# Topologie algébrique et théorie des faisceaux

Actualités scientifiques et industrielles 1252

ROGER GODEMENT

# Topologie algébrique et théorie des faisceaux

HERMANN ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Nouveau tirage 1998.

ISBN 2 7056 1252 1

# PRÉFACE

De toutes les idées qui circulent dans les milieux mathématiques actuels, celle de publier un ouvrage de référence consacré à la théorie des faisceaux est assurément l'une des moins originales : la plupart des spécialistes de cette théorie en ont eu l'intention à un moment ou à un autre, et l'on connaît plusieurs publications — en général ronéotypées comme s'il s'agissait de tracts subversifs — qui traitent de cette question, les plus célèbres à juste titre étant celles que l'on doit à Henri Cartan. Mais on chercherait en vain un exposé complet, donnant toutes les démonstrations de tous les théorèmes, et les donnant en entier. Alors que la technique des faisceaux envahit les branches les plus diverses des Mathématiques, une pareille situation ne pouvait être tolérée plus longtemps par les techniciens : c'est pourquoi un spécialiste de l'analyse fonctionnelle présente aujourd'hui un exposé complet, i. e. moins incomplet que les autres, de la théorie des faisceaux — with a vengeance.

Il est évident qu'un tel livre serait parfaitement inutile s'il ne s'adressait qu'aux spécialistes de la théorie des faisceaux, ou même, en raison des applications extra-topologiques de cette théorie, s'il supposait le lecteur parfaitement informé des techniques classiques de la topologie algébrique. Nous avons donc cherché à écrire un ouvrage qui ne suppose *aucune* connaissance de la topologie algébrique, et par conséquent avons fait précéder l'exposé de la théorie des faisceaux proprement dite d'un chapitre d'algèbre homologique qui, nous l'espérons, sera utile à certaines catégories de lecteurs. Outre les considérations habituelles sur les suites exactes, les foncteurs, les complexes, etc..., ce chapitre premier traite essentiellement de trois questions importantes : la théorie des suites spectrales (§ 4), celle des foncteurs Ext et Tor (§ 5), et celle des complexes simpliciaux (§ 3). Notre exposé est évidemment beaucoup plus court et beaucoup moins complet que celui qu'on trouvera dans le livre récent de H. Cartan et S. Eilenberg, en ce qui concerne les suites spectrales et les Ext et Tor. Quant aux « complexes simpliciaux », il s'agit des complexes de chaînes (ou de cochaînes) dans lesquels on a des « opérateurs de face » permettant d'effectuer formellement les calculs simpliciaux classiques; situation que l'on rencontre non seulement dans la théorie classique des polyèdres, mais aussi en homologie singulière, en cohomologie de Čech, et en théorie des faisceaux. Comme de plus les travaux récents de Kan semblent prouver que ces complexes constituent le domaine naturel de validité d'une théorie complète de l'homotopie, on peut affirmer que la notion générale de complexe simplicial (due essentiellement à Eilenberg et Zilber) est appelée à jouer un rôle essentiel en topologie algébrique. On trouvera en particulier dans ce paragraphe 3 un exposé à peu près complet de la théorie des produits (produit cartésien et cup-produit), exposé dont la seule originalité est sans doute d'être imprimé. Nous n'avons pas cru devoir insérer dans ce paragraphe un exposé des opérations de Steenrod; on le trouvera dans le second volume de cet ouvrage, lorsque nous aurons à notre disposition les techniques nécessaires (cohomologie des groupes, espaces à groupes d'opérateurs, homologie singulière, ...).

La théorie des faisceaux proprement dite occupe la seconde moitié de ce livre. A l'intention des lecteurs qui sont au courant des exposés publiés antérieurement nous allons donner quelques indications sur les méthodes que nous employons, attendu que celles-ci diffèrent assez sensiblement des méthodes déjà connues, et vont du reste en général plus loin que celles-ci.

Après deux paragraphes de généralités sur les faisceaux d'ensembles et les faisceaux de modules, nous abordons au paragraphe 3 le problème central de la théorie des faisceaux : celui du « prolongement » ou du « relèvement » des sections d'un faisceau. La notion essentielle de ce point de vue, à cause de sa simplicité et de son utilité, semble être celle de faisceau *flasque :* un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace X est flasque si toute section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un *ouvert* de X peut se prolonger à X tout entier. Tout faisceau $\mathcal{F}$ peut se plonger dans un faisceau flasque (par exemple, le faisceau des germes de sections non nécessairement continues de $\mathcal{F}$); de plus, si l'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \cdots$$

de faisceaux flasques de groupes abéliens, alors les *sections* de ces faisceaux au-dessus d'un ouvert quelconque forment encore une suite exacte. Dans les espaces paracompacts, il est important d'avoir aussi la notion plus faible de faisceau *mou :* un faisceau $\mathcal{F}$ est mou si toute section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ensemble *fermé* se prolonge à l'espace ambiant. Cette notion semble devoir se substituer avantageusement à celle de faisceau *fin*, qui jouait un rôle essentiel dans la théorie antérieure, comme on le constatera expérimentalement. Sur un espace paracompact, si l'on a une suite exacte de faisceaux mous de groupes abéliens, les sections de ces faisceaux au-dessus d'un fermé quelconque forment encore une suite exacte.

Le paragraphe 4 définit, pour tout espace X, même non séparé, et tout faisceau $\mathcal{A}$ de groupes abéliens sur X, les groupes $H^*(X; \mathcal{A})$ et démontre leurs propriétés essentielles : on a tout d'abord

$$H^0(X; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A}),$$

groupe des sections globales de $\mathcal{A}$; à toute suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$$

est associée une suite exacte de cohomologie

$$\cdots H^n(X; \mathcal{A}') \to H^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A}'') \to H^{n+1}(X; \mathcal{A}') \cdots;$$

enfin, on a

$$H^n(X; \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1$$

si $\mathcal{A}$ est flasque (ou bien, lorsque X est paracompact, si $\mathcal{A}$ est mou). La possibilité de définir, *sans aucune hypothèse sur* X, des groupes de cohomologie possédant ces propriétés, a été démontrée tout d'abord par A. Grothendieck en 1955, en utilisant le fait que tout faisceau se plonge dans un faisceau *injectif*, au sens de l'algèbre homologique. Comme les recherches de Grothendieck sur ce sujet seront publiées prochainement, nous avons préféré utiliser, au lieu des faisceaux injectifs, les faisceaux flasques [qui évidemment sont spécialement adaptés à l'étude du foncteur $\mathcal{A} \to \Gamma(A)$]; il se trouve que l'on peut construire, de façon canonique, une *résolution flasque*

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) \to \cdots$$

de tout faisceau $\mathcal{A}$, qui de plus est un foncteur « exact » par rapport à $\mathcal{A}$; posant

$$C^*(X; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})), \qquad H^*(X; \mathcal{A}) = H^*(C^*(X; \mathcal{A})),$$

on obtient alors, de façon tout à fait élémentaire, les trois propriétés fondamentales des groupes de cohomologie.

Le § 4 contient aussi la démonstration, basée sur l'emploi des suites spectrales, des célèbres «théorèmes fondamentaux »; en particulier, toute résolution

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \ldots$$

d'un faisceau $\mathcal{A}$ donne lieu à des homomorphismes canoniques

$$H^*(\Gamma(\mathcal{L}^*)) \to H^*(X; \mathcal{A}),$$

lesquels sont bijectifs si les $\mathcal{L}^p$ sont flasques (ou mous, lorsque X est paracompact), ce qui montre bien entendu qu'il était en principe inutile, pour définir les groupes $H^n(X; \mathcal{A})$, de choisir une résolution flasque « canonique » de $\mathcal{A}$. Enfin, nous exposons en détail la suite exacte de cohomologie associée à un sous-espace fermé, et diverses questions accessoires (relations entre la cohomologie d'un ensemble et celle de ses voisinages, cohomologie à valeurs dans une limite inductive de faisceaux, suite spectrale des espaces fibrés, dimension cohomologique).

Le § 5 étudie les relations entre les groupes $H^n(X; \mathcal{A})$ et les groupes $\check{H}^n(X; \mathcal{A})$ obtenus par la méthode de Čech (laquelle, on le sait, ne donne pas de résultat satisfaisant en dehors des espaces paracompacts, ou bien de catégories spéciales de faisceaux). Nous montrons d'abord que tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X qui est soit ouvert, soit fermé et localement fini, définit une *résolution* $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ de tout faisceau $\mathcal{A}$ sur X; il en résulte des homomorphismes canoniques $H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \rightarrow H^n(X; \mathcal{A})$ qui proviennent du reste d'une suite spectrale. A la limite, on trouve une suite spectrale reliant la cohomologie de Čech à la « bonne » cohomologie. On déduit de là qu'il y a isomorphisme

$$\check{H}^n(X; \mathcal{A}) = H^n(X; \mathcal{A})$$

pour tout faisceau si X est paracompact; et, si X n'est pas paracompact, il en est encore ainsi pour un faisceau donné s'il existe dans X « suffisamment » d'ensembles ouverts tels que, pour toute intersection finie U de tels ouverts, on ait

$$\check{H}^n(U; \mathcal{A}) = 0 \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Ce dernier résultat, dû à H. Cartan, permet de montrer que, pour les faisceaux algébriques cohérents étudiés par Serre, la cohomologie de Čech coïncide avec la « bonne » cohomologie. Nous avons pu d'autre part démontrer, sans hypothèse sur l'espace X, le résultat célèbre de Leray suivant lequel, étant donné un recouvrement $\mathfrak{M} = (M_i)$ de X tel que l'on ait toujours

$$H^n(M_{i_0} \cap \cdots \cap M_{i_p}; \mathcal{A}) = 0 \text{ pour } n \geqslant 1,$$

les homomorphismes

$$H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \rightarrow H^n(X; \mathcal{A})$$

sont bijectifs pourvu que $\mathfrak{M}$ soit *ouvert*, ou bien *fermé et localement fini*. Nous n'avons malheureusement pas pu trouver une démonstration qui s'applique simultanément à ces deux cas : dans le cas ouvert, il faut étudier le double complexe $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))$, et dans le cas fermé le double complexe $C^*(X; \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))$, où $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ désigne la résolution de $\mathcal{A}$ définie par $\mathfrak{M}$.

Le § 6 étend à la théorie des faisceaux les notions de produit cartésien et de cup-produit. Étant donnés des faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur des espaces X et Y, on constate trivialement que le produit tensoriel des résolutions canoniques de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une résolution du produit tensoriel $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ (la notation $\hat{\otimes}$ indiquant que le résultat est un faisceau de base $X \times Y$); d'où, sans aucune hypothèse sur X et Y, des applications

$$H^p(X; \mathcal{A}) \times H^q(Y; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})$$

qui possèdent toutes les propriétés qu'on est en droit d'attendre d'un produit cartésien en cohomologie. Lorsque $X = Y$, on trouve par des raisonnements similaires, ou bien en utilisant le produit cartésien et l'application diagonale, les cup-produits

$$H^p(X; \mathcal{A}) \times H^q(X; \mathcal{B}) \to H^{p+q}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Indiquons par ailleurs une circonstance importante; il existe, pour *tout* faisceau $\mathcal{A}$ sur un espace X, une résolution flasque

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{F}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^1(X; \mathcal{A}) \to \dots$$

qui est un foncteur exact en $\mathcal{A}$, *et dont la différentielle résulte d'une structure semi-simpliciale* (i. e. d'opérateurs de « face » et de « dégénérescence » analogues formellement à ceux de la théorie des complexes semi-simpliciaux d'Eilenberg-MacLane-Zilber). Si l'on utilise cette résolution pour définir les groupes de cohomologie, on constate que les formules « explicites » qui donnent le cup-produit dans la théorie simpliciale classique, disons la formule

$$f \cup g(x_0, \dots, x_{p+q}) = f(x_0, \dots, x_p) \otimes g(x_p, \dots, x_{p+q}),$$

le donnent aussi en théorie des faisceaux (¹). Cette remarque n'a pas seulement l'intérêt, après tout purement pédagogique, de montrer que la théorie multiplicative des faisceaux n'est qu'un cas particulier de la théorie générale concernant les complexes « simpliciaux »; elle montre que toute notion reposant exclusivement sur l'existence d'une structure simpliciale s'étend automatiquement à la théorie des faisceaux; en particulier, il est clair dès maintenant que *les opérations de Steenrod peuvent se définir en théorie des faisceaux* puisqu'elles supposent, tout au plus, une structure simpliciale et une application diagonale. Cette question, comme nous l'avons dit plus haut, sera exposée en détail dans le second tome de cet ouvrage.

Enfin, le § 7 contient des indications sommaires sur les faisceaux injectifs, les foncteurs dérivés, et la suite spectrale des Ext qui est indispensable en géométrie algébrique (²).

Les quelques indications qui précèdent montreront sans doute aux lecteurs informés que notre exposé diffère sensiblement de ceux de Leray et Cartan, bien que, de toute évidence, les idées essentielles qui le gouvernent soient dues à ces auteurs. Il semble raisonnable de penser que la théorie des faisceaux est maintenant dans un état pratiquement final, attendu que d'une part elle a

(¹) Il en est bien entendu de même en cohomologie de Čech; malheureusement, la méthode de Čech n'est satisfaisante que sur les espaces paracompacts.

(²) On trouvera des résultats beaucoup plus complets (notamment pour les faisceaux « cohérents » de modules) dans un article de Grothendieck (*Sur quelques points d'Algèbre Homologique*, à paraître au *Tohoku Math. Journal*).

atteint le degré de généralité maximum que l'on puisse concevoir, et que d'autre part ses méthodes sont, à beaucoup d'égards, considérablement plus simples que celles des auteurs anciens; cela ne saurait cependant nous faire oublier le rôle qu'ont joué ceux-ci: il est clair que notre exposé ne comporte, la plupart du temps, que des améliorations de détail par rapport à ceux de Leray et Cartan [1]. Le progrès le plus important est probablement d'avoir pu construire une théorie raisonnable valable pour *tout* espace topologique; comme nous l'avons dit, on doit ce résultat à Grothendieck; mais il semble juste d'ajouter que, probablement, la question ne se serait pas même posée sans les travaux de Serre sur les variétés algébriques.

Pour parvenir à un exposé relativement complet de la *théorie* des faisceaux, il nous resterait à traiter encore quelques questions importantes : rapports entre la théorie des faisceaux et l'homologie singulière, dualité des variétés, espaces fibrés et faisceaux à groupes d'opérateurs, opérations cohomologiques, etc... Il est clair que nous n'aurions pu inclure ces matières dans le présent volume sans en retarder considérablement la publication; elles constitueront donc le second tome de cet ouvrage, où l'on apprendra, par exemple, comment calculer les groupes d'homologie d'une sphère (problème que les résultats contenus dans ce premier volume ne suffisent malheureusement pas à résoudre...).

Il est bien évident que ce livre n'aurait jamais vu le jour sans l'aide précieuse, et les encouragements enthousiastes (quoique partiellement intéressés), que nous ont prodigué certains géomètres, et tout spécialement N. Bourbaki, H. Cartan, P. Cartier, A. Grothendieck et J. P. Serre. D'autre part, une première rédaction de cet ouvrage a été écrite pendant l'année scolaire 1954-55, alors que l'auteur occupait, à la University of Illinois, la « G. A. Miller Visiting Professorship » et se trouvait, de ce fait, dans des conditions particulièrement favorables. Enfin, l'impression de ce livre a été rendue possible grâce à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg. A tous ceux, proches ou lointains, qui l'ont aidé, l'auteur est heureux de présenter ses remerciements les plus chaleureux.

[1] Sans entrer dans une discussion historique du sujet, il est indispensable de rappeler qu'un certain nombre d'idées de base de la théorie des faisceaux et des suites spectrales furent introduites par J. Leray en 1945 et dans les années suivantes. La notion générale de suite spectrale fut ensuite dégagée par J. L. Koszul. Le premier exposé cohérent de la théorie des faisceaux, basé sur la notion de « résolution », est dû à H. Cartan. Il semble enfin que, à côté des travaux évidemment fondamentaux de J. Leray, une démonstration du théorème de Rham par A. Weil, datant de 1947, ait joué un rôle important dans l'évolution de la situation.

# LEITFADEN

A l'intention des lecteurs qui ne sont pas encore familiarisés avec les questions traitées dans cet ouvrage, il peut être utile de donner quelques indications sur la façon de lire celui-ci.

Il est indispensable de lire les §§ 1 et 2 du chapitre I, et les §§ 1 et 2 du chapitre II. On peut alors lire le n° 3.1 du chapitre II (faisceaux flasques) puis les n^os^ 4.1 à 4.4 de façon à connaître la définition et les principales propriétés des groupes de cohomologie à valeurs dans un faisceau. Il est alors indispensable de lire le § 4 du chapitre I (suites spectrales) ainsi que ce qui concerne les faisceaux mous au chapitre II, § 3; on peut ensuite terminer la lecture du § 4 du chapitre II (l'essentiel étant les n^os^ 4.5 à 4.10).

Avant d'aborder la cohomologie de Čech, il est utile de lire le début du § 3 du chapitre I, spécialement les n^os^ 3.1 à 3,5; on peut alors, dans une première lecture du § 5 du chapitre II, se borner aux n^os^ 5.1, 5.3, 5.4, 5.7, 5.8, 5.9 et 5.10, en négligeant ce qui concerne les familles de supports.

En ce qui concerne les produits en cohomologie, il est pratiquement indispensable d'étudier simultanément la fin du § 3 du chapitre I (n^os^ 3.6 à 3.12) et le § 6 du chapitre II étant donné que ces deux §§ sont étroitement liés.

De même, il est utile de lire simultanément le § 5 du chapitre I et le § 7 du chapitre II, en essayant, à titre d'exercice, de se placer dans une catégorie abélienne quelconque (mais possédant suffisamment d'objets injectifs). Il est aussi utile de construire des démonstrations purement fonctorielles des théorèmes fondamentaux du chapitre II, § 4.

Le lecteur désireux de connaître quelques applications de la théorie des faisceaux, ou d'en approfondir certains aspects, pourra consulter l'article de Serre sur les faisceaux algébriques cohérents (*Annals of Math.*, 61 (1955), pp. 197-278), un article de Grothendieck à paraître au *Tohoku Math. Journal*, et enfin les volumes du Séminaire de l'E.N.S. de H. Cartan consacrés aux fonctions de plusieurs variables complexes. On pourra aussi consulter le volume récent de F. Hirzebruch dans la série bien connue des Ergebnisse der Mathematik, qui contient des applications importantes de la théorie des faisceaux à la théorie des variétés analytiques compactes.

Notons enfin qu'une référence telle que Théorème 4.9.3 indique qu'on doit se reporter au n° 4.9, donc au § 4, *du même chapitre*, sauf mention expresse du contraire (utilisation au chapitre II de résultats ou de définitions contenus dans le chapitre I).

CHAPITRE I

# ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

# I. MODULES ET FONCTEURS

## 1.1. — Suites exactes de modules

Soient A un anneau avec élément unité, et L, M deux A-modules à gauche. L'ensemble des homomorphismes de L dans M est un groupe abélien, qui sera noté $\mathrm{Hom}_A$ (L, M) ou simplement Hom(L, M) si aucune confusion n'est possible.

Etant donné un homomorphisme $f: L \to M$ on définit

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0); \qquad \mathrm{Im}(f) = f(L); \qquad \mathrm{Coker}\,(f) = M/f(L).$$

Ce sont des A-modules à gauche.

Une suite

$$\cdots \longrightarrow L_n \xrightarrow{f_n} L_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} L_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

de A-modules et d'homomorphismes de A-modules est dite *exacte* si l'on a $\mathrm{Im}(f_n) = \mathrm{Ker}(f_{n+1})$ pour tout $n$. Par exemple, la suite

$$0 \to L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \to 0$$

est exacte si et seulement si $f$ est injectif, $g$ surjectif, et si de plus $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$; on peut alors identifier L' à un sous-module de L, et L'' au module quotient L/L'.

## 1.2. — Propriétés des groupes Hom(L, M)

Dans tout ce n° on considère des modules à gauche sur un anneau A donné.

Supposons donnés des homomorphismes

$$f: L' \to L; \qquad g: M \to M';$$

on obtient alors un homomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}(f, g) : \mathrm{Hom}(L, M) \to \mathrm{Hom}(L', M'),$$

à savoir celui qui transforme tout $u : L \to M$ en $g \circ u \circ f : L' \to M'$. On exprime ce fait en disant que $\mathrm{Hom}(L, M)$ est *contravariant en* L *et covariant en* M.

Les deux propriétés fondamentales des groupes $\mathrm{Hom}(L, M)$ sont les suivantes :

*Si l'on a une suite exacte de la forme*

$$0 \to M' \to M \to M''$$

*alors pour tout* L *la suite correspondante*

$$0 \to \mathrm{Hom}(L, M') \to \mathrm{Hom}(L, M) \to \mathrm{Hom}(L, M'')$$

*est exacte; si l'on a une suite exacte de la forme*

$$L' \to L \to L'' \to 0$$

*alors pour tout* M *la suite correspondante*

$$\mathrm{Hom}(L', M) \leftarrow \mathrm{Hom}(L, M) \leftarrow \mathrm{Hom}(L'', M) \leftarrow 0$$

*est exacte.*

Ces propriétés sont bien entendu triviales.

## 1.3. — Modules projectifs

Un A-module à gauche L est dit *projectif* si, pour toute suite exacte de la forme

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0,$$

la suite correspondante

$$0 \to \mathrm{Hom}(L, X') \to \mathrm{Hom}\,(L, X) \to \mathrm{Hom}(L, X'') \to 0$$

est exacte. En vertu du n° précédent les A-modules projectifs sont donc caractérisés comme suit :

(PR) : *Soit* $p : X \to X''$ *un homomorphisme* surjectif; *alors pour tout homomorphisme* $f'' : L \to X''$ *il existe un homomorphime* $f : L \to X$ *tel que* $f'' = p \circ f$.

**Théorème** 1.3.1 — *Pour qu'un* A*-module soit projectif il faut et il suffit qu'il soit facteur direct d'un* A*-module libre.*

Notons tout d'abord qu'un module libre est projectif, car un homomorphisme d'un module libre L est déterminé par les valeurs, du reste arbitraires, qu'il prend sur une base de L. D'autre part, il est clair qu'un facteur direct d'un module projectif est projectif; la condition de l'énoncé est donc suffisante.

Pour montrer qu'un module projectif L la vérifie, on écrit $L = F/R$ où F est un A-module libre et R un sous-module de F; comme L est projectif, l'application identique $L \to L$ se factorise en un homomorphisme $L \to F$ et en l'application canonique $F \to L$, d'où le résultat.

Il résulte évidemment du théorème précédent que *tout* A-*module est un quotient d'un* A *module projectif*. Nous aurons par la suite (§ 5) besoin du résultat plus précis que voici :

***Théorème*** 1.3.2 — *Etant donné un diagramme de* A-*modules*

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d] & & P'' \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

*dont les lignes et les colonnes sont exactes, et dans lequel* $P'$ *et* $P''$ *sont projectifs, on peut trouver un* A-*module projectif* P *et des homomorphismes* $P' \to P$, $P \to P''$, $P \to X$ *de telle sorte que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

*soit commutatif et formé de suites exactes.*

Pour cela on prend $P = P' \times P''$ (en sorte que P est bien projectif) et on définit les homomorphismes $P' \to P$ et $P \to P''$ à partir de cette décomposition de P en somme directe; on obtient ainsi un diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \, ; \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

pour définir l'homomorphisme $P \to X$, on construit d'abord un homomorphisme $P'' \to X$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P'' \arrow[dl] \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X'' \end{tikzcd}$$

soit commutatif — ce qui est possible puisque $P''$ est projectif et l'homomorphisme $X \to X''$ surjectif; puis on construit un homomorphisme $P' \to X$ en composant $P' \to X'$ et $X' \to X$; il existe alors un homomorphisme et un seul $P \to X$ qui, sur les facteurs $P''$ et $P'$ de P, se réduise aux homomorphismes qu'on vient de définir; il est clair que celui-ci répond à la question.

