[DI3] (mention 1809) → 217
-914
-1303
-1809
2516
2517-
-2523

Please enter
2516
2517 } p.11
2518
-2520 } p.13
2521
-2523 } p.15

Großherzogliches
Ludwig-Wilhelm-Gymnasium Rastatt.

Jahres-Bericht

für das Schuljahr 1909-1910.

Zugleich Einladung
zu der öffentlichen Prüfung und Schlußfeier.

Mit einer wissenschaftlichen Beilage von Professor Dienger:
„Beiträge zur Lehre von den arithmetischen und geometrischen Reihen
höherer Ordnung“.

RASTATT.
Hofbuchdrucker Greiser.
1910. — h 1058.

1910, Progr. No. 849.

Contrib^5

Beiträge zur Lehre von den arithmetischen und geometrischen Reihen höherer Ordnung.

Von Prof. **K. Dienger** (Rastatt i. B.).

I.

Zu den arithmetischen Reihen zweiter Ordnung gelangt man durch das folgende leicht zu verstehende Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & d_2 & & d_2 & & d_2 & & d_2 & & d_2 \quad \cdots \\
 & d_1 & & d_1+d_2 & & d_1+2d_2 & & d_1+3d_2 & & d_1+4d_2 & \cdots \\
a & & a+d_1 & & a+2d_1+d_2 & & a+3d_1+3d_2 & & a+4d_1+6d_2 & & a+5d_1+10d_2 \cdots
\end{array}$$

$z_n^{(2)}$ Hieraus kann man sofort anschreiben, wenn $z_n^{(2)}$ das n-te Glied oder kurz das Schlußglied und $s_n^{(2)}$ die Summe der n ersten Glieder bedeuten sollen:

$$z_n^{(2)}=a+\frac{n-1}{1}d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2=\binom{n-1}{0}\cdot a+\binom{n-1}{1}d_1+\binom{n-1}{2}d_2,$$

$$s_n^{(2)}=\frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d_2=\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}d_1+\binom{n}{3}d_2.$$

Zu den arithmetischen Reihen dritter Ordnung kommt man ganz ähnlich wie oben:

$$\begin{array}{cccccc}
 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & \cdots \\
 d_2 & d_2+d_3 & d_2+2d_3 & d_2+3d_3 & & \cdots \\
 d_1 & d_1+d_2 & d_1+2d_2+d_3 & d_1+3d_2+3d_3 & d_1+4d_2+6d_3 & \cdots \\
 a \quad a+d_1 & a+2d_1+d_2 & a+3d_1+3d_2+d_3 & a+4d_1+6d_2+4d_3 & a+5d_1+10d_2+10d_3 & \cdots
\end{array}$$

Hieraus kann man auch sofort anschreiben:

$$z_n^{(3)}=a+\frac{n-1}{1}d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d_3==\binom{n-1}{0}a+\binom{n-1}{1}d_1+\binom{n-1}{2}d_2+\binom{n-1}{3}d_3,$$

$$s_n^{(3)}=\frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d_3==\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}d_1+\binom{n}{3}d_2+\binom{n}{4}d_3.$$

II.

Aus dem obigen können wir folgende Tabellen für die Schlußglieder und die Summen aller arithmetischen Reihen höherer Ordnung aufschreiben:

$$z_n^{(0)}=\binom{n-1}{0}a$$

$$z_n^{(1)}=\binom{n-1}{0}a+\binom{n-1}{1}d_1$$

$$z_n^{(2)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2$$

$$z_n^{(3)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_n^{(r-1)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3 + \cdots + \binom{n-1}{r-1} d_{r-1}$$

$$z_n^{(r)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3 + \cdots + \binom{n-1}{r-1} d_{r-1} + \binom{n-1}{r} d_r,$$

$$s_n^{(0)} = \binom{n}{1} a$$

$$s_n^{(1)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1$$

$$s_n^{(2)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2$$

$$s_n^{(3)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$s_n^{(r-1)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3 + \cdots + \binom{n}{r} d_{r-1}$$

$$s_n^{(r)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3 + \cdots + \binom{n}{r} d_{r-1} + \binom{n}{r+1} d_r.$$

III.

Zu den geometrischen Reihen zweiter Ordnung gelangt man durch das folgende leicht zu verstehende Schema:

$t_n^{(2)}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & q_2 & & q_2 & & q_2 & & q_2 & & q_2 & & \cdots \\
 & q_1 & & q_1 q_2 & & q_1 q_2^2 & & q_1 q_2^3 & & q_1 q_2^4 & & & \cdots \\
a & & a q_1 & & a q_1^2 q_2 & & a q_1^3 q_2^3 & & a q_1^4 q_2^6 & & a q_1^5 q_2^{10} & & \cdots
\end{array}$$

Hieraus kann man sofort anschreiben, wenn $t_n^{(2)}$ das n-te Glied oder kurz das Schlußglied und $p_n^{(2)}$ das Produkt der n ersten Glieder bedeuten sollen:

$$t_n^{(2)} = a q_1^{\frac{n-1}{1}} \cdot q_2^{\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}}, \quad p_n^{(2)} = a^n \cdot q_1^{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}} \cdot q_2^{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}}.$$

Zu den geometrischen Reihen dritter Ordnung kommt man ganz ähnlich wie oben:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & q_3 & & q_3 & & q_3 & & q_3 & & & & \cdots \\
 & & q_2 & & q_2 q_3 & & q_2 q_3^2 & & q_2 q_3^3 & & q_2 q_3^4 & & & \cdots \\
 & q_1 & & q_1 q_2 & & q_1 q_2^2 q_3 & & q_1 q_2^3 q_3^3 & & q_1 q_2^4 q_3^6 & & & & \cdots \\
a & & a q_1 & & a q_1^2 q_2 & & a q_1^3 q_2^3 q_3 & & a q_1^4 q_2^6 q_3^4 & & a q_1^5 q_2^{10} q_3^{10} & & & \cdots
\end{array}$$

Hieraus kann man auch sofort anschreiben:

$$t_n^{(3)} = a q_1^{\frac{n-1}{1}} q_2^{\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}} q_3^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}},$$

$$p_n^{(3)} = a^n q_1^{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}} \cdot q_2^{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot q_3^{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}}.$$

IV.

