Math. Ann. 230, 279—292 (1977)

Zerspaltung äquivarianter Homotopiemengen

H. Hauschild

Mathematisches Institut der Universität, Bunsenstr. 3—5, D-3400 Göttingen, Bundesrepublik Deutschland

1. Übersicht

In dieser Arbeit sei G immer eine kompakte Liegruppe; orthogonale G-Darstellungen werden mit $U, V, W\ldots$ bezeichnet. Weiter sei SV die Einheitssphäre in V und S^V die Einpunktkompaktifizierung von V. In den Arbeiten [3, 5, 9] und [10] wurden mit verschiedenen Methoden Zerspaltungen für die Homotopiemengen $[S(\mathbb{R}^n \times V)|S(V)]^G$ und für die zugehörigen stabilen Versionen angegeben.

In der fundamentalen Arbeit [8] berechnete Petrie die Homotopiemenge $[SV|SW]^G$ für zwei komplexe G-Darstellungen V und W, für die $|V^H|=|W^H|$ gilt für alle $H<G$. Er zeigte, daß eine G-Abbildung $f: SV \to SW$ durch die Abbildungsgrade der auf den H-Fixpunktmengen induzierten Abbildungen f^H bestimmt ist; weiter berechnete er, welche Familien von Abbildungsgraden $\{a^H\}$ von einer G-Abbildung herkommen. Diese Arbeit knüpft an die Betrachtungen von Petrie an. Es wird durch einfache homotopietheoretische Betrachtungen gezeigt, wie für zwei G-Darstellungen V und W unter obiger Dimensionsbedingung die Homotopiemengen $[S^V \wedge X|S^W \wedge Y]_0^G$ zerspalten. Insbesondere ergibt sich in Satz (3.4) ein in dem trivialen G-Raum X natürlicher Zerspaltungsisomorphismus

$$E: \prod_{(H)\in F(V)} [S^{V^H}/\bar{S}^{\bar{V}^H} \wedge X|S^{W^H} \wedge Y^H]_0^{WH} \to [S^V \wedge X|S^W \wedge Y]_0^G .$$

Für den stabilen Fall erfolgt dann in Abschnitt 3 eine weitere Berechnung von

$$\operatorname*{Kolim}_U [S^{V^H\times U^H}/S^{\overline{V\times U^H}} \wedge X|S^{W^H\times U^H} \wedge Y^H]_0^{WH}.$$

In Abschnitt 4 benutze ich die Zerspaltung E und einige Tatsachen aus der Obstruktionstheorie, um die unpunktierte Homotopiemenge $[SV|SW]^G$ zu berechnen. Ich verschaffe mir hierzu zunächst durch die nicht reduzierte Einhängung eine punktierte Situation. Der Satz (4.5) liefert eine vollständige Klassifikation von $[SV|SW]^G$. Insbesondere werden Bedingungen angegeben, unter denen eine G-Abbildung $f: SV \to SW$ durch die Abbildungsgrade der f^H bestimmt ist. Dies verallgemeinert das Ergebnis aus [8] auf nicht notwendig komplexe G-Darstellungen; es ist aber andererseits wesentlich schwächer, da keine Aussagen über die auftretenden Abbildungsgrade gemacht wurden. Eine teilweise Verallgemeinerung der Ergebnisse aus [8] ist kürzlich in [19] erschienen. Im Abschnitt 5 werden für endliche Gruppen einige Ergebnisse über äquivariante Konfigurationsräume zusammengetragen. Insbesondere verwende ich die Ergebnisse aus Abschnitt 3, um in Satz (5.4) eine äquivariante Version des sogenannten Approximationssatzes, welcher ein äquivarantes Modell für den stabilen Abbildungsraum $\operatorname*{Kolim}_U \{S^U|S^U\}_0$ liefert, zu beweisen. In Satz (6.1) zeige ich, wie sich mit Hilfe der Zerspaltung E aus Satz (3.4) die Segalschen Kohomotopieoperationen θ_n aus den symmetrischen Potenzoperationen ergeben. Als Anwendung hiervon erhält man in Satz (6.2) und Bemerkung (6.4) Verallgemeinerungen des Satzes von Kahn und Priddy.

2. Technische Hilfsmittel

Für $H<G$ bezeichne NH den Normalisator von H in G, WH den Quotienten NH/H und (H) die Konjugationsklasse von H. Ist X ein G-Raum und $x \in X$, so sei G_x die Standuntergruppe an der Stelle x. Weiter setze ich wie üblich:

$$X^H=\{x\in X\,|\,H<G_x\}; \quad X^{(H)}=\{x\in X\,|\,H \text{ subkonjugiert zu } G_x\}$$

$$X_H=\{x\in X\,|\,G_x=H\}; \quad X_{(H)}=\{x\in X\,|\,G_x \text{ konjugiert zu } H\}$$

$$\bar{X}^H=X^H\setminus X_H \quad \text{und} \quad \bar{X}^{(H)}=X^{(H)}\setminus X_{(H)}.$$

Die Menge der auf der Darstellung V auftretenden Standuntergruppen sei $F(V)$; die Menge aller abgeschlossenen Untergruppen von G sei $F(G)$.

Für eine Menge $\{V_i\}$ von G-Darstellung sei $[V_i]$ die kleinste gegenüber Summenbildung abgeschlossene Menge von Darstellungen, welche $\{V_i\}$ enthält. Die Menge der auf den $V\in[V_i]$ auftretenden Standuntergruppen sei $F[V_i]$. Ist F ein System von Untergruppen aus G, so sei EF der zugehörige klassifizierende Raum aus [3]; der universelle freie G-Raum sei EG.

Für zwei Paare von (punktierten) G-Räumen (X, A) und (Y, B) bezeichne $\{X, A\,|\,Y, B\}_0$ den Raum der stetigen (punktierten) Abbildungen von Paaren mit der kompakt offenen Topologie; die Menge der G-äquivarianten Abbildungen sei $\{X, A\,|\,Y, B\}_0^G$. Ist $f\colon A\to Y$ vorgegeben, so sei noch $\{X, A\,|\,Y\}_f^G$ der Raum der G-Abbildungen von X nach Y, welche auf A mit f übereinstimmen, mit der Abbildung f als Grundpunkt. Die zu diesen Abbildungsräumen gehörigen Homotopiemengen werden durch eckige Klammern gekennzeichnet. Die konstante Abbildung wird immer mit o bezeichnet.

Für eine G-Darstellung hat man die Einhängungsabbildung EV:

$$[X|Y]_0^G\to[X\wedge S^V|Y\wedge S^V]_0^G.$$

Ist $[V_i]$ ein additiv abgeschlossenes System von G-Darstellungen, so bezeichne $\operatorname*{Kolim}_{[V_i]}[X\wedge S^V|Y\wedge S^V]_0^G$ den Kolimes über alle in $[V_i]$ möglichen Einhängungsabbildungen. Enthält $[V_i]$ alle irreduziblen G-Darstellungen und ist $V-W$ eine virtuelle G-Darstellung, so sei $\pi_{V-W}^G(A|B)=\operatorname*{Kolim}_{[V_i]}[S^V\wedge A\wedge S^X|S^W\wedge B\wedge S^X]_0^G$, $\pi_G^{V-W}(A)=\pi_{W-V}^G(A|S^0)$; $\pi_{V-W}^G(B)=\pi_{V-W}^G(S^0|B)$ und $\pi_{V-W}^G=\pi_{V-W}^G(S^0)$. Durchläuft die Darstellung X ein festes System $[V_i]$ von G-Darstellungen, welches wie eben alle irreduziblen G-Darstellungen enthält, so schreibe ich an Stelle von $\operatorname*{Kolim}_{[V_i]}$ auch oft $\operatorname*{Kolim}_X$.