Notons pour terminer que si l'anneau de base A est *principal*, tout A-module *projectif* est *libre*, et réciproquement, puisqu'alors tout sous-module d'un module libre est libre.

## I. 4. — Modules injectifs

Un A-module L est *injectif* si pour toute suite exacte

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

la suite correspondante

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(X', L) \leftarrow \mathrm{Hom}(X, L) \leftarrow \mathrm{Hom}(X'', L) \leftarrow 0$$

est encore exacte, autrement dit s'il vérifie la condition

(INJ) : *soit* $j : X' \to X$ *un homomorphisme* injectif; *alors pour tout homomorphisme* $f' : X' \to L$ *il existe un homomorphisme* $f : X \to L$ *tel que* $f' = f \circ j$

Cela signifie que tout homomorphisme dans L d'un sous-module d'un module X se prolonge en un homomorphisme de X dans L.

***Théorème*** 1.4.1. — *Pour qu'un* A*-module à gauche* L *soit injectif il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche* I *de* Λ *et tout homomorphisme* $f : I \to L$ *il existe un* $x \in L$ *tel que* $f(\lambda) = \lambda.x$ *pour tout* $\lambda \in I$.

La condition est nécessaire puisque $f$ doit se prolonger en un homomorphisme $A \to L$.

Réciproquement, supposons-la vérifiée, et soient X un module, X′ un sous-module de X, et $f$ un homomorphisme $X' \to L$. En considérant les couples $(Y, g)$ où Y est un sous-module de X contenant X′ et $g$ un homomorphisme $Y \to L$ qui prolonge $f$, on voit à l'aide du Théorème de Zorn que $f$ admet un prolongement maximal $(Y, g)$. Si Y était distinct de X, on pourrait construire un $x \in X$ non dans Y, un idéal à gauche I de A (l'ensemble des $\lambda \in A$ tels que $\lambda.x \in Y$) et un homomorphisme $h : I \to L$, à savoir $\lambda \to g(\lambda.x)$ ; par hypothèse il existerait un élément $u$ de L tel que la relation $\lambda x \in Y$ impliquerait $g(\lambda x) = \lambda u$; mais alors $g$ serait prolongeable au sous-module de X engendré par Y et $x$, d'où une contradiction.

Si par exemple l'anneau de base A est *principal* alors L est injectif si et seulement si, pour tout $\lambda \neq 0$, l'endomorphisme $x \to \lambda x$ de L est *surjectif*.

***Théorème*** 1.2.2. — *Tout* A*-module est un sous-module d'un* A*-module injectif*.

Pour le voir, considérons l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels, le groupe additif $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, et le $\mathbf{Z}$-module

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Celui-ci est *injectif* en vertu du critère précédent, et il est clair que tout groupe abélien *cyclique* (d'ordre fini ou non) se plonge dans $\mathbf{T}$.

Cela dit soit L un A-module à gauche, et formons

$$\hat{L} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{T});$$

c'est de façon évidente un A-module à droite; de même,

$$\hat{\hat{L}} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\hat{L}, \mathbf{T})$$

est un A-module à gauche, et on a un homomorphisme canonique

$$L \to \hat{\hat{L}}$$

de façon non moins évidente. Montrons d'abord que celui-ci est injectif. Soit en effet un $x \in L$ non nul; tout revient à construire un homomorphisme $f : L \to \mathbf{T}$ tel que $f(x) \neq 0$; or soit G le groupe cyclique engendré par $x$ dans le groupe abélien L; comme G se plonge dans $\mathbf{T}$, on peut définir $f$ sur G — mais comme $\mathbf{T}$ est un $\mathbf{Z}$-module injectif, $f$ se prolonge à L, d'ou le résultat.

Montrons maintenant que *si* L *est projectif*, $\hat{L}$ *est injectif;* soient en effet X un A-module à droite et $f$ un homomorphisme d'un sous-module X′ de X dans le A-module $\hat{L}$; par dualité on en déduit un homomorphisme $\hat{f} : \hat{\hat{L}} \to \hat{X}'$ et en particulier, puisque L se plonge dans $\hat{\hat{L}}$, un homomorphisme de L dans $\hat{X}'$; mais X′ étant un sous-module de $\hat{X}$ et $\mathbf{T}$ étant injectif, $\hat{X}'$ est un quotient de $\hat{X}$; puisque L est projectif, l'homomorphisme $\hat{f} : L \to \hat{X}'$ provient d'un homomorphisme $L \to \hat{X}$, lequel définit par dualité un homomorphisme $\hat{\hat{X}} \to \hat{L}$ qui prolonge $f$, et *a fortiori* un prolongement de $f$ à X.

Pour achever la démonstration, représentons $\hat{L}$ comme quotient d'un module projectif F; alors $\hat{\hat{L}}$, et *a fortiori* L, se plonge dans $\hat{F}$, qui est injectif d'après ce qu'on vient de voir — d'où le résultat.

On laisse au lecteur le soin d'établir, à l'aide du résultat précédent, que *pour qu'un module* L *soit injectif il faut et il suffit qu'il soit facteur direct de tout module le contenant.*

On a bien entendu pour les modules injectifs un résultat similaire au Théorème 1.3.2; on laisse au lecteur le soin de l'énoncer et de le démontrer.

### 1. 5. — Produits tensoriels

Soient L un A-module *à droite* et M un A-module *à gauche.* Formons le groupe abélien libre (L, M) ayant pour base l'ensemble produit $L \times M$, et dans (L, M) considérons le sous-groupe $N_A(L, M)$ engendré par les éléments qui ont l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\begin{aligned}&(x'+x'',y)-(x',y)-(x'',y);\\&(x,y'+y'')-(x,y')-(x,y'');\\&(xa,y)-(x,ay)\end{aligned}$$

$(x, x', x'' \in \mathrm{L};\ y, y', y'' \in \mathrm{M};\ a \in \mathrm{A})$; on appelle alors *produit tensoriel de* L *par* M le groupe abélien

$$\mathrm{L} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{M} = (\mathrm{L}, \mathrm{M})/\mathrm{N}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{M}).$$

L'image du couple $(x, y)$ dans $\mathrm{L} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{M}$ se note $x \otimes y$; les éléments de cette forme engendrent $\mathrm{L} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{M}$, et on a des formules $(x'+x'') \otimes y = x' \otimes y + x'' \otimes y$, etc., correspondant aux « relations » qu'on a imposées dans le groupe abélien libre (L, M).

Soit G un groupe abélien quelconque; une application $f : \mathrm{L} \times \mathrm{M} \to \mathrm{G}$ est *bilinéaire* si, pour $y$ donné (resp. $x$ donné), l'application $x \to f(x, y)$ (resp. $y \to f(x,y)$) est un homomorphisme de groupes abéliens, et si en outre on a l'identité $f(xa, y) = f(x, ay)$ pour tout $a \in \mathrm{A}$. Par exemple, on a une application bilinéaire canonique

$$\mathrm{L} \times \mathrm{M} \to \mathrm{L} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{M},$$

à savoir $(x, y) \to x \otimes y$; de plus, *toute* application bilinéaire $\mathrm{L} \times \mathrm{M} \to \mathrm{G}$ s'obtient en composant l'application précédente avec un homomorphisme de groupes abéliens $\mathrm{L} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{M} \to \mathrm{G}$.

Si l'on considère A comme un A-module à droite, alors pour tout A-module à gauche M on a un isomorphisme canonique $\mathrm{A} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{M} = \mathrm{M}$, obtenu en identifiant $a \otimes m$ et $a.m$.

Soient A et A' deux anneaux, L et M des A-modules à droite et à gauche respectivement, L' et M' des A'-modules à droite et à gauche respectivement. Supposons donnés un homomorphisme d'anneaux $u : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$, et des homomorphismes $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ compatibles avec $u$ (i.e. $f$ et $g$ sont des homomorphismes de groupes abéliens, vérifiant en outre les identités

$$f(xa) = f(x)u(a), \qquad g(ay) = u(a)g(y).$$

On obtient alors un homomorphisme

$$f \otimes g : \mathrm{L} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{M} \to \mathrm{L}' \underset{\mathrm{A}'}{\otimes} \mathrm{M}'$$

et un seul qui applique $x \otimes y$ sur $f(x) \otimes g(y)$.

**Théorème** 1.5.1. — *Soit une suite exacte de* A*-modules à droite de la forme*

$$\mathrm{X}' \xrightarrow{f} \mathrm{X} \xrightarrow{g} \mathrm{X}'' \to 0;$$

*alors pour tout* A-*module à gauche* Y *la suite correspondante*

$$X' \otimes_A Y \xrightarrow{f \otimes 1} X \otimes_A Y \xrightarrow{g \otimes 1} X'' \otimes_A Y \longrightarrow 0$$

*est exacte.*

Posant $f \otimes 1 = f'$ et $g \otimes 1 = g'$, le seul point non trivial est d'établir que $\operatorname{Ker}(g') \subset \operatorname{Im}(f')$. Or posons $M = f(X') = \operatorname{Ker}(g)$; il est clair que $\operatorname{Im}(f')$ est le sous-groupe de $X \otimes Y$ engendré par les produits $m \otimes y$ $(m \in M, y \in Y)$. Cela dit, tout $x'' \in X''$ est de la forme $g(x)$, où $x$ est unique modulo M; on peut donc définir une application bilinéaire $X'' \times Y \to (X \otimes Y)/\operatorname{Im}(f')$ par $(x'', y) \to x \otimes y$, où $x$ est choisi par la condition que $g(x) = x''$; cette application bilinéaire définit un homomorphisme $X'' \otimes Y \to (X \otimes Y)/\operatorname{Im}(f')$ qui transforme $g(x) \otimes y$ en la classe de $x \otimes y$ modulo $\operatorname{Im}(f')$, et qui est donc multiple à gauche de $g \otimes 1 = g'$, donc s'annule sur $\operatorname{Ker}(g')$, ce qui prouve visiblement que $\operatorname{Ker}(g') \subset \operatorname{Im}(f')$ comme annoncé.

Si l'homomorphisme $X' \to X$ est injectif, il n'en est généralement pas de même de $X' \otimes Y \to X \otimes Y$; c'est cependant le cas lorsque Y est *libre*. On dit plus généralement qu'un A-module à gauche Y est *plat* si, pour *tout* homomorphisme injectif $X' \to X$, l'homomorphisme correspondant $X' \otimes Y \to X \otimes Y$ est lui-même injectif; on trouvera au § 5 une caractérisation « interne » des A-modules plats.

## 1. 6. Limites inductives

Soit I un *ensemble ordonné filtrant décroissant;* supposons donnés des ensembles $E_i$ $(i \in I)$, et, pour tout couple $(i, j)$ tel que $i \geqslant j$, une application

$$f_j^i : E_i \to E_j,$$

de telle sorte qu'on ait les conditions de « transitivité » suivantes :

$$f_i^i = 1 \qquad \text{pour tout } i; \qquad f_k^i = f_k^j \circ f_j^i \qquad \text{pour} \qquad i \geqslant j \geqslant k.$$

Dans l'*ensemble somme* des $E_i$, introduisons la relation d'équivalence qui consiste à identifier $x_i \in E_i$ et $x_j \in E_j$ si et seulement si l'on peut trouver un indice $k \leqslant i, j$ tel que l'on ait $f_k^i(x_i) = f_k^j(x_j)$; alors l'ensemble quotient correspondant est la *limite inductive* des $E_i$ (relativement aux applications données $f_j^i$); on le note

$$E = \lim_i . \operatorname{ind.} E_i.$$

On a, pour chaque $i$, une application canonique

$$f^i : E_i \to E,$$

ainsi que les propriétés suivantes :

(*a*) : $f^j = f^i \circ f_i^j$ pour $i \leqslant j$;

(*b*) : pour que $f^i(x_i) = f^j(x_j)$ il faut et il suffit qu'on ait $f^i_k(x_i) = f^j_k(x_j)$ pour un $k \leqslant i, j$;
(*c*) : la réunion dans E des images $f^i(E_i)$ est E tout entier.

On a en outre une « propriété universelle »: supposons donnés un ensemble F et des applications $h^i\colon E_i \to F$ telles que l'on ait $h^j = h^i \circ f^j_i$ pour $i \leqslant j$; alors il existe une application et une seule $h\colon E \to F$ telle que $h^i = h \circ f^i$ pour tout $i$.

Si les $E_i$ sont des groupes (resp. anneaux) et les $f^j_i$ des homomorphismes de groupes (resp. d'anneaux), il est clair que E se trouve canoniquement muni d'une structure de groupe (resp. d'anneau) telle que les $f^i$ soient encore des homomorphismes.

Plus généralement, supposons donnés pour chaque $i \in I$ un anneau $A_i$, un $A_i$ — module à droite $L_i$ et un $A_i$ — module à gauche $M_i$; supposons donnés pour $i \geqslant j$ un homomorphisme d'anneaux

$$u^i_j\colon A_i \to A_j$$

et des homomorphismes de groupes

$$f^i_j\colon L_i \to L_j \ ; \qquad g^i_j\colon M_i \to M_j$$

compatibles avec $u^i_j$; posant

$$A = \text{lim. ind. } A_i\,, \qquad L = \text{lim. ind. } L_i\,, \qquad M = \text{lim. ind. } M_i\,,$$

il existe alors sur L une structure de A-module à droite, et sur M une structure de A-module à gauche, telles que les applications $f^i$ et $g^i$ soient des homomorphismes de groupes abéliens compatibles avec les homomorphismes d'anneaux $u^i$.

Dans les mêmes hypothèses, *on a un isomorphisme canonique*

$$L \underset{A}{\otimes} M = \text{lim. ind. } L_i \underset{A_i}{\otimes} M_i\,;$$

a limite inductive du second membre est naturellement relative à la famille des homomorphismes $f^i_j \otimes g^i_j$, et l'identification précédente s'obtient en considérant les homormophismes

$$f^i \otimes g^i\colon L_i \underset{A_i}{\otimes} M_i \to L \underset{A}{\otimes} M.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier ces assertions, qui ne présentent aucune difficulté.

Dans le même ordre d'idées, notons qu'*une limite inductive de suites exactes est encore une suite exacte;* autrement dit, supposons donnés un système inductif d'anneaux $A_i$ et des systèmes inductifs de modules $L'_i$, $L_i$, $L''_i$ avec pour tout $i$ une suite exacte

$$L'_i \to L_i \to L''_i$$

de telle sorte que, pour $i > j$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L'_i & \rightarrow & L_i & \rightarrow & L''_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L'_j & \rightarrow & L_j & \rightarrow & L''_j \end{array}$$

soit commutatif; alors en posant

$$L' = \text{lim. ind. } L'_i; \qquad L = \text{lim. ind. } L_i \,; \qquad L'' = \text{lim. ind. } L''_i,$$

la suite de modules et d'homomorphismes

$$L' \rightarrow L \rightarrow L''$$

déduite de façon évidente des suites exactes données est encore exacte.

### 1. 7. Catégories et foncteurs

Nous aurons besoin dans la suite de cet ouvrage de quelques notions sur les catégories et foncteurs; nous allons les exposer en nous plaçant à un point de vue aussi « naïf » que possible.

Une *catégorie* est une collection $\mathfrak{K}$ d'objets (qui n'est pas nécessairement un ensemble au sens strictement mathématique de ce terme) munie des données suivantes :

pour tout couple d'objets $X, Y \in \mathfrak{K}$ on se donne un *ensemble* $\text{Hom}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés les *homomorphismes de* X *dans* Y; au lieu d'écrire $f \in \text{Hom}(X, Y)$ on écrira souvent

$$f: X \rightarrow Y\,;$$

quels que soient les objets $X, Y, Z \in \mathfrak{K}$, on se donne une application

$$\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

notée $(f, g) \rightarrow g \circ f$ et appelée *composition des homomorphismes* [1]. Les données précédentes sont de plus assujetties à vérifier les deux axiomes que voici :

(K1) : *étant donnés des homomorphismes* $f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow Z, \quad h: Z \rightarrow T,$ *on a la relation*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\,;$$

(K2) : *pour tout* $X \in \mathfrak{K}$ *il existe un homomorphisme* $e_X : X \rightarrow X$ *tel que l'on ait* $e_X \circ f = f$ *pour tout homomorphisme* $f: Y \rightarrow X$ *et* $f \circ e_X = f$ *pour tout homomorphisme* $f: X \rightarrow Y$ (on dit que $e_X$ est l'homomorphisme *identique* ou *unité* de X dans X et on le note souvent $e$, ou 1, lorsque le contexte permet d'écarter tout risque de confusion).

Par exemple, les espaces topologiques forment une catégorie, si l'on définit

(1) Certains auteurs disent « morphisme » au lieu de « homomorphisme ».

Hom(X, Y) comme étant l'ensemble des applications continues de X dans Y et la composition des homomorphismes comme il est d'usage de le faire. De même, les modules à gauche sur un anneau de base donné forment une catégorie moyennant des définitions évidentes pour les ensembles Hom(X, Y) et la composition des homomorphismes.

Étant donnés des objets X, Y d'une catégorie $\mathfrak{K}$, on appelle *isomorphisme* de X dans Y tout homomorphisme $u\colon X \to Y$ tel qu'il existe un homomorphisme $v : Y \to X$ vérifiant

$$u_\circ v = e_Y, \qquad v_\circ u = e_X.$$

A toute catégorie $\mathfrak{K}$ est attachée une *catégorie duale* $\mathfrak{K}^*$ définie comme suit : les objets de $\mathfrak{K}^*$ sont les objets de $\mathfrak{K}$, mais étant donnés deux tels objets X et Y, un $\mathfrak{K}^*$-homomorphisme $X \to Y$ sera par définition un $\mathfrak{K}$-homomorphisme $Y \to X$, les homomorphismes se composant dans $\mathfrak{K}^*$ comme dans $\mathfrak{K}$.
Soient $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ deux catégories; par un *foncteur covariant*

$$F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$$

on entend la donnée, pour tout $X \in \mathfrak{K}$, d'un objet $F(X) \in \mathfrak{K}'$, et pour tout homomorphisme $u : X \to Y$, d'un homomorphisme $F(u)\colon F(X) \to F(Y)$, et ce de telle sorte que les deux conditions suivantes soient vérifiées : *si u est l'identité il en est de même de* $F(u)$ ; *on a*

$$F(u_\circ v) = F(u)_\circ F(v)$$

*toutes les fois que cette relation a un sens.*

Par exemple, pour tout $A \in \mathfrak{K}$, la formule $X \to \mathrm{Hom}(A, X)$ définit de façon évidente un foncteur covariant sur $\mathfrak{K}$, à valeurs dans la catégorie de tous les ensembles.

Étant donnés deux foncteurs covariants $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ et $G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$ on définit de façon évidente le foncteur composé $G_\circ F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}''$.

Étant donnés deux foncteurs covariants F, $G : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$, on appelle *homomorphisme* (ou *transformation naturelle*) *de* F *dans* G la donnée, pour chaque $X \in \mathfrak{K}$, d'un homomorphisme $T(X) : F(X) \to G(X)$, de telle sorte que, quels que soient $X, Y \in \mathfrak{K}$ et $u \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "T(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "T(Y)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(u)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Par exemple, considérons une catégorie $\mathfrak{K}$, deux objets A, B de $\mathfrak{K}$, et les foncteurs $X \to \mathrm{Hom}(A, X)$ et $X \to \mathrm{Hom}(B, X)$; tout homomorphisme $t : A \to B$ définit un homomorphisme du second foncteur dans le premier, obtenu en

attachant à chaque $X \in \mathfrak{K}$ l'application $u \to u \circ t$ de $\mathrm{Hom}(B, X)$ dans $\mathrm{Hom}(A, X)$.
Les considérations précédentes s'appliquent aux *foncteurs contravariants* $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ : on appelle ainsi, par définition, les foncteurs covariants $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'^{*}$.

## 1. 8. Catégories abéliennes

On appelle *catégorie additive* toute catégorie $\mathfrak{K}$ munie de la structure définie par la donnée, quels que soient $X, Y \in \mathfrak{K}$, d'une loi de groupe abélien sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$, et ce de telle sorte que l'axiome suivant soit vérifié :

(KA 1) : *quels que soient* $X, Y, Z \in \mathfrak{K}$, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$$

*est bilinéaire.*

Les catégories additives les plus importantes sont celles dans lesquelles on peut définir de façon raisonnable la notion de *suite exacte;* nous allons montrer comment on peut y parvenir.

Considérons, dans la catégorie additive $\mathfrak{K}$, un homomorphisme

$$u : A \to B.$$

Nous appellerons *noyau* de $u$ un couple $(N, j)$ formé d'un $N \in \mathfrak{K}$ et d'un homomorphisme (dit « canonique ») $j : N \to A$, de telle sorte que la propriété suivante soit vérifiée : *pour tout* $X \in \mathfrak{K}$, *la suite*

$$0 \to \mathrm{Hom}(X,N) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}(X,A) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(X,B)$$

*de groupes abéliens est exacte.* Cela signifie évidemment que, étant donné un homomorphisme $f : X \to A$, pour que l'on ait $u \circ f = 0$ il faut et il suffit que $f$ se factorise en

$$X \xrightarrow{f'} N \xrightarrow{j} A$$

et que de plus cette factorisation de $f$ est alors unique. On déduit immédiatement de là que le couple $(N, j)$ est unique à un isomorphisme près, i.e. que si $(N, j)$ et $(N', j')$ sont deux noyaux de $u$, il existe des homomorphismes

$$i : N \to N', \qquad i' : N' \to N$$

réciproques l'un de l'autre et tels que $j = j' \circ i$, $j' = j \circ i'$.

De même on appelle *co-noyau* de $u$ tout couple $(j^*, N^*)$ formé d'un $N^* \in \mathfrak{K}$ et d'un homomorphisme $j^* : B \to N^*$, de telle sorte que pour tout $Y \in \mathfrak{K}$ la suite de groupes abéliens

$$0 \to \mathrm{Hom}(N^*,Y) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(B,Y) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(A,Y)$$

soit exacte. Cela signifie que pour qu'un homomorphisme $g : B \to Y$ vérifie $g \circ u = 0$, il faut et il suffit que $g$ se factorise en

$$B \xrightarrow{j^*} N^* \xrightarrow{g'} Y,$$

et qu'alors cette factorisation est unique. Comme plus haut, on voit que le co-noyau de $u$, s'il existe, est unique à un isomorphisme près.

Cela dit, nous supposerons maintenant que K satisfait à l'axiome suivant :

(KA 2) : *Pour tout homomorphisme* $u : A \to B$, *il existe une suite*

$$N \xrightarrow{j} A \xrightarrow{p} I \xrightarrow{p^*} B \xrightarrow{j^*} N^*$$

*d'objets de* K *et d'homomorphismes possédant les propriétés suivantes* : $(N, j)$ *est un noyau de* $u$, $(j^*, N^*)$ *est un co-noyau de* $u$, $(I, p^*)$ *est un noyau de* $j^*$, $(p, I)$ *est un co-noyau de* $j$, *et on a*

$$u = p^* \circ p.$$

Il est clair que, pour $u$ donné, la suite dont l'axiome (KA 2) affirme l'existence est unique à un isomorphisme près. On dit que le couple $(I, p^*)$ est une *image* de $u$, et le couple $(p, I)$ une *co-image* de $u$.

Indiquons les principales conséquences de l'axiome (KA 2).

Tout d'abord il existe dans $\mathfrak{K}$ un *objet nul*, noté 0, et caractérisé à un isomorphisme près par le fait que le groupe abélien $\mathrm{Hom}(0,0)$ se réduit à son élément neutre; il suffit pour le voir de considérer un $X \in \mathfrak{K}$ et le noyau de l'homomorphisme unité $X \to X$.

On a évidemment $\mathrm{Hom}(0, X) = \mathrm{Hom}(X, 0) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{K}$.