Wir können auch hier aus dem Obigen folgende Tabellen für die Schlußglieder und die Produkte aller geometrischen Reihen höherer Ordnung aufschreiben:

$$t_n^{(0)} = a^{\binom{n-1}{0}}$$

$$t_n^{(1)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}}$$

$$t_n^{(2)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}}$$

$$t_n^{(3)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}}$$

$$\vdots$$

$$t_n^{(r-1)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}} \cdots\cdots q_{r-1}^{\binom{n-1}{r-1}}$$

$$t_n^{(r)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}} \cdots\cdots q_{r-1}^{\binom{n-1}{r-1}} q_r^{\binom{n-1}{r}}.$$

$$p_n^{(0)} = a^{\binom{n}{1}}$$

$$p_n^{(1)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}}$$

$$p_n^{(2)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}}$$

$$p_n^{(3)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}}$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(r-1)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}} \cdots\cdots q_{r-1}^{\binom{n}{r}}$$

$$p_n^{(r)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}} \cdots\cdots q_{r-1}^{\binom{n}{r}} \cdot q_r^{\binom{n}{r+1}}.$$

V.

Betrachten wir nun die folgenden arithmetischen Reihen höherer Ordnung, von denen jedes Glied der folgenden Reihe durch Summation aller früheren Glieder der zunächst vorhergehenden Reihe sich ergibt:

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad a+4d,\quad a+5d \;\cdots\cdots\; a+\frac{n-1}{1}d$$

$$a,\quad 2a+d,\quad 3a+3d,\quad 4a+6d,\quad 5a+10d,\quad 6a+15d \;\cdots\cdots\; \frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d$$

$$a,\quad 3a+d,\quad 6a+4d,\quad 10a+10d,\quad 15a+20d,\quad 21a+35d \;\cdots\cdots\; \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}a+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}d$$

$$a,\quad 4a+d,\quad 10a+5d,\quad 20a+15d,\quad 35a+35d,\quad 56a+70d \;\cdots\cdots\; \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}a$$

$$+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d.$$

Hieraus ergeben sich sofort für die Schlußglieder und die Summen dieser einzelnen Reihen folgende Tabellen:

$$z_n^{(0)} = \binom{n-2}{0} d$$

$$z_n^{(1)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d$$

$$z_n^{(2)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d$$

$$z_n^{(3)} = \binom{n+1}{2} a + \binom{n+1}{3} d$$

$$z_n^{(4)} = \binom{n+2}{3} a + \binom{n+2}{4} d$$

$$\vdots$$

$$z_n^{(r-1)} = \binom{n+r-3}{r-2} a + \binom{n+r-3}{r-1} d$$

$$z_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{r-1} a + \binom{n+r-2}{r} d,$$

$$s_n^{(0)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d$$

$$s_n^{(1)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d$$

$$s_n^{(2)} = \binom{n+1}{2} a + \binom{n+1}{3} d$$

$$s_n^{(3)} = \binom{n+2}{3} a + \binom{n+2}{4} d$$

$$s_n^{(4)} = \binom{n+3}{4} a + \binom{n+3}{5} d$$

$$\vdots$$

$$s_n^{(r-1)} = \binom{n+r-2}{r-1} a + \binom{n+r-2}{r} d$$

$$s_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r} a + \binom{n+r-1}{r+1} d.$$

VI.

Betrachten wir ebenso wie vorhin die folgenden geometrischen Reihen höherer Ordnung, von denen jedes Glied der folgenden Reihe durch Multiplikation aller früheren Glieder der zunächst vorhergehenden Reihe sich ergibt:

$$a,\ a\,q,\ a\,q^2,\ a\,q^3,\ a\,q^4,\ a\,q^5 \ldots\ldots a\,q^{\frac{n-1}{1}}$$

$$a,\ a^2q,\ a^3q^3,\ a^4q^6,\ a^5q^{10},\ a^6q^{15} \ldots\ldots a^{\frac{n}{1}}\,q^{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}}$$

$$a,\ a^3q,\ a^6q^4,\ a^{10}q^{10},\ a^{15}q^{20},\ a^{21}q^{35} \ldots\ldots a^{\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}}\,q^{\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}}$$

$$a,\ a^4q,\ a^{10}q^5,\ a^{20}q^{15},\ a^{35}q^{35},\ a^{56}q^{70} \ldots\ldots a^{\frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}}\,q^{\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}$$