3. Der Zerspaltungssatz

In diesem Abschnitt seien V und W zwei feste G-Darstellungen, für welche die Dimension $|V^H|$ gleich der Dimension $|W^H|$ ist für alle $H<G$. Treten V und W in einer Homotopiemenge im Zusammenhang mit einem Kolimes über ein System $[V_i]$ auf, so seien immer V und W in $[V_i]$ enthalten.

Lemma 3.1. *Ist $V_\perp^H$ das orthogonale Komplement von V^H in V, so gibt es eine NH-Abbildung $b_H: SV_\perp^H \to SW_\perp^H$.*

Beweis. Man konstruiert b_H durch Induktion über die auf $SV_\perp^H$ auftretenden Orbittypen. Die auftretenden Obstruktionen verschwinden wegen $|V_\perp^H| = |W_\perp^H|$ [vgl. [8], Beweis von Theorem (3.2)]. □

Korollar 3.2. *Es gibt eine eigentliche NH-Abbildung $b_H: V_\perp^H \to W_\perp^H$.*

Beweis. Man setzt das b_H aus Lemma (3.1) radial fort. Ist $V=W$, so soll b_H natürlich immer als Identität gewählt werden. □

Es sei zunächst M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit trivialer G-Operation und Y^+ ein beliebiger G-Raum mit separatem Grundpunkt. Ich will eine natürliche Transformation

$$E_H: [S^{V^H}/S^{\bar{V}^H} \wedge M \,|\, S^{W^H} \wedge Y^{H+}]_0^{WH} \to [S^V \wedge M \,|\, S^W \wedge Y^+]_0^G$$

konstruieren. Da WH auf $S^{V^H}/S^{\bar{V}^H} \wedge M$ außerhalb des Grundpunktes frei operiert, kann man nach Satz (1.4) aus [6] eine NH Abbildung $f: S^{V^H}/S^{\bar{V}^H} \wedge M \to S^{W^H} \wedge Y^{H+}$ transversal zu $0 \times Y^H \hookrightarrow S^{W^H} \wedge Y^{H+}$ machen. Ich benutze hier den Transversalitätssatz in der Version aus ([2], S. 34), der im Bildraum nicht die Differenzierbarkeit der Basis des Thomraumes voraussetzt. Man setzt $F_H = f^{-1}(0 \times Y^H)$. Weiter ist f ohne Einschränkung auf dem Normalbündel $\nu(F_H; V^H \times M)$ von F_H in $V^H \times M$ linear. Man erweitert nun die NH-Abbildung f zu einer G-Abbildung $f_1: G\cdot(S^{V^H} \wedge M) \to S^W \wedge Y^+$; indem man $f_1(g,v,m) = g\cdot f(v,m)$ setzt, und schreibt dann $F_{(H)} = G\cdot F_H = G \times_{NH} F_H$.

Das Normalenbündel von $F_{(H)}$ in $V \times M$ sei $\nu(F_{(H)}; V \times M)$. Nach Konstruktion ist f_1 auf $\nu(F_{(H)}; V \times M)^H$ linear. Auf dem orthogonalen Komplement erhält man durch die folgende Zusammensetzung eine NH-Abbildung $f_\perp: \nu(F_{(H)}; V \times M)_\perp^H \hookrightarrow F_H \times V_\perp^H \xrightarrow{b_H} W_\perp^H$. Hierbei ist b_H die Abbildung aus Korollar (3.2). Durch Fortsetzung auf die direkte Summe erhält man aus f_1 und $f_\perp$ eine eigentliche NH-Abbildung $f_2: \nu(F_{(H)}; V \times M)|F_H \to W \times Y$ und erweitert f_2 zu einer G-Abbildung $f_3: \nu(F_{(H)}; V \times M) = G \times_{NH} \nu(F_{(H)}; V \times M)|F_H \to W \times Y$. Indem man alles außerhalb von $\nu(F_{(H)}; V \times M)$ auf den Grundpunkt abbildet, erweitert man f_3 zu einer G-Abbildung $E_H(f): S^V \wedge M \to S^W \wedge Y^+$. Nach Konstruktion gilt $E_H(f)^H = f$. Man ordnet die Standuntergruppen aus $F(V)$ durch $(H_0) < (H_1) < \ldots < (H_n)$, so daß $j<i$ gilt, falls H_i subkonjugiert zu H_j ist.

Ist $\overline{\prod}_{(H)\in F(V)} [\ ]$ das *mengentheoretische schwache Produkt* der betreffenden Homotopiemengen, so konstruiert man induktiv eine natürliche Transformation

$$E = (E_H): \overline{\prod_{(H)\in F(V)}} [S^{V^H}/S^{\bar{V}^H} \wedge M \,|\, S^{W^H} \wedge Y^{H+}]_0^{WH} \to [S^V \wedge M \,|\, S^W \wedge Y^+]_0^G$$

durch die folgenden Vorschriften:

(i) $E|[S^{VH_0}\wedge M|S^{WH_0}\wedge Y^{H_0+}]_0^{WH_0}=E_{H_0}$;

(ii) Ist $E(f_0,f_1,\ldots,f_i): S^V\wedge M\to S^W\wedge Y^+$ konstruiert, so daß nach Konstruktion $E(f_0,\ldots,f_i)$ außerhalb einer passend kleinen Umgebung von $\bigcup_{r=0}^{i}(S^{VH_r}\wedge M)$ die konstante Abbildung ist, so sei diese Umgebung so klein gewählt, daß die zu f_{i+1} gehörige Tubenumgebung $\nu(F_{(H_{i+1})}; V\times M)$ ganz im Komplement liegt.

$E(f_0,\ldots,f_i,f_{i+1})$ entsteht, indem man die Abbildung $E(f_0,\ldots,f_i)$ auf $\nu(F_{(H)}; V\times M)$ durch $E_{H_{i+1}}(f_{i+1})$ ersetzt.

Bemerkung 3.3. Die obigen Homotopiemengen sind Gruppen, falls V einen trivialen Summanden enthält. In diesem Fall ist das mengentheoretische Produkt als direkte Summe aufzufassen und E ist ein natürlicher Homomorphismus.

Satz 3.4. *Sind V und W orthogonale G-Darstellungen und gilt für alle $H<G|V^H|=|W^H|$, so liefert*

$$E:\ \overline{\prod_{(H)\in F(V)}}[S^{V^H}/S^{\bar{V}^H}\wedge M|S^{W^H}\wedge Y^{H+}]_0^{WH}\to[S^V\wedge M|S^W\wedge Y^+]_0^G$$

einen in der trivialen G-Mannigfaltigkeit M und in dem G-Raum Y natürlichen Isomorphismus.