D'autre part on dira qu'un homomorphisme $u : A \to B$ est *injectif* (resp. *surjectif*) si son noyau (resp. co-noyau) est nul. Supposons $u$ injectif; pour tout X, l'application $\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$ induite par $u$ est alors injective, i. e. $u \circ f = 0$ implique $f = 0$; et évidemment cette propriété caractérise les homomorphismes injectifs. Considérons de plus une co-image $(p, I)$ de $u$; comme $(p, I)$ est un co-noyau de l'homomorphisme nul, $p$ induit, pour tout $Y \in K$, une application $\mathrm{Hom}(I, Y) \to \mathrm{Hom}(A, Y)$ qui est bijective : par suite, $p$ est un *isomorphisme* de A sur I.

De même, si l'on suppose $u$ surjectif, on voit que l'homomorphisme canonique $p^* : I \to B$ est un isomorphisme. En conséquence, *pour que* $u : A \to B$ *soit un isomorphisme il faut et il suffit que* $u$ *soit injectif et surjectif.* On notera par ailleurs que, quel que soit $u$, les homomorphismes $j$ et $p^*$ figurant dans l'axiome (KA 2) sont injectifs, et les homomorphismes $p$ et $j^*$ sont surjectifs.

Considérons maintenant des homomorphismes

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \tag{1}$$

tels que $v \circ u = 0$; soient I une image de $u$ et N un noyau de $v$.

Puisque $v \circ u = 0$, $u$ se factorise en

$$A \xrightarrow{\bar{u}} N \xrightarrow{j} B,$$

la seconde flèche désignant l'homomorphisme canonique de N dans B; comme $j \circ \bar{u}$ annule le noyau de $u$, et comme $j$ est injectif, on voit que $\bar{u}$ annule le noyau de $u$; donc $\bar{u}$ se factorise en

$$A \xrightarrow{p} I \xrightarrow{\bar{\bar{u}}} N,$$

$p$ désignant la surjection canonique de A dans I. En définitive on voit qu'il existe un homomorphisme bien déterminé $\mathrm{Im}(u) \to \mathrm{Ker}(v)$ tel que $u$ se factorise en

$$A \to \mathrm{Im}(u) \xrightarrow{\bar{\bar{u}}} \mathrm{Ker}(v) \to B;$$

il est du reste clair que $\bar{\bar{u}}$ est *injectif* puisque, en le composant avec $\mathrm{Ker}(v) \to B$, on trouve l'homomorphisme injectif $\mathrm{Im}(u) \to B$.

Cela fait, nous dirons que la suite (1) est *exacte* si $v \circ u = 0$ et si $\bar{\bar{u}}$ est un *isomorphisme*. La notion de suite exacte à un nombre quelconque de termes se déduit de là de façon évidente.

Par exemple, un homomorphisme $u : A \to B$ est injectif si et seulement si la suite $0 \to A \xrightarrow{u} B$ est exacte; et quel que soit $u : A \to B$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}(u) \to A \xrightarrow{u} B \to \mathrm{Coker}(u) \to 0.$$

Tous les calculs valables pour les suites exactes de modules sont encore valables ici [1].

Considérons d'autre part deux catégories $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ vérifiant les axiomes précédents, et un foncteur covariant $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$; on dit que F est *additif* si, quels que soient $X, Y \in \mathfrak{K}$, l'application $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ induite par F est un homomorphisme de groupes abéliens. S'il en est ainsi, on dit que F est *exact à gauche* s'il transforme toute suite exacte de la forme

$$0 \to X \to Y \to Z$$

en une suite exacte

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z)$$

et on dit que F est *exact à droite* s'il transforme toute suite exacte de la forme

$$X \to Y \to Z \to 0$$

en une suite exacte

$$F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0;$$

si F est exact à gauche et à droite, on dit que F est *exact*; il est clair qu'alors F transforme toute suite exacte dans $\mathfrak{K}$ en une suite exacte dans $\mathfrak{K}'$.

(1) On trouvera à ce sujet des renseignements beaucoup plus complets dans un article de D. Buchsbaum (Exact categories and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), pp. 1-34).

Dans une catégorie $\mathfrak{K}$ vérifiant les axiomes (KA 1) et (KA 2) on a la notion d'objet *projectif* (resp. *injectif*) : A est projectif si le foncteur $X \to \mathrm{Hom}(A, X)$ est exact — en général ce foncteur est seulement exact à gauche; de même, A est injectif si le foncteur $X \to \mathrm{Hom}(X, A)$ est exact. Bien entendu, il n'existe pas toujours « suffisamment » d'objets projectifs, ou injectifs.

Pour parvenir à la notion de *catégorie abélienne* il nous reste à énoncer un axiome qui assure la possibilité de former, dans $\mathfrak{K}$, le *produit direct* de deux objets :

(KA 3) : *quels que soient* A, $B \in \mathfrak{K}$, *il existe un objet* $C \in \mathfrak{K}$ *et des homomorphismes*

$$p : C \to A, \qquad q : C \to B,$$

*tels que, pour tout* $X \in \mathfrak{K}$, *l'application*

$$\mathrm{Hom}(X, C) \to \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B)$$

*donnée par* $u \to (p \circ u, q \circ u)$ *soit bijective.*

Il est clair que le triple $(C, p, q)$ est unique à un isomorphisme près. D'autre part, on vérifie facilement qu'il existe des homomorphismes canoniques $i : A \to C$ et $j : B \to C$ tels que l'on ait les relations

$$q \circ i = p \circ j = 0; \qquad p \circ i = q \circ j = i \circ p + j \circ q = \text{identité}.$$

De ce point de vue, le « produit direct » de A et B s'identifie aussi à la « somme directe » de A et B.

Comme les axiomes (KA 1) et (KA 2) sont de toute évidence « auto-duals », on déduit de là que la catégorie duale d'une catégorie abélienne est une catégorie abélienne.

Nous allons maintenant donner un exemple important de catégorie abélienne, celle des « pré-faisceaux de groupes abéliens » sur un espace topologique. On verra au chapitre II, § 2, que la théorie des Faisceaux conduit aussi à des catégories abéliennes, qui possèdent la propriété de contenir suffisamment d'objets injectifs (mais non projectifs).

### 1. 9. — Préfaisceaux sur un espace topologique

Soit X un espace topologique, et considérons l'ensemble des parties ouvertes de X; on peut le considérer comme une *catégorie* en convenant que, pour deux ouverts U, $V \subset X$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(U, V)$ se réduit à un élément si $U \subset V$, et est vide dans le cas contraire (en sorte qu'il est superflu de définir la composition des homomorphismes). Cela dit, étant donnée une catégorie quelconque $\mathfrak{K}$, on appelle *préfaisceau de base* X *à valeurs dans* $\mathfrak{K}$ tout foncteur contravariant défini sur la catégorie des ouverts de X et à valeurs dans $\mathfrak{K}$.

Un préfaisceau $\mathcal{F}$ consiste donc à attacher un objet $\mathcal{F}(U) \in \mathfrak{K}$ à chaque ouvert $U \subset X$, et à se donner un homomorphisme

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

toutes les fois que $U \subset V$, ceci de telle sorte que les axiomes suivants soient vérifiés : $\rho_U^U$ est l'identité quel que soit U; si l'on a $U \subset V \subset W$, on a la relation

$$\rho_U^W = \rho_U^V \rho_V^W.$$

On dit que $\rho_U^V$ est l'homomorphisme de *restriction* de $\mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{F}(U)$.

Soient $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ deux préfaisceaux sur X, à valeurs dans $\mathfrak{K}$; comme il s'agit de foncteurs, on peut définir la notion d'*homomorphisme* $\theta : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$; un tel homomorphisme est une collection d'homomorphismes $\theta(U) : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}''(U)$ telle que, pour $U \subset V$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{\theta(V)} & \mathcal{F}''(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{\theta(U)} & \mathcal{F}''(U) \end{array}$$

(dont les flèches verticales sont les homomorphismes de restriction) soit toujours commutatif. Comme un homomorphisme de $\mathcal{F}'$ dans $\mathcal{F}''$ est un élément de *l'ensemble*

$$\prod_{U \subset X} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'(U), \mathcal{F}''(U)),$$

on voit que les homomorphismes de $\mathcal{F}'$ dans $\mathcal{F}''$ forment un *ensemble* que l'on note $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$. En définissant de façon évidente la composition de deux homomorphismes $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$, on déduit de là que *les préfaisceaux de base* X *donnée, à valeurs dans une catégorie donnée* $\mathfrak{K}$, *forment une nouvelle catégorie.*

Considérons le cas plus particulier où $\mathfrak{K}$ est une catégorie *abélienne;* il en est alors de même de la catégorie des préfaisceaux de base X à valeurs dans $\mathfrak{K}$. Il est tout d'abord clair que les ensembles $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ sont canoniquement des groupes abéliens, un préfaisceau étant de plus nul si $\mathcal{F}(U) = 0$ pour tout U. L'axiome (KA 1) des catégories abéliennes est vérifié trivialement; l'axiome (KA 3) l'est aussi : la somme directe $\mathcal{F} = \mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ s'obtient évidemment en posant

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}'(U) + \mathcal{F}''(U)$$

et en définissant de façon évidente les homomorphismes de restriction dans $\mathcal{F}$ (il est clair d'ailleurs qu'on pourrait même définir des sommes directes et des produits directs *infinis*); reste à vérifier l'axiome (KA 2). Soit donc un homomorphisme $\theta : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$. Pour chaque ouvert U de X, choisissons dans la catégorie $\mathfrak{K}$ une suite

$$\mathfrak{N}(U) \xrightarrow{i(U)} \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{p(U)} \mathfrak{I}(U) \xrightarrow{j(U)} \mathcal{F}''(U) \xrightarrow{q(U)} \mathfrak{N}^*(U)$$

d'objets et d'homomorphismes telle que $i(U), p(U), j(U)$ et $q(U)$ soient respectivement un noyau, une co-image, une image, et un co-noyau de l'homomorphisme $\theta(U) : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}''(U)$. Pour $U \subset V$, il existera d'après le n° précédent un diagramme commutatif *et un seul* de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{N}(V) & \to & \mathcal{F}'(V) & \to & \mathfrak{I}(V) & \to & \mathcal{F}''(V) & \to & \mathfrak{N}^*(V) \\ \downarrow & & \rho_U^V \downarrow & & \downarrow & & \rho_U^V \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{N}(U) & \to & \mathcal{F}'(U) & \to & \mathfrak{I}(U) & \to & \mathcal{F}''(U) & \to & \mathfrak{N}^*(U) \end{array} ;$$

il est alors clair que les applications $U \to \mathfrak{N}(U)$, $U \to \mathfrak{I}(U)$, $U \to \mathfrak{N}^*(U)$ définissent sur X des préfaisceaux à valeurs dans $\mathfrak{K}$, à condition de définir les homomorphismes de restrictions pour ces préfaisceaux à l'aide *du* diagramme précédent. De cette façon nous avons une suite

$$\mathfrak{N} \xrightarrow{i} \mathcal{F}' \xrightarrow{p} \mathfrak{I} \xrightarrow{j} \mathcal{F}'' \xrightarrow{q} \mathfrak{N}^*$$

de préfaisceaux et d'homomorphismes, et il est immédiat de vérifier que celle-ci satisfait, pour la catégorie des préfaisceaux à valeurs dans $\mathfrak{K}$, aux conditions énoncées dans l'axiome (KA 2) des catégories abéliennes.

Les préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathfrak{K}$ formant une catégorie abélienne, on peut définir dans celle-ci la notion de *suite exacte de préfaisceaux;* le lecteur vérifiera aisément que, pour qu'une suite

$$\cdots \to \mathcal{F}_{n-1} \to \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n+1} \to \cdots$$

soit exacte, il faut et il suffit que, pour tout ouvert U, la suite correspondante

$$\cdots \to \mathcal{F}_{n-1}(U) \to \mathcal{F}_n(U) \to \mathcal{F}_{n+1}(U) \to \cdots$$

soit exacte dans la catégorie $\mathfrak{K}$. Ceci montre entre autres que, pour tout ouvert U, le foncteur $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(U)$ est *exact*.

# 2, GÉNÉRALITÉS SUR LES COMPLEXES

Dans tout ce § on désigne par A un anneau avec élément unité [1]

## 2. 1. — Modules différentiels

On appelle A-*module différentiel à gauche* tout A-module à gauche X muni de la structure définie par la donnée d'un endomorphisme $d$ vérifiant $d^2 = 0$. Nous désignerons le plus souvent un A-module différentiel par une seule lettre X, mais il serait plus correct — et il sera parfois indispensable — de le désigner par $(X, d)$, de façon à mettre en évidence dans la notation le A-module X et la différentielle $d$.

Un *homomorphisme* $f : (X, d) \to (X', d')$ est un homomorphisme de A-modules assujetti à vérifier $d' \circ f = f \circ d$. Les A-modules différentiels à gauche forment évidemment une *catégorie*.

On définit de façon évidente les notions de sous-module différentiel et de module différentiel quotient d'un module différentiel donné. De même, on peut parler de suites exactes de modules différentiels.

Soit X un A-module différentiel. On pose

$$Z(X) = \mathrm{Ker}(d), \qquad B(X) = \mathrm{Im}(d),$$

(1) La plupart des définitions et des résultats de ce § peuvent se généraliser au cas où au lieu de la catégorie des A-modules à gauche, on part d'une catégorie abélienne quelconque; nous laisserons au lecteur le soin d'examiner en détail cette situation plus générale (laquelle *n'est pas*, comme on pourrait le croire, dépourvue d'intérêt pratique).

de sorte que $B(X) \subset Z(X)$, ce qui permet de définir le *module dérivé*

$$H(X) = Z(X)/B(X)$$

de X. Tout homomorphisme $f : X \to Y$ de A-modules différentiels applique $Z(X)$ dans $Z(Y)$ et $B(X)$ dans $B(Y)$, donc définit un homomorphisme de A-modules $f^* : H(X) \to H(Y)$.

On peut donc considérer $X \to H(X)$ comme un *foncteur covariant* défini sur la catégorie des A-modules différentiels et à valeurs dans celle des A-modules.

***Théorème*** 2.1.1. — *Soit*

$$0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$$

*une suite exacte de modules différentiels; alors il existe un homomorphisme*

$$\partial : H(X'') \to H(X')$$

*tel que la suite*

$$\begin{tikzcd} & H(X) \arrow[dr, "g^*"] & \\ H(X') \arrow[ur, "f^*"] & & H(X'') \arrow[ll, "\partial"] \end{tikzcd}$$

*soit exacte. Si de plus on a un diagramme commutatif de suites exactes*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

*alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H(X'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "u^*"'] & H(X') \arrow[d, "v^*"'] \\ H(Y'') \arrow[r, "\partial"] & H(Y') \end{tikzcd}$$

*est commutatif.*

L'homomorphisme $\partial$ se définit comme suit. Soit $\xi'' \in H(X'')$, et prenons un $z'' \in Z(X'')$ représentant $\xi''$; comme $g$ est surjectif on peut écrire $z'' = g(x)$ pour un $x \in X$, et comme on a $g(dx) = dz'' = 0$ il vient par exactitude $dx \in f(X')$, et même $dx = f(z')$ avec $dz' = 0$; d'autre part, comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, l'élément $x$ est unique modulo un élément de la forme $dy + f(x')$, et par suite $dx$ unique modulo un élément de la forme $f(dx')$; comme $f$ est injectif, il s'ensuit que l'élément $z'$ est unique modulo $B(X')$, donc définit une classe $\xi' \in H(X')$ qui ne dépend que de $\xi''$: l'homomorphisme $\partial$ consiste alors à transformer $\xi''$ en $\xi'$.

On laisse au lecteur le soin de démontrer le Théorème précédent à titre d'exercice.

Un autre résultat important est que *le foncteur* $X \to H(X)$ *est compatible avec la formation des limites inductives.* Donnons-nous en effet une famille $(X_i)_{i \in I}$ de

A-modules différentielles, supposons I filtrant décroissant, et enfin donnons-nous pour $i \geqslant j$ un homomorphisme de A-modules différentiels $f^i_j : X_i \to X_j$, satisfaisant aux conditions de transitivité requises. Il est clair que les différentielles des $X_i$ donnent à la limite une différentielle $d$ sur le A-module

$$X = \text{lim. ind. } X_i,$$

et que les applications canoniques $f^i : X_i \to X$ sont des homomorphismes de modules différentiels. Considérons maintenant la famille des modules dérivés $H(X_i)$, et les homomorphismes $H(X_i) \to H(X_j)$ déduits des $f^i_j$ : on peut alors considérer le A-module lim. ind. $H(X_i)$, et les homomorphismes $X_i \to X$ définissent, en vertu de la caractérisation « universelle » des limites inductives, un homomorphisme

$$\text{lim. ind. } H(X_i) \to H(X);$$

cela dit, *cet homomorphisme est bijectif.*

Pour le voir on utilise essentiellement le fait qu'une limite inductive de suites exactes est encore exacte; passant à la limite dans la suite exacte

$$0 \to Z(X_i) \to X_i \xrightarrow{d} B(X_i) \to 0$$

on obtient en effet les identifications

$$Z(X) = \text{lim. ind. } Z(X_i), \qquad B(X) = \text{lim. ind. } B(X_i),$$

et en passant à la limite dans la suite exacte

$$0 \to B(X_i) \to Z(X_i) \to H(X_i) \to 0$$

on trouve alors le résultat cherché.

Soient X un A-module différentiel à droite et L un A-module à gauche; on peut alors considérer $X \otimes_A L$, muni de la différentielle $d \otimes 1$, comme un module différentiel (sur l'anneau $\mathbf{Z}$ en général, sur A si A est commutatif). On notera qu'on a un homomorphisme canonique

$$H(X) \otimes_A L \to H(X \otimes_A L)$$

comme suit : soient $\xi \in H(X)$ et $a \in L$; représentons $\xi$ par un $x \in X$ annulé par $d$; comme $x$ est unique modulo un élément de la forme $dx'$, $x \otimes a$ définit une classe dans $H(X \otimes_A L)$ qui dépend uniquement de $\xi$ et de $a$; d'où une application *bilinéaire* $H(X) \times L \to H(X \otimes_A L)$ qui définit l'homomorphisme cherché. Bien entendu l'homomorphisme considéré est bijectif dès que L est un A-module *plat*, puisqu'alors le foncteur $X \to X \otimes_A L$ est exact.

De même soient X un A-module différentiel à gauche et L un A-module à gauche; alors on peut munir le groupe abélien Hom(X, L) d'une différentielle — à savoir $u \to u \circ d$ — ainsi que le groupe abélien Hom(L, X) — à savoir $u \to d \circ u$. Prenons un $u \in \mathrm{Hom}(X, L)$ tel que $u \circ d = 0$; il est clair que $u$ est nul sur B(X), de sorte que $u$ induit un homomorphisme $H(X) \to L$; de cette façon on trouve un homomorphisme canonique

$$H(\mathrm{Hom}_A(X, L)) \to \mathrm{Hom}_A(H(X), L)),$$

et on définirait de la même façon un homomorphisme

$$H(\mathrm{Hom}_A(L, X)) \to \mathrm{Hom}_A(L, H(X)).$$

Le premier de ces homomorphismes est *bijectif quel que soit* X si et seulement si le A-module L est *injectif*, et le second homomorphisme est bijectif quel que soit X si et seulement si L est *projectif* : cela résulte aussitôt des définitions.

## 2. 2. — Complexes

Étant donné un anneau de base A, on appelle *A-module gradué* toute suite $X = (X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de A-modules; on dit que $X_n$ est la composante de degré $n$ de X, et les éléments de $X_n$ s'appellent, par abus de langage, les éléments de degré $n$ de X. De même, on appelle *A-module bigradué* toute famille $X = (X_{pq})_{p, q \in \mathbf{Z}}$ de A-modules.

Soit X un A-module gradué, formé de A-modules à gauche; si L est un A-module à droite, on désigne par $L \otimes_A X$ le groupe abélien gradué dont la composante de degré $n$ est le groupe $L \otimes_A X_n$ ; si L est un A-module à gauche, on désigne par $\mathrm{Hom}_A(X, L)$ le groupe abélien gradué dont la composante de degré $n$ est le groupe $\mathrm{Hom}_A(X_n, L)$.

Soient X et Y deux A-modules à gauche gradués; par un *homomorphisme de degré* $r$ de X dans Y, on entend toute collection $f = (f_n)$ d'homomorphismes $f_n : X_n \to Y_{n+r}$ de A-modules; si $r = 0$ on dit que $f$ est un *homomorphisme* de X dans Y. On définit de façon évidente la somme de deux homomorphismes de même degré $X \to Y$, et le produit d'un homomorphisme $X \to Y$ de degré $r$ et d'un homomorphisme $Y \to Z$ de degré $s$. Si l'on associe à tout couple X, Y de A-modules à gauche gradués le groupe abélien Hom(X, Y) formé des homomorphismes (de degré 0) de X dans Y, il est clair qu'on obtient sur la collection des A-modules à gauche gradués une structure de *catégorie abélienne*.

On appelle *complexe* sur l'anneau de base A tout A-module gradué X muni de la structure définie par la donnée d'un homomorphisme $d : X \to X$ d'un certain degré $r$, tel que $d \circ d = 0$. Les deux cas les plus importants sont les suivants :

Les *complexes de chaînes;* on suppose $X_n = 0$ pour $n < 0$, et $d$ de degré $-1$. Pour des raisons « géométriques », les éléments de $X_n$ s'appellent les chaînes de dimension $n$ de X, $d$ s'appelle l'opérateur bord de X; un $x \in X_n$ est un *cycle* si $dx = 0$, et un *bord* s'il existe $x' \in X_{n+1}$ tel que $x = dx'$. Dans $X_n$, les cycles forment un sous-module $Z_n(X)$, les bords un sous-module $B_n(X)$, et on appelle *groupe d'homologie pour la dimension n* de X le quotient

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X).$$

Les *complexes de cochaînes;* on suppose $X_n = 0$ pour $n < 0$, et $d$ de degré $+ 1$. On écrit alors généralement $X^n$ au lieu de $X_n$, on parle de cochaînes, de cocycles et de cobords de degré $n$ au lieu de chaînes, de cycles et de bords de dimension $n$; en posant

$$Z^n(X) = \mathrm{Ker}(X^n \xrightarrow{d} X^{n+1}), \quad B^n(X) = \mathrm{Im}(X^{n-1} \xrightarrow{d} X^n)$$

on définit les *groupes de cohomologie* de X, à savoir

$$H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X).$$

Étant donné un complexe quelconque $X = (X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, on définit bien entendu comme dans le cas des complexes de chaînes les modules $Z_n(X)$, $B_n(X)$ et $H_n(X)$. On pose souvent $H_*(X) = (H_n(X))_{n\in\mathbf{Z}}$.

Étant donnés deux complexes X et Y de A-modules à gauche, dont les différentielles $d$ sont de même degré, on appelle *homomorphisme* de X dans Y tout homomorphisme de A-modules gradués compatible avec les opérateurs $d$ de X et Y; ces homomorphismes s'additionnent et se composent de façon évidente, de sorte que les complexes de A-modules à gauche, pour lesquels la différentielle $d$ est de degré $r$ donné, forment une *catégorie abélienne* comme on le voit aussitôt; et sur cette catégorie, les applications $X \to H_n(X)$ sont des foncteurs covariants additifs, à valeurs dans la catégorie des A-modules à gauche. Si X et Y sont des complexes de chaînes (resp. de cochaînes), les homomorphismes $H_n(X) \to H_n(Y)$ (resp. $H^n(X) \to H^n(Y)$) attachés à un homomorphisme $f\colon X \to Y$ se notent souvent $f_*$ (resp. $f^*$) au lieu de $H_n(f)$ (resp. $H^n(f)$).

