LLOQUE HENRI POINCARÉ
stitut Henri Poincaré
rue Pierre Curie
PARIS 5°

Octobre 1954

CONSTRUCTIONS SIMPLICIALES ACYCLIQUES

par Saunders MAC LANE.

-:-:-

1.- Espaces de type $\mathcal{K}(\Pi, n)$.

Soit Π un groupe abélien (multiplicatif). Un espace topologique X , connexe r arcs, est du <u>type</u> $\mathcal{K}(\Pi, n)$ si

$$\pi_n(X) = \Pi \ , \quad \pi_q(X) = 1 \ , \quad q \neq n \ ;$$

qui veut dire que Π est le seul groupe non trivial d'homotopie de X , dans la mension n . Le groupe d'homologie de X ne dépend que de Π et n , et s'écrit (Π, n) .

Espaces fibrés acycliques : Soit X un espace de type $\mathcal{K}(\Pi, n+1)$, x_0 un point oisi de X , et E l'espace des chemins, dans X , qui commencent en x_0 . application p : $E \dashrightarrow X$,qui renvoie chaque chemin dans son point terminal, fait E un espace fibré de base X (SERRE [3]). La fibre (image inverse de x_0) est espace des lacets dans X au point x_0 et est un espace de type $\mathcal{K}(\Pi, n)$. opération usuelle du produit des chemins donne une opération de la fibre sur l'espace tal E . Cet espace E est contractible, donc d'homologie triviale.

La transition d'un espace $\mathcal{K}(\Pi, n)$ à un espace $\mathcal{K}(\Pi, n+1)$ se fait alors par espace fibré E de fibre $\mathcal{K}(\Pi, n)$, de base $\mathcal{K}(\Pi, n+1)$, et telle que

(i) la fibre opère sur l'espace E ,

(ii) l'espace E est acyclique.

Il s'agit des constructions algébriques pour $H(\Pi, n)$. En utilisant le "bar-nstruction" de Eilenberg - Mac Lane, Cartan [1] a donné une théorie des constructions gébriques avec les propriétés (i) et (ii) , pour les structures algébriques des gèbres différentielles graduées. Nous donnons maintenant une construction parallèle ur les structures simpliciales.

2.- Les structures simpliciales.

Convention.: Chaque anneau a une identité ; chaque application d'anneau envoie l'identité dans l'identité.

Un R-complexe commutatif est un système d'anneaux commutatifs R_0 , R_1 , ... , R_q , ... et d'applications d'anneau

(1) $$F_i : R_q \dashrightarrow R_{q-1} \quad , \quad D_i : R_q \dashrightarrow R_{q+1} \quad , \quad i = 0 , \ldots , q \ ,$$

définies pour chaque $q > 0$ et telles que

(2) $$F_i F_j = F_{j-1} F_i \quad , \quad D_j D_i = D_i D_{j-1} \quad , \quad i < j \ ,$$

(3) $$F_i D_j = D_{j-1} F_i \quad , \quad i < j \quad ; \quad F_i D_j = D_j F_{i-1} \quad , \quad i > j+1 \ ,$$

(4) $$F_i D_i = F_{i+1} D_i = I \qquad (I = \text{identité}) .$$

Notons 1_q l'identité de R_q , par convention

(5) $$F_i 1_q = 1_{q-1} \quad , \quad D_i 1_q = 1_{q+1} \quad , \quad i = 0 , \ldots , q \quad , \quad q > 0 .$$

Une augmentation de R est une application α : $R_0 \dashrightarrow Z$ (Z = anneau des entiers) telle que $\alpha F_0 = \alpha F_1$.

Une R-application ρ: R ---> S d'un R-complexe R dans un autre S est un système d'applications ρ_q : $R_q \dashrightarrow S_q$ d'anneau , q = 0 , 1 , ... , telle que

(6) $$\rho_q F_i = F_i \rho_{q+1} \quad , \quad \rho_{q+1} D_i = D_i \rho_q \quad , \quad \alpha \rho_0 = \alpha .$$

On obtient un R-complexe Z' en mettant $Z'_q = Z$, $F_i = D_i = \alpha$ = application identique. Chaque augmentation α de R donne une R-application $\bar{\alpha}$: R ---> Z' (l'augmentation forte) définie par $\bar{\alpha}_q a = \alpha(F_0^q a)$, $a \in R_q$.