Beweis. a) Surjektivität: Ist $f_0: S^V\wedge M\to S^W\wedge Y^+$ gegeben, so soll f_0 in eine bestimmte Normalform gebracht werden. Zunächst ist ohne Einschränkung $f_0^{H_0}$ transversal zu $0\times Y^{H_0}\subset S^{WH_0}\wedge Y^{H_0+}$ mit dem Urbild F_0. Wählt man die zur Konstruktion von $E(f_0^{H_0})$ benötigte Tubenumgebung passend klein, so ist die durch f_0 gegebene Erweiterung von $f_0^{H_0}$ auf dieser Tubenumgebung G-homotop zu $E(f_0^{H_0})$. Man erhält dann eine G-Abbildung f_1, indem man f_0 auf dieser Tubenumgebung durch die konstante Abbildung $\circ$ ersetzt. f_1 ist auf $S^{VH_0}\wedge M$ konstant. Man wiederholt nun dieselbe Konstruktion mit f_1 und H_1 usw. Induktiv erhält man also Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ und es gibt nach Konstruktion

$$f_0=E(f_0^{H_0}, f_1^{H_1},\ldots,f_n^{H_n}).$$

b) Injektivität: Ist $T: S^V\wedge M\times I\to S^W\wedge Y^+$ eine G-Homotopie zwischen $E(f_0,f_1,\ldots,f_n)$ und $E(g_0,g_1,\ldots,g_n)$, so bringt man diese Homotopie relativ zu den Enden in die Normalform aus Teil a). Es folgt, daß T relativ zu den Enden homotop zu $E(T_0,T_1,\ldots,T_n)$ ist; wobei die T_i nun WH_i-Homotopien zwischen f_i und g_i sind. □

Bemerkung 3.5. a) Man erhält dieselbe Zerspaltung, falls man die Mannigfaltigkeit M durch einen CW-Komplex mit trivialer Operation ersetzt. Die hierzu nötigen kategoriellen Tatsachen über Kanerweiterungen von Funktoren findet man in [1], S. 32f.

b) Auch falls der Grundpunkt in Y nicht separiert liegt, erhält man dasselbe Ergebnis. Man hat in diesem Fall mit Thomräumen über Paaren zu arbeiten; ich habe dies unterlassen, um die Bezeichnungen übersichtlich zu halten.

Faßt man $[S^V\wedge X|S^W\wedge Y]_0^G$ bzw. $[S^{V^H}/S^{\bar{V}^H}\wedge X|S^{W^H}\wedge Y^H]_0^{WH}$ als halbexakten Funktor in X auf, so läßt sich die natürliche Transformation E aus Satz 3.4

realisieren durch eine stetige Abbildung

$$E:\overline{\prod_{(H)\in F(V)}}\{S^{V^H}/S^{\bar{V}^H}|S^{W^H}\wedge Y^H\}_0^{WH}\to\{S^V|S^W\wedge Y\}_0^G$$

der diese Funktoren darstellenden Räume.

Korollar 3.6. *Die Abbildung*

$$\bar{E}:\overline{\prod_{(H)\in F(V)}}\{S^{V^H}/S^{\bar{V}^H}|S^{W^H}\wedge Y^H\}_0^{WH}\to\{S^V|S^W\wedge Y\}_0^G$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Man verwendet Satz 3.4, um zu zeigen, daß E für die dargestellten Funktoren isomorph ist; und daß die Abbildungsräume vom Homotopietyp eines CW-Komplexes sind. □

Da E mit Einhängungen verträglich ist, erhält man einen natürlichen Zerspaltungsisomorphismus

$$E:\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}\overline{\prod_{(H)\in F(V_j)}}[S^{V_j^H\times V^H}/S^{\overline{V_j\times V}^H}\wedge X|S^{V_j^H\times W^H}\wedge Y^H]_0^{WH}$$
$$\xrightarrow{\cong}\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}[S^{V_j\times V}\wedge X|\,S^{V_j\times W}\wedge Y]_0^G.$$

Korollar 3.7. *Man hat eine Homotopieäquivalenz*

$$\bar{E}:\overline{\prod_{(H)\in F[V_j]}}\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}\{S^{V_j^H\times V^H}/S^{\overline{V_j\times V}^H}|S^{V_j^H\times W^H}\wedge Y^H\}_0^{WH}$$
$$\to\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}\{S^{V_j\times V}|S^{V_j\times W}\wedge Y\}_0^G.\quad\square$$

Da WH auf $S^{V_j^H\times V^H}\setminus S^{\overline{V_j\times V}^H}$ frei operiert, induziert die klassifizierende Abbildung eine natürliche Transformation

$$K_H:\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}[S^{V_j^H\times V^H}/S^{\overline{V_j\times V}^H}\wedge X|S^{V_j^H\times W^H}\wedge Y^H]_0^{WH}$$
$$\to\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}[S^{V_j^H\times V^H}\wedge X|S^{V_j^H\times W^H}\wedge Y^H\wedge EWH^+]_0^{WH}.$$

Lemma 3.8. *Die Abbildung K_H ist ein Isomorphismus falls G trivial auf X operiert und K_H ist induziert von einer Homotopieäquivalenz*

$$\bar{K}_H:\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}\{S^{V_j^H\times V^H}/S^{\overline{V_j\times V}^H}|S^{V_j^H\times W^H}\wedge Y^H\}_0^{WH}$$
$$\to\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}\{S^{V_j^H\times V^H}|S^{V_j^H\times W^H}\wedge Y^H\wedge EWH^-\}_0^{WH}.$$

Beweis. Die Isomorphie von K_H folgt aus der universellen Eigenschaft von EWH für freie WH-Räume; die Homotopieäquivalenz $\bar{K}_H$ ergibt sich aus K_H. □

Es soll nun untersucht werden, wie weit

$$\operatorname*{Kolim}_{[V_j]}[S^{V_j^H\times V^H}\wedge X|S^{V_j^H}\wedge S^{W^H}\wedge Y^H\wedge EWH^+]_0^{WH}\quad\text{von}\quad V^H\;-W^H$$

abhängt.

Definition 3.9. Wählt man auf den Darstellungen V und W Orientierungen, so sagt man, daß V und W dasselbe Orientierungsverhalten haben, falls $g\in G$ auf V genau dann die Orientierung erhält (umgekehrt), falls g die Orientierung auf W erhält (umgekehrt).

Komplexe Darstellungen haben dasselbe Orientierungsverhalten. Nach [16], Satz 2.25 haben zwei Darstellungen V und W mit $|V^H| = |W^H|$ dasselbe Orientierungsverhalten. Haben V^H und W^H dasselbe Orientierungsverhalten, so gibt es nach [16], Theorem 3.20 für passend große V_j eine NH-Abbildung $r_H : S^{V_j^H \times W^H} \to S^{V_j^H \times V^H}$ vom Grade 1. Damit erhält man eine WH-Homotopieäquivalenz

$$R_H = r_H \times \mathrm{id} : S^{V_j^H \times W^H} \wedge EWH^+ \to S^{V_j^H \times V^H} \wedge EWH^+ .$$

Korollar 3.10. *Sind V und W zwei G-Darstellungen mit $|V^H| = |W^H|$, so hat man natürliche Isomorphismen*

$$R_H : [S^{V_j^H \times V^H} \wedge X | S^{V_j^H \times W^H} \wedge Y^H \wedge EWH^+]_0^{WH}$$
$$\to [S^{V_j^H \times V^H} \wedge X | S^{V_j^H \times V^H} \wedge Y^H \wedge EWH^+]_0^{WH}$$

und

$$\bar{R}_H : \{S^{V_j^H \times V^H} | S^{V_j^H \times W^H} \wedge Y^H \wedge EWH^+\}_0^{WH}$$
$$\to \{S^{V_j^H \times V^H} | S^{V_j^H \times V^H} \wedge Y^H \wedge EWH^+\}_0^{WH}. \quad \square$$

Da G auf $S^V / S^{\bar{V}} \setminus \infty$ frei operiert, kann man die Homotopiemengen $[S^V / S^{\bar{V}} \wedge X | S^W \wedge Y]_0^G = [S^V \wedge X | S^W \wedge Y \wedge EG^+]_0^G$ in Homotopiemengen von nicht äquivarianten punktierten Schnitten umschreiben. Ich beschränke mich auf den stabilen Fall, da sich hier ein übersichtliches Ergebnis ergibt.