Soit

$$0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$$

une suite exacte de complexes, dont les différentielles sont de degré $r$; on définit alors, par une construction similaire à celle du nº 2.1, des homomorphismes

$$\partial : H_n(X'') \to H_{n+r}(X'),$$

de telle sorte que l'on ait $r$ suites exactes

$$\cdots\ H_n(X') \xrightarrow{f_*} H_n(X) \xrightarrow{g_*} H_n(X'') \xrightarrow{\partial} H_{n+r}(X') \xrightarrow{f_*} \cdots\ .$$

En particulier, s'il s'agit d'une suite exacte de *complexes de chaînes* on trouve la *suite exacte d'homologie* que voici :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cdots \to H_n(X') \to H_n(X) \to H_n(X'') \to H_{n-1}(X') \to \cdots \\ \qquad \cdots \to H_1(X'') \to H_0(X') \to H_0(X) \to H_0(X'') \to 0\end{array}}$$

si au contraire il s'agit de *complexes de cochaînes*, on trouve une *suite exacte de cohomologie*

$$\boxed{\begin{array}{l}\quad 0 \to H^0(X') \to H^0(X) \to H^0(X'') \to H^1(X') \to \cdots \\ \cdots \to H^n(X') \to H^n(X) \to H^n(X'') \to H^{n+1}(X') \to \cdots\end{array}}$$

Soient X un complexe de A-modules à gauche et L un A-module à droite; on peut alors munir le groupe gradué $L \otimes_A X$ d'une structure de complexe à l'aide des homomorphismes

$$1 \otimes d : L \otimes X_n \to L \otimes X_{n+r};$$

on a de façon évidente des homomorphismes canoniques

$$L \otimes_A H_n(X) \to H_n(L \otimes_A X).$$

De même, si L est un A-module à gauche, on obtient, en transposant $d$, une différentielle sur le groupe gradué $\mathrm{Hom}_A(X, L)$, laquelle est de degré $-r$ si $d$ est de degré $r$.

En particulier soit X un complexe de chaînes sur l'anneau des entiers; étant donné un groupe abélien L, on désignera souvent les groupes d'homologie du complexe de chaînes $X \otimes L$ par $H_n(X; L)$, et les groupes de cohomologie du complexe de cochaînes $\mathrm{Hom}(X, L)$ par $H^n(X; L)$.

## 2. 3. — Complexes augmentés ; résolutions

Soit X un complexe de chaînes (resp. de cochaînes) sur l'anneau de base A; on appelle *augmentation* de X tout homomorphisme de A-modules

$$\varepsilon : X_0 \to A \qquad (\text{resp. } \varepsilon : A \to X^0)$$

tel que l'on ait $\varepsilon \circ d = 0$ (resp. $d \circ \varepsilon = 0$); un *complexe augmenté* est un complexe muni d'une augmentation.

Il est clair que, étant donné un complexe de chaînes (resp. de cochaînes) augmenté X, on a un homomorphisme canonique

$$H_0(X) \to A \qquad (\text{resp. } A \to H^0(X)).$$

On dit que X est *acyclique* si cet homomorphisme est *bijectif* et si de plus on a $H_n(X) = 0$ (resp. $H^n(X) = 0$) pour $n \geqslant 1$; cela signifie que la suite

$$\cdots \to X_1 \xrightarrow{d} X_0 \to A \to 0$$

(resp.

$$0 \to A \to X^0 \xrightarrow{d} X^1 \to \cdots)$$

est *exacte*.

Si X est un complexe de chaînes augmenté, on peut définir un nouveau complexe $\hat{X}$ comme suit:

$$\hat{X}_n = \begin{cases} X_n & \text{pour} \quad n \geqslant 0 \\ A & \text{pour} \quad n = -1 \,, \\ 0 & \text{pour} \quad n < -1 \end{cases}$$

la différentielle de $\hat{X}$ coïncidant avec celle de X en dimension $n \geqslant 1$ et avec l'augmentation $\varepsilon$ en dimension 0; dire que X est acyclique signifie que *tous* les groupes dérivés de $\hat{X}$ sont nuls. On a un résultat analogue pour les complexes de cochaînes augmentés.

Notons enfin la notion d'*homomorphisme* pour des complexes augmentés : c'est un homomorphisme de complexes, compatible avec les augmentations données.

La notion de complexe augmenté acyclique se généralise comme suit. Soit L un A-module à gauche; on appelle *résolution homologique* de L toute *suite exacte* de A-modules à gauche, de la forme

$$\ldots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to L \to 0 \;;$$

le module gradué $X = (X_n)_{n \in Z}$ est alors un complexe de chaînes si on le munit de la différentielle qui résulte des homomorphismes $X_n \to X_{n-1}$ donnés (on prend donc $d = 0$ en dimension 0), et ses groupes d'homologie sont donnés par

$$H_n(X) = 0 \qquad \text{pour } n \geqslant 1\,; \qquad H_0(X) = L.$$

De même, on appelle *résolution cohomologique* de L toute suite exacte

$$0 \to L \to X^0 \to X^1 \to X^2 \to \ldots;$$

dans ce cas, $X = (X^n)_{n \in Z}$ est un complexe de cochaînes, et l'on a

$$H^n(X) = 0 \text{ pour } n \geqslant 1\,; \qquad H^0(X) = L.$$

Un complexe de chaînes (resp. de cochaînes) augmenté et acyclique est donc une résolution homologique (resp. cohomologique) du A-module A.

Pour construire une résolution homologique d'un module L, on écrit,

$$L = X_0/R_0 \;, \qquad R_0 = X_1/R_1 \;, \qquad R_1 = X_2/R_2, \;\ldots,$$

on définit l'homomorphisme $X_0 \to L$ de façon évidente, et l'homomorphisme $X_n \to X_{n-1}$ en composant la surjection $X_n \to R_{n-1}$ avec l'injection

$R_{n-1} \to X_{n-1}$. Une méthode analogue s'applique à la construction des résolutions cohomologiques de L.

Soient L et M des A-modules, et considérons des résolutions homologiques de L et M :

$$\ldots \to X_1 \to X_0 \to L \to 0$$
$$\ldots \to Y_1 \to Y_0 \to M \to 0;$$

soit un homomorphisme $f$: L $\to$ M; on dit alors qu'un homomorphisme de complexes $g$ : X $\to$ Y est *compatible avec f* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif. Bien entendu, X, Y et $f$ étant donnés, il n'est pas toujours possible de trouver un homomorphisme $g$ : X $\to$ Y compatible avec $f$.

On a une notion analogue relativement aux résolutions cohomologiques.

## 2. 4. — Opérateurs d'homotopie

Soient X et Y deux A-modules différentiels, et des homomorphismes

$$f_0, f_1 : X \to Y;$$

on dit que $f_0$ et $f_1$ sont *homotopes* s'il existe une application A-linéaire $h$ : X $\to$ Y telle que l'on ait

$$f_1 - f_0 = h \circ d + d \circ h.$$

Si $dx = 0$ on a alors $f_1(x) - f_0(x) = d(h(x))$; par conséquent, *les homomorphismes* H(X) $\to$ H(Y) *définis par* $f_0$ *et* $f_1$ *sont identiques.*

Noter que la relation « $f_0$ et $f_1$ sont homotopes » est une *relation d'équivalence*, comme on le voit aussitôt.

On dit que deux A-modules différentiels X et Y sont *homotopiquement équivalents* s'il existe des homomorphismes $f$: X $\to$ Y et $g$: Y $\to$ X tels que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité; les modules dérivés de X et Y sont alors isomorphes. En particulier on dit qu'un A-module différentiel X est *homotope à zéro* (ou *homotopiquement trivial*) si les endomorphismes 1 et 0 de X sont homotopes; évidemment on a alors H(X) = 0 — la réciproque n'étant pas exacte. On a du reste le résultat suivant :

**Théorème** 2.4.1. — *Soit* X *un* A-*module différentiel à gauche; pour que* X *soit homotopiquement trivial il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soient vérifiée :*

(*a*) : H(X) = 0 *et* Z(X) *est facteur direct de* X;

(*b*) : *pour tout* A-*module à gauche* L, *le groupe différentiel*

$$\mathrm{Hom}_A(X, L)$$

*est acyclique.*

Supposons X homotopiquement trivial; il est clair que $H(X) = 0$, et que $\mathrm{Hom}(X,L)$ est homotopiquement trivial, donc acyclique; or, pour $u \in \mathrm{Hom}(X,L)$, la relation $du = 0$ signifie que $u$ est nul sur $B(X) = Z(X)$, et l'existence d'un $v \in \mathrm{Hom}(X, L)$ tel que $u = dv$, i.e. tel que $u = v \circ d$, signifie que l'homomorphisme $v : Z(X) \to L$ défini (sans ambiguïté si $du = 0$) par $v(dx) = u(x)$ peut se prolonger à X. Si donc X est homotopiquement trivial, on voit — en attachant à tout $v : Z(X) \to L$ l'homomorphisme $u = v \circ d : X \to L$ — que tout homomorphisme $Z(X) \to L$ se prolonge à X; cela montre que $Z(X)$ est facteur direct de X.

Réciproquement, supposons (*a*) vérifié et soit $M \subset X$ un supplémentaire de $Z(X)$ dans X; tout $x \in X$ s'écrit sous la forme $x = m + dy$ et même sous la forme $x = m + dm'$, avec $m, m' \in M$ univoquement déterminés par $x$; posant $m' = h(x)$ il est clair que $1 = h \circ d + d \circ h$.

De même, si (*b*) est vérifié, le raisonnement utilisé dans la partie directe de la démonstration montre que tout homomorphisme $X \to L$ nul sur $B(X)$ est de la forme $v \circ d$ avec un $v : X \to L$, donc, en particulier, est nul sur $Z(X)$ — ce qui implique $B(X) = Z(X)$; de plus on voit comme ci-dessus que tout homomorphisme $Z(X) \to L$ peut se prolonger à X, ce qui exige que $Z(X)$ soit facteur direct de X; d'où le Théorème.

Soient maintenant X et Y deux complexes de A-modules à gauche, dont les différentielles sont de degré $r$; deux homomorphismes $f_0, f_1 : X \to Y$ sont dits homotopes s'il existe un homomorphisme de modules gradués $h : X \to Y$, de degré $-r$, tel que

$$f_1 - f_0 = h \circ d + d \circ h.$$

Il est clair qu'alors les homomorphismes $H_n(X) \to H_n(Y)$ définis par $f_0$ et $f_1$ sont égaux.

Il est clair que le Théorème 2.4.1 s'étend, moyennant des modifications triviales, aux complexes de A-modules.

## 2. 5. — Le théorème des modèles acycliques

Dans ce n° nous appellerons *complexe* tout complexe de A-modules à gauche dont la différentielle $d$ est de degré $-1$. Un complexe X sera dit *acyclique en dimension n* si $H_n(X) = 0$, et *acyclique* s'il est acyclique en toute dimension. Les complexes forment évidemment une catégorie abélienne.

Soit $\mathfrak{K}$ une catégorie quelconque; nous aurons à considérer des foncteurs covariants définis sur $\mathfrak{K}$ et à valeurs dans la catégorie des complexes. Un tel foncteur F s'identifie à une suite $(F_n)$ de foncteurs covariants à valeurs dans la catégorie des A-modules à gauche, suite munie d'homomorphismes de foncteurs $d_n : F_n \to F_{n-1}$ tels que l'on ait $d_{n-1} \circ d_n = 0$ pour tout $n$.

Supposons donné une fois pour toutes un *ensemble* $\mathfrak{M}$ d'objets de $\mathfrak{K}$; nous dirons que le couple $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ est une *catégorie avec modèles*, et que les $X \in \mathfrak{M}$ sont les *objets modèles* de cette catégorie.

Un foncteur covariant F défini sur $\mathfrak{K}$ et à valeurs dans la catégorie des complexes sera dit *acyclique en dimension n* si le complexe F(X) est acyclique en dimension $n$ pour tout *modèle* $X \in \mathfrak{M}$.

D'autre part, un foncteur covariant G défini sur $\mathfrak{K}$ et à valeurs dans la catégorie des A-modules à gauche sera dit *représentable* (¹) lorsque la condition suivante est réalisée : *pour chaque* $M \in \mathfrak{M}$ *il existe un ensemble* $B_M \subset G(M)$ *tel que, pour chaque* $X \in \mathfrak{K}$, *le* A-*module* G(X) *admette pour base la famille des éléments*

$$G(u)m$$

*où m décrit les divers ensembles* $B_M$ *et où, pour* $m \in B_M$, *u décrit l'ensemble* Hom(M, X). Cela signifie donc que tout $x \in G(X)$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$x = \sum \lambda_i . G(u_i)m_i$$

avec des $m_i \in B_{M_i}$, des $u_i \in \mathrm{Hom}(M_i, X)$, et des $\lambda_i \in A$.

Si G est représentable on a donc pour chaque $X \in \mathfrak{K}$ une base canoniquement définie de G(X), et tout homomorphisme $X \to Y$ applique la base de G(X) dans celle de G(Y).

**Théorème** 2.5.1. — *Soient* $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ *une catégorie avec modèles, et* F, G *deux foncteurs covariants définis sur* $\mathfrak{K}$ *et à valeurs dans la catégorie des complexes. Supposons le foncteur* $F_p$ *représentable, et le foncteur* G *acyclique en dimension q, où p et q sont des entiers donnés. Alors pour tout homomorphisme* $T : F_p \to G_q$ *vérifiant* $d \circ T = 0$ *il existe un homomorphisme* $T' : F_p \to G_{q+1}$ *tel que* $T = d \circ T'$.

Pour définir l'homomorphisme

$$T'(X) : F_p(X) \to G_{q+1}(X)$$

il suffit de le faire sur une base du A-module $F_p(X)$. Par hypothèse il existe pour tout $M \in \mathfrak{M}$ un ensemble $B_M \subset F_p(M)$ tel que $F_p(X)$ admette pour base la famille des $F_p(u)m$ ($m \in B_M$, $M \in \mathfrak{M}$, $u \in \mathrm{Hom}(M, X)$); il suffit donc de définir $T'(X)$ sur les éléments de ce type, et on pourra d'ailleurs choisir arbitrairement les valeurs de $T'(X)$ sur ces éléments; mais comme $T'$ doit être

(¹) La définition qui suit est un peu moins générale que celle que l'on doit à S. Eilenberg et S. MacLane; elle suffira cependant pour toutes les applications que nous avons en vue.

*naturel* on aura nécessairement

$$T'(X)F_p(u)m = G_{q+1}(u)T'(M)m;$$

en conséquence il suffit de construire les éléments $T'(M)m \in G_{q+1}(M)$. Ceux-ci sont du reste assujettis à la *seule* condition de vérifier

$$d(T'(M)m) = T(M)m;$$

reste à montrer qu'on peut effectivement trouver dans $G_{q+1}(M)$ un élément qui la vérifie : mais c'est évident puisque par hypothèse on a

$$d(T(M)m) = 0, \qquad H_q(G(M)) = 0.$$

D'où le Théorème.

Le Théorème précédent a d'importantes conséquences, dont voici la principale.

Considérons sur $\mathfrak{K}$ deux foncteurs covariants F et G à valeurs dans la catégorie des *complexes de chaînes* sur l'anneau de base A. Pour tout entier $n$, nous considérerons les foncteurs covariants

$$\begin{aligned} H_n(F) &: X \to H_n(F(X)), \\ H_n(G) &: X \to H_n(G(X)); \end{aligned}$$

si l'on a un homomorphisme $T : F \to G$ on en déduit évidemment des homomorphismes $T_* : H_n(F) \to H_n(G)$.

Nous dirons d'autre part que deux homomorphismes $T_0, T_1 : F \to G$ sont *homotopes* s'il existe pour chaque $n$ un homomorphisme $D_n : F_n \to G_{n+1}$ tel que l'on ait $T_1 - T_0 = d \circ D_n + D_{n-1} \circ d$ en degré $n$. Il est clair qu'alors les homomorphismes dérivés $H_n(F) \to H_n(G)$ définis par $T_0$ et $T_1$ sont identiques.

Supposons enfin donné dans $\mathfrak{K}$ un ensemble $\mathfrak{M}$ de modèles; nous dirons que F est *représentable* si chaque foncteur $F_n (n \geqslant 0)$ est représentable, et que G est *acyclique* si l'on a

$$H_n(G(M)) = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 1 \text{ et tout } M \in \mathfrak{K}.$$

**Théorème** 2.5.2. — *Soit* $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ *une catégorie avec modèles,* F *et* G *deux foncteurs covariants sur* $\mathfrak{K}$, *à valeurs dans la catégorie des complexes de chaînes sur l'anneau* A. *Supposons* F *représentable et* G *acyclique. Alors tout homomorphisme* $H_0(F) \to H_0(G)$ *est induit par un homomorphisme* $F \to G$, *unique à une homotopie près.*

Considérons en effet le foncteur $\hat{G}$, à valeurs dans la catégorie des complexes, et défini comme suit :

$$\hat{G}_n = \begin{cases} G_n & \text{pour } n \geqslant 0, \\ H_0(G) & \text{pour } n = -1, \\ 0 & \text{pour } n < -1, \end{cases}$$

la différentielle de $\hat{G}$ se réduisant à celle de G en dimension $n \geqslant 1$ et se réduisant, en dimension 0, à l'homomorphisme canonique $\pi_G : G_0 \to H_0(G)$. Il est clair que le foncteur $\hat{G}$ est acyclique en *toute* dimension.

Cela étant, donnons-nous un homomorphisme

$$U : H_0(F) \to H_0(G)$$

et composons-le avec l'homomorphisme canonique $\pi_F : F_0 \to H_0(F)$; on obtient une transformation naturelle

$$U \circ \pi_F : F_0 \to \hat{G}_{-1}$$

évidemment annulée par $d$; comme $F_0$ est représentable et $\hat{G}$ acyclique il existe donc un homomorphisme

$$T_0 : F_0 \to G_0$$

tel que

$$U \circ \pi_F = \pi_G \circ T_0.$$

Cela fait, considérons

$$T_0 \circ d : F_1 \to G_0;$$

cet homomorphisme est annulé par $d$; d'après le même raisonnement il existe donc un homomorphisme $T_1 : F_1 \to G_1$ tel que l'on ait

$$T_0 \circ d = d \circ T_1;$$

il est clair qu'en poursuivant indéfiniment la construction on parvient à un homomorphisme $F \to G$ qui induit U.

Reste à prouver que si un homomorphisme $T : F \to G$ induit 0 sur l'homologie de dimension 0, il est homotope à 0. Or comme on a $d \circ T_0 = 0$ le Théorème précédent prouve l'existence d'un homomorphisme $D_0 : F_0 \to G_1$ tel que $T_0 = d \circ D_0$; on a alors $d \circ (T_1 - D_0 \circ d) = 0$, d'où $D_1 : F_1 \to G_2$ tel que $T_1 - D_0 \circ d = d \circ D_1$, et ainsi de suite indéfiniment.

**Corollaire.** — *Soient* $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ *une catégorie avec modèles, et* F, G *deux foncteurs covariants sur* $\mathfrak{K}$, *à valeurs dans la catégorie des complexes de chaînes sur l'anneau de base* A. *Supposons* F *et* G *représentables et acycliques, et les foncteurs* $H_0(F)$ *et* $H_0(G)$ *isomorphes. Alors* F *et* G *sont homotopiquement équivalents.*

En particulier, pour tout $X \in \mathfrak{K}$, les complexes $F(X)$ et $G(X)$ ont même homologie en toute dimension.

On laisse au lecteur le soin d'expliciter les résultats précédents dans le cas où la catégorie $\mathfrak{K}$ contient *un seul* objet.

## 2. 6. — Complexes doubles

On appelle *complexe double* sur l'anneau de base A tout A-module bigradué $X = (X_{pq})_{p,\,q \in Z}$ muni de la structure définie par la donnée d'homomorphismes

$$d' : X_{pq} \to X_{p+r,\,q}\,, \qquad d'' : X_{pq} \to X_{p,\,q+r}$$

vérifiant les relations

$$d'd' = d''d'' = d'd'' + d''d' = 0.$$

On déduit alors de là un complexe (simple) comme suit : sa composante de degré $n$ est donnée par

$$X_n = \sum_{p+q=n} X_{pq}$$

et sa différentielle

$$d : X_n \to X_{n+r}$$

est donnée par $d = d' + d''$. Les modules dérivés de ce complexe se notent $H_n(X)$.

On peut encore déduire de X deux autres complexes. Le premier, noté $'X$, a pour composantes homogènes les modules

$$'X_n = \sum_q X_{nq},$$

et est muni de la différentielle $d'$; on note ses modules dérivés $'H_n(X)$. Le second, noté $''X$, a pour composantes homogènes les modules

$$''X_n = \sum_p X_{pn}$$

et est muni de la différentielle $d''$; on note $''H_n(X)$ ses modules dérivés.

On remarquera que chaque module $'H_p(X)$ admet une décomposition en somme directe

$$'H_p(X) = \sum_q {'H_p}(''X_q),$$

où bien entendu $'H_p(''X_q)$ est le module dérivé pour la dimension $p$ du complexe obtenu en munissant le module gradué $(X_{pq})_{p \in Z}$ de la différentielle $d'$. De plus la différentielle $d''$, commutant à $d'$ au signe près, induit des homomorphismes

$$d''_* : {'H_p}(''X_q) \to {'H_p}(''X_{q+r})$$

qui permettent donc de former un complexe à l'aide des $'H_p(''X_q)$ ($p$ fixé, $q$ variable) ; le module dérivé pour la dimension $q$ de ce complexe se note

$$''H_q('H_p(X)).$$

On définirait de façon analogue des modules

$$'H_p(''H_q(X)).$$

On appelle *double complexe de chaînes* un double complexe X pour lequel on a $r = -1$ et $X_{pq} = 0$ lorsque $p < 0$ ou $q < 0$. On appelle *double complexe de cochaînes* un double complexe X pour lequel $r = +1$, et $X_{pq} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$; on écrit alors $X^{pq}$ au lieu de $X_{pq}$, etc...

On notera que la notion de complexe double a un sens dans toute catégorie abélienne; mais on ne peut en général définir les termes $H_*(X)$, à moins d'admettre qu'on peut, dans la catégorie considérée, former des sommes directes infinies, ou à moins de se limiter aux doubles complexes pour lesquels les sommes

$$\sum_{p+q=n} X_{pq}$$

sont finies (cas, par exemple, des doubles complexes de chaînes ou de cochaînes)

**2. 7. — Produit tensoriel de deux complexes**

Sur l'anneau de base A, considérons un complexe X de A-modules à droite et un complexe Y de A-modules à gauche, dont on supposera les différentielles de degré $-1$. Formons le groupe bigradué

$$X \otimes_A Y = (X_p \otimes_A Y_q)_{p,\, q \in \mathbf{Z}};$$

on peut le munir de deux différentielles en posant

$$d'(a \otimes b) = da \otimes b$$
$$d''(a \otimes b) = (-1)^p . a \otimes db \qquad \text{pour } a \text{ de degré } p.$$

Il est immédiat de vérifier que $X \otimes Y$ se trouve alors muni d'une structure de double complexe, dont la différentielle totale est donnée par

$$(1) \qquad d(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^p . a \otimes db \qquad \text{pour } a \text{ de degré } p.$$

Si X et Y sont des complexes de chaînes, $X \otimes Y$ est un double complexe de chaînes.

On a des homomorphismes canoniques

$$\boxed{H_p(X) \otimes_A H_q(Y) \to H_{p+q}(X \otimes_A Y)}$$

définis comme suit; prenons des classes $\xi \in H_p(X)$ et $\eta \in H_q(Y)$, et représentons-les par des cycles $a \in X_p$ et $b \in Y_q$; en vertu de (1), $a \otimes b$ est un cycle de degré $p + q$, donc définit un élément de $H_{p+q}(X \otimes Y)$; celui-ci est indépendant des choix de $a$ et $b$, car tout autre choix possible de représentants de $\xi$ et $\eta$ est de la forme $a + da'$, $b + db'$; or on a, puisque $da = db = 0$ :

$$(a + da') \otimes (b + db') = a \otimes b + d(a' \otimes b + a' \otimes db' + (-1)^p a \otimes b')$$

si $a$ est de degré $p$, d'où notre assertion. Ceci dit, l'homomorphisme (2) est défini par la condition d'appliquer $\xi \otimes \eta$ sur la classe du cycle $a \otimes b$.

On déduit de (2) des homomorphismes canoniques

$$\sum_{p+q=n} H_p(X) \underset{A}{\otimes} H_q(Y) \rightarrow H_n(X \underset{A}{\otimes} Y)\,; \tag{3}$$

si l'on munit le produit tensoriel $H_*(X) \otimes H_*(Y)$ de sa graduation totale, on voit donc qu'on a un homomorphisme de groupes *gradués*

$$H_*(X) \otimes H_*(Y) \rightarrow H_*(X \otimes Y).$$

Cet homomorphisme n'est généralement pas bijectif; nous l'étudierons de façon beaucoup plus détaillée au § 5.