Notons $\hat{R}$ le noyau de $\bar{\alpha}$.

La différentielle de R est l'application ∂ : $R_q \dashrightarrow R_{q+1}$ définie par

(7) $$\partial = F_0 - F_1 + \ldots + (-1)^q F_q \ .$$

Comme conséquence de (2) , on a $\partial\partial = 0$; donc $R = \sum_q R_q$ est un groupe différentiel gradué (= "chain complex"). Le sous-groupe DR engendré par tous les éléments $D_i a$ est stable pour la différentielle ∂ . Le quotient R/DR est aussi un groupe différentiel gradué, et s'appelle le complexe normalisé de R .

L'application canonique R ---> R/DR est un isomorphisme pour l'homologie ("chain equivalence").

Soit R un sous- R-complexe d'un R-complexe commutatif et augmenté W, et $\hat{R}W$ l'idéal engendré dans chaque dimension par les produits rw, $r \in \hat{R}$. Le quotient $\bar{W} = W/\hat{R}W$ est aussi un R-complexe, commutatif et augmenté, et l'application $p : W \dashrightarrow \bar{W}$ une R-application.

3.- La construction acyclique W.

Soit R un R-complexe, commutatif et augmenté. Nous définissons un R-complexe $W \supset R$ par induction, en mettant

(8) $$W_0 = R_0 \quad , \quad W_{q+1} = R_{q+1} \otimes W_q \quad , \quad q = 0 , \dots .$$

L'augmentation α de W est égale à l'augmentation de R. Pour la dimension 1 les opérations F sont $(a_i \in R_i)$

(9) $$F_0 (a_1 \otimes a_0) = (F_0 a_1) a_0 \quad , \quad F_1 (a_1 \otimes a_0) = (F_1 a_1)\alpha a_0 .$$

Pour les autres dimensions $(a \in R_{q+1} \; , \; w \in W_q)$, posons :

(10) $$F_0 (a \otimes w) = (F_0 a) w \quad ,$$

(11) $$F_{i+1}(a \otimes w) = F_{i+1} a \otimes F_i w \quad , \quad i = 0 , \dots , q ,$$

(12) $$D_0(a \otimes w) = D_0 a \otimes (1_{q+1} \otimes w)$$

(13) $$D_{i+1}(a \otimes w) = D_{i+1} a \otimes D_i w \quad , \quad i = 0 , \dots , q .$$

L'application $a_{q+1} \dashrightarrow a_{q+1} \otimes 1_q$, $a_0 \dashrightarrow a_0$ est un R-monomorphisme de R dans W ; nous identifions R avec son image par cette application. Le quotient $\bar{W}$ est alors un R-complexe. Il est identique avec un R-complexe défini dans [2 ; paragraphe 17] et y est appelé $W(R)$.

Le complexe W est acyclique. Une homotopie $t : W_q \dashrightarrow W_{q+1}$, donnée par $t w_q = 1_{q+1} \otimes w_q$, est telle que

(14) $$F_0 \, t \, a_0 = a_0 \quad , \quad F_1 \, t \, a_0 = \alpha(a_0) \, 1_0 \quad ,$$

(15) $$F_0 \, t \, w = w \quad , \quad F_{i+1} \, t \, w = t \, F_i \, w \quad , \quad w \in W_q \quad , \quad q > 0 .$$

On obtient la formule habituelle d'homotopie, $\partial t + t\partial = I - \alpha$, en regardant l'augmentation α comme une application de W dans lui-même (avec l'identification $1 = 1_0$ de Z avec des éléments de W_0).

On a maintenant "l'espace" fibré $p : W \dashrightarrow \overline{W}$, avec une fibre donnée R , qui possède les propriétés (i) et (ii) de l'introduction.