Wegen Korollar 3.10 genügt es, den Fall $V = W$ zu betrachten. Für die kompakte Liegruppe G bezeichne LG die Liealgebra von G. Da G nun frei auf $S^V \setminus \bar{S}^V$ operiert, liefert die Transferkonstruktion aus [20] eine natürliche Abbildung

$$\bar{\lambda} : \operatorname*{Kolim}_{V} \{S^V / \bar{S}^V | S^V \wedge Y\}_0^G = \operatorname*{Kolim}_{V} \{S^V | S^V \wedge EG^+ \wedge Y\}_0^G$$
$$\to \operatorname*{Kolim}_{n \in \mathbb{N}} \{S^n | S^n \wedge EG^+ \wedge_G S^{LG}\} .$$

Satz 3.11. *Die Abbildung $\bar{\lambda}$ ist eine Homotopieäquivalenz und $\bar{\lambda}$ induziert für einen trivialen G-Raum X einen Isomorphismus*

$$\lambda : \pi_G^0(X | EG^+ \wedge Y) \to \pi_{st}^0(X | (EG^+ \wedge Y) \wedge_G S^{LG}) .$$

Beweis. Dieser Satz ist mit geringen beweistechnischen Modifikationen gerade das Theorem 6.6 aus [20]. $\square$

Bemerkung 3.12. Da G frei auf $S^V \setminus \bar{S}^V$ operiert, gilt ein äquivarianter Transversalitätssatz und man erhält leicht eine geometrische Beschreibung von λ. Man stellt sich hierzu $\pi_G^0(X | EG^+ \wedge Y)$ als äquivariante Kobordismentheorie von freien G-Mannigfaltigkeiten über X mit gewisser Zusatzstruktur dar. Dividiert man die freie G-Operation aus, so erhält man eine nicht äquivariante Kobordismentheorie. Die Pontrjagin-Thom Konstruktion zeigt dann, daß diese Theorie isomorph zu $\pi_{st}^0(X | (EG^+ \wedge Y) \wedge_G S^{LG})$ ist. $\square$

Korollar 3.13. *Man hat eine Homotopieäquivalenz*

$$\bar{E} : \prod_{(H) \in F(G)} \operatorname*{Kolim}_{n \in \mathbb{N}} \{S^n | S^n \wedge (EWH^+ \wedge Y^H) \wedge_{WH} S^{LWH}\}_0 \to \operatorname*{Kolim}_{V} \{S^V | S^V \wedge Y\}_0^G .$$

Diese Homotopieäquivalenz induziert für einen trivialen G-Raum X einen Zerspaltungsisomorphismus

$$E: \prod_{(H)\in F(G)} \pi^0_{st}(X|(EWH^+ \wedge Y^H) \wedge_{WH} S^{LWH}) \to \pi^0_G(X|Y).$$

Beweis. Man verwendet nacheinander die Homotopieäquivalenz aus Korollar 3.7 und Satz 3.11. □

4. G-Abbildungen zwischen Darstellungssphären

In diesem Abschnitt seien V und W weiter zwei G-Darstellungen mit $|V^H| = |W^H|$ für alle $H < G$. Es sollen die Ergebnisse aus Abschnitt 3 zur Berechnung von $[SV|SW]^G$ benutzt werden. Die Obstruktionstheorie erlaubt dann in diesem Fall eine explizite Berechnung der in der Zerspaltung aus Satz 3.4 auftretenden Homotopiemengen.

Die Anordnung $(H_0) < (H_1) < \ldots < (H_n)$ der auf SV auftretenden Orbittypen sei wie in Abschnitt 3 gewählt. Da WH auf $SV^{H_r} \setminus \overline{SV}^{H_r}$ frei operiert, hat man eine singuläre Faserung

$$p_r: (SV^{H_r}, \overline{SV}^{H_r}) \times_{WH_r} SW^{H_r} \to SV^{H_r}/WH_r, \overline{SV}^{H_r}/WH_r.$$

Ist $v_r = |SV^{H_r}|$; $\underline{\pi}_{v_r}(SW^{H_r})$ das durch die v_r-te Homotopiegruppe und p_r gegebene lokale Koeffizientensystem und $H^{v_r}[-|\underline{\pi}_{v_r}(-)]$ die zugehörige lokale Kohomologie, so liefert die Obstruktionstheorie das folgende

Lemma 4.1. *Ist* $f: \bigcup_{i=0}^{r-1} SV^{(H_i)} \to SW$ *eine G-Abbildung, so entsprechen die G-Homotopieklassen von Erweiterung von f auf* $\bigcup_{i=0}^{r} SV^{(H_i)}$ *den Differenzkozykeln*

$$\Delta(g,f) \in H^{v_r}[SV^{H_r}/WH_r, \overline{SV}^{H_r}/WH_r | \underline{\pi}_{v_r}(SW^{H_r})]. \quad \square$$

Ist $v_r = 0$, so sei die Kohomologiegruppe so definiert, daß Lemma 4.1 richtig bleibt.

Man unterscheidet nun die folgenden Fälle:

1. $V = \mathbb{R}^2 \times V_1$; $W = \mathbb{R}^2 \times W_1$: Es folgt sofort

$$[SV|SW]^G = [S^{\mathbb{R}\times V_1}|S^{\mathbb{R}\times W_1}]^G_0 \overset{(3.4)}{\cong} \prod_{r=0}^{n} [S^{\mathbb{R}\times V_1^{H_r}}/S^{\overline{\mathbb{R}\times V}_1^{H_r}}|S^{\mathbb{R}\times W_1^{H_r}}]_0^{WH_r}$$

$$\xrightarrow[\cong]{(4.1)} \prod_{r=0}^{n} H^{v_r}[SV^{H_r}/WH_r, \overline{SV}^{H_r}/WH_r | \underline{\pi}_{v_r}(SW^{H_r})].$$

2. $V = \mathbb{R}^1 \times V_1$; $W = \mathbb{R}^1 \times W_1$ mit $V_1^G = 0$: Man hat die Grundpunkte 0 und 1 in $SV^G = S^0$. Es bezeichne $[S^{V_1}|S^{W_1}]^G_0$ bzw. $[S^{V_1}|S^{W_1}]^G_1$ die Homotopieklassen von G-Abbildungen, die den Grundpunkt 0 fest lassen bzw. in 1 abbilden.

Weiter hat man einen Isomorphismus $\sigma = -\mathrm{id} \times \mathrm{id}: \mathbb{R}^1 \times V_1 \to \mathbb{R}^1 \times V_1$, welcher auf S^{V_1} die Fixpunkte vertauscht, also einen Isomorphismus von $[S^{V_1}|S^{W_1}]^G_0$ und $[S^{V_1}|S^{W_1}]^G_1$ liefert. Es folgt

$$[SV|SW]^G \cong [S^{V_1}|S^{W_1}]^G \cong [S^{V_1}|S^{W_1}]^G_0 \sqcup [S^{V_1}|S^{W_1}]^G_1$$

$$= \{0 \cup 1\} \times [S^{V_1}|S^{W_1}]^G_0 = \{0 \cup 1\} \times \prod_{r=0}^{n} [S^{V_1^{H_r}}/S^{\overline{V}_1^{H_r}}|S^{W_1^{H_r}}]_0^{WH_r}$$

$$\cong \{0 \cup 1\} \times \prod_{r=0}^{n} H^{v_r}[S^{V_1^{H_r}}/WH_r, S^{\overline{V}_1^{H_r}}/WH_r | \pi_{v_r}(S^{W_1^{H_r}})].$$

3. $V^G = W^G = 0$: Die nicht reduzierte Einhängung Σ mit den Grundpunkten 0 und 1 liefert eine Abbildung

$$\begin{aligned} S:[SV|SW]^G &\to [\Sigma SV, 0 \cup 1 | \Sigma SW]^G_{\mathrm{id}} \\ &\cong \mathrm{id}_G \times \prod_{r=0}^{n} [\Sigma SV^{H_r} / \overline{\Sigma SV}^{H_r} | \Sigma SW^{H_r}]^{WH_r}_0 \\ &\cong \mathrm{id}_G \times \prod_{r=0}^{n} H^{v_r+1}[\Sigma SV^{H_r}/WH_r, \overline{\Sigma SV}^{H_r}/WH_r | \underline{\pi}_{v_r+1}(\Sigma SW^{H_r})] . \end{aligned}$$

(Der nur aus einem Element id_G bestehende Faktor wird mitgeschleppt, um anzudeuten, daß alle Abbildungen auf der G-Fixpunktmenge die Identität liefern.)