Cependant, si X et Y sont *homotopiquement triviaux*, il en est de même de $X \otimes Y$ (muni de sa graduation et de sa différentielle « totales ») : la démonstration est immédiate. Dans ce cas, les homomorphismes (3) sont évidemment bijectifs...

## 2. 8. Complexes d'homomorphismes

Soient X et Y deux complexes de A-modules à gauche; on supposera la différentielle de X de degré $-1$, et celle de Y de degré $+1$. Par définition, nous poserons

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y) = (\mathrm{Hom}_A(X_p, Y^q))_{p,\ q \in \mathbf{Z}}.$$

Il est clair que Hom(X, Y) est un groupe bigradué; nous allons le munir de deux différentielles $d'$ et $d''$, de façon à en faire un double complexe. Étant donné un homomorphisme $u : X_p \rightarrow Y^q$ nous poserons

$$d'u = u \circ d;\ d''u = (-1)^{p+q+1}\, d \circ u.$$

Il est immédiat de voir que $d'$ et $d''$ sont de bidegrés $(1,0)$ et $(0,1)$ et que $d'd'' + d''d' = 0$.

On remarquera que pour $x \in X$ et $u : X_p \rightarrow Y^q$ on a

$$d(u(x)) = (du)(x) + (-1)^{p+q}.\, u(dx)$$

(en convenant bien entendu de prendre $u = 0$ sur $X_r$ pour $r \neq p$); comme $u$

est de degré total $p + q$ dans le double complexe $\mathrm{Hom}(X, Y)$, cette formule exprime que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \otimes X \to Y,$$

donnée par $u \otimes x \to u(x)$, est un homomorphisme de complexes, étant entendu qu'on munit $\mathrm{Hom}(X, Y)$ de sa graduation et de sa différentielle totales. C'est ce qui justifie les formules introduites plus haut.

Montrons maintenant que l'on a des homomorphismes canoniques

$$\boxed{H^{p+q}(\mathrm{Hom}(X,Y)) \to \mathrm{Hom}(H_p(X), H^q(Y))}$$

Pour cela prenons une classe de cohomologie de degré $p + q$ de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ et représentons-la par un cocycle $u$ de degré total $p + q$; désignant par $u^{rs} : X_r \to Y^s$ la composante de bidegré $(r, s)$ de $u$, on aura, puisque $du = 0$, la relation

$$\cdots + du^{p+1,q-1} + du^{p,q} + du^{p-1,q+1} + \cdots = 0\ ;$$

puisque l'on a d'une façon générale

$$du^{r,s} = u^{r,s} \circ d + (-1)^{r+s+1} d \circ u^{r,s},$$

il vient, en prenant les composantes bihomogènes du premier membre de la relation $du = 0$, les relations suivantes :

$$u^{p,q} \circ d + (-1)^{p+q+1} d \circ u^{p+1,q-1} = 0$$
$$u^{p-1,q+1} \circ d + (-1)^{p+q+1} d \circ u^{p,q} = 0\ ;$$

il s'ensuit que $u^{p,q}$ applique $Z_p(X)$ dans $Z^q(Y)$ et $B_p(X)$ dans $B^q(Y)$, donc définit par passage au quotient un homomorphisme $H_p(X) \to H^q(Y)$ ; de plus, on vérifie facilement que celui-ci ne dépend que de la classe de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}(X, Y)$ représentée par $u$ — d'où les homomorphismes cherchés.

Bien entendu, on déduit de là des homomorphismes canoniques

$$H^n(\mathrm{Hom}(X, Y)) \to \sum_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_p(X), H^q(Y)).$$

Comme dans le cas des produits tensoriels, ces homomorphismes ne sont généralement pas bijectifs.

# 3. COMPLEXES SIMPLICIAUX

Le but de ce § est d'étudier une catégorie de complexes qui se rencontre dans la théorie classique des « complexes simpliciaux » (homologie des espaces triangulés), dans la théorie de l'homologie singulière, et dans celle de la cohomologie à valeurs dans un faisceau. Toutes les « opérations simpliciales » de la Topologie algébrique classique ont un sens dans cette catégorie, et tous les résultats qui peuvent s'exprimer « simplicialement » s'étendent donc de façon automatique aux complexes que nous allons examiner, par exemple la théorie des « cup-produits ».

### 3.1. — Définitions

Étant donné un entier $n \geqslant 0$, nous désignerons toujours dans cet ouvrage par $\Delta_n$ l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ des entiers rationnels compris entre 0 et $n$. Étant donnés des entiers $p$, $q \geqslant 0$, on notera $G_{pq}$ l'ensemble des applications de $\Delta_p$ dans $\Delta_q$; on a évidemment des lois de composition

$$G_{pq} \times G_{qr} \to G_{pr},$$

de sorte que l'on peut considérer l'ensemble constitué par les objets $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ comme une *catégorie* (mais nous n'adopterons pas ce point de vue, par trop pédant...).

Soit A un anneau de base; nous appellerons *complexe de chaînes simplicial* sur A tout A-module gradué $X_* = (X_n)_{n\geqslant 0}$ muni de la structure suivante: quels que soient $p$, $q$ et $f \in G_{pq}$, on se donne un homomorphisme

$$\bar{f}: X_q \to X_p,$$

et ce de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées : *si f est l'identité,* *il en est de même de* $\bar{f}$, *et si* $f = g \circ h$ *on a* $\bar{f} = \bar{h} \circ \bar{g}$. On laisse au lecteur le soin d'interpréter cette définition dans le langage des foncteurs. Nous dirons souvent que les homomorphismes de la forme $\bar{f}$ sont les *opérateurs de face* de $X_*$.

On appelle de même *complexe de cochaînes simplicial* sur A tout A-module gradué $X^* = (X^n)$ pour lequel on a défini, quels que soient $p$, $q$ et $f \in G_{pq}$, un homomorphisme $\bar{f}: X^p \to X^q$, avec des conditions de compatibilité similaires à celles que nous avons énoncées ci-dessus.

Si $X_*$ est un complexe de chaînes simplicial sur A, formé de A-modules à gauche, alors pour tout A-module à gauche L le groupe gradué $\mathrm{Hom}(X_*, L)$ est muni de façon évidente d'une structure de complexe de cochaînes simplicial; et pour tout A-module à droite L, le groupe gradué $L \otimes_A X_*$ est un complexe de chaînes simplicial.

On définit de façon évidente la notion d'*homomorphisme* de complexes de chaînes (resp. de cochaînes) simpliciaux : un tel homomorphisme est une application homogène, de degré 0, compatible avec les opérateurs de face des complexes considérés. On voit alors que les complexes de chaînes (resp. de cochaînes) simpliciaux sur un anneau de base donné A constituent une *catégorie abélienne.*

On appelle *complexe de chaînes simplicial basique* sur A tout complexe de chaînes simplicial $X_*$ sur A muni de la structure supplémentaire que voici : pour chaque $n$ on se donne une *base* du A-module $X_n$, dont les éléments sont appelés les *simplexes de dimension n* de $X_*$, et en outre on suppose que les « faces » d'un simplexe de $X_*$ sont toujours des simplexes de $X_*$. Pour un tel complexe on a une *augmentation* canonique $X_* \to A$, à savoir celle qui prend la valeur 1 sur chaque simplexe de dimension 0 de $X_*$.

Dans les définitions précédentes, on peut remplacer, quels que soient $p$ et $q$, l'ensemble $G_{pq}$ par le sous-ensemble $G_{pq}^+$ formé des applications *croissantes* (*au sens large*) de $\Delta_p$ dans $\Delta_q$; on parvient alors à la notion de *complexe de chaînes* (resp. de cochaînes) *semi-simplicial* [1].

On notera d'autre part que les définitions que nous avons présentées dans ce numéro s'étendent au cas où l'on remplace la catégorie des groupes abéliens par une *catégorie abélienne* quelconque $\mathfrak{K}$; par exemple un complexe de chaînes (resp. de cochaînes) semi-simplicial dans $\mathfrak{K}$ est un foncteur contravariant (resp. covariant) $\Delta^+ \to \mathfrak{K}$, en notant $\Delta^+$ la catégorie suivante : les objets de $\Delta^+$ sont les ensembles $\Delta_n (n = 0, 1, \ldots)$ et les homomorphismes $\Delta_p \to \Delta_q$ sont les applications croissantes de $\Delta_p$ dans $\Delta_q$. Il est même superflu de supposer $\mathfrak{K}$ abélienne; par exemple, si $\mathfrak{K}$ est la catégorie des ensembles, les foncteurs

[1] A l'intention du lecteur non informé, il peut être utile de préciser que les complexes *semi*-simpliciaux jouent actuellement en Topologie un rôle beaucoup plus important que les complexes simpliciaux, bien que ce fait ne résulte pas des exemples donnés dans ce §. On en verra une illustration au Chapitre II, § 6.

contravariants $\Delta^+ \to \mathfrak{K}$ ne sont autres que les « complexes semi-simpliciaux » de Eilenberg et Zilber.

Nous allons maintenant donner quelques exemples importants de complexes de chaînes ou de cochaînes simpliciaux.

### 3. 2. — Chaînes d'un schéma simplicial

On appelle *schéma simplicial* (la terminologie classique est *complexe simplicial*, mais nous avons de « sérieuses raisons » de nous en écarter) tout ensemble K muni de la structure définie par la donnée d'un ensemble de parties *finies et non vides* de K, appelées les *simplexes* de K, et ce de telle sorte que *toute partie finie et non vide d'un simplexe de* K *soit encore un simplexe de* K.

Soit par exemple $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'un ensemble quelconque X; disons qu'une partie finie et non vide S de I est un simplexe si l'ensemble

$$M_S = \bigcap_{i \in S} M_i$$

est non vide; on obtient alors sur l'ensemble d'indices I une structure de schéma simplicial, et I, muni de cette structure, prend le nom de *nerf* du recouvrement $\mathfrak{M}$.

Un autre exemple — d'ailleurs trivial — s'obtient en posant $K = \Delta_n$ et en convenant que toute partie non vide de $\Delta_n$ est un simplexe; on obtient ainsi le *schéma simplicial type de dimension n.*

Soient K et L deux schémas simpliciaux; on dit que L est un *sous-schéma simplicial* de K si $L \subset K$ et si tout simplexe de L est un simplexe de K. Par exemple, la réunion ${}^nK$ des simplexes de K de dimension $\leqslant n$ (i.e. comportant au plus $n + 1$ éléments) est un sous-schéma simplicial de K, en convenant que les simplexes de ${}^nK$ sont les simplexes de dimension $\leqslant n$ de K; on obtient ainsi le *squelette de dimension n de* K.

On appelle *homomorphisme* (ou *application simpliciale*) d'un schéma simplicial K dans un schéma simplicial L toute application $K \to L$ qui transforme tout simplexe de K en un simplexe de L. Cette définition permet évidemment de parler de la *catégorie* des schémas simpliciaux.

Soit K un schéma simplicial. Nous appellerons *simplexe singulier* (¹) *de dimension n de* K toute application simpliciale

$$s : \Delta_n \to K,$$

(¹) Nous adoptons cette terminologie non orthodoxe d'une part pour éviter la confusion avec la notion de *simplexe* (un simplexe est simplement une *partie* de K), d'autre part pour marquer l'analogie de la notion considérée avec celle de simplexe singulier d'un espace topologique, définie au n° 3.4.

ou, ce qui revient au même, toute suite $s = (x_0, \ldots, x_n)$ de points de K appartenant à un même simplexe de K. Étant donnés un simplexe singulier $s$ de dimension $q$ de K, et une application $f: \Delta_p \to \Delta_q$, nous désignerons par $\bar{f}(s)$ le simplexe singulier $s \circ f: \Delta_p \to$ K de dimension $p$ de K.

Désignons alors par $C_n(K)$ le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble des simplexes singuliers de dimension $n$ de K; toute application $f: \Delta_p \to \Delta_q$ définit, d'après ce qui précède, un homomorphisme $\bar{f}: C_q(K) \to C_p(K)$ qui, évidemment, est une fonction « multiplicative » de $f$. Si donc on désigne par $C_*(K)$ le groupe abélien gradué constitué par la suite des $C_n(K)$, nous obtenons sur $C_*(K)$ une structure de *complexe de chaînes simplicial basique* sur l'anneau des entiers rationnels.

Étant donné un groupe abélien A, on pose plus généralement

$$C_n(K; A) = C_n(K) \otimes A,$$

et on désigne par $C_*(K; A)$ le groupe gradué formé par les $C_n(K; A)$; les éléments de $C_n(K; A)$, i.e. les combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans A, de simplexes singuliers de dimension $n$ de K, sont appelés les *chaînes singulières de dimension n de* K *à coefficients dans* A; on peut encore les définir comme étant les combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans A, de simplexes singuliers de dimension $n$ de K.

De même, on définit

$$\begin{aligned} C^n(K; A) &= \mathrm{Hom}(C_n(K), A), \\ C^*(K; A) &= \mathrm{Hom}(C_*(K), A) = (C^n(K; A))_{n \geqslant 0}; \end{aligned}$$

les éléments de $C^n(K; A)$ sont les *cochaînes singulières de degré n de* K *à valeurs dans* A; on peut encore les définir comme étant les fonctions à valeurs dans A définies sur l'ensemble des simplexes singuliers de dimension $n$ de K.

Il est clair que $C_*(K; A)$ et $C^*(K; A)$ sont canoniquement munis de structures simpliciales au sens du numéro précédent.

Si l'on a une application simpliciale $K \to L$, on définit de façon évidente des homomorphismes de complexes simpliciaux

$$C_*(K; A) \to C_*(L; A); \qquad C^*(L; A) \to C^*(K; A).$$

On peut donc considérer $K \to C_*(K; A)$ (resp. $K \to C^*(K; A)$) comme un foncteur covariant (resp. contravariant) défini sur la catégorie des schémas simpliciaux, et à valeurs dans celle des complexes de chaînes (resp. de cochaînes) simpliciaux.

Soient K un schéma simplicial et L un sous-schéma de K; évidemment $C_*(L)$ s'identifie à un sous complexe simplicial de $C_*(K)$, ce qui permet de former le quotient

$$C_*(K \bmod L) = C_*(K)/C_*(L),$$

lequel est encore un complexe de chaînes simplicial; plus généralement, on définit pour tout groupe abélien A les complexes simpliciaux

$$C_*(K \bmod L; A) = C_*(K \bmod L) \otimes A$$
$$C^*(K \bmod L; A) = \mathrm{Hom}(C_*(K \bmod L); A);$$

on a immédiatement des suites exactes

$$0 \to C_*(L; A) \to C_*(K; A) \to C_*(K \bmod L; A) \to 0$$
$$0 \to C^*(K \bmod L; A) \to C^*(K; A) \to C^*(L; A) \to 0.$$

Nous avons vu, dans ce qui précède, des exemples de complexes de chaînes simpliciaux; nous allons maintenant donner, dans le cadre de la théorie des schémas simpliciaux, des exemples de complexes de chaînes semi-simpliciaux.

Nous appellerons *schéma simplicial ordonné* tout schéma simplicial K muni d'une relation d'ordre telle que tout simplexe de K soit *totalement* ordonné; on définit alors les *simplexes singuliers croissants* de K comme étant les simplexes singuliers croissants de K, étant entendu naturellement que l'on munit les schémas type $\Delta_*$ de leur structure ordonnée évidente. En considérant les combinaisons linéaires à coefficients entiers de simplexes singuliers ordonnés de K, on trouve de façon évidente un complexe de chaînes semi-simplicial $C_*^+(K)$; on a une inclusion

$$C_*^+(K) \subset C_*(K)$$

compatible avec les structures semi-simpliciales des groupes gradués considérés. Pour tout groupe abélien A, on définit alors de façon évidente un complexe de chaînes semi-simplicial $C_*^+(K; A)$, et un complexe de cochaînes semi-simplicial $C_+^*(K; A)$.

Indiquons pour terminer que l'on peut attacher canoniquement un *espace topologique* P(K) à tout schéma simplicial K, de la façon suivante. Considérons toutes les applications $f$ de K dans l'ensemble des nombres réels qui satisfont aux conditions suivantes :

(*a*) : les $x \in K$ tels que $f(x) \neq 0$ forment un simplexe $|f|$ de K;

(*b*) : on a $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in K$;

(*c*) : on a $\sum_{x \in K} f(x) = 1$.

L'espace P(K) cherché n'est autre que l'ensemble de toutes ces applications, muni d'une topologie que nous allons définir. Tout d'abord, pour tout simplexe S de K, notons P(S) l'ensemble des $f \in P(K)$ telles que $|f| \subset S$; si S se réduit à un sommet $x$ de K il est clair que P(S) se réduit à un point $P(x)$ de P(K); dans le cas d'un simplexe S quelconque, P(S) est évidemment l'enveloppe convexe (dans l'espace vectoriel de toutes les applications $K \to \mathbf{R}$) de l'ensemble des points $P(x)$, $x \in S$, et comme ceux-ci sont évidemment linéairement indépendants on voit que, si S est de dimension $n$, P(S) s'identifie — une fois les sommets de S écrits dans un ordre déterminé — à l'ensemble $J_n$ des points $(t_0, \ldots, t_n)$ de $R^{n+1}$ vérifiant $t_i \geqslant 0$, $\sum t_i = 1$ («simplexe géométrique type de dimension $n$»; cf. n° 3.4). Cela dit nous munirons P(S) de la topologie de $J_n$, ce qui fait de P(S) un espace compact, et on dira qu'une partie U de P(K) est *ouverte* si $U \cap P(S)$ est ouvert dans P(S) pour tout simplexe S de K. Étant donné que, pour deux simplexes S', S″ de K, on a évidemment $P(S') \cap P(S'') = P(S' \cap S'')$, et que P(S') et P(S″) induisent sur $P(S' \cap S'')$ la topologie définie directement sur ce dernier ensemble, on voit que les topologies définies sur les P(S) sont induites par celle de P(K), et que les P(S) sont des parties compactes de P(K), qui bien entendu recouvrent P(K). On dit que P(K) est le *polyèdre* attaché à K.

On pourrait encore définir comme suit la topologie de P(K) : chaque $x \in K$ définit une application $P(K) \to \mathbf{R}$, à savoir $f \to f(x)$; cela dit, la topologie de P(K) est la moins fine qui rende toutes ces applications continues.

Il est clair que l'application $K \to P(K)$ est un *foncteur covariant* défini sur la catégorie des schémas simpliciaux et à valeurs dans celle des espaces topologiques : si l'on a une application simpliciale $K \xrightarrow{\theta} L$, l'application continue $P(K) \to P(L)$ qui lui correspond est définie par les conditions suivantes : elle transforme le «sommet» $P(x)$ de P(K) en le sommet $P(\theta(x))$ de P(L), et, pour tout simplexe S de K, sa restriction au simplexe géométrique P(S) est *linéaire-affine*.

Soient K un schéma simplicial et P(K) le polyèdre associé; nous allons définir canoniquement un recouvrement ouvert $(U_x)_{x \in K}$ de P(K) ayant pour nerf le schéma simplicial donné K. Pour cela, nous définirons $U_x$ comme l'ensemble des $f \in P(K)$ telles que $f(x) \neq 0$. Étant donnés des éléments $x_0, \ldots, x_n$ de K, l'ensemble $U_{x_0} \cap \ldots \cap U_{x_n}$ est non vide si et seulement s'il existe $f \in P(K)$ telle que $|f|$ contienne $x_0, \ldots, x_n$, i.e. si et seulement si $x_0, \ldots, x_n$ appartiennent à un même simplexe de K : le nerf du recouvrement considéré est donc bien K. Que les $U_x$ soient ouverts résulte naturellement de la continuité de l'application $f \to f(x)$. On dit que $U_x$ est l'*étoile du sommet x de* P(K). Plus généralement, on appelle *étoile d'un simplexe* S *de* K l'ensemble $U_S = \bigcap_{x \in S} U_x$; c'est donc l'ensemble des $f \in P(K)$ telles que l'on ait $f(x) > 0$ pour tout $x \in S$. On notera que si l'on forme le *barycentre* $g_S$ du simplexe géométrique P(S), alors pour tout $f \in U_S$ le segment fermé d'extrémités $f$ et $g_S$ est contenu tout entier dans $U_S$.

Remarquons encore que le recouvrement $(U_x)_{x \in S}$ de P(K) est *ponctuellement fini* : pour tout $f \in P(K)$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices $x$ tels que $f \in U_x$.

Il est facile de voir comment l'on peut construire toutes les applications continues d'un espace topologique donné E dans P(K). Soit $\varphi$ une telle application et posons $M_x = \varphi^{-1}(U_x)$ ; on obtient ainsi un recouvrement ouvert ponctuellement fini $(M_x)_{x \in K} = \mathfrak{M}$ de E, dont le nerf est évidemment un sous-schéma simplicial de K; de plus, pour tout $x \in K$, considérons la fonction $u_x : f \to f(x)$, définie sur P(K), et la fonction composée $\varphi_x = u_x \circ \varphi$ ; on obtient ainsi une famille $(\varphi_x)_{x \in K}$ d'applications continues $E \to \mathbf{R}$ qui possède évidemment les propriétés suivantes : $\varphi_x$ est toujours $\geqslant 0$, est nulle en dehors de $M_x$, et la somme des fonctions $\varphi_x$ est partout égale à 1 sur E.

Réciproquement, partons d'un recouvrement ouvert ponctuellement fini $(M_x)_{x \in K}$ de E dont le nerf soit le schéma simplicial K lui-même ([1]), et d'une *partition de l'unité subordonnée au recouvrement* $(M_x)_{x \in K}$, i.e. d'une famille de fonctions continues $\varphi_x$ sur E, vérifiant les conditions précédentes. Pour tout $t \in E$ il est immédiat de vérifier que la fonction $f_t : x \to \varphi_x(t)$ définit un élément de P(X); d'où une application $\varphi : t \to f_t$ de E dans P(K). Celle-ci est continue puisque les fonctions $u_x \circ \varphi = \varphi_x$ sont continues sur E.

La construction que nous venons de définir nécessite le choix d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement donné de E; mais elle n'en dépend pas *à une homotopie près* ([2]); il suffit pour le voir d'observer que si l'on a deux partitions de l'unité $(\varphi_x)_{x \in K}$ et $(\psi_x)_{x \in K}$ subordonnées au recouvrement donné, alors la famille $((1-\lambda)\varphi_x + \lambda\psi_x)_{x \in K}$, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, est encore une partition de l'unité subordonnée au recouvrement donné. On peut donc dire que *tout recouvrement ouvert ponctuellement fini* $(M_x)_{x \in K}$ *d'un espace* E, *de nerf* K, *définit une classe d'applications continues* $E \to P(K)$ *deux à deux homotopes*, pourvu que l'on soit assuré de l'existence d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement donné $\mathfrak{M}$ de E (ce qui sera le cas si par exemple E est paracompact; cf. Chapitre II, Théorème 3.6.1).

Lorsqu'il existe un homéomorphisme de E sur P(K) on dit que E admet une triangulation de schéma K — une telle triangulation étant, par définition, un homéomorphisme de E sur P(K). Un espace E est dit *triangulable* s'il admet, pour un schéma simplicial K au moins, une triangulation de schéma K.

([1]) Si le nerf est un sous schéma simplicial K′ de K, on obtient des applications $E \to P(K)$ en passant par l'intermédiaire d'applications $E \to P(K')$.

([2]) La notion d'applications homotopes est définie plus loin. (Exemple 3.7.2).

### 3.3. — Cochaînes à valeurs dans un système de coefficients

Soit X un complexe de chaînes simplicial *basique*; nous désignerons par $S_n(X)$ l'ensemble des simplexes de dimension $n$ de X, et par $S(X)$ la réunion des ensembles $S_n(X)$. A toute application

$$f : \Delta_p \to \Delta_q$$

est donc attachée une application

$$\bar{f}: S_p(X) \leftarrow S_q(X),$$

dépendant « multiplicativement » de $f$.

