, de frontière extérieure traingulaire. C'est l'ensemble dont nous avons donné l'illustration avec le rapport préliminaire.

On remarque aussi que notre triangle "quasi-rempli" peut-être obtenu comme projeté du tétraèdre de Sierpinski sur sa base. Cela se vérifie très facilement en projetant la relation d'auto-similarité, du tétraèdre de Sierpinski, sur le plan contenant la base.

Par la complémentarité, l'autosimilarité de notre exemple engendre byzaremment une autre autosimilarité : notre ensemble pris (donc un sous-ensemble) au  $2/3$  (rapport de longueur sur les côtés), depuis un sommet, a une autosimilarité supplémentaire : une homothétie de rapport  $1/2$ .

On pourrait encore s'étendre sur l'existence d'une suite entière non-triviale liée à l'alternance des "pleins" et "vides" dans notre triangle quasi-rempli, mais ce serait presque hors sujet.



- trapeze quasi-rempli (la figure 6 de [1]) est engendré par  $g(x) = 2x$ ,  $y_2 = (-1, 0)$ ,  $y_3 = (-2, 1)$ ,  $y_4 = (1, 1)$  (**L** est hexagonal : il a pour base  $b_1 = (1, 0)$ ,  $b_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ .) Notons que c'est encore un exemple non simplement connexe dont la frontière extérieure est régulière.

- les figures 1, 2a, 2b, 3a, 3b de [1] sont des bons exemples d'ensemble autosimilaire d'intérieur non-vidé homéomorphe à un disque. D'ailleurs considérons  $g(x) = 2x$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $y_1, y_2, y_3, y_4$  des vecteurs entiers du type (paire,paire),(impaire,paire),(paire,impaire), (impaire,impaire), respectivement. Par le théorème Un, on sait que l'ensemble autosimilaire  $\mathbf{A}$  par rapport aux  $f_i(x) = y_i + \frac{1}{2}x$  est un 4-reptile. On peut facilement montrer que

**Observation 4.1.** Dans notre contexte,  $\mathbf{A}$  est homéomorphe à un disque uniquement si les  $y_i$  sont les sommets d'un parallélogramme.

*Preuve.* Soit  $C$  l'enveloppe convexe des points fixes  $2y_i$  de  $f_i$ . La frontière de  $C$  appartient à  $\mathbf{A}$ , puisque l'ensemble autosimilaire généré par 2 homothéties de rapport  $1/2$  est un segment de droite reliant les points fixes de ces applications. De plus,  $f_i(C) \subset C$  implique que  $\mathbf{A}$  est contenu dans  $C$  et aussi dans  $D = \bigcup_i f_i(C)$ . Il est facile de construire  $D$ , reliant les points milieux. Clairement, si  $C$  est un triangle,  $D$  et  $A$  auraient des "trous". C'est la même chose si  $C$  est un quadrilatère dont les diagonales ne se coupent pas en leur milieu. Si c'est un parallélogramme alors  $D = C = \mathbf{A}$ .  $\square$

## 4.2 Perspectives et Problèmes.

- L'approche qui est à la base de la démonstration des théorèmes Un et Deux est de s'attaquer au problème en regardant quand est-ce que l'intérieur est non-vidé et sachant qu'alors il n'y a pas d'"overlapping" (Lemme de la Crédulité). Une autre approche, qui est en fait la plus directe pour s'attaquer au problème d'obtenir des ensembles autosimilaires d'intérieur non-vidé, serait de regarder quand est-ce qu'il n'y a pas d'"overlapping" et ensuite réduire les cas en ne prenant que ceux dont l'intérieur est non-vidé. Cette autre approche est plus difficilement abordable (car contrôler ce paramètre qu'est l'"overlapping" est difficile) et tout le génie de l'approche de Bandt vient du contournement de cette "autre" approche. Néanmoins, si on réussissait à la pratiquer, je crois que le contre-exemple émis dans la partie précédente n'en serait plus un.
- Peut-on encore généraliser le théorème Deux pour inclure la conjugaison avec une certaine classe d'applications non-linéaires ?
- Comment est-ce que partant de la relation d'autosimilarité, est-ce que l'on pourrait montrer que l'ensemble qui vérifie cette relation d'auto-

similarité a une propriété d'autocomplémentarité? Un exercice facile, mais édifiant, est de démontrer que pour  $A$  ensemble autosimilaire d'intérieur non-vide,  $A$  non simplement connexe  $\Leftrightarrow A$  a de l'autocomplémentarité.