Lemma 4.2. *Die Abbildung S ist injektiv; ist $v_i \neq 0$, so liegt der zu (H_i) gehörige Faktor ganz im Bild von S, ist $v_i = 0$, so ist das Bild in dem zu (H_i) gehörigen Faktor*

$$H^0[SV^{H_i}/WH_i | \underline{\pi}_0(SW^{H_i})] \hookrightarrow H^1[\Sigma SV^{H_i}/WH_i, 0 \cup 1 | \underline{\pi}_1(\Sigma SW^{H_i})] .$$

Beweis. Angenommen es gibt $f \neq g$ mit $Sf = Sg$. Sei i minimal gewählt, so daß f^{H_i} nicht WH_i-homotop zu g^{H_i} ist. Man erhält nach Lemma 4.1 einen Differenzkozykel

$$\Delta(f^{H_i}, g^{H_i}) \in H^{v_i}[SV^{H_i}/WH_i, \overline{SV}^{H_i}/WH_i | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})] .$$

Ist $v_i = 0$, so folgt $SV^{H_i} = SW^{H_i} = S^0$, und man erkennt durch explizites Hinzeichnen der möglichen Fälle, daß S injektiv ist. Ist $v_i \neq 0$, so entspricht der Einhängungsabbildung S bei den Differenzkozykeln der Einhängungsisomorphismus in der Kohomologie. Wegen $\Delta(Sf^{H_i}, Sg^{H_i}) = 0$ folgt daher sofort der Widerspruch $\Delta(f^{H_i}, g^{H_i}) = 0$. □

Es bleibt $H^{v_i}[SV^{H_i}/WH_i, \overline{SV}^{H_i}/WH_i | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})$ weiter zu berechnen. Ist WH_i nicht endlich, so ist die Dimension von SV^{H_i}/WH_i kleiner als v_i und die obige Kohomologiegruppe verschwindet. Ist $v_i = 0$, so ist $\overline{SV}^{H_i} = \emptyset$ und eine triviale Überlegung ergibt, daß $H^0[SV^{H_i}/WH_i | \underline{\pi}_0(SW^{H_i})]$ für jede Zusammenhangskomponente von SV^{H_i}/WH_i aus einer zweipunktigen Menge besteht. Allgemein verdickt man nun $\overline{SV}^{H_i}/WH_i$ durch eine verallgemeinerte Tubenumgebung und schneidet dann das Innere dieser Tubenumgebung aus. Man erhält somit eine disjunkte Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{K_i} (M^i_j, \partial M^i_j)$ von v_i-dimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten M^i_j mit Rand. Die Anzahl K_i ist gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von SV_{H_i}/WH_i. Es bleibt $H^{v_i}[M^i_j, \partial M^i_j | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})]$ zu berechnen.

Wegen Satz 2.25 aus [16] haben V und W dasselbe G-Orientierungsverhalten und damit haben die in SV über M^i_j liegende freie WH_i-Mannigfaltigkeit $\bar{M}^i_j$ und SW^{H_i} dasselbe WH_i-Orientierungsverhalten.

Satz 4.3. *Ist M eine v_i-dimensionale orientierbare freie WH_i-Mannigfaltigkeit, ist M/WH_i zusammenhängend und haben M und SW^{H_i} dasselbe Orientierungsverhalten, so gilt*

$$H^{v_i}[M/WH_i, \partial M/WH_i | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})] \cong \mathbb{Z} .$$

Beweis. Das lokale Koeffizientensystem $\underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i}) \equiv M \times_{WH_i} \pi_{v_i}(SW^{H_i}) \to M/WH_i$ hat als charakteristische Abbildung die Zusammensetzung

$$\chi : \pi_1(M/WH_i) \to WH_i \to \mathrm{Aut}(\pi_{v_i}(SW^{H_i})) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 .$$

Nach [18], (2.1) und (2.2) berechnet sich $H^{v_i}[M/WH_i, \partial M/WH_i | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})]$ in der folgenden Weise: Zunächst unterteilt man $\pi_1(M/WH_i) = \pi_1^+ \sqcup \pi_1^-$ in die orientierungserhaltenden und orientierungsumkehrenden Wege. Ist $A \subset \mathbb{Z}$ der von den Elementen

$$\{(z - \chi(\omega^+)(z));\ (z + \chi(\omega^-)(z)) | z \in \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i});\ \omega^\pm \in \pi_1^\pm\}$$

erzeugte Untermodul, so gilt $H^{v_i}[M/WH_i, \partial M/WH_i | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})] = \mathbb{Z}/A$. Die Voraussetzung über das Orientierungsverhalten liefert, daß $\chi(\omega^+) = 1$ und $\chi(\omega^-) = -1$. Hiermit folgt $A = 0$. □

Ist $p_j^i : \bar{M}_j^i \to \bar{M}_j^i / WH_i = M_j^i$ die Projektion, so ist $(p_j^i)^*(\underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i}))$ das triviale Koeffizientensystem $\bar{M}_j^i \times \mathbb{Z}$; denn ein über sich selbst induziertes Prinzipalbündel ist trivial. Die Projektion p_j^i induziert einen Homomorphismus

$$p_j^{i*} : H^{v_i}[M_j^i, \partial M_j^i | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})] \to H^{v_i}[\bar{M}_j^i, \partial \bar{M}_j^i | \mathbb{Z}].$$

Die Abbildung p_j^{i*} führt den Differenzkozykel der zu den WH-Abbildungen f^{H_i} und g^{H_i} gehörigen Schnitte in den zu f^{H_i} und g^{H_i} gehörigen Differenzkozykel über.

Satz 4.4. *Die Abbildung*

$$p_j^{i*} : H^{v_i}[M_j^i, \partial M_j^i | \underline{\pi}_{v_i}(SW^{H_i})] \to H^{v_i}[\bar{M}_j^i, \partial \bar{M}_j^i | \mathbb{Z}] \quad \textit{ist injektiv.}$$

Beweis. Da WH_i endlich ist, existiert ein Transfer p_{j*}^i und $p_{j*}^i\, p_j^{i*}$ ist die Multiplikation mit der Ordnung von WH_i. Da nach Satz 4.3 der Urbildbereich torsionsfrei ist, folgt die Behauptung. □

Wählt man für jedes H_i auf SV^{H_i} und SW^{H_i} Orientierungen, so erhält man eine Abbildung

$$\varphi = (\varphi_{H_i}) : [SV | SW]^G \to \prod_{i=0}^{n} \mathbb{Z},$$

indem man $\varphi_{H_i}(f) =$ Abbildungsgrad von f^{H_i} setzt.