Hieraus ergeben sich sofort für die Schlußglieder und die Produkte dieser einzelnen Reihen folgende Tabellen:

$$
\begin{aligned}
t_n^{(0)} &= q^{\binom{n-2}{0}} & p_n^{(0)} &= a^{\binom{n-1}{0}} q^{\binom{n-1}{1}} \\
t_n^{(1)} &= a^{\binom{n-1}{0}} q^{\binom{n-1}{1}} & p_n^{(1)} &= a^{\binom{n}{1}} q^{\binom{n}{2}} \\
t_n^{(2)} &= a^{\binom{n}{1}} q^{\binom{n}{2}} & p_n^{(2)} &= a^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{n+1}{3}} \\
t_n^{(3)} &= a^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{n+1}{3}} & p_n^{(3)} &= a^{\binom{n+2}{3}} q^{\binom{n+2}{4}} \\
t_n^{(4)} &= a^{\binom{n+2}{3}} q^{\binom{n+2}{4}} & p_n^{(4)} &= a^{\binom{n+3}{4}} q^{\binom{n+3}{5}} \\
&\vdots & &\vdots \\
t_n^{(r-1)} &= a^{\binom{n+r-3}{r-2}} q^{\binom{n+r-3}{r-1}} & p_n^{(r-1)} &= a^{\binom{n+r-2}{r-1}} q^{\binom{n+r-2}{r}} \\
t_n^{(r)} &= a^{\binom{n+r-2}{r-1}} q^{\binom{n+r-2}{r}} & p_n^{(r)} &= a^{\binom{n+r-1}{r}} q^{\binom{n+r-1}{r+1}}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen für $z_n^{(0)}$, $s_n^{(0)}$, $t_n^{(0)}$ und $p_n^{(0)}$ ergeben sich durch Analogieschlüsse.

VII.

Betrachten wir nun noch die letzten Tabellen etwas genauer, so ergeben sich die weiteren Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
s_n^{(0)} &= z_n^{(1)} & p_n^{(0)} &= t_n^{(1)} \\
s_n^{(1)} &= z_n^{(2)} & p_n^{(1)} &= t_n^{(2)} \\
s_n^{(2)} &= z_n^{(3)} & p_n^{(2)} &= t_n^{(3)} \\
s_n^{(3)} &= z_n^{(4)} & p_n^{(3)} &= t_n^{(4)} \\
&\vdots & &\vdots \\
s_n^{(r-1)} &= z_n^{(r)} & p_n^{(r-1)} &= t_n^{(r)} \\
s_n^{(r)} &= z_n^{(r+1)} & p_n^{(r)} &= t_n^{(r+1)}.
\end{aligned}
$$

VIII.

Wir bilden die Produkte der einzelnen Glieder der ersten Reihe in No. V:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \dots\dots\ a+\frac{n-1}{1}d$$

und beziehen diese Glieder mit g_1, g_2, g_3, ...; dann ist $P_1 = g_1$, $P_2 = g_1\, g_2$, $P_3 = g_1\, g_2\, g_3$, ...

Dadurch erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= a \\
P_2 &= a^2 + ad \\
P_3 &= a^3 + 3a^2d + 2ad^2 \\
P_4 &= a^4 + 6a^3d + 11a^2d^2 + 6ad^3 \\
P_5 &= a^5 + 10a^4d + 35a^3d^2 + 50a^2d^3 + 24ad^4 \\
P_6 &= a^6 + 15a^5d + 85a^4d^2 + 225a^3d^3 + 274a^2d^4 + 120ad^5 \\
&= a^7 + 21a^6d + 175a^5d^2 + 735a^4d^3 + 1624a^3d^4 + 1764a^2d^5 + 720ad^6
\end{aligned}
$$

$P_8 = a^8 + 28a^7d + 322a^6d^2 + 1960a^5d^3 + 6769a^4d^4 + 13132a^3d^5 + 13068a^2d^6 + 5040ad^7$

$P_9 = a^9 + 36a^8d + 546a^7d^2 + 4536a^6d^3 + 22449a^5d^4 + 67284a^4d^5 + 118124a^3d^6 + 109584a^2d^7 + 40320ad^8$

$P_{10} = a^{10} + 45a^9d + 870a^8d^2 + 9450a^7d^3 + 63273a^6d^4 + 269325a^5d^5 + 723680a^4d^6 + 1172700a^3d^7 + 1026576a^2d^8 + 362880ad^9$

$P_{11} = a^{11} + 55a^{10}d + 1320a^9d^2 + 18150a^8d^3 + 157773a^7d^4 + 902055a^6d^5 + 3416930a^5d^6 + 8409500a^4d^7 + 12753576a^3d^8 + 10628640a^2d^9 + 3628800ad^{10}$

Das allgemeine Produkt wird lauten:

$$P_n = a^n + A_1\,a^{n-1}\,d + A_2\,a^{n-2}\,d^2 + A_3\,a^{n-3}\,d^3 + A_4\,a^{n-4}\,d^4 + A_5\,a^{n-5}\,d^5 + \cdots$$

Wir müssen nun die einzelnen Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \cdots$ berechnen. Zu diesem Zweck wollen wir zunächst die folgenden Reihen

Stirling 217 $R_1 = 1, \; 3, \; 6, \; 10, \; 15, \; 21, \; 28, \; 36, \; 45, \; 55, \cdots$

914 $R_2 = 2, \; 11, \; 35, \; 85, \; 175, \; 322, \; 546, \; 870, \; 1320, \cdots$

1303 $R_3 = 6, \; 50, \; 225, \; 735, \; 1960, \; 4536, \; 9450, \; 18150, \cdots$

untersuchen und dann noch berücksichtigen, daß in P_1 kein Glied mit d, in P_2 kein Glied mit d^2, in P_3 kein Glied mit d^3 usw. vorkommt.