Un *système de coefficients sur* X consistera à attacher, à chaque $s \in S(X)$, un *module* $\mathcal{L}(s)$ sur l'anneau de base donné, et à attacher, à toute application $f : \Delta_p \to \Delta_q$ et à tout $s \in S_q(X)$, un *homomorphisme de restriction*

$$\mathcal{L}(\bar{f}(s)) \to \mathcal{L}(s) ;$$

on supposera naturellement que cet homomorphisme de restriction dépend multiplicativement de $f$, et est l'identité si $f$ est l'identité.

En particulier, soit K un schéma simplicial; on appelle *système de coefficients* sur K l'objet $\mathcal{L}$ constitué par la donnée, pour tout simplexe S de K, d'un module $\mathcal{L}(S)$, et, pour tout couple de simplexes S, T vérifiant $S \subset T$, d'un homomorphisme $\mathcal{L}(S) \to \mathcal{L}(T)$, de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées : cet homomorphisme est l'identité si $S = T$; si $S \subset T \subset U$, l'homomorphisme $\mathcal{L}(S) \to \mathcal{L}(U)$ est composé des homomorphismes $\mathcal{L}(S) \to \mathcal{L}(T)$ et $\mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(U)$. On déduit alors de là un système de coefficients sur le complexe de chaînes simplicial basique $C_*(K)$ : on associe à chaque simplexe singulier $s : \Delta_p \to K$ le module $\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(s(\Delta_p))$, et pour $f: \Delta_q \to \Delta_p$ l'homomorphisme $\mathcal{L}(\bar{f}(s)) \to \mathcal{L}(s)$ se définit de façon évidente à partir de la relation $\bar{f}(s)(\Delta_q) \subset s(\Delta_p)$.

Par exemple, soient E un espace topologique, $\mathcal{L}$ un préfaisceau de groupes abéliens de base E, et $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E; munissant I de la structure de schéma simplicial qui résulte de là nous allons définir un système de coefficients sur I. Pour cela, on attachera à chaque simplexe S de I le groupe

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(M_S), \qquad \text{où} \qquad M_S = \bigcap_{i \in S} M_i ;$$

et pour $S \subset T$, l'homomorphisme

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(M_S) \to \mathcal{L}(M_T) = \mathcal{L}(T)$$

sera celui qui résulte de la structure de préfaisceau de $\mathcal{L}$, et de la relation $M_S \supset M_T$. Nous étudierons cette situation en détail au Chapitre II, § 5.

Soit $\mathscr{L}$ un système de coefficients sur un complexe de chaînes simplicial basique X. Pour tout entier $n \geqslant 0$ on posera

$$C^n(X; \mathscr{L}) = \prod_{s \in S_n(X)} \mathscr{L}(s);$$

on a alors sur le module gradué $C^*(X; \mathscr{L}) = (C^n(X; \mathscr{L}))_{n \geqslant 0}$ une structure de *complexe de cochaînes simplicial*, obtenue de la façon suivante : soient une cochaîne

$$\alpha = (\alpha(s))_{s \in S_p(X)}, \qquad \alpha(s) \in \mathscr{L}(s)$$

et une application

$$f : \Delta_p \to \Delta_q ;$$

alors la cochaîne de degré $q$

$$\overline{f}(\alpha) = \beta$$

sera définie par la formule

$$\beta(s) = \text{restriction à } s \text{ de } \alpha(\overline{f}(s))$$

pour tout $s \in S_q(X)$. Il est immédiat de vérifier les axiomes du nº 3.1.

En particulier, et désignant par K un schéma simplicial, on peut associer à tout système de coefficients $\mathscr{L}$ sur K un complexe de cochaînes simplicial $C^*(K; \mathscr{L})$, à savoir le complexe des cochaînes de $C_*(K)$ à valeurs dans le système de coefficients défini sur $C_*(K)$ par $\mathscr{L}$. Plus particulièrement encore prenons un espace topologique E, un recouvrement ouvert $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$, et un préfaisceau $\mathscr{L}$ de groupes abéliens de base E; en associant à $\mathscr{L}$, comme on l'a expliqué plus haut, un système de coefficients sur le nerf I de $\mathfrak{M}$, on obtient un complexe de cochaînes simplicial; on le note $C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L})$.

Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ deux systèmes de coefficients sur un complexe de chaînes simplicial basique X; par un *homomorphisme* $\theta : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ nous entendrons la donnée, pour tout $s \in S(X)$, d'un homomorphisme de modules $\theta(s) : \mathscr{L}(s) \to \mathscr{M}(s)$ et ce de telle sorte que, quels que soient $s \in S_q(X)$ et $f : \Delta_p \to \Delta_q$, on ait le diagramme *commutatif* que voici :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\overline{f}(s)) & \to & \mathscr{M}(\overline{f}(s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{L}(s) & \to & \mathscr{M}(s). \end{array}$$

En définissant de façon évidente la somme et le composé de deux homomorphismes, on voit facilement que les systèmes de coefficients sur X donné forment une *catégorie abélienne*, et que, sur cette catégorie, l'application $\mathscr{L} \to C^*(X; \mathscr{L})$ est un *foncteur covariant exact* à valeurs dans la catégorie des complexes de cochaînes simpliciaux. On laisse au lecteur le soin de justifier ces assertions en détail.

En particulier, soit $\mathfrak{M}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique E; alors l'application $\mathcal{L} \to C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L})$ est un foncteur covariant exact défini sur la catégorie des préfaisceaux de groupes abéliens de base E, et à valeurs dans celle des complexes de cochaînes simpliciaux sur l'anneau des entiers rationnels.

### 3.4. Chaînes singulières d'un espace topologique [1]

Dans l'espace cartésien $\mathbf{R}^{n+1}$, nous désignerons par $J_n$ l'ensemble des points $t = (t_0, \ldots, t_n)$ tels que l'on ait

$$t_i \geqslant 0, \qquad t_0 + \ldots + t_n = 1;$$

c'est un espace compact, qu'on appelle le *simplexe géométrique type de dimension n.*

Toute application $f: \Delta_p \to \Delta_q$ définit canoniquement une application linéaire-affine

$$\hat{f}: J_p \to J_q,$$

à savoir celle qui applique le point $(t_0, \ldots, t_p)$ sur le point de $J_q$ dont les coordonnées $t'_0, \ldots, t'_q$ sont données par

$$t'_j = \sum_{j=f(i)} t_i.$$

(on prend naturellement $t'_j = 0$ si $j$ n'appartient pas à $f(\Delta_p)$). On pourrait aussi définir $\hat{f}$ comme suit: c'est l'application linéaire-affine de $J_p$ dans $J_q$ qui applique le $i$-ème sommet de J sur le $f(i)$-ème sommet de $J_q$.

Il est évident que la correspondance entre $f$ et $\hat{f}$ est multiplicative.

Cela dit, soit E un espace topologique. On appelle *simplexe singulier de dimension n de* E toute application *continue*

$$s: J_n \to E.$$

Soit $\Sigma_n(E)$ l'ensemble de ces simplexes. A toute application $f: \Delta_p \to \Delta_q$ correspond alors une application $\bar{f}: \Sigma_q(E) \to \Sigma_p(E)$, à savoir celle qui transforme $s: J_q \to E$ en $s \circ \hat{f}: J_p \to E$. Évidemment les conditions de « transitivité » requises pour former un complexe de chaînes simplicial *basique* sont réalisées. On désigne ce complexe par $CS_*(E)$, ses éléments sont les *chaînes singulières entières* de E; $CS_n(E)$ est donc le groupe abélien libre ayant $\Sigma_n(E)$

(1) Nous n'étudierons dans ce § que les parties les plus élémentaires de la théorie de l'homologie singulière; une étude beaucoup plus détaillée, en liaison avec la théorie des faisceaux, se trouvera dans le Chapitre III de cet ouvrage.

pour base, et les opérateurs structuraux $\bar{f}$ se déduisent par linéarité de ceux qu'on a définis plus haut.

Si A est un groupe abélien quelconque, on pose plus généralement

$$\mathrm{CS}_*(\mathrm{E}; \mathrm{A}) = \mathrm{CS}_*(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{A}$$

ce qui conduit aux *chaînes singulières à coefficient dans* A, et on définit

$$\mathrm{CS}^*(\mathrm{E}; \mathrm{A}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{CS}_*(\mathrm{E}); \mathrm{A}),$$

ce qui conduit aux *cochaînes singulières de* E *à valeurs dans* A.

A toute application *continue* $\theta : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est associé un homomorphisme de complexes simpliciaux basiques $\mathrm{CS}_*(\mathrm{E}) \to \mathrm{CS}_*(\mathrm{F})$, obtenu en transformant le simplexe singulier $s : \mathrm{J}_n \to \mathrm{E}$ en $\theta \circ s : \mathrm{J}_n \to \mathrm{F}$. On en déduit plus généralement des homomorphismes

$$\mathrm{CS}_*(\mathrm{E}; \mathrm{A}) \to \mathrm{CS}_*(\mathrm{F}; \mathrm{A}); \qquad \mathrm{CS}^*(\mathrm{F}; \mathrm{A}) \to \mathrm{CS}^*(\mathrm{E}; \mathrm{A})$$

pour tout groupe abélien A.

En particulier prenons un espace E et un sous-espace F de E; alors l'injection canonique de F dans E identifie $\mathrm{CS}_*(\mathrm{F})$ à un sous-complexe basique de $\mathrm{CS}_*(\mathrm{E})$, ce qui permet de définir

$$\mathrm{CS}_*(\mathrm{E} \bmod \mathrm{F}) = \mathrm{CS}_*(\mathrm{E})/\mathrm{CS}_*(\mathrm{F}),$$

qui est un complexe simplicial (mais non un complexe simplicial basique). Plus généralement on définit pour tout groupe abélien A les complexes simpliciaux

$$\begin{gathered}\mathrm{CS}_*(\mathrm{E} \bmod \mathrm{F}; \mathrm{A}) = \mathrm{CS}_*(\mathrm{E} \bmod \mathrm{F}) \otimes \mathrm{A}\\ \mathrm{CS}^*(\mathrm{E} \bmod \mathrm{F}; \mathrm{A}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{CS}_*(\mathrm{E} \bmod \mathrm{F}); \mathrm{A})\end{gathered}$$

et l'on a des suites exactes

$$\begin{gathered}0 \to \mathrm{CS}_*(\mathrm{F}; \mathrm{A}) \to \mathrm{CS}_*(\mathrm{E}; \mathrm{A}) \to \mathrm{CS}_*(\mathrm{E} \bmod \mathrm{F}; \mathrm{A}) \to 0\\ 0 \to \mathrm{CS}^*(\mathrm{E} \bmod \mathrm{F}; \mathrm{A}) \to \mathrm{CS}^*(\mathrm{E}; \mathrm{A}) \to \mathrm{CS}^*(\mathrm{F}; \mathrm{A}) \to 0.\end{gathered}$$

***Remarque*** 3.4.1. — Soit K un schéma simplicial; nous allons montrer que l'on peut identifier canoniquement le complexe simplicial $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ à un sous-complexe simplicial de $\mathrm{CS}_*(\mathrm{P}(\mathrm{K}))$, $\mathrm{P}(\mathrm{K})$ désignant le polyèdre attaché à K. Il suffit d'identifier tout simplexe singulier

$$s : \Delta_n \to \mathrm{K}$$

de K à un simplexe singulier de l'espace topologique P(K). Or, en tant qu'application simpliciale, $s$ induit une application continue $\mathrm{P}(\Delta_n) \to \mathrm{P}(\mathrm{K})$; attendu que $\mathrm{P}(\Delta_n)$ est canoniquement homéomorphe à l'espace type $\mathrm{J}_n$, notre assertion est évidemment démontrée.

Nous verrons par la suite qu'au point de vue homologique les complexes $C_*(K)$ et $CS_*(P(K))$ sont équivalents.

### 3. 5. — La différentielle d'un complexe simplicial

Soit $X_*$ un complexe de chaînes semi-simplicial. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $i$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, considérons l'application strictement croissante

$$F_n^i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$$

qui définit le simplexe singulier

$$(0, \ldots, \hat{i} \ldots, n)$$

de dimension $n - 1$ de $\Delta_n$; à celle-ci correspond un homomorphisme

$$\overline{F}_n^i : X_n \rightarrow X_{n-1} ;$$

pour $s \in X_n$ on dit que $\overline{F}_n^i(s)$ est la *$i$-ème face* de $s$.

Cela dit, nous définirons une différentielle dans $X_*$ à l'aide de la formule

$$ds = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \overline{F}_n^i(s), \qquad s \in X_n.$$

Bien entendu cette définition vaut à fortiori pour les complexes de chaînes simpliciaux, puisque dans ce cas on a une structure semi-simpliciale sous-jacente. Avant de démontrer que $d^2 = 0$ faisons la remarque suivante. Soit $C_*^+(\Delta_n)$ le complexe des chaînes singulières entières croissantes du schéma simplicial type $\Delta_n$; l'application identique $u_n$: $\Delta_n \rightarrow \Delta_n$ définit un simplexe $u_n \in C_n^+(\Delta_n)$, — appelé souvent le *simplexe fondamental de dimension n* — et il est clair que, pour tout $p$, le groupe abélien $C_p^+(\Delta_n)$ admet pour base l'ensemble des simplexes $\overline{f}(u_n)$, $f \in G_{pn}^+$. Il résulte de là que, si X est un complexe de chaînes semi-simplicial, alors *pour tout $s \in X_n$ il existe un homomorphisme* $C_*^+(\Delta_n) \rightarrow X_*$ *et un seul qui applique $u_n$ sur $s$.*

Comme la définition de l'opérateur $d$ est évidemment « fonctorielle » il résulte de la remarque précédente que pour établir la relation $dd = 0$ il suffit de le faire lorsque $X = C_*^+(\Delta_n)$; il suffit à fortiori de le faire lorsque $X = C_*(K)$, K étant un schéma simplicial quelconque. Or dans ce dernier cas il est visible que l'opérateur $d$ est donné, sur les simplexes singuliers de K, par la formule suivante:

$$\boxed{d(x_0, \cdots, x_n) = \sum (-1)^i . (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)},$$

et la relation cherchée résulte alors de là par un calcul trivial.

Considérons maintenant un complexe de cochaînes semi-simplicial $X^*$; on définit alors la différentielle de $X^*$ en « transposant » la formule donnée ci-dessus, *i.e.* en posant

$$ds = \sum (-1)^i \overline{F}^i_{n+1}(s), \qquad s \in X^n:$$

on a encore bien entendu la relation $dd = 0$. A titre d'exemple supposons que $X = C^*(K; A)$, où K est un schéma simplicial et A un groupe abélien; une cochaîne de degré $n$ est encore une fonction $f(x_0, \ldots, x_n)$ à valeurs dans A, définie dès que $x_0, \ldots, x_n \in K$ appartiennent à un même simplexe de K; cela dit on a la formule

$$\boxed{df(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i \cdot f(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})}$$

Ces définitions permettent de parler des *groupes d'homologie* $H_n(X)$ d'un complexe de chaînes simplicial X, et des *groupes de cohomologie* $H^n(X)$ d'un complexe de cochaînes simplicial.

***Exemple*** 3.5.1 — Si K est un schéma simplicial, les groupes d'homologie de $C_*(K; A)$ se notent $H_n(K; A)$, et les groupes de cohomologie de $C^*(K; A)$ se notent $H^n(K; A)$. Toute application simpliciale

$$\theta \colon K \to L$$

définit des homomorphismes

$$\begin{aligned} \theta_* &\colon H_n(K; A) \to H_n(L; A) \\ \theta^* &\colon H^n(L; A) \to H^n(K; A). \end{aligned}$$

D'autre part, si L est un sous-schéma de K, les groupes dérivés de

$$C_*(K \bmod L; A) \qquad \text{et} \qquad C^*(K \bmod L; A)$$

se notent $H_n(K \bmod L; A)$ et $H^n(K \bmod L; A)$; en vertu des suites exactes du n° 3.2 on a alors une *suite exacte d'homologie*

$$\boxed{\begin{aligned} &\ldots \to H_n(L;A) \to H_n(K;A) \to H_n(K \bmod L;A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(L;A) \\ &\ldots \xrightarrow{\partial} H_0(L;A) \to H_0(K;A) \to H_0(K \bmod L;A) \to 0 \end{aligned}}$$

et une *suite exacte de cohomologie*

$$\boxed{\begin{aligned} &0 \to H^0(K \bmod L;A) \to H^0(K;A) \to H^0(L;A) \xrightarrow{\delta} \ldots \\ &\ldots \xrightarrow{\delta} H^n(K \bmod L;A) \to H^n(K;A) \to H^n(L;A) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(K \bmod L;A) \end{aligned}}$$

Si maintenant K est un schéma simplicial *ordonné*, la considération du complexe $C_*^+(K)$ conduit à des groupes d'homologie $H_n^+(K; A)$ et de cohomologie $H_+^n(K; A)$. On notera que l'inclusion $C_*^+(K) \subset C_*(K)$ conduit à des homomorphismes canoniques

$$H^n(K; A) \to H_+^n(K; A), \qquad H_n^+(K; A) \to H_n(K; A);$$

nous démontrerons plus loin que ces homomorphismes sont bijectifs.

***Exemple*** 3.5.2 — Soient X un complexe de chaînes simplicial basique et $\mathcal{A}$ un système de coefficients sur X; les groupes de cohomologie du complexe $C^*(X; \mathcal{A})$ se notent $H^n(X; \mathcal{A})$. Tout homomorphisme $\theta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ définit des homomorphismes $\theta^*\colon H^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{B})$, et à toute suite exacte de systèmes de coefficients, de la forme

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0,$$

est attachée une *suite exacte de cohomologie* de la forme

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \to H^0(X;\mathcal{A}') \to H^0(X;\mathcal{A}) \to H^0(X;\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H^1(X;\mathcal{A}') \to \ldots \\ \ldots \to H^n(X;\mathcal{A}') \to H^n(X;\mathcal{A}) \to H^n(X;\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X;\mathcal{A}') \ldots \end{array}}$$

En particulier, à tout système de coefficients $\mathcal{L}$ sur un schéma simplicial K sont attachés des groupes $H^n(K; \mathcal{L}) = H^n(C^*(K; \mathcal{L}))$ ; plus particulièrement encore, si l'on a un espace topologique E, un recouvrement ouvert $\mathfrak{M}$ de E, et un préfaisceau $\mathcal{L}$ de groupes abéliens de base E, on obtient les *groupes de cohomologie de* $\mathfrak{M}$ *à valeurs dans* $\mathcal{L}$ par

$$H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{L}) = H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}));$$

à toute suite exacte de préfaisceaux

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$$

est associée une *suite exacte de cohomologie*

$$\boxed{\ldots \to H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{L}) \to H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{L}'') \to H^{n+1}(\mathfrak{M}; \mathcal{L}') \ldots}$$

***Exemple*** 3.5.3 — Soient E un espace topologique et A un groupe abélien; on pose

$$H_n(E; A) = H_n(CS_*(E; A)); \qquad H^n(E; A) = H^n(CS^*(E; A));$$

on obtient ainsi les *groupes d'homologie singulière*, et de cohomologie singulière, de E. Toute application continue $f\colon E \to F$ définit des homomorphismes

$$f_*\colon H_n(E; A) \to H_n(F; A); \qquad f^*\colon H^n(F; A) \to H^n(E; A).$$

En particulier, si F est un *sous-espace* de E, on a, en définissant de façon évidente les groupes « relatifs », des suites exactes

$$\boxed{\ldots \to H_n(F;A) \to H_n(E;A) \to H_n(E \bmod F;A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(F;A) \ldots}$$

$$\boxed{\ldots \to H^n(E \bmod F;A) \to H^n(E;A) \to H^n(F;A) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(E \bmod F;A) \ldots}$$

en homologie et en cohomologie singulières.

### 3. 6. Produit cartésien de complexes simpliciaux

Soient X et Y deux complexes de chaînes simpliciaux sur un anneau de base A; on supposera que X est formé de A-modules à droite et Y de A-modules à gauche. A côté du complexe $X \underset{A}{\otimes} Y$ (qui ne possède pas de structure « simpliciale » naturelle), nous allons définir un nouveau complexe de chaînes, appelé *produit cartésien* (sur l'anneau A) de X et Y, et qui, lui, admet une structure simpliciale. Ce complexe, noté $X \underset{A}{\times} Y$, est défini comme suit: sa composante de dimension $n$ est

$$\boxed{(X \underset{A}{\times} Y)_n = X_n \underset{A}{\otimes} Y_n}$$

et si l'on a une application $f\colon \Delta_p \to \Delta_q$, alors l'homomorphisme structural

$$f_{X \times Y}\colon (X \underset{A}{\times} Y)_q \to (X \underset{A}{\times} Y)_p$$

est donné par la formule

$$\boxed{\overline{f}_{X \times Y} = \overline{f}_X \otimes \overline{f}_Y}$$

il est clair que les axiomes du nº 3.1 sont vérifiés.

On définirait de même le produit cartésien de deux complexes de cochaînes simpliciaux:

$$(X \underset{A}{\times} Y)^n = X^n \underset{A}{\otimes} Y^n; \qquad \overline{f}^{X \times Y} = \overline{f}^X \otimes \overline{f}^Y.$$

Soient X et Y deux complexes de chaînes simpliciaux; étant donnés des éléments $a \in X_n$ et $b \in Y_n$, nous désignerons l'élément $a \otimes b$ de $X_n \underset{A}{\otimes} Y_n$ par la notation $a \times b$, lorsque nous voudrons indiquer que l'on considère $a \otimes b$ comme un élément du produit *cartésien* $X \underset{A}{\times} Y$ et non du produit *tensoriel* $X \underset{A}{\otimes} Y$ (en sorte que $a \times b$ est de dimension $n$, tandis que $a \otimes b$ est de dimension $2n$). On utilisera une convention analogue concernant les complexes de cochaînes simpliciaux.

Soient maintenant X et Y deux complexes de chaînes simpliciaux *basiques*; alors $X \underset{A}{\times} Y$ sera un complexe de chaînes simplicial *basique*: par définition, un simplexe de dimension $n$ de $X \underset{A}{\times} Y$ est un élément $s \times t$, où $s$ est un simplexe de dimension $n$ de X, et $t$ un simplexe de dimension $n$ de Y. On a donc, pour tout $n \geqslant 0$, la relation

$$S_n(X \underset{A}{\times} Y) = S_n(X) \times S_n(Y).$$

Soient $f\colon X' \to X$ et $g\colon Y' \to Y$ des homomorphismes de complexes de chaînes (resp. cochaînes) simpliciaux; il existe alors un homomorphisme et un seul

$$f \times g : X' \times Y' \to X \times Y$$

qui vérifie la condition que $f \times g(a' \times b') = f(a') \times g(b')$ pour $a' \in X'_n$ et $b' \in Y'_n$; c'est le *produit cartésien de f et g*.
Les définitions précédentes s'étendent de façon évidente aux structures semi-simpliciales.

***Exemple*** 3.6.1. — Soient K et L deux schémas simpliciaux; désignons par $K \times L$ le schéma simplicial suivant: l'ensemble $K \times L$ est le produit cartésien au sens usuel des ensembles K et L, et une partie finie non vide de $K \times L$ est un simplexe si et seulement si ses projections sont des simplexes de K et L; il est clair que les axiomes des schémas simpliciaux sont vérifiés.

On a alors un isomorphisme canonique de complexes simpliciaux basiques

$$\boxed{C_*(K) \underset{Z}{\times} C_*(L) = C_*(K \times L)}$$

En effet, un simplexe singulier de dimension $n$ de $K \times L$ est une suite de points $((x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n))$ de $K \times L$ appartenant à un simplexe de $K \times L$, ce qui signifie exactement que les suites:

$$s = (x_0, \ldots, x_n), \qquad t = (y_0, \ldots, y_n)$$

sont des simplexes singuliers de dimension $n$ de K et L; autrement dit on peut identifier l'ensemble $\Sigma_n(K \times L)$ des simplexes singuliers de dimension $n$ de $K \times L$ au produit $\Sigma_n(K) \times \Sigma_n(L)$; l'identification cherchée résulte aussitôt de là.