Satz 4.5. *Seien V und W zwei G-Darstellungen mit $|V^H| = |W^H|$ für alle $H < G$.*

a) *Durchläuft $\{H_i\}_{i=0}^n$ die auf SV auftretenden Orbittypen, für die WH_i endlich ist, und durchläuft für festes i $\{M_j^i\}_{j=1}^{K_i}$ die Komponenten von $(SV)_{H_i}/WH_i$, so sei $A(V, W) = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{K_i} \mathbb{Z}_j^i$, wobei $\mathbb{Z}_j^i$ eine zweipunktige Menge sei, falls die Komponente M_j^i eine endliche Menge ist, und $\mathbb{Z}_j^i = \mathbb{Z}$ sonst. Man hat dann einen Isomorphismus*

$$E : [SV | SW]^G \to A(V, W).$$

b) *Ist für die auf SV auftretenden $\{H_i\}_{i=0}^n$, für die WH_i endlich ist, die Kodimension von $\overline{SV}^{H_i}$ in SV^{H_i} größer als 1, so ist $\varphi = (\varphi_{H_i}) : [SV | SW]^G \to \prod_{i=0}^{n} \mathbb{Z}$ injektiv.*

c) *Ist $[V_j]$ ein additiv abgeschlossenes System von G-Darstellungen mit $V \in [V_j]$, $W \in [V_j]$ und durchläuft (H_i) alle Orbittypen aus $F[V_j]$, für die WH_i endlich ist, so ist*

$$\varphi = (\varphi_{H_i}) : \operatorname*{Kolim}_{[V_j]} [S(V_j \times V) | S(V_j \times W)]^G \to \prod_{(H_i)} \mathbb{Z} \quad \textit{injektiv.}$$

Beweis. Teil a) folgt aus den vorangehenden Bemerkungen, Lemma 4.2 und Satz 4.3.

Zu Teil b) bemerkt man zunächst, daß alle Fixpunktmengen SV^H eine Dimension >1 haben; denn nach Voraussetzung hat die leere Menge mit der Dimension -1 in SV^H eine Kodimension >1. Nach Lemma 4.2 kann man ohne Einschränkung einen Grundpunkt voraussetzen. Nun ist die Zusammensetzung

$$l_r: H^{v_r}[M^r, \partial M^r | \underline{\pi}_{v_r}(SW^{H_r})]$$

$$= H^{v_r}[SV^{H_r}/WH_r, \overline{SV}^{H_r}/WH_r | \underline{\pi}_{v_r}(SW^{H_r})] \underset{p^*}{\rightarrow} H^{v_r}[SV^{H_r}, \overline{SV}^{H_r} | \mathbb{Z}] \rightarrow H^{v_r}[SV^{H_r} | \mathbb{Z}]$$

nach Satz 4.4 und wegen der Kodimensionsvoraussetzung injektiv.

Ist für $f: SV \rightarrow SW$ nun $f = E(f_{H_0}, f_{H_1}, \ldots, f_{H_n})$ die Produktzerlegung, so war

$$\Delta_{H_r}(f) \in H^{v_r}[SV^{H_r}/WH_r, \overline{SV}^{H_r}/WH_r | \underline{\pi}_{v_r}(SW^{H_r})]$$

der Differenzkozykel zwischen dem zu f_{H_r} gehörigen Schnitt und dem konstanten Schnitt; $l_r(\Delta_{H_r}(f))$ ist der Differenzkozykel zwischen f_{H_r} und der konstanten Abbildung, also gerade der Grad von f_{H_r}. Zum Beweis von Teil b) hat man wegen der Injektivität von l_r also zu zeigen, daß aus $\varphi(f) = \varphi(g)$ folgt $\mathrm{Grad}(f_{H_i}) = \mathrm{Grad}(g_{H_i})$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Wegen $\varphi_{H_0}(f) = \mathrm{Grad}(f^{H_0}) = \mathrm{Grad}(f_{H_0}) = \varphi_{H_0}(g) = \mathrm{Grad}(g_{H_0})$ folgt die Behauptung für $i = 0$. Hiermit sind $E(f_{H_0}, 0, \ldots, 0)$ und $E(g_{H_0}, 0, \ldots, 0)$ G-homotop. Es folgt $\varphi(E(0, f_{H_1}, \ldots, f_{H_n})) = \varphi(E(0, g_{H_1}, \ldots, g_{H_n}))$ und somit $\mathrm{Grad}(E(0, f_{H_1}, \ldots, f_{H_n}))^{H_1} = \mathrm{Grad}(f_{H_1}) = \mathrm{Grad}(E(0, g_{H_1}, \ldots, g_{H_n}))^{H_1} = \mathrm{Grad}(g_{H_1})$. In dieser Weise induktiv fortfahrend folgt die Behauptung. Teil c) folgt aus Teil b); denn wegen $V \in [V_j]$ ist für passend großes V_j die Kodimension von $(\overline{V_j \times V})^H$ in $(V_j \times V)^H$ größer als 1. □

Bemerkung 4.6. a) Satz 4.5a liefert für $V = W$ das Hauptergebnis aus [9].

b) Satz 4.5.c wurde für komplexe Darstellungen in [8] bewiesen.

c) In [17] wurde gezeigt, daß $\varphi = (\varphi_H)$ instabil in obiger Situation immer injektiv ist; dies ist offensichtlich falsch.

d) Gilt nicht mehr $|V^H| = |W^H|$, sondern nur noch $|V^H| \leqq |W^H|$, so bleiben alle Ergebnisse dieses Abschnittes richtig, sofern für alle $H \in F(V)$, für die WH endlich ist und für die $|V^H| = |W^H|$ gilt, V^H und W^H dasselbe WH-Orientierungsverhalten haben. Hat für ein H V^H nicht dasselbe WH-Orientierungsverhalten wie W^H, so wird die Kohomologiegruppe aus Satz 4.3 eine Torsionsgruppe und Satz 4.4 wird falsch. Satz 4.5a bleibt richtig indem man für die H, für die V^H und W^H nicht dasselbe Orientierungsverhalten haben, den Faktor $\mathbb{Z}$ durch die Torsionsgruppe ersetzt. Satz 4.5b wird natürlich falsch.

5. Äquivariante Konfigurationsräume

In diesem Abschnitt sei G eine endliche Gruppe und $[V_i]$ ein festes System von G-Darstellungen, welches alle irreduziblen enthält. Ist $\underline{n}$ die n-punktige Menge, $S(n)$ die zugehörige symmetrische Gruppe und V eine G-Darstellung, so sei $E(n, V)$ der Raum der Einbettungen von $\underline{n}$ in V. Durch die G-Operation auf V erbt $E(n, V)$ eine G-Operation; die Permutationsoperation auf $\underline{n}$ liefert daher ein G-äquivariantes $S(n)$-Prinzipalbündel $p_V: E(n, V) \rightarrow E(n, V)/S(n) = B(n, V)$. Die Inklusion $V \rightarrow V \times W$ induziert eine G-Abbildung $E(n, V) \rightarrow E(n, V \times W)$; bildet man den Kolimes über alle Darstellungen aus dem System $[V_i]$, so erhält man einen Raum $E(n, G)$

$= \operatorname*{Kolim}_{[V_i]} E(n, V)$. Ist N eine endliche G-Menge, so sei $E(N, V)$ der Raum der G-Einbettungen $e: N \rightarrow V$.

Die Inklusion $V \hookrightarrow V \times W$ liefert dann eine Abbildung $E(N, V) \to E(N, V \times W)$. Im Kolimes erhält man $E(N) = \underset{[V_i]}{\mathrm{Kolim}}\, E(N, V)$.