Die Reihe R_1 ist eine arithmetische Reihe 2. Ordnung, wie man aus dem folgenden Schema sofort ersehen kann:

$$\begin{array}{lllllllllll} a: & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \cdots \\ d_1: & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \cdots & \\ d_2: & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & & \end{array}$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da $a = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ ist:

$$1 + \frac{n-1}{1} 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Da aber in P_1 kein Glied mit d vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-1$ und erhalten:

$$A_1 = \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Die Reihe R_2 ist eine arithmetische Reihe 4. Ordnung, wie sich aus folgendem Schema ergibt:

$$\begin{array}{llllllllll} a: & 2 & 11 & 35 & 85 & 175 & 322 & 546 & 870 & 1320 \cdots \\ d_1: & 9 & 24 & 50 & 90 & 147 & 224 & 324 & 450 \cdots & \\ d_2: & 15 & 26 & 40 & 57 & 77 & 100 & 126 \cdots & & \\ d_3: & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 26 \cdots & & & \\ d_4: & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \cdots & & & & \end{array}$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da $a = 2$, $d_1 = 9$, $d_2 = 15$, $d_3 = 11$, $d_4 = 3$ ist:

$$2 + \frac{n-1}{1} 9 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 15 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 11 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 3 =$$

$$\frac{n}{4!}(3n^3 + 14n^2 + 21n + 10) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n\,(n+1)\,n+2)\,(n+1{,}666\cdots)}{2 \cdot 4}.$$

Da aber in P_2 kein Glied mit d^2 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-2$ und erhalten:

$$A_2 = \frac{(n-2)\,(n-1)\,n\,(n-0{,}3333\cdots)}{2 \cdot 4}.$$

Die Reihe R_3 ist eine arithmetische Reihe 6. Ordnung; denn wir können folgendes Schema anschreiben:

a : 6 50 225 735 1960 4536 9450 18150 ....
d_1 : 44 175 510 1225 2576 4914 8700 ....
d_2 : 131 335 715 1351 2338 3786 ....
d_3 : 204 380 636 987 1448 ....
d_4 : 176 256 351 461 ....
d_5 : 80 95 110 ....
d_6 : 15 15 ....

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da $a=6$, $d_1=44$, $d_2=131$, $d_3=204$, $d_4=176$, $d_5=80$, $d_6=15$ ist:

$$6+\frac{n-1}{1}44+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\cdot 131+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 204+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 176+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,80+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\,n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 15=$$
$$=\frac{5n}{6!}(3n^5+33n^4+141n^3+291n^2+288n+105)=\frac{15n(n+1)(n+2)^2(n+3)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.$$

Da aber in P_3 kein Glied mit d^3 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-3$ und erhalten:

$$A_3=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2}{2\cdot 4\cdot 6}.$$

Die Reihe R_4 ist eine arithmetische Reihe 8. Ordnung, wie aus folgendem ersichtlich ist:

a: 24 274 1624 6769 22449 63273 157773 357423 749463 1474473 ....
d_1: 250 1350 5145 15680 40824 94500 199650 392040 725010 ....
d_2: 1100 3795 10535 25144 53676 105150 192390 332970 ....
d_3: 2695 6740 14609 28532 51474 87240 140580 ....
d_4: 4045 7869 13923 22942 35766 53340 ....
d_5: 3824 6054 9019 12824 17574 ....
d_6 2230 2965 3805 4750 ....
d_7: 735 840 945 ....
d_8: 105 105 ....

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da $a=24$, $d_1=250$, $d_2=1100$, $d_3=2695$, $d_4=4045$, $d_5=3824$, $d_6=2230$, $d_7=735$, $d_8=105$ ist:

$$24+\binom{n-1}{1}250+\binom{n-1}{2}1100+\binom{n-1}{3}2695+\binom{n-1}{4}4045+$$
$$+\binom{n-1}{5}3824+\binom{n-1}{6}2230+\binom{n-1}{7}735+\binom{n-1}{8}105=$$
$$=\frac{n}{8!}\left[105n^7+2100n^6+17570n^5+79464n^4+208985n^3+317940n^2+257180n+84336\right]$$
$$=\frac{7n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(15n^3+150n^2+485n+502)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+2{,}2310444601)(n+3{,}58661953188)(n+4{,}18233600798)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}.$$

Da aber in P_4 kein Glied mit d^4 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-4$ und erhalten:

$$A_4 = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(n-1{,}768\,955\,5399)(n-0{,}413\,380\,468\,12)(n+0{,}182\,336\,00798)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}.$$

Die Reihe R_5 ist eine arithmetische Reihe 10. Ordnung, wie sich aus dem folgenden ergibt:

a : 120 1764 13132 67284 269325 902055 2637558 6926634 16669653 37312275 78558480 156952432 ....

d_1 : 1644 11368 54152 202041 632730 1735503 4289076 9743019 20642622 41246205 78393952 ....

d_2 : 9724 42784 147889 430689 1102773 2553573 5453943 10899603 20603583 37147747 ....

d_3 : 33060 105105 282800 672084 1450800 2900370 5445660 9703980 16544164 ....

d_4 : 72045 177695 389284 778716 1449570 2545290 4258320 6840184 ....

d_5 : 105650 211589 389432 670854 1095720 1713030 2581864 ....

d_6 : 105939 177843 281422 424866 617310 868834 ....

d_7 : 71904 103579 143444 192444 251524 ....

d_8 : 31675 39865 49000 59080 ....

d_9 : 8190 9135 10080 ....

d_{10} : 945 945 ....