Comme on l'a fait avec notre triangle quasi-rempli. peut-on depuis la relation d'autosimilarité établir de façon systématique l'aire de notre ensemble?

- Peut-on montrer (ce qui a été constaté au cas par cas) :

**Conjecture 4.1.** Les composantes connexes bornées du complément d'un ensemble autosimilaire d'intérieur non-vide, non simplement connexe,  $A$  sont des ensembles similaires. De plus  $A$  serait l'adhérence d'une réunion dénombrable de ces ensembles.

Pour l'exemple de notre triangle quasi-rempli, ce sont des triangles équilatéraux pleins. Pour l'exemple de notre trapèze quasi-rempli, ce sont aussi des triangles pleins et non des trapèzes pleins!

- si l'on définit un IFS à 2 paramètres judicieusement, qu'obtenons nous pour l'"ens. de Mandelbrot" des IFS qui ont des attracteurs d'intérieur non vide (pour la notion de "Mandelbrot" d'IFS, cf [3]). Quant à celui pour ceux d'attracteurs d'int. non vide de frontière ext. régulière?
- depuis tout  $m$ -reptile simplement connexe, existe-t-il un  $(m+k)$ -reptile non simplement connexe de même frontière extérieure? (c'est ainsi que l'on est arrivé à l'exemple de la fig. 5 de [1], depuis le triangle plein (avec  $m = 4$ ,  $k = 0$ ); c'est aussi le cas avec l'exemple de la figure 6 de [1] depuis un trapèze plein (avec  $m=4$ ,  $k=0$ .)
- R.W.Gosper a exhibé une "quasi-space-filling curve" qui "remplirait" notre triangle quasi-rempli de la figure 5 de [1]. Comment généralement construire une quasi-space-filling curve pour un des nos ensembles autosimilaires d'intérieur non-vide non simplement connexe, depuis la relation d'autosimilarité?
- Y a-t-il un nombre fini d'ensemble autosimilaire d'intérieur non-vide, non simplement connexe, de frontière extérieure régulière? Et pour ceux de frontière extérieure triangulaire? (pour l'instant nous avons deux exemples.)
- tout ensemble autosimilaire d'intérieur non-vide est il le projeté d'un ensemble auto-similaire "just connected" mais d'intérieur vide?

- que peut-on dire de  $\dim_{\text{Hausdorff}}(\partial\mathbf{A})$  (la dimension de Hausdorff de la frontière d'un ensemble autosimilaire d'intérieur non-vide  $\mathbf{A}$ ). Si on obtient une borne inférieure de  $\dim_{\text{Hausdorff}}(\partial\mathbf{A} \cap U)$ ,  $U$  ouvert,  $\dim_{\text{Hausdorff}}(\text{FrontExt.}(\mathbf{A}))$  lui serait-il égal ?

La frontière du "tile" de Lévy est-elle régulière ou "fractale" ? (Sa frontière extérieure est régulière.)

- Il existe des ensembles autosimilaires de dimension de Hausdorff entière, plus petite que la dimension topologique  $n$  de l'espace contenant. On a bien des cas où il existe  $k < n$  pour lequel la mesure de Lebesgue  $(n - k)$ -dimensionnelle de ce même ensemble est positive. Le cadre des théorèmes Un et Deux ne peut pas fournir un tel ensemble. Comment en générer systématiquement ?
- Que sait-on de la topologie d'un ensemble autosimilaire d'intérieur non-vide, non simplement connexe, ayant subis des identifications sur sa frontière (au moyen des sous-parties complémentaires), telles qu'en tant qu'ensemble, il deviendrait simplement connexe après ces identifications ?

Par identification de la frontière, en prenant notre triangle quasi rempli (figure 5 de [1]), on peut obtenir topologiquement un tore, une sphère ou un tore pincé une seule fois !

## 5 Ce n'est pas nécessaire mais ça sert.

Les applications.