Lemma 5.1. *Sind N und $[V_i]$ wie oben gegeben, so liefert die freie Operation der G-Automorphismengruppe $A(N)$ von N auf $E(N)$ ein universelles $A(N)$-Prinzipalbündel*

$$q: E(N) \to E(N)/A(N) = B(N).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $E(N)$ zusammenziehbar ist. Sind nun $f, f': S^n \to E(N)$ zwei Abbildungen, welche vermöge Adjunktion durch die G-Abbildungen $\bar{f}, \bar{f}': S^n \times N \to V$ repräsentiert seien, so gibt es wegen des G-Einbettungssatzes für passend großes $V \in [V_i]$ zwischen $\bar{f}$ und $\bar{f}'$ eine Homotopie H_t, welche für festes $s \in S^n$ G-Einbettungen $H_t(s): N \hookrightarrow V$ liefert. □

Bemerkung 5.2. (i) Zerlegt man die endliche G-Menge N in ihre irreduziblen Bestandteile $N = \coprod_i n_i \cdot G/H_i$, so folgt $A(N) = \prod_i S(n_i) \int WH_i$, wobei "$\int$" das semidirekte Produkt von $S(n_i)$ mit $(WH_i)^{n_i}$ ist.

(ii) Es gilt $B(S(n) \int WH) = E(S(n)) \times_{S(n)} B(WH)^n$; denn $S(n) \int WH$ operiert frei auf $E(S(n)) \times E(WH)^n$ und der Quotient ist $E(S(n)) \times_{S(n)} B(WH)^n$.

Satz 5.3. *$p: E(n, G) \to B(n, G)$ ist ein universelles G-äquivariantes $S(n)$-Prinzipalbündel.*

Beweis. Ist $p: E \to B$ ein universelles G-äquivariantes $S(n)$-Prinzipalbündel, so hat man eine klassifizierende Abbildung $k: B(n, G) \to B$ und man rechnet explizit nach, daß k auf allen H-Fixpunktmengen Homotopieäquivalenzen k^H induziert; denn die jeweiligen H-Fixpunktmengen klassifizieren wegen Lemma 5.1 dieselben Bündel. Damit ist k dann eine G-Homotopieäquivalenz. □

Die übliche Transferkonstruktion liefert analog zu [11], S. 213 eine G-Abbildung

$$T: \coprod_{n \in \mathbb{N}} B(n, G) \to \underset{X}{\mathrm{Kolim}}\, \{S^X | S^X\}_0 .$$

(Hierbei durchläuft X alle G-Darstellungen aus $[V_i]$.)

Durchläuft N die Menge aller Isomorphieklassen endlicher G-Mengen, so induziert T auf der G-Fixpunktmenge die Abbildung

$$T^G: \coprod_N B(N) \to \underset{X}{\mathrm{Kolim}}\, \{S^X | S^X\}_0^G .$$

Nach [11], S. 213 ist $\coprod_{n \in \mathbb{N}} B(n, G)$ ein partielles Monoid; $B(-)$ sei der zugehörige klassifizierende Raum.

Satz 5.4. *Bezeichnet ΩX den Schleifenraum von X, so induziert T eine (schwache) G-Homotopieäquivalenz*

$$\bar{T}: \Omega B\Big(\coprod_{n \in \mathbb{N}} B(n, G)\Big) \to \underset{X}{\mathrm{Kolim}}\, \{S^X | S^X\}_0$$

und T^G induziert eine (schwache) Homotopieäquivalenz

$$\bar{T}^G: \Omega B\Big(\coprod_N B(N)\Big) \to \underset{X}{\mathrm{Kolim}}\, \{S^X | S^X\}_0^G .$$

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $\tilde{T}^H$ für alle $H < G$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Ich beschränke mich ohne Einschränkung hierzu auf den Fall $H = G$. Man erhält das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n\left[\Omega B\left(\coprod_N B(N)\right)\right] \arrow[rr, "T_*^G"] \arrow[d, "\cong"', "\text{Bemerkung 5.2}"] & & \pi_n\left[\operatorname{Kolim}_X \{S^X|S^X\}_0^G\right] \arrow[dd, "\cong"', "\text{Korollar 3.13}"] \\
\pi_n\left[\Omega B\left(\prod_{(H)\in F(G)}\coprod_{n\in\mathbb{N}} E(S(n))\times_{S(n)} B(WH)^n\right)\right] \arrow[d] & & \\
\prod_{(H)\in F(G)} \pi_n\left[\Omega B \coprod_{n\in\mathbb{N}} E(S(n))\times_{S(n)} B(WH)^n\right] \arrow[rr, "\Pi\tau"] & & \prod_{(H)\in F(G)} \pi_n^{st}(B(WH)^+).
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist τ die schwache Homotopieäquivalenz aus [11], Theorem 2. □

Bemerkung 5.5. (i) Man kann die ganze vorangehende Konstruktion durch einen G-Raum Y parametrisieren und erhält so eine G-Approximation von $\operatorname{Kolim}_X \{S^X | S^X \wedge Y\}_0$; ich habe nur den Fall $Y = S^0$ behandelt, um die Bezeichnungen nicht unnötig zu komplizieren.

(ii) Eine analoge Approximation für $\{S^V|S^V\}_0^G$ ist möglich, indem man die Zerspaltung E aus Satz 3.4 und an Stelle von Theorem 2 aus [11] die Ergebnisse aus [4] benutzt.

(iii) Es wäre wünschenswert, Satz 5.4 ohne die Zerspaltung aus § 3 direkt zu beweisen.

Ist $A_G(Y)$ der halbgruppenwertige halbexakte Funktor gegeben durch die Homotopieklassen endlicher G-äquivarianter Überlagerungen über Y, so liefert der Transfer einen Halbgruppenhomomorphismus $T: A_G(Y) \to \pi_G^0(Y^+)$.

Korollar 5.6 (Segal). *Der Halbgruppenhomomorphismus T ist universell, d.h. ist $h: A_G(Y) \to H(Y)$ ein Halbgruppenhomomorphismus in den gruppenwertigen halbexakten äquivarianten Funktor $H(Y)$, so existiert genau ein $\bar{h}: \pi_G^0(Y^+) \to H(Y)$ mit $\bar{h} \circ T = h$.*

Beweis. Man überträgt den Beweis aus [12], Theorem 4.1 unter Benutzung von Satz 5.4 auf den äquivarianten Fall. □

6. Die Segalschen Kohomotopieoperationen

Für den Raum B sei $\bigwedge_{i=1}^{n} B$ die n-fache Smashpotenz von B mit der kanonischen Operation der symmetrischen Gruppe $S(n)$. Weiter hat man eine $S(n)$-Abbildung $d: B \to \bigwedge_{i=1}^{n} B$ gegeben durch die Diagonale. Die n-fache Smashpotenz liefert eine natürliche Potenzoperation

$$P_n: \pi_{st}^0(B) \to \pi_{S(n)}^0\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B\right)$$

und die interne Operation $Q_n = d \circ P_n : \pi_{st}^0(B) \to \pi_{S(n)}^0(B)$. Für $(H) \in F(S(n))$ erhält man aus Korollar 3.13 eine Projektion

$$r_H : \pi_{S(n)}^0(B) \to \pi_{st}^0(B \mid BWH^+).$$

Satz 6.1. *Die Operation*

$$\theta_n^H = (r_H) \circ Q_n : \pi_{st}^0(B) \to \pi_{st}^0(B \mid BWH^+)$$

liefert für $H=1$ die Segalsche Operation θ_n aus [13].