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da $a=120$, $d_1=1644$, $d_2=9724$, $d_3=33060$, $d_4=72045$, $d_5=105650$, $d_6=105939$, $d_7=71904$, $d_8=31675$, $d_9=8190$ und $d_{10}=945$ ist:

$$120+\binom{n-1}{1}1644+\binom{n-1}{2}9724+\binom{n-1}{3}33060+\binom{n-1}{4}72045+\binom{n-1}{5}105650+$$

$$+\binom{n-1}{6}105939+\binom{n-1}{7}71904+\binom{n-1}{8}31675+\binom{n-1}{9}8190+\binom{n-1}{10}945=$$

$$=\frac{9n}{10!}\Big[105n^9+3325n^8+45850n^7+360570n^6+1777545n^5+5678925n^4+11711700n^3+$$

$$+14957180n^2+10656800n+3192000\Big]=$$

$$=\frac{9n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(105n^4+1750n^3+10675n^2+28070n+26600)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=$$

$$=\frac{9n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)\cdot 7\cdot 5\cdot (n+4)(n+5)(3n^2+23n+38)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2(n+2{,}409\,332\,5037)(n+5{,}257\,334\,16)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}.$$

Da aber in P_5 kein Glied mit d^5 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-5$ und erhalten:

$$A_5=\frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)^2n^2(n-2{,}590\,667\,4963)(n+0{,}257\,334\,16)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}.$$

Auf dieselbe Art und Weise, nach welcher wir bis jetzt die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 berechnet haben, ließen sich auch die übrigen Koeffizienten berechnen.

Wir schließen hiermit die weiteren Berechnungen ab und setzen nur noch die gefundenen Werte von A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 in das allgemeine Glied P_n ein, wodurch wir erhalten:

$$P_n = a^n + \frac{(n-1)\,n}{2}\,a^{n-1}d + \frac{(n-2)\,(n-1)\,n\,(n-0{,}3333\cdots)}{2\cdot 4}\,a^{n-2}d^2 +$$

$$+\frac{(n-3)\,(n-2)\,(n-1)^2\,n^2}{2\cdot 4\cdot 6}\,a^{n-3}d^3 +$$

$$+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(n-1{,}7689555399)(n-0{,}41338046812)(n+0{,}18233600798)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot a^{n-4}d^4 +$$

$$+\frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)^2\,n^2\cdot(n-2{,}5906674963)(n+0{,}25733416)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\,a^{n-5}d^5 + \cdots$$

IX.

Wir bilden die Produkte der einzelnen Glieder der zweiten Reihe in No. V:
$a,\ 2a+d,\ 3a+3d,\ 4a+6d,\ 5a+10d,\ 6a+15d,\ 7a+21d,\ 8a+28d,\ 9a+36d,\ 10a+45d, \ldots$
und bezeichnen diese Glieder mit $g_1, g_2, g_3 \ldots$; dann ist $P_1 = g_1$, $P_2 = g_1\,g_2$, $P_3 = g_1\,g_2\,g_3, \ldots$

Wir erhalten dann:

$P_1 = a$

$P_2 = 2a^2 + ad$

$P_3 = 6a^3 + 9a^2d + 3ad^2$

$P_4 = 24a^4 + 72a^3d + 66a^2d^2 + 18ad^3$

$P_5 = 120a^5 + 600a^4d + 1050a^3d^2 + 750a^2d^3 + 180ad^4$

$P_6 = 720a^6 + 5400a^5d + 15300a^4d^2 + 20250a^3d^3 + 12330a^2d^4 + 2700ad^5$

$P_7 = 5040a^7 + 52920a^6d + 220500a^5d^2 + 463050a^4d^3 + 511560a^3d^4 + 277830a^2d^5 + 56700ad^6$

$P_8 = 40320a^8 + 564480a^7d + 3245760a^6d^2 + 9878400a^5d^3 + 17057880a^4d^4 + 16546320a^3d^5$
$\qquad + 8232840a^2d^6 + 1587600ad^7$

$P_9 = 362880a^9 + 6531840a^8d + 49533120a^7d^2 + 205752960a^6d^3 + 509143320a^5d^4$
$\qquad + 763000560a^4d^5 + 669763080a^3d^6 + 310670640a^2d^7 + 57153600ad^8$

$P_{10} = 3628800a^{10} + 81648000a^9d + 789264000a^8d^2 + 4286520000a^7d^3 + 14350316400a^6d^4$
$\qquad + 30541455000a^5d^5 + 41032656000a^4d^6 + 33246045000a^3d^7$
$\qquad + 14551714800a^2d^8 + 2571912000ad^9.$

add this ref

Also allgemein:

$$P_n = B_0\,a^n + B_1 a^{n-1}d + B_2 a^{n-2}d^2 + B_3 a^{n-3}d^3 + B_4 a^{n-4}d^4 + B_5 a^{n-5}d^5 + \cdots$$

B_0 ist das allgemeine Glied der Reihe:

R' : 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, …

B_1 das allgemeine Glied der Reihe: ← 1809✓

R_1': 1, 9, 72, 600, 5400, 52920, 564480, 6531840, 81648000, …

B_2 das allgemeine Glied der Reihe: ← 2516D

R_2': 1, 3, 66, 1050, 15300, 220500, 3245760, 49533120, 789264000, …

B_3 das allgemeine Glied der Reihe: ← 2517D

R_3': 1, 18, 750, 20250, 463050, 9878400, 205752960, 4286520000, …

from arith prog of higher order

Please enter

B_0, das allgemeine Glied der Reihe R', ist sofort erkenntlich, es ist:

$$B_0 = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\, n.$$

B_1, das allgemeine Glied der Reihe R_1', ist:

$$B_1 = \frac{n!}{2^1} \cdot A_1,$$

wo A_1 das allgemeine Glied der Reihe R_1 in No. VIII bedeutet. Setzen wir den Wert von A_1 ein, so erhalten wir:

$$B_1 = \frac{n!}{2^1} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

B_2 das allgemeine Glied der Reihe R_2', ist:

$$B_2 = \frac{n!}{2^2} \cdot A_2,$$

wo A_2 das allgemeine Glied der R_2 in No. VIII bedeutet. Also ist:

$$B_2 = \frac{n!}{2^2} \cdot \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-0{,}333\cdots)}{2 \cdot 4}.$$

B_3, das allgemeine Glied der Reihe R_3', ist:

$$B_3 = \frac{n!}{2^3} \cdot A_3,$$

wo A_3 das allgemeine Glied der Reihe R_3 in No. VIII bedeutet. Also ist:

$$B_3 = \frac{n!}{2^3} \cdot \frac{n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)\,(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Ganz allgemein ist nun:

$$B_\alpha = \frac{n!}{2^\alpha} \cdot A_\alpha.$$

Wir erhalten also jetzt:

$$P_n = \frac{n!}{2^0} a^n + \frac{n!}{2^1} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} a^{n-1} d + \frac{n!}{2^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)\,(n-2)\,(n-0{,}333\cdots)}{2 \cdot 4} a^{n-2} d^2 +$$

$$+ \frac{n!}{2^3} \cdot \frac{n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{n-3} d^3 +$$

$$+ \frac{n!}{2^4} \cdot \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-1{,}768\,955\,5399)(n-0{,}413\,380\,468\,12)(n+0{,}182\,336\,007\,98)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot a^{n-4} d^4 +$$

$$+ \frac{n!}{2^5} \cdot \frac{n^2 \cdot (n-1)^2 (n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5) \cdot (n-2{,}590\,667\,496\,3)\,(n+0{,}257\,334\,16)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} a^{n-5} d^5 + \cdots$$

X.

Wir bilden nun die Produkte der einzelnen Glieder der dritten Reihe in No. V:

$$a,\ 3a+d,\ 6a+4d,\ 10a+10d,\ 15a+20d,\ 21a+35d,\ 28a+56d,\ 36a+84d,\ 45a+120d,\ 55a+165d,\ \cdots$$

und bezeichnen diese Glieder wieder mit $g_1, g_2, g_3 \cdots$, dann ist $P_1 = g_1$, $P_2 = g_1\, g_2$, $P_3 = g_1\, g_2\, g_3 \cdots$

Wir erhalten also:

$P_1 = a$

$P_2 = 3a^2 + ad$

$P_3 = 18a^3 + 18a^2 d + 4ad^2$

$$P_4 = 180a^4 + 360a^3d + 220a^2d^2 + 40ad^3$$
$$P_5 = 2700a^5 + 9000a^4d + 10\,500a^3d^2 + 5000a^2d^3 + 800ad^4$$
$$P_6 = 56700a^6 + 283\,500a^5d + 535\,500a^4d^2 + 472\,500a^3d^3 + 191\,800a^2d^4 + 28\,000ad^5$$
$$P_7 = 1\,587\,600a^7 + 11\,113\,200a^6d + 30\,870\,000a^5d^2 + 43\,218\,000a^4d^3 + 31\,830\,400a^3d^4 + 11\,524\,800a^2d^5 + 1\,568\,000ad^6$$
$$P_8 = 57\,153\,600a^8 + 533\,433\,600a^7d + 2\,044\,828\,800a^6d^2 + 4\,148\,928\,000a^5d^3 + 4\,776\,206\,400a^4d^4 + 3\,088\,646\,400a^3d^5 + 1\,024\,531\,200a^2d^6 + 131\,712\,000ad^7$$
$$P_9 = 2\,571\,912\,000a^9 + 30\,862\,944\,000a^8d + 156\,029\,328\,000a^7d^2 + 432\,170\,216\,000a^6d^3 + 712\,800\,648\,000a^5d^4 + 712\,133\,856\,000a^4d^5 + 416\,741\,472\,000a^3d^6 + 128\,870\,784\,000a^2d^7 + 15\,805\,440\,000ad^8$$
$$P_{10} = 141\,455\,160\,000a^{10} + 2\,121\,827\,400\,000a^9d + 13\,673\,998\,800\,000a^8d^2 + 49\,514\,201\,000\,000a^7d^3 + 110\,512\,121\,280\,000a^6d^4 + 156\,779\,469\,000\,000a^5d^5 + 140\,422\,867\,200\,000a^4d^6 + 75\,850\,236\,000\,000a^3d^7 + 22\,132\,978\,560\,000a^2d^8 + 2\,607\,897\,600\,000ad^9$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Wir erhalten jetzt allgemein:

$$P_n = C_0a^n + C_1a^{n-1}d + C_2a^{n-2}d^2 + C_3a^{n-3}d^3 + C_4a^{n-4}d^4 + C_5a^{n-5}d^5 + \dots$$

C_0 ist das allgemeine Glied der Reihe:

R'': 1, 3, 18, 180, 2700, 56700, 1587600, 57153600, 2571912000, 141455160000, ... ← 2518

C_1 das allgemeine Glied der Reihe:

R_1'': 1, 18, 360, 9000, 283500, 11113200, 533433600, 30862944000, 2121827400000, ... ← 2519

C_2 das allgemeine Glied der Reihe:

R_2'': 4, 220, 10500, 535500, 30870000, 2044828800, 156029328000, 13673998800000, ... ← 2520

C_3 das allgemeine Glied der Reihe:

R_3'': 40, 5000, 472500, 43218000, 4148928000, 432170216000, 49514201000000, ...