- *Systèmes numériques*— Supposons que  $\mathbf{A}$ ,  $g$  et les  $y_i$  nous soient donnés comme ils ont été définis dans ce rapport. Tout point  $z$  dans  $\mathbb{R}^n$  est alors la somme d'un point de réseau ("entier) et d'un point dans  $\mathbf{A}$ , la "partie fractionnelle de  $z$ ", qui s'exprime par une série infinie des  $x_i$ . Ainsi  $\mathbf{A}$  peut être considéré comme l'intervalle unité et les  $x_i$  comme les chiffres d'un système numérique généralisé. Pour le système décimal,  $\mathbf{A} = [0, 1]$  avec  $g(x) = 10x$ , le réseau consiste en l'union de tous les entiers, et les chiffres  $x_i$  sont de 0 à 9. La représentation des nombres complexes par rapport à une base  $b \in \mathbb{C}$ , c'est à dire,  $g(z) = bz$ , a été étudiée de façon extensive par W.J.Gilbert (par ex.). Dans la majorité des cas les chiffres sont  $0, 1, \dots, |b|^2 - 1$ . Ici l'analogie avec  $\mathbb{R}$  est évidente : les points de  $\mathbf{A}$  ont la forme  $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}$  avec des chiffres  $a_k$ , et si le point fixe de  $g$  est à l'intérieur de  $\mathbf{A}$ , alors chaque point du réseau peut

s'écrire comme  $x = \sum_{j=0}^N c_j b^j$  pour un certain entier  $n$  et des chiffres  $c_j$ .

- *Les applications sur des Tores*— Supposons que  $\bar{g} : T^n \rightarrow T^n$  soit un automorphisme du tore qui soit expansif, linéaire.  $T^n$  peut être représenté topologiquement comme un disque  $D^n \subset \mathbb{R}^n$  avec certaines identifications sur la frontière. Soit  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  le recouvrement de  $\bar{g}$ . Si le disque choisi est un reptile par rapport à  $g$ , alors  $\bar{g}$  appliquant la frontière de  $D^n$  en elle-même, nous avons des “partitions de Markov” particulièrement simples. (cf [Bedford]) Cette application serait à approfondir mais nous n'avons pas eu l'occasion de “s'immerger” dans les considérations de Bedford.
- *Pour les ondelettes*— cf [10]

## Références

- [1] C. BANDT, *Self-Similar Sets 5. Integer matrices and fractal tilings of  $\mathbb{R}^n$* , Proc. Amer. Math. Soc., **112** (1991), N 2, 549–562.
- [2] C. BANDT, S. GRAF, *Self-Similar Sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure*, Proc. Amer. Math. Soc., **114** (1992), 995–1001.
- [3] M. F. BARNESLEY, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
- [4] T. BEDFORD, *Generating special Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms using fractals*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **6** (1986), 325–333.
- [5] H.T. CROFT, K.J. FALCONER, R.K. GUY, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, 1990.
- [6] F. M. DEKKING, *Recurrent Sets*, Adv. Math. **44** (1982) 78–104.
- [7] K. J. FALCONER, *Fractal Geometry*, Wiley, New York, 1990.
- [8] J. E. HUTCHINSON, *Fractals and Self-Similarity*, Indiana University Mathematics Journal. **30** (1981), N 5, 713–747.
- [9] R. W. GOSPER, *The “C” curve*, HAKMEM(M. Beeler, R.W. Gosper, and R. Schroepel, eds.), AIM **239**, M.I.T. Artificial Intelligence Lab, Cambridge, February 1972, 65–66, (item 135).
- [10] K. GRÖCHENIG, W. R. MADYCH, *Multiresolution analysis, Haar Bases, and self-similar tilings of  $\mathbb{R}^n$* , IEEE Trans. Inform. Theory, **38** (1992), 556–568.
- [11] H. VON KOCH, *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. **1** (1904), 681–700.
- [12] P. LÉVY, *Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblables au tout.*, Journal de l’Ecole Polytechnique, III, **7-8**, 227–291, 1938.
- [13] P. LÉVY, *Quelques aspects de la pensée d’un mathématicien*, Albert Blanchard, 1970.
- [14] B. B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.

- [15] P. A. P. MORAN, *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*,  
Proc. Cambridge Philos. Soc., **42** (1946), 15–23.