On en déduit évidemment (en vertu de l'associativité du produit tensoriel) la formule

$$\boxed{C_*(K;A) \times C_*(L;B) = C_*(L \times L;\ A \otimes B)}$$

valable quels que soient les groupes abéliens A et B. Par contre la formule analogue pour les complexes de cochaînes est fausse en général, à moins que les schémas simpliciaux K et L ne soient *finis*.

***Exemple*** 3.6.2 — Soient E et F deux espaces topologiques, et soit un simplexe singulier

$$u: J_n \to E \times F$$

de dimension $n$ de l'espace produit; en le composant avec les projections, on en déduit des simplexes singuliers

$$s: J_n \to E, \qquad t: J_n \to F,$$

dont la connaissance détermine $u$; réciproquement ,étant donnés des simplexes singulières $s$ et $t$ de dimension $n$ de E et F, il existe un $u$ qui les admet pour « projections ». Autrement dit, on a ici encore $\Sigma_n(E \times F) = \Sigma_n(E) \times \Sigma_n(F)$, d'où l'on déduit aussitôt un isomorphisme canonique de complexes simpliciaux basiques

$$\boxed{CS_*(E) \times CS_*(F) = CS_*(E \times F)}$$

et plus généralement

$$\boxed{CS_*(E;A) \times CS_*(F;B) = CS_*(E \times F;\, A \otimes B)}$$

quels que soient les groupes abéliens A et B.

***Exemple*** 3.6.3 — Soient K et L deux schémas simpliciaux *ordonnés*; munissons l'ensemble produit $K \times L$ de la relation d'ordre produit:

$$(x', y') \leqslant (x'', y'')$$

si l'on a

$$x' \leqslant x'' \qquad \text{et} \qquad y' \leqslant y'',$$

et appelons simplexe de $K \times L$ toute partie finie et non vide S qui vérifie les conditions suivantes: les projections de S sont des simplexes de K et L, et de plus S est totalement ordonnée. On obtient ainsi un schéma simplicial ordonné, appelé *produit cartésien des schémas simpliciaux ordonnés* K et L. Il est clair qu'un simplexe singulier croissant de dimension $n$ de $K \times L$ est une suite $((x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n))$ telle que $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_0, \ldots, y_n)$ soient des simplexes singuliers croissants de K et L; on en déduit un isomorphisme canonique

$$C_*^+(K \times L) = C_*^+(K) \times C_*^+(L).$$

### 3. 7. — Homotopies simpliciales

Dans ce n° nous désignerons par $I_*$ le complexe $C_*(\Delta_1)$ des chaînes singulières entières (ou plus généralement à coefficients dans l'anneau de base A) du schéma simplicial $\Delta_1$; ce complexe va jouer le même rôle que le « segment unité » dans la théorie « géométrique » de l'homotopie. On notera que l'anneau de base A opère à droite et à gauche sur $I_*$, de sorte que si X est un complexe de chaînes simplicial à gauche sur A, on peut former $I_* \underset{A}{\times} X$, qui est encore un complexe de chaînes simplicial à gauche sur A. Dans ce qui suit nous écrirons $X \times Y$ au lieu de $X \underset{A}{\times} Y$, étant entendu que l'anneau de base A est choisi une fois pour toutes.

Définissons tout d'abord, pour tout complexe de chaînes simplicial X, des homomorphismes

$$j^0, j^1 \colon X \to I_* \times X$$

de complexes simpliciaux. Pour cela considérons pour tout $n$ les simplexes suivants de dimension $n$ de $I_*$:

$$u_n^0 = (0, \ldots, 0); \qquad u_n^1 = (1, \ldots, 1)$$

nous définirons alors

$$j^0(x) = u_n^0 \times x, \quad j^1(x) = u_n^1 \times x \ \text{ pour } \dim(x) = n.$$

La vérification du fait que $j^0$ et $j^1$ commutent aux opérateurs de face est immédiate. On notera d'ailleurs qu'on pourrait encore définir $j^0$ et $j^1$ comme suit: on considère le schéma simplicial $\Delta_0$; pour tout X on a de façon évidente un isomorphisme canonique

$$C_*(\Delta_0) \times X = X;$$

d'autre part on a deux applications simpliciales $\Delta_0 \to \Delta_1$, à savoir $0 \to 0$ et $0 \to 1$, d'où résultent deux homomorphismes

$$C_*(\Delta_0) \times X \to C_*(\Delta_1) \times X;$$

en les composant avec l'isomorphisme précédent on trouve $j^0$ et $j^1$.
Par exemple si $X = C_*(K)$, où K est un schéma simplicial, $j^0$ et $j^1$ se déduisent de façon évidente des applications simpliciales $x \to (0, x)$ et $x \to (1, x)$ de K dans $\Delta_1 \times K$.

Désignons par $\mathfrak{K}_*$ la catégorie des complexes de chaînes simpliciaux; on peut considérer $X \to X$ et $X \to I_* \times X$ comme des foncteurs covariants sur $\mathfrak{K}_*$, à valeurs dans la catégorie des complexes de chaînes, et alors $j^0$ et $j^1$ sont des transformations naturelles.

***Théorème*** 3.7.1 — *Les transformations naturelles $j^0$ et $j^1$ sont homotopes.*
Autrement dit, il existe des *transformations naturelles*:

$$D_n \colon X_n \to (I_* \times X)_{n+1}$$

telles que l'on ait

$$j^1 - j^0 = d \circ D_n + D_{n-1} \circ d \qquad \text{en dimension } n.$$

Plaçons-nous d'abord dans la catégorie $\mathfrak{k}$ des *schémas simpliciaux* — autrement dit, considérons d'abord des complexes de la forme $C_*(K; A)$, où A est l'anneau de base. Pour définir

$$D: C_*(K; A) \to C_*(\Delta_1 \times K; A)$$

il suffit de le faire sur les simplexes singuliers de K; nous poserons

$$D(x_0, \ldots, x_n) = \sum (-1)^i \cdot ((0, x_0), \ldots, (0, x_i), (1, x_i), \ldots, (1, x_n)),$$

ce qui définit bien une chaîne singulière de dimension $n+1$ de $\Delta_1 \times K$. Comme on a

$$j^0(x_0, \ldots, x_n) = ((0, x_0), \ldots, (0, x_n))$$
$$j^1(x_0, \ldots, x_n) = ((1, x_0), \ldots, (1, x_n))$$

la vérification du fait que D est une homotopie de $j^0$ à $j^1$ est un exercice de calcul trivial; il est par ailleurs clair que D est naturelle dans la catégorie des schémas simpliciaux; on a du reste une formule de la forme

$$D(s) = \Sigma \gamma_n(u, f) \cdot u \times \bar{f}(s), \qquad (\dim(s) = n)$$

où $u$ décrit l'ensemble des simplexes singuliers de dimension $n+1$ de $\Delta_1$, où $f$ décrit l'ensemble des applications $\Delta_{n+1} \to \Delta_n$, et où les coefficients $\gamma_n(u, f)$ sont des entiers rationnels indépendants de K.

Dans le cas d'un complexe de chaînes simplicial arbitraire X, nous définirons D à l'aide de la formule précédente, $s$ désignant cette fois un élément générique de $X_n$. Le fait que D soit encore une homotopie de $j^0$ à $j^1$ résulte essentiellement de ce qu'on a déjà démontré, du fait que $j^0, j^1$, $d$ et D sont des transformations *naturelles* sur la catégorie $\mathfrak{K}_*$, et enfin du fait que, pour tout $x \in X_n$, il existe un schéma simplicial K, et un homomorphisme $C_*(K) \to X$ dont l'image contient $x$.

Une conséquence importante du résultat précédent s'obtient en considérant deux complexes de chaînes simpliciaux X et Y, et deux homomorphismes

$$\theta^0, \theta^1 \ : X \to Y.$$

On dit que ces homomorphismes sont *simplicialement homotopes* s'il existe un homomorphisme de complexes simpliciaux

$$\theta: I_* \times X \to Y$$

tel que l'on ait:

$$\theta^0 = \theta \circ j^0, \qquad \theta^1 = \theta \circ j^1;$$

il est clair qu'on a alors le résultat suivant :

***Théorème*** 3.7.2 — *Deux homomorphismes simplicialement homotopes de complexes de chaînes simpliciaux sont homotopes en tant qu'homomorphismes de complexes.*

***Exemple*** 3.7.1 — Soient K et L deux schémas simpliciaux, et considérons deux applications simpliciales

$$\theta^0, \theta^1 \quad : \mathrm{K} \rightarrow \mathrm{L};$$

on dit qu'elles sont *simplicialement homotopes* si, pour tout simplexe S de K, les ensembles $\theta^0(\mathrm{S})$ et $\theta^1(\mathrm{S})$ sont contenus dans un même simplexe de L. Définissons alors une application

$$\theta : \Delta_1 \times \mathrm{K} \rightarrow \mathrm{L}$$

en posant

$$\theta((0, x)) = \theta^0(x), \qquad \theta((1, x)) = \theta^1(x);$$

il est clair que $\theta$ est *simpliciale* (réciproquement, si $\theta$ est simpliciale alors $\theta^0$ et $\theta^1$ sont simplicialement homotopes). Passons maintenant aux complexes de chaînes singulières de K, L et $\Delta_1 \times \mathrm{K}$ : d'après les formules de l'Exemple 3.6.1 on est exactement dans la situation du Théorème précédent. Donc :

***Théorème*** 3.7.3 — *Soient $\theta^0$ et $\theta^1$ deux applications simpliciales simplicialement homotopes d'un schéma simplicial* K *dans un schéma simplicial* L; *alors les homomorphismes*

$$\mathrm{C}_*(\mathrm{K}) \rightarrow \mathrm{C}_*(\mathrm{L})$$

*définis par $\theta^0$ et $\theta^1$ sont homotopes, et pour tout groupe abélien* A *les homomorphismes*

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{K}; \mathrm{A}) \rightarrow \mathrm{H}_*(\mathrm{L}; \mathrm{A}); \qquad \mathrm{H}^*(\mathrm{L}; \mathrm{A}) \rightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{K}; \mathrm{A})$$

*définis par $\theta^0$ et $\theta^1$ sont identiques.*

En particulier, considérons un schéma simplicial *conique* K; cela signifie qu'il existe un point $a \in \mathrm{K}$ tel que, pour tout simplexe S de K, $\mathrm{S} \cup \{a\}$ soit encore un simplexe de K; il revient au même de dire que les applications simpliciales $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow a$ sont simplicialement homotopes. Il s'ensuit que, si l'on désigne par $\mathrm{C}_*(a)$ le sous-complexe de $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ correspondant au sous-schéma simplicial réduit à $a$, l'application identique $\mathrm{C}_*(\mathrm{K}) \rightarrow \mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ est homotope à l'application $\mathrm{C}_*(\mathrm{K}) \rightarrow \mathrm{C}_*(a)$ déduite de $x \rightarrow a$; comme ce dernier homomorphisme est évidemment une *projection* de $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ sur $\mathrm{C}_*(a)$ on en conclut que les complexes $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ et $\mathrm{C}_*(a)$ sont homotopiquement équivalents.

On remarquera par ailleurs que, pour tout schéma simplicial K, le complexe $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ est muni d'une *augmentation* $\mathrm{C}_0(\mathrm{K}) \rightarrow \mathbf{Z}$, à savoir l'application qui prend la valeur 1 sur chaque simplexe de dimension 0 de K (il en est de même plus généralement, comme on l'a vu, pour tout complexe de chaînes simplicial *basique*). On dira que K est *acyclique* lorsque le complexe augmenté $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ l'est. On voit immédiatement, d'après les considérations précédentes, que *tout schéma simplicial conique est acyclique*. On pourrait du reste encore le voir en utilisant l'opérateur d'homotopie suivant (qui ne s'identifie pas à celui qui résulterait de la démonstration du Théorème 3.7.1) :

$$(x_0, \ldots, x_n) \to (a, x_0, \ldots, x_n);$$

on l'appelle l'*opérateur conique de sommet a*.

Notons que de ces résultats on déduit le

**Théorème** 3.7.4 — *Tout schéma simplicial de la forme*

$$\Delta_{n_1} \times \ldots \times \Delta_{n_p}$$

*est acyclique.*

**Exemple** 3.7.2 — Soient E et F deux espaces topologiques, et

$$\theta^0, \theta^1 : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

deux applications *continues*. Désignant par $\mathrm{J}_1$ le simplexe géométrique type de dimension 1, on a deux applications continues

$$j^0, j^1 : \mathrm{E} \to \mathrm{J}_1 \times \mathrm{E},$$

données par

$$j^0(x) = (\mathrm{P}^0, x), \qquad j^1(x) = (\mathrm{P}^1, x);$$

[$\mathrm{P}^0$ est le point (1, 0) et $\mathrm{P}^1$ le point (0, 1) de $\mathrm{J}_1$ de sorte que, dans $\mathbf{R}^2$, $\mathrm{J}_1$ est le segment de droite d'extrémités $\mathrm{P}^0$ et $\mathrm{P}^1$].

On dit que $\theta^0$ et $\theta^1$ sont *homotopes* s'il existe une application *continue*

$$\theta : \mathrm{J}_1 \times \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

telle que

$$\theta^0 = \theta \circ j^0, \qquad \theta^1 = \theta \circ j^1.$$

**Théorème** 3.7.5 — *Soient $\theta^0$ et $\theta^1$ deux applications continues homotopes d'un espace* E *dans un espace* F; *alors les homomorphismes*

$$\mathrm{CS}_*(\mathrm{E}) \to \mathrm{CS}_*(\mathrm{F})$$

*définis par $\theta^0$ et $\theta^1$ sont simplicialement homotopes, et pour tout groupe abélien* A *les homomorphismes*

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{E}; \mathrm{A}) \to \mathrm{H}_n(\mathrm{F}; \mathrm{A}), \qquad \mathrm{H}^n(\mathrm{F}; \mathrm{A}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{E}; \mathrm{A})$$

*définis par $\theta^0$ et $\theta^1$ sont identiques.*

En effet, les applications continues $j^0$, $j^1$ et $\theta$ définissent des homomorphismes

$$j^0_*,\ j^1_* : \mathrm{CS}_*(\mathrm{E}) \to \mathrm{CS}_*(\mathrm{J}_1 \times \mathrm{E}) = \mathrm{CS}_*(\mathrm{J}_1) \times \mathrm{CS}^*(\mathrm{E}).$$
$$\theta_* : \mathrm{CS}_*(\mathrm{J}_1 \times \mathrm{E}) = \mathrm{CS}_*(\mathrm{J}_1) \times \mathrm{CS}^*(\mathrm{E}) \to \mathrm{CS}^*(\mathrm{F}).$$

Or, pour tout entier $n$, on a une inclusion naturelle

$$\mathrm{C}_*(\Delta_n) \subset \mathrm{CS}_*(\mathrm{J}_n),$$

obtenue en identifiant une application simpliciale $f: \Delta_p \to \Delta_n$ à l'application continue $\hat{f}: J_p \to J_n$ qui lui correspond. Cela dit on vérifie immédiatement qu'en fait $j_*^0$ et $j_*^1$ se réduisent aux homomorphismes canoniques

$$CS_*(E) \to I_* \times CS_*(E)$$

moyennant l'identification ci-dessus de $I_*$ à un sous-complexe de $CS_*(J_1)$; considérant l'homomorphisme $I_* \times CS_*(E) \to CS_*(F)$ restriction de $\theta_*$, on trouve immédiatement le résultat cherché.

Comme corollaire du théorème précédent, considérons un espace E et un sous-espace F de E; on dit que F est un *rétracte* de E s'il existe une application continue de E sur F qui, sur F, se réduise à l'identité; si de plus l'on peut supposer cette application homotope (en tant qu'application $E \to E$) à l'application identique, on dit que F est un *rétracte de déformation* de E; dans ce cas, les homomorphismes canoniques $H_n(F, \mathbf{Z}) \to H_n(E, \mathbf{Z})$ sont *bijectifs*.

En effet considérons d'une part l'injection canonique $j: F \to E$ et d'autre part une rétraction $p: E \to F$, homotope à l'identité. L'application

$$p_* \circ j_*: CS_*(F) \to CS_*(F)$$

est évidemment l'identité. D'autre part l'application $j_* \circ p_*: CS_*(E) \to CS_*(E)$ se réduit à $p_*$, et est homotope à l'identité d'après le Théorème précédent. Par suite, les complexes $CS_*(F)$ et $CS_*(E)$ sont homotopiquement équivalents, ce qui prouve notre assertion.

En particulier, disons qu'un espace est *contractile* s'il admet un rétracte de déformation réduit à un seul point; alors :

**Théorème** 3.7.6 — *L'homologie singulière d'un espace contractile* E *est donnée par*

$$H_0(E; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \quad H_n(E; \mathbf{Z}) = 0 \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Ce résultat s'applique par exemple dans la situation suivante : soient V un espace vectoriel topologique réel et E une partie de V; disons que E est *conique* s'il existe un $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, le segment fermé d'extremités $a$ et $x$ soit contenu tout entier dans E; alors l'homologie singulière de E est triviale.

En particulier, si l'on a un schéma simplicial K, et si l'on considère le recouvrement ouvert du polyèdre P(K) formé par les étoiles $U_a$ des sommets de P(K) (nº 3.2), on voit que l'homologie singulière de toute intersection finie d'ensembles $U_a$ est triviale.

Les méthodes et les résultats que nous avons développés dans ce nº s'étendent, moyennant des modifications convenables, à la théorie des complexes de *cochaînes* simpliciaux.

Au lieu du complexe $I_*$ des *chaînes* singulières de $\Delta_1$ à coefficients dans l'anneau de base donné A, on part du complexe $I^*$ des *cochaînes* singulières de $\Delta_1$ à valeurs dans A; pour tout entier $n$, $I^n$ est donc l'ensemble des homomorphismes de $I_n$ dans l'anneau de base et en particulier tout élément de $I^n$ possède une « valeur » sur tout simplexe de dimension $n$ de $I_*$.

Soit alors X un complexe de cochaînes simplicial; on a cette fois des homomorphismes canoniques

$$j_0, j_1 : I^* \times X \to X$$

définis comme suit : pour $\alpha \in I^n$ et $x \in X^n$, on pose

$$\begin{aligned} j_0\,(\alpha \times x) &= \alpha(u_n^0)\,.\,x \\ j_1\,(\alpha \times x) &= \alpha(u_n^1)\,.\,x, \end{aligned}$$

où $u_n^0$ et $u_n^1$ sont les simplexes définis plus haut (p. 52).

Si l'on considère $j_0$ et $j_1$ comme des homomorphismes entre *foncteurs* à valeurs dans la catégorie des complexes de cochaînes, alors $j_0$ et $j_1$ sont *homotopes*, i.e. il existe des transformations naturelles

$$D^n : (I_* \times X)^n \to X^{n-1}$$

telles que l'on ait

$$j_1 - j_0 = d \circ D^n + D^{n+1} \circ d \qquad \text{en degré } n.$$

On peut d'ailleurs définir ces homomorphismes par les formules du n° précédent; plus précisément, si l'on reprend la formule

$$D_n(x) = \sum \gamma_n(u, f)\,.\,u \times \overline{f}\,(x)$$

du n° précédent [$x \in X_n$, la sommation est étendue aux simplexes $u$ de dimension $n + 1$ de $I_*$ et aux applications $f$ : $\Delta_{n+1} \to \Delta_n$, et les coefficients $\gamma_n(u, f)$ sont des *entiers rationnels*], on vérifie facilement que l'on peut définir $D^n$ par la formule suivante :

$$D^n\,(\alpha \times x) = \sum \gamma_{n-1}(u, f)\alpha(u)\,.\,\overline{f}\,(x),$$

la sommation étant étendue aux simplexes $u$ de dimension $n$ de $I^*$ et aux applications $f$ : $\Delta_n \to \Delta_{n-1}$.

Ceci fait considérons deux homomorphismes

$$\theta_0, \theta_1 : X \to Y$$

de complexes de cochaînes simpliciaux; on dit qu'ils sont simplicialement homotopes s'il existe un homomorphisme

$$\theta : X \to I^* \times Y$$

tel que l'on ait

$$\theta_i = j_i \circ \theta \ (i = 0, 1);$$

il est clair d'après les résultats précédents que *deux homomorphismes simplicialement homotopes sont homotopes en tant qu'homomorphismes de complexes de cochaînes.* Ce résultat nous sera utile en cohomologie de Čech (chapitre II, § 5).

### 3. 8. Chaînes orientées et cochaînes alternées

Soit X un complexe de chaînes simplicial. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, toute application $\Delta_n \to \Delta_n$ définit canoniquement un endomorphisme du module $X_n$; en particulier, on voit que le groupe des permutations de $\Delta_n$ opère sur le module $X_n$. Étant donné une permutation $u$, nous désignerons sa signature par $\varepsilon(u)$.

Cela dit, une chaîne $x \in X_n$ est dite *dégénérée* si elle appartient au sous-module de $X_n$ engendré par les éléments suivants :

*a*) les chaînes de la forme $\bar{u}(y) - \varepsilon(u)y$, où $y$ est un élément quelconque de $X_n$ et où $u$ est une permutation quelconque de $\Delta_n$;

*b*) les chaînes de la forme $\bar{f}(z)$, où $f$ est une application quelconque de $\Delta_n$ dans $\Delta_p$, avec $p \leqslant n$-1, et où $z$ est un élément quelconque de $X_p$.

Notons $D_n(X)$ l'ensemble des éléments dégénérés de $X_n$, et D(X) le sous-module gradué de X ayant pour composantes homogènes les $D_n(X)$; alors D(X) est un *sous-complexe* de X, i.e est stable par l'opérateur bord de X (mais non, bien entendu, par les opérateurs de face de X). On démontre ce résultat comme suit.

Tout d'abord il suffit évidemment de prouver que $dx$ est dégénérée lorsque $x$ est soit de la forme $\bar{u}(y) - \varepsilon(u)y$, soit de la forme $\bar{f}(y)$; d'autre part il est clair que tout homomorphisme $X \to X'$ de complexes de chaînes simpliciaux applique D(X) dans D(X'); on déduit de ces deux remarques, par un raisonnement que nous avons déjà utilisé, qu'il suffit de démontrer notre assertion dans le cas particulier suivant : X est la forme de $C_*(K)$ pour un schéma simplicial K, et $y$ est un simplexe singulier de K. Nous laisserons au lecteur le soin de faire la démonstration dans ce cas.

Cela dit, on appelle *chaînes orientées de dimension n de* X les éléments du module quotient $X_n/D_n(X)$; on définit le *complexe des chaînes orientées* de X comme étant X/D(X).

Lorsque X est un complexe de chaînes *semi-simplicial* on définit encore un sous-complexe D(X), à savoir le sous-module gradué engendré par les chaînes $\bar{f}(y)$, où $y$ est de dimension $n$ quelconque et où $f$ décrit l'ensemble des applications croissantes de $\Delta_p$ dans $\Delta_n$, avec $p = n + 1, n + 2, \ldots$

Dans ce cas, on peut facilement démontrer [1] que, par l'intermédiaire de l'application canonique

$$X \to X/D(X),$$

les complexes de chaînes X et X/D(X) sont *homotopiquement équivalents*, et ce

[1] S. Eilenberg-S. Mac Lane, On the groups H (Π, n) I (Ann. of Math., *58* (1953), pp. 55-106; voir Theorem 4,1).

de façon *naturelle*. On pourrait évidemment conjecturer qu'un résultat analogue est valable pour la catégorie des complexes de chaînes *simpliciaux*; malheureusement, l'auteur ignore s'il en est bien ainsi.