Beweis. Ich muß hier auf den Beweis verzichten, da ich nicht die Definition aus [13] wiederholen will. Der wesentliche Beweisschritt wird geliefert durch das Diagramm aus dem Beweis von Satz 5.4; denn dort wird die Zerspaltung der Homotopiemengen aus Abschnitt 3, mit deren Hilfe ich die θ_n definiere, mit endlichen Mengen in Verbindung gebracht, mit deren Hilfe Segal seine Operationen θ_n definiert. □

Es sollen nun einige Verallgemeinerungen des Satzes von Kahn und Priddy behandelt werden. Hierzu sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und F eine Familie von Untergruppen von G mit dem klassifizierenden Raum EF. Ist X ein Raum mit trivialer G-Operation, so ist $\bigwedge_1^n X$ durch die Permutationsoperation in natürlicher Weise ein G-Raum und die Diagonale $d: X \to \bigwedge_1^n X$ ist G-äquivariant. Die Zerspaltung aus Satz 3.7 liefert eine natürliche Transformation $r_F : \pi_G^0(X) \to \pi_G^0(X \mid EF^+)$. Mit Hilfe der multiplikativen Induktion, der Diagonalen d und der Transformation r_F erhält man genau wie im Vorangehenden eine natürliche Transformation $\theta_F : \pi_{st}^0(X) \to \pi_G^0(X \mid EF^+)$.

Satz 6.2. *Ist X ein endlicher zusammenhängender punktierter CW-Komplex mit trivialer G-Operation und ist F_e die Familie aller echten Untergruppen von G, so ist die durch Vergessen der G-Operation gegebene natürliche Transformation $\varrho : \pi_G^0(X \mid EF_e^+) \to \pi_{st}^0(X)$ surjektiv.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\varrho \circ \theta_{F_e}$ auf $\pi_{st}^0(X)$ isomorph ist. Wegen der Natürlichkeit von $\varrho \circ \theta_{F_e}$ und dem Zusammenhang von X kann man sich auf den Fall $X = S^i$ mit $i \geqq 1$ beschränken. Die Abbildung r_{F_e} entsteht, indem man von einer G-Abbildung gerade den G-Fixpunktanteil abzieht. Die G-Fixpunktmenge in $\bigwedge_1^n S^i$ ist die Diagonale. Nach Konstruktion von r_{F_e} folgt nun $\varrho \circ \theta_{F_e}(f) = f^n - f$ für $f \in \pi_{st}^0(S^i)$. Wegen $i \geqq 1$ gilt $f^n = 0$. Hiermit folgt die Behauptung. □

Korollar 6.3 (Kahn, Priddy). *Ist X wie in Satz 6.2 gegeben und Z_p die zyklische Gruppe von Primzahlordnung p, so ist*

$$\varrho : \pi_{st}^0(X \mid BZ_p^+) \cong \pi_{Z_p}^0(X \mid EZ_p^+) \to \pi_{st}^0(X) \quad \textit{surjektiv.}$$

Beweis. Da die Familie F_e aller echten Untergruppen nur aus dem trivialen Element besteht, folgt $EF_e = EZ_p$ und damit aus Satz 6.2 die Behauptung. □

In [13] wird gezeigt, wie aus Korollar 6.3 folgt, daß $\tilde{\varrho} : \pi_{st}^0(X \mid BZ_p) \to \pi_{st}^0(X)$ surjektiv auf den p-primären Anteil ist.

Es wäre wünschenswert, das Bild von ϱ für allgemeinere Familien $F \subset F_e$ auszurechnen.

Bemerkung 6.4. Ist S eine beliebige kompakte Liegruppe und G wie bisher endlich, so läßt sich jeder S-Raum X in kanonischer Weise über die Projektion $S \times G \to S$ als $S \times G$-Raum auffassen. Der Raum $\bigwedge_1^n X$ ist in kanonischer Weise ein $S \times G$-Raum und die Diagonale $d: X \to \bigwedge_1^n X$ ist $S \times G$-äquivariant. Ist F die Familie aller Untergruppen von $S \times G$, deren Projektion eine *echte* Untergruppe in G liefert, so zeigt eine leichte Überlegung, daß die vorangehenden Betrachtungen alle auf die S-äquivariante Situation übertragbar sind. Man erhält also insbesondere die folgende S-äquivariante Version des Satzes von Kahn und Priddy: Ist X ein punktierter S-CW-Komplex, der aus Zellen vom Typ $S/K \times D^i$ mit $i \geqq 1$ aufgebaut ist, so ist die Restriktionsabbildung

$$\varrho: \pi^0_{S \times G}(X | EF^+) \to \pi^0_S(X) \quad \text{surjektiv; insbesondere ist}$$

$$\varrho: \pi^0_{S \times Z_p}(X | EF^+) = \pi^0_{S \times Z_p}(X | E(Z_p, S)^+) \cong \pi^0_S(X | B(Z_p, G)^+) \to \pi^0_S(X)$$

surjektiv. Hierbei ist $E(Z_p, G)$ der universelle freie Z_p-Raum mit S-Operation und $B(Z_p, S) = E(Z_p, S)/Z_p$.

Literatur

1. Bröcker, T., tom Dieck, T.: Kobordismentheorie. Lecture Notes in Mathematics 178. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970
2. Browder, W.: Surgery on simply connected manifolds. Ergebnisse der Mathematik, Band 65. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
3. tom Dieck, T.: Orbittypen und äquivariante Homologie II. Arch. Math. **23**, 307—317 (1972)
4. McDuff, D.: Configuration spaces of positive and negative particles. Topology **14**, 91—107 (1975)
5. Hauschild, H.: Allgemeine Lage und äquivariante Homotopie. Math. Z. **143**, 155—164 (1975)
6. Hauschild, H.: Äquivariante Transversalität und äquivariante Bordismentheorie. Arch. Math. **26**, 556—566 (1975)
7. May, P.: The geometry of iterated loop spaces. Lecture Notes in Mathematics 271. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
8. Petrie, T.: Geometric modules over the Burnside Ring. Aarhus Universitet preprint series No. 26 (1975/76)
9. Rubinsztein, R.: On the equivariant homotopy of spheres. Ph.D. Thesis, Institut of mathematics, Polish Academy (1975)
10. Schultz, R.: Homotopy decomposition equivariant function spaces. Math. Z. **131**, 49—75 (1973)
11. Segal, G.: Configuration spaces and iterated loop spaces. Inv. math. **21**, 213—221 (1973)
12. Segal, G.: Categories and Cohomology theories. Topology **13**, 293—312 (1974)
13. Segal, G.: Operations in stable homotopy theory. Erschienen in: New developments in topology. London Math. Soc. L. N. S. **11** (1972)
14. Segal, G.: Equivariant stable homotopy theory. Actes Congrés intern. Math. Tome 2, 59—63 (1970)
15. Szczarba, R.: On tangent bundles of fibre bundles and quotient spaces. Am. J. Math. Sci. **86**, 685—696 (1964)
16. Wassermann, A., Lee, C.: On the groups $JO(G)$. Memoirs of the A.M.S. **159**, 000 (1975)
17. Willson, S.: Equivariant maps between representation spheres. Pacific J. Math. **59**, 291—296 (1975)
18. Olum, P.: Mappings of manifolds and the notation of degree. Ann. of Math. **58**, 458—470 (1953)
19. Tornehave, J.: Equivariant maps of spheres. Aarhus Universitet preprint series No. 24 (1976/77)
20. Becker, J., Schultz, R.: Equivariant function spaces and stable homotopy theory I. Comm. Math. Helv. **49**, 1—34 (1974)