4.- La construction minimale $L(\Pi, n)$.

Pour chaque q , soit Δ_q un simplexe à q dimensions et de sommets $(0, 1, \ldots, q)$ ordonnés. Par l'application $\varepsilon^i : \Delta_{q-1} \dashrightarrow \Delta_q$, donnée par

(16) $$\varepsilon^i (0, 1, \ldots, q-1) = (0, \ldots, i-1, i+1, \ldots, q) ,$$

Δ_{q-1} devient la i-ième face de Δ_q . L'application $\eta^j : \Delta_{q+1} \dashrightarrow \Delta_q$, donnée par :

(17) $$\eta^j (0, 1, \ldots, q+1) = (0, \ldots, j-1, j, j, j+1, \ldots q) ,$$ place Δ_{q+1} sur la j-ième position dégénérée de Δ_q . Ces applications ε^i et η^j jouissent des propriétés duales des propriétés (2) , (3) , (4) de F_i et D_i .

Pour chaque groupe abélien multiplicatif Π , notons $Z(\Pi)$ le "group ring" de Π avec coefficients entiers.

Soient $C^n(\Delta_q ; \Pi)$, resp. $Z^n(\Delta_q ; \Pi)$ le groupe (multiplicatif) de cochaines, resp. de cocycles du simplexe Δ_q avec coefficients dans Π (cf. [2], paragraphe 15) , et prenons les anneaux :

(18) $$L_q(\Pi, n) = Z(C^n(\Delta_q ; \Pi)) ,$$

(19) $$K_q(\Pi, n) = Z(Z^n(\Delta_q ; \Pi)) .$$

Les applications ε^i de (16) donnent des applications $F_i : C^n(\Delta_q ; \Pi) \dashrightarrow C^n(\Delta_{q-1} ; \Pi)$ dans le sens inverse, donc des applications

$$F_i : L_q \dashrightarrow L_{q-1} , \quad F_i : K_q \dashrightarrow K_{q-1} .$$

De façon parallèle, les applications η^j donnent $D_j : L_q \dashrightarrow L_{q+1}$, $D_j : K_q \dashrightarrow K_{q+1}$. Avec les applications F et D ainsi définies, les L_q , resp. K_q , forment un R-complexe L , resp. K .

Le complexe minimal singulier d'un espace X de type $\mathcal{K}(\Pi, n)$ est isomorphe au complexe $K(\Pi, n)$. Ce dernier donne donc, de façon algébrique, des groupes $H(\Pi, n)$.

Le complexe $L(\Pi, n)$ est acyclique, et contient $K(\Pi, n)$ comme sous-complexe. Le complexe quotient $\overline{L}$ de L par ce sous-complexe est isomorphe au complexe $K(\Pi,$

+1) ; la projection canonique $p : L(\pi, n) \dashrightarrow K(\pi, n+1)$ est l'application
duite par l'opérateur cobord

$$\delta : C^n(\Delta_q ; \pi) \dashrightarrow Z^{n+1}(\Delta_q ; \pi) .$$

a donc les propriétés (i) , (ii) de l'introduction.

Théorème : Pour chaque groupe abélien π il y a un isomorphisme $W(K(\pi, n)) \cong$ (π, n) , réduit à l'identité sur le sous-complexe $K(\pi, n+1)$.

En conséquence, cet isomorphisme induit, sur les complexes quotients, un isomor-
hisme :

(20) $$\bar{W}(K(\pi, n)) \cong K(\pi, n+1) .$$

Références bibliographiques :

[1] H. CARTAN : Sur les groupes d'Eilenberg - Mac Lane $H(\pi, n)$, I : Méthode des constructions, Proc. nat. Acad. Sc., U.S.A., 40 (1954), p. 467-471 ; II : ibid., p. 704-707.

[2] S. EILENBERG et S. MAC LANE : On the groups $H(\pi, n)$, I and II , Ann. of Math., 58 (1953), p. 55-106 ; 60 (1954), p. 49-139 .

[3] J.P. SERRE : Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), p. 425-505 .