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

C_0, das allgemeine Glied der Reihe R'', ist das Produkt aller Zahlen der Reihe 2. Ordnung R_1 No. VIII:

$$R_1:\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ \dots;$$

wir wollen es kurz bezeichnen mit:

$$\overset{2}{n}! = 1\cdot3\cdot6\cdot10\cdot15\cdot21\cdot28\cdot36\cdot45 \dots$$

C_1, das allgemeine Glied der Reihe R_1'', ist:

$$C_1 = \frac{\overset{2}{n}!}{3^1}\cdot A_1,$$

wo A_1 das allgemeine Glied der Reihe R_1 in No. VIII bedeutet. Wir erhalten also:

$$C_1 = \frac{\overset{2}{n}!}{3^1}\cdot\frac{n(n-1)}{2}.$$

C_2, das allgemeine Glied der Reihe R_2'', ist:

$$C_2 = \frac{\overset{2}{n}!}{3^2}\cdot A_2,$$

wo A_2 das allgemeine Glied der Reihe R_2 in No. VIII bedeutet. Also ist:

$$C_2 = \frac{\overset{2}{n}!}{3^2}\,\frac{n(n-1)\cdot(n-2)(n-0{,}333\dots)}{2\cdot4}.$$

C_3, das allgemeine Glied der Reihe R_3'', ist:

$$C_3 = \frac{\overset{2}{n!}}{3^3} \cdot A_3,$$

wo A_3 das allgemeine Glied der Reihe R_3 in No. VIII bedeutet. Also ist:

$$C_3 = \frac{\overset{2}{n!}}{3^3} \frac{n^2(n-1)^2 \cdot (n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Ganz allgemein ist:

$$C_\alpha = \frac{\overset{2}{n!}}{3^\alpha} \cdot A_\alpha.$$

Wir erhalten also jetzt:

$$P_n = \frac{\overset{2}{n!}}{3^0} a^n + \frac{\overset{2}{n!}}{3^1} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} a^{n-1} d + \frac{\overset{2}{n!}}{3^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-0{,}333\ldots)}{2 \cdot 4} a^{n-2} d^2 +$$

$$+ \frac{\overset{2}{n!}}{3^3} \frac{n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{n-3} d^3 +$$

$$+ \frac{\overset{2}{n!}}{3^4} \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-1{,}768\,955\,5399)(n-0{,}413\,380\,468\,12)(n+0{,}182\,336\,007\,98)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^{n-4} d^4 +$$

$$+ \frac{\overset{2}{n!}}{3^5} \cdot \frac{n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-2{,}590\,667\,496\,3)(n+0{,}257\,334\,16)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} a^{n-5} d^5 + \cdots$$

XI.

Dieselben Untersuchungen wie in IX und X führen wir jetzt durch an der vierten Reihe in No. V:

$a,\ 4a+d,\ 10a+5d,\ 20a+15d,\ 35a+35d,\ 56a+70d,\ 84a+126d,\ 120a+210d,\ 165a+330d,\ 220a+495d,\ \ldots$

Wir erhalten:

$$P_1 = a$$
$$P_2 = 4a^2 + ad$$
$$P_3 = 40a^3 + 30a^2 d + 5ad^2$$
$$P_4 = 800a^4 + 1200a^3 d + 550a^2 d^2 + 75ad^3$$
$$P_5 = 28\,000a^5 + 70\,000a^4 d + 61\,250a^3 d^2 + 21\,875a^2 d^3 + 2625ad^4$$
$$P_6 = 1\,568\,000a^6 + 5\,880\,000a^5 d + 8\,330\,000a^4 d^2 + 5\,512\,500a^3 d^3 + 1\,678\,250a^2 d^4 + 183\,750ad^5$$
$$P_7 = 131\,712\,000a^7 + 691\,488\,000a^6 d + 1\,440\,600\,000a^5 d^2 + 1\,512\,630\,000a^4 d^3 + 835\,548\,000a^3 d^4 + 226\,894\,500a^2 d^5 + 23\,152\,500ad^6$$
$$P_8 = 15\,805\,440\,000a^8 + 110\,638\,080\,000a^7 d + 318\,084\,480\,000a^6 d^2 + 484\,041\,600\,000a^5 d^3 + 417\,918\,060\,000a^4 d^4 + 202\,692\,420\,000a^3 d^5 + 50\,426\,145\,000a^2 d^6 + 4\,862\,025\,000ad^7$$
$$P_9 = 2\,607\,897\,600\,000a^9 + 23\,471\,078\,400\,000a^8 d + 88\,994\,505\,600\,000a^7 d^2 + 184\,834\,742\,400\,000a^6 d^3 + 228\,690\,207\,900\,000a^5 d^4 + 171\,357\,209\,100\,000a^4 d^5 + 75\,208\,812\,525\,000a^3 d^6 + 17\,442\,801\,975\,000a^2 d^7 + 1\,004\,408\,250\,000ad^8$$

$$P_{10}=573737472000000a^{10}+6454546560000000a^{9}d+31196975040000000a^{8}d^{2}$$
$$+84715923600000000a^{7}d^{3}+141805043226000000a^{6}d^{4}$$
$$+150900238912500000a^{5}d^{5}+101367757260000000a^{4}d^{6}$$
$$+41065791834375000a^{3}d^{7}+8987199692625000a^{2}d^{8}$$
$$+794211783750000ad^{9}$$

Wir erhalten jetzt allgemein:

$$P_n=D_0\,a^n+D_1\,a^{n-1}d+D_2\,a^{n-2}d^2+D_3\,a^{n-3}d^3+D_4\,a^{n-4}d^4+D_5\,a^{n-5}d^5+\cdots\cdot$$

D_0 ist das allgemeine Glied der Reihe:

R''' : 1, 4, 40, 800, 28000, 1568000, 131712000, 15805440000, 2607897600000, 573737472000000, ···· D

2521

X

Dieses D_0 ist das Produkt aller Zahlen der Reihe 3. Ordnung:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, ····;

wir wollen es kurz bezeichnen mit:

$$\overset{3}{n}!=1\cdot 4\cdot 10\cdot 20\cdot 35\cdot 56\cdot 84\cdot 120\cdot 165\ \cdots\cdot$$

D_1 ist das allgemeine Glied der Reihe:

R_1''': 1, 30, 1200, 70000, 5880000, 691488000, 110638080000, 23471078400000, 6454546560000000, ···· D

Dieses D_1 ist:

$$D_1=\frac{\overset{3}{n}!}{4^1}A_1=\frac{\overset{3}{n}!}{4^1}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

2522
OK

D_2 ist das allgemeine Glied der Reihe:

R_2''': 1, 5, 550, 61250, 8330000, 318084480000, 88994505600000, 31196975040000000 ···· 2523
OK D

Dieses D_2 ist:

$$D_2=\frac{\overset{3}{n}!}{4^2}A_2=\frac{\overset{3}{n}!}{4^2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\,(n-2)\,(n-0{,}333\cdots)}{2\cdot 4}.$$

D_3 ist das allgemeine Glied der Reihe:

R_3''': 75, 21875, 5512500, 1512630000, 484041600000, 184834742400000, 84715923600000000, ····

Dieses D_3 ist:

$$D_3=\frac{\overset{3}{n}!}{4^3}A_3=\frac{\overset{3}{n}!}{4^3}\,\frac{n^2\cdot(n-1)^2\cdot(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 4\cdot 6}.$$

Ganz allgemein ist:

$$D_\alpha=\frac{\overset{3}{n}!}{4^\alpha}\cdot A_\alpha.$$

Wir haben also jetzt:

$$P_n=\frac{\overset{3}{n}!}{4^0}a^n+\frac{\overset{3}{n}!}{4^1}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}a^{n-1}d+\frac{\overset{3}{n}!}{4^2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\,(n-2)\cdot(n-0{,}333\cdots)}{2\cdot 4}a^{n-2}d^2+$$
$$+\frac{\overset{3}{n}!}{4^3}\cdot\frac{n^2\,(n-1)^2\cdot(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 4\cdot 6}a^{n-3}d^3+$$

$$+\frac{\overset{3}{n!}}{4^4}\cdot\frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-1{,}768\,955\,5399)(n-0{,}413\,380\,468\,12)(n+0{,}182\,336\,007\,98)}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\,a^{n-4}d^4+$$

$$+\frac{\overset{3}{n!}}{4^5}\cdot\frac{n^2(n-1)^2\cdot(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-2{,}590\,667\,4963)(n+0{,}257\,334\,16)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\,a^{n-5}d^5+\cdots$$

XII.

Würden wir dieselben Untersuchungen ganz allgemein bei der m^{ten} Reihe in No. V durchführen, so würden wir erhalten:

$$P_n=M_0a^n+M_1\,a^{n-1}d+M_2\,a^{n-2}d^2+M_3\,a^{n-3}d^3+M_4\,a^{n-4}d^4+M_5\,a^{n-5}d^5+\cdots,$$

wobei allgemein ist:

$$M_\alpha=\frac{\overset{m-1}{n!}}{m^\alpha}\,A_\alpha.$$

$\overset{m-1}{n!}$ ist das Produkt aller Zahlen der arithmetischen Reihe $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem Anfangsglied 1 und A_α hat dieselbe Bedeutung wie in No. VIII, IX, X u. XI. Setzen wir jetzt die Werte von A_α in P_n ein, so bekommen wir:

$$P_n=\frac{\overset{m-1}{n!}}{m^0}\,a^n+\frac{\overset{m-1}{n!}}{m^1}\,\frac{n\cdot(n-1)}{2}\,a^{n-1}d+\frac{\overset{m-1}{n!}}{m^2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-0{,}333\cdots)}{2\cdot4}\,a^{n-2}d^2+$$

$$+\frac{\overset{m-1}{n!}}{m^3}\,\frac{n^2\cdot(n-1)^2\cdot(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot6}\,a^{n-3}d^3+$$

$$+\frac{\overset{m-1}{n!}}{m^4}\,\frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-1{,}768\,955\,5399)(n-0{,}413\,380\,468\,12)(n+0{,}182\,336\,007\,98)}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\,a^{n-4}d^4+$$

$$+\frac{\overset{m-1}{n!}}{m^5}\,\frac{n^2\cdot(n-1)^2\cdot(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-2{,}590\,667\,4963)(n+0{,}257\,334\,16)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\,a^{n-5}d^5+\cdots$$