Nous allons voir cependant qu'on a un résultat intéressant si l'on se place sur la catégorie $\mathfrak{k}^{++}$ des *schémas simpliciaux ordonnés* (un homomorphisme $K \to L$ étant ici une application simpliciale *strictement* croissante) : *sur cette catégorie, les foncteurs*

$$K \to C_*(K) \quad \text{et} \quad K \to C_*(K)/D(C_*(K))$$

*sont homotopiquement équivalents.*

Tout d'abord, pour tout $K \in \mathfrak{k}^{++}$, on a une décomposition de $C_*(K)$ en *somme directe*

$$C_*(K) = C_*^{++}(K) + D(C_*(K))$$

où l'on note $C_*^{++}(K)$ le sous-complexe de $C_*(K)$ ayant pour base l'ensemble des simplexes singuliers $s : \Delta_n \to K$ de K qui sont *strictement* croissants.

En effet, soit $(x_0, \ldots, x_n) = s$ un simplexe singulier de K; si les $x_i$ ne sont pas deux à deux distincts, ce simplexe est dans $D(C_*(K))$; si les $x_i$ sont deux à deux distincts, il existe évidemment un simplexe singulier strictement croissant $t$ et une permutation $u$ de $\Delta_n$ vérifiant la relation $s = \bar{u}(t)$, d'où $s = \bar{u}(t) - \varepsilon(u).t + \varepsilon(u).t$, ce qui prouve bien que $C_*(K)$ est somme de $C_*^{++}(K)$ et de $D(C_*(K))$; il reste à prouver que cette somme est directe; il suffit pour le voir d'observer qu'en dimension $n$, $D(C^*(K))$ est engendré d'une part par les simplexes singuliers $(x_0, \ldots, x_n)$ à sommets non tous distincts, d'autre part par les chaînes de la forme $\bar{u}(s) - \varepsilon(u).s$, où $s$ décrit l'ensemble des simplexes singuliers strictement croissants de dimension $n$, et où $u$ décrit le groupe des permutations de $\Delta_n$; notre assertion résulte facilement de là.

Cela étant il est clair que nous avons sur la catégorie $\mathfrak{k}^{++}$ un isomorphisme canonique entre les foncteurs

$$K \to C_*^{++}(K) \qquad \text{et} \qquad K \to C_*(K)/D(C_*(K));$$

par conséquent, tout revient à montrer que *les foncteurs*

$$K \to C_*^{++}(K) \qquad \textit{et} \qquad K \to C_*(K)$$

*sont homotopiquement équivalents*. Nous allons pour cela utiliser le Corollaire du Théorème 2.5.2, en prenant pour *objets modèles* de la catégorie $\mathfrak{k}^{++}$ les schémas ordonnés $\Delta_n (n = 0, 1, \ldots)$. Puisque l'on vérifie facilement que l'injection $C_*^{++}(K) \to C_*(K)$ induit un isomorphisme des groupes d'homologie en dimension 0, tout revient à établir que les deux foncteurs considérés sont représentables et acycliques.

Tout d'abord, $C_*$ est acyclique en vertu du Théorème 3.7.4; pour démontrer que les complexes $C_*^{++}(\Delta_n)$ sont eux aussi acycliques il suffit de considérer l'opérateur qui applique un simplexe singulier strictement croissant $(x_0, \ldots, x_p)$ de $\Delta_n$ sur $(0, x_0, \ldots, x_p)$ lorsque $0 < x_0$, et sur $0$ lorsque $0 = x_0$.

Pour établir la représentabilité de $K \to C_*^{++}(K)$ on procède comme suit; pour tout $n \geqslant 0$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Delta_n, K)$, i.e. l'ensemble des applications simpliciales strictement croissantes de $\Delta_n$ dans K, s'identifie à la base canonique de $C_n^{++}(K)$ : il suffit pour cela d'identifier chaque $f \in \mathrm{Hom}\,(\Delta_n, K)$ au simplexe singulier $f(u_n)$ de K, $u_n$ étant le simplexe fondamental de $\Delta_n$; la propriété de représentabilité suit immédiatement de là.

De même la représentabilité de $K \to C_n(K)$ s'obtient en remarquant que $C_n(K)$ admet pour *base* la famille des simplexes singuliers $f(u)$, où $f$ décrit l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Delta_p, K)$, $p = 0, 1, \ldots, n$, et où, pour chaque $p$, $u$ décrit l'ensemble des simplexes singuliers (non ordonnés) de dimension $n$ de $\Delta_p$ tels que $u(\Delta_n) = \Delta_p$.

Ces propriétés établies, l'équivalence des foncteurs considérés résulte, comme nous l'avons dit, du théorème des modèles acycliques.

Le résultat que nous venons d'établir s'exprime encore comme suit; considérons les injections canoniques

$$j_n : C_n^{++}(K) \to C_n(K);$$

alors il existe sur la catégorie $\mathfrak{k}^{++}$ des transformations naturelles

$$\begin{aligned} p_n \ &: C_n(K) \to C_n^{++}(K) \\ h_n \ &: C_n(K) \to C_{n+1}(K) \\ h_n^{++} &: C_n^{++}(K) \to C_{n+1}^{++}(K) \end{aligned}$$

de telle sorte qu'on ait les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & j_n \circ d = d \circ j_{n+1}\,;\ p_n \circ d = d \circ p_{n+1}; \\ & j_n \circ p_n = d \circ h_n + h_{n-1} \circ d; \\ & p_n \circ j_n = d \circ h_n^{++} + h_{n-1}^{++} \circ d; \end{aligned}$$

On observera que la seule condition imposée à la transformation naturelle

$$p : C_*(K) \to C_*^{++}(K)$$

définie par les $p_n$ est d'être homogène de degré 0, de commuter à l'opérateur $d$, et de se réduire à l'identité en dimension 0. En faisant usage de la décomposition canonique

$$C_*(K) = C_*^{++}(K) + D(C_*(K))$$

on peut donc prendre pour $p$ l'opérateur de *projection* associé à cette décomposition, i.e, définir comme suit $p$ sur les simplexes singuliers de dimension $n$ de K : $p(s) = 0$ si les sommets de $s$ ne sont pas tous distincts, et, dans le cas contraire,

$$p(s) = \varepsilon(u) \,.\, \bar{u}(s),$$

$u$ étant *la* permutation de $\Delta_n$ qui transforme $s$ en un simplexe strictement croissant.

A la notion de chaîne orientée d'un complexe de chaînes simplicial correspond, par « dualité », celle de *cochaîne alternée* d'un complexe X de cochaînes simplicial; on dira que $x \in X^n$ est alternée si les relations suivantes ont lieu : *a*) pour toute application $f : \Delta_n \to \Delta_p$, avec $p > n$, on a

$$\bar{f}(x) = 0;$$

*b*) pour toute permutation $u$ de $\Delta_n$ on a

$$\bar{u}(x) = \varepsilon(u) . x.$$

On vérifie facilement que ces cochaînes alternées forment un sous-complexe A(X) de X; on ignore si l'injection canonique $A(X) \to X$ est une équivalence au point de vue homotopique; mais nous allons le démontrer dans un cas particulier important.

Considérons un schéma simplicial K et un système de coefficients $\mathscr{L}$ sur K (n° 3.3); nous allons voir que la propriété en question est vraie pour le complexe

$$X = C^*(K; \mathscr{L}).$$

Pour cela, nous supposerons K ordonné, ce qui évidemment ne restreint pas la généralité puisque tout ensemble peut être muni d'une relation d'ordre totale.

Remarquons tout d'abord qu'une cochaîne

$$\alpha = (\alpha(s))_{s \in S_n(K)}, \qquad \alpha(s) \in \mathscr{L}(s),$$

est alternée si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : $\alpha(s)$ est nul si les sommets de $s$ ne sont pas deux à deux distincts et

$$\alpha[\bar{u}(s)] = \varepsilon(u) . \alpha(s)$$

pour toute permutation $u$ de $\Delta_n$. Il s'ensuit évidemment qu'une cochaîne alternée est entièrement déterminée dès qu'on connaît les valeurs qu'elle prend sur les simplexes singuliers *strictement croissants* de K, et de plus qu'on peut choisir arbitrairement ces valeurs (moyennant bien entendu la restriction que $\alpha(s) \in \mathscr{L}(s)$ pour tout $s$).

Lorsque le système de coefficients $\mathscr{L}$ est trivial, ces considérations montrent que les cochaînes alternées de K à valeurs dans $\mathscr{L}$ s'identifient canoniquement aux éléments du complexe $\mathrm{Hom}[C_*(K)/D(C_*(K)), \mathscr{L}]$; le théorème que nous avons en vue s'obtient alors de façon évidente à partir du résultat que nous avons établi précédemment.

Dans le cas général d'un système de coefficients quelconque $\mathscr{L}$ sur un schéma simplicial ordonné K, tout le problème consiste évidemment à définir avec précision le « transposé » à $C^*(K; \mathcal{L})$ d'un homomorphisme de la forme $C_p(K) \to C_q(K)$ par exemple. Tout d'abord, étant donnés des simplexes singuliers $s$ et $t$ de K, de dimensions $p$ et $q$, nous écrirons $s \subset t$ pour indiquer qu'on a la relation $s(\Delta_p) \subset t(\Delta_q)$. Cela étant, nous dirons qu'un homomorphisme

$$\theta : C_p(K) \to C_q(K)$$

est *transposable* si, pour tout simplexe singulier $s$ de dimension $p$ de K, on a une relation de la forme

$$\theta(s) = \sum_{\substack{t \in S_q(K) \\ t \subset s}} \alpha(s, t) \,.\, t$$

avec des coefficients $\alpha(s, t)$ entiers rationnels. On définit alors le *transposé*

$$^t\theta : C^q(K; \mathcal{L}) \to C^p(K; \mathcal{L})$$

comme suit : pour $\lambda \in C^q(K; \mathcal{L})$, la cochaîne $^t\theta(\lambda) = \mu \in C^p(K; \mathcal{L})$ est donnée par

$$\mu(s) = \sum_{\substack{t \in S_q(K) \\ t \subset s}} \alpha(s, t) \,.\, (\text{restriction à } s \text{ de } \lambda(t)) \,;$$

cette formule a un sens puisqu'elle ne fait intervenir que des simplexes $t \subset s$.

Il est clair que l'application $\theta \to {}^t\theta$ est compatible avec les diverses opérations algébriques évidentes; de plus, si $\theta$ est nul sur les chaînes dégénérées, $^t\theta$ prend ses valeurs dans les cochaînes alternées.

Ceci fait, il est clair qu'en transposant les opérateurs $j_n$, $p_n$, $h_n$, $h_n^{++}$ définis plus haut on trouve comme annoncé l'équivalence des complexes X et A(X) lorsque $X = C^*(K; \mathcal{L})$; on laisse au lecteur le soin de justifier cette assertion en détail.

L'intérêt du résultat précédent est de conduire entre autres au théorème suivant : *supposons* K *de dimension n finie; alors on a*

$$H^p(K; \mathcal{L}) = 0 \textit{ pour } p > n$$

*pour tout système de coefficients* $\mathcal{L}$ *sur* K. On a même, dans ce cas, la relation $A(C^p(K; \mathcal{L})) = 0$ pour $p > n$. On déduit de là le résultat suivant : *soient* E *un espace topologique,* $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ *un recouvrement ouvert de* E, *et* $\mathcal{L}$ *un préfaisceau de groupes abéliens sur* E; *on a alors* $H^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}) = 0$ *pour* $p > n$ *si le recouvrement est de dimension* $\leqslant n$, *i. e*, si l'on a

$$M_{i_0} \cap \cdots \cap M_{i_n} = \varnothing$$

quels que soient les indices $i_0, \ldots, i_n$ deux à deux distincts.

### 3. 9. — Equivalence entre produits cartésiens et tensoriels

*Sauf mention expresse du contraire, on suppose l'anneau de base* A *commutatif*; tous les produits tensoriels considérés sont relatifs à A. Étant donné un complexe de chaînes (resp. de cochaînes) simplicial X, on note $C_n(X)$ (resp. $C^n(X)$) sa composante de dimension (resp. degré) $n$.

Soit $p$ un entier $\geqslant 1$. Nous désignerons par $\mathfrak{K}_p$ la catégorie suivante : les *objets* de $\mathfrak{K}_p$ sont les suites $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ de $p$ complexes de chaînes simpliciaux [1] sur l'anneau de base donné A; un *homomorphisme* $\theta : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ est une suite d'homomorphismes $\theta_i : X_i \to Y_i$ de complexes simpliciaux; enfin, on *compose* des homomorphismes $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ et $\mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ en composant, pour chaque $i$, les homomorphismes $X_i \to Y_i$ et $Y_i \to Z_i$ correspondants.
De même, nous désignerons par $\mathfrak{k}_p$ la catégorie des suites $\mathbf{K} = (K_1, \ldots, K_p)$ de $p$ *schémas* simpliciaux, un homomorphisme $\mathbf{K} \to \mathbf{L}$ étant une suite d'applications simpliciales $K_i \to L_i$. Si l'on associe à tout schéma simplicial K le complexe $C_*(K)$ des chaînes singulières de K *à coefficients dans l'anneau de base* A, on obtient évidemment un foncteur covariant

$$\mathbf{K} \to (C_*(K_1), \ldots, C_*(K_p))$$

défini sur la catégorie $\mathfrak{k}_p$ et à valeurs dans la catégorie $\mathfrak{K}_p$.

Étant donnés des entiers positifs $m_1, \ldots, m_p$, considérons sur $\mathfrak{K}_p$ le foncteur

$$F_{m_1 \ldots m_p} : \mathbf{X} \to C_{m_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(X_p),$$

à valeurs dans la catégorie des A-modules. On en déduit sur $\mathfrak{k}_p$ un foncteur

$$f_{m_1 \ldots m_p} : \mathbf{K} \to C_{m_1}(K_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(K_p),$$

et bien entendu toute transformation naturelle

$$T : F_{m_1 \ldots m_p} \to F_{n_1 \ldots n_p}$$

induit une transformation naturelle

$$t : f_{m_1 \ldots m_p} \to f_{n_1 \ldots n_p};$$

*réciproquement, toute transformation naturelle t se « prolonge » d'une manière et d'une seule en une transformation* T.

Pour le voir, explicitons tout d'abord $t$. Considérons l'objet $(\Delta_{m_1}, \ldots, \Delta_{m_p})$ de $\mathfrak{k}_p$; $u_n$ désignant le simplexe fondamental de $\Delta_n$, $t$ transforme l'élément

$$u_{m_1} \otimes \cdots \otimes u_{m_p} \in C_{m_1}(\Delta_{m_1}) \otimes \cdots \otimes C_{m_p}(\Delta_{m_p})$$

[1] Toutes les définitions et tous les résultats qui vont suivre s'appliquent, moyennant des modifications triviales, aux complexes de chaînes semi-simpliciaux; on laisse au lecteur le soin de s'en assurer.

en un élément de $C_{n_1}(\Delta_{m_1}) \otimes \ldots \otimes C_{n_p}(\Delta_{m_p})$, d'où nécessairement une formule

$$t(u_{m_1} \otimes \cdots \otimes u_{m_p}) = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) . \overline{f}_1(u_{m_1}) \otimes \cdots \otimes \overline{f}_p(u_{m_p})$$

où la sommation est étendue aux applications

$$f_i : \Delta_{n_i} \to \Delta_{m_i}$$

et où les coefficients $\gamma$ sont dans l'anneau de base.

Cela dit, soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p) \in \mathfrak{K}_p$ et prenons des éléments $x_i \in C_{m_i}(X_i)$ ; il y a un homomorphisme et un seul

$$C_*(\Delta_{m_i}) \to X_i$$

qui applique $u_{m_i}$ sur $x_i$; la transformation cherchée T, si elle existe, est donc nécessairement donnée par la formule

$$T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) . \overline{f}_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \overline{f}_p(x_p),$$

et il est bien évident que la transformation naturelle ainsi définie répond effectivement au problème posé.

Il est clair que la correspondance entre $t$ et T est A-linéaire, et compatible aussi bien avec la composition des transformations qu'avec leur produit tensoriel (si l'on a des transformations naturelles $F_{m_1 \ldots m_p} \to F_{n_1 \ldots n_p}$ et $F_{r_1 \ldots r_q} \to F_{s_1 \ldots s_q}$ définies respectivement sur les catégories $\mathfrak{K}_p$ et $\mathfrak{K}_q$ on en déduit par produit tensoriel une transformation $F_{m_1 \ldots m_p r_1 \ldots r_q} \to F_{n_1 \ldots n_p s_1 \ldots s_q}$ définie sur la catégorie $\mathfrak{K}_{p+q}$).

Ces préliminaires posés, nous pouvons énoncer le résultat principal de la théorie :

***Théorème* 3. 9. 1** (Eilenberg-Zilber) — *Soit $\mathfrak{K}_p$ la catégorie des suites de $p$ complexes de chaînes simpliciaux sur un anneau de base commutatif* A; *alors les foncteurs covariants*

$$\mathbf{X} \to X_1 \times \ldots \times X_p \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{X} \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_p,$$

*définis sur $\mathfrak{K}_p$ et à valeurs dans la catégorie des complexes de chaînes sur* A, *sont homotopiquement équivalents.*

Autrement dit, il existe des transformations naturelles

$$\begin{aligned} U &: X_1 \times \ldots \times X_p \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_p, \\ V &: X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \to X_1 \times \ldots \times X_p, \end{aligned}$$

telles que $U \circ V$ et $V \circ U$ soient *naturellement* homotopes à l'identité. Nous démontrerons ce résultat en utilisant le Corollaire du Théorème 2.5.2.

Plaçons-nous d'abord sur la catégorie $\mathfrak{k}_p$; on a évidemment entre les foncteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\to C_*(K_1) \times \ldots \times C_*(K_p) = C_*(K_1 \times \ldots \times K_p) \\ \mathbf{K} &\to C_*(K_1) \otimes \ldots \otimes C_*(K_p) \end{aligned}$$

un isomorphisme canonique en dimension 0; celui-ci est au surplus compatible avec les augmentations évidentes des complexes considérés.

Prenons alors comme *modèles* dans $\mathfrak{k}_p$ les suites de la forme $(\Delta_{m_1}, \ldots, \Delta_{m_p})$. Les foncteurs précédents sont *acycliques*, le premier en vertu du Théorème 3.7.4, le second en vertu du nº 2. 7. Ils sont aussi *représentables*; il suffit pour le voir d'établir la représentabilité de chaque foncteur

$$\mathbf{K} \to C_{m_1}(K_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(K_p);$$

mais cela résulte évidemment de ce que le groupe précédent admet pour *base* l'ensemble des éléments de la forme

$$f_1(u_{m_1}) \otimes \ldots \otimes f_p(u_{m_p}),$$

où chaque $f_i$ décrit l'ensemble des homomorphismes de $\Delta_{m_i}$ dans $K_i$, et où $u_n$ désigne, comme toujours, le simplexe fondemental de $\Delta_n$.

Cela fait le Théorème des modèles acycliques montre que les foncteurs « produit cartésien » et « produit tensoriel », considérés sur $\mathfrak{k}_p$, sont homotopiquement équivalents. Mais on a vu que toute transformation naturelle définie sur $\mathfrak{k}_p$ se prolonge à $\mathfrak{K}_p$; d'où le résultat pour la catégorie $\mathfrak{K}_p$.

**Corollaire** 1 — *Soient* X *et* Y *deux complexes de chaînes simpliciaux; on a des isomorphismes canoniques*

$$H_*(X \times Y) = H_*(X \otimes Y).$$

**Corollaire** 2 — *Soient* K *et* L *deux schémas simpliciaux; l'homologie de* $K \times L$ *est canoniquement isomorphe à celle du complexe* $C_*(K) \otimes C_*(L)$.

**Corollaire** 3 — *Soient* E *et* F *deux espaces topologiques; l'homologie singulière de l'espace produit* $E \times F$ *est canoniquement isomorphe à l'homologie du complexe* $CS_*(E) \otimes CS_*(F)$.

**Remarque** 3.9.1 — Il est facile de construire explicitement, sur la catégorie $\mathfrak{K}_2$, une transformation naturelle

$$X \times Y \to X \otimes Y$$

se réduisant à l'identité en dimension 0. Il suffit de le faire sur la catégorie $\mathfrak{k}_2$, i.e, pour $X = C_*(K)$, $Y = C_*(L)$ où K et L sont des schémas simpliciaux. Le lecteur vérifiera aisément que la formule suivante (qui indique comment transformer le produit cartésien de deux simplexes singuliers de dimension $n$) convient :

$$\boxed{(x_0, \ldots, x_n) \times (y_0, \ldots, y_n) \to \sum_{i=0}^{i=n} (x_0, \ldots, x_i) \otimes (y_i, \ldots, y_n)}.$$

Il est bien entendu *inutile* de vérifier que cette formule définit effectivement une *équivalence* entre produit cartésien et produit tensoriel : on le sait à l'avance, pourvu que la transformation en question soit naturelle, commute aux différentielles, et se réduise à l'identité en dimension 0 — propriétés dont la vérification est triviale.

On peut aussi expliciter une transformation $X \otimes Y \to X \times Y$.

***Remarque*** 3.9.2. — Lorsque $p = 2$, le Théorème 3.9.1 est vrai même si l'anneau de base A n'est pas commutatif; l'hypothèse que A est commutatif ne sert qu'à assurer la possibilité de former des produits tensoriels de plus de deux facteurs.

### 3. 10. — Extension aux complexes de cochaînes simpliciaux

Désignons par $\mathfrak{K}^p$ la catégorie dont les objets sont les suites $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ de $p$ complexes de cochaînes simpliciaux sur l'anneau de base A donné, les homomorphismes entre objets de cette catégorie se définissant comme au n° précédent. Nous allons démontrer, pour cette catégorie, l'analogue du Théorème 3.9.1.

Faisons d'abord la remarque suivante. Considérons, sur la catégorie $\mathfrak{K}_p$, une transformation naturelle

$$T : C_{m_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(X_p) \to C_{n_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C_{n_p}(X_p);$$

nous allons lui associer canoniquement, sur la catégorie $\mathfrak{K}^p$, une transformation naturelle *transposée*

$${}^tT : C^{n_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C^{n_p}(X_p) \to C^{m_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C^{m_p}(X_p).$$

Pour cela, écrivons T sous forme explicite

$$T = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) \cdot \bar{f}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{f}_p$$

où la sommation est étendue aux applications $f_i : \Delta_{n_i} \to \Delta_{m_i}$, et où les coefficients $\gamma$ sont dans l'anneau de base. Nous définirons alors

$${}^tT = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) \cdot \bar{f}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{f}_p,$$

en utilisant la même formule. Bien entendu, dans la première formule $\bar{f}_i$ est l'homomorphisme structural $C_{m_i} \to C_{n_i}$, tandis que dans la seconde c'est l'homomorphisme structural $C^{n_i} \to C^{m_i}$.

Il est clair que la correspondance entre T et sa transposée satisfait aux conditions suivantes, qui du reste la *caractérisent* :

*a*) : l'application $T \to {}^tT$ est A-linéaire;

*b*) : étant données des transformations naturelles

$$\mathrm{U} : \mathrm{F}_{m_1 \dots m_p} \to \mathrm{F}_{n_1 \dots n_p}, \qquad \mathrm{V} : \mathrm{F}_{n_1 \dots n_p} \to \mathrm{F}_{r_1 \dots r_p}$$

on a la relation

$$^t(\mathrm{V} \circ \mathrm{U}) = {}^t\mathrm{U} \circ {}^t\mathrm{V};$$

*c*) : étant données des transformations naturelles

$$\mathrm{U} : \mathrm{F}_{m_1 \dots m_p} \to \mathrm{F}_{n_1 \dots n_p}, \qquad \mathrm{V} : \mathrm{F}_{r_1 \dots r_q} \to \mathrm{F}_{s_1 \dots s_q}$$

on a la relation

$$^t(\mathrm{U} \otimes \mathrm{V}) = {}^t\mathrm{U} \otimes {}^t\mathrm{V};$$

*d*) pour toute application $f : \Delta_p \to \Delta_q$, la transposée de

$$\bar{f} : \mathrm{C}_q \to \mathrm{C}_p \qquad \text{est} \qquad \bar{f} : \mathrm{C}^p \to \mathrm{C}^q.$$

Ces préliminaires posés, il est clair qu'en « transposant » le Théorème 3.9.1 on obtient le résultat suivant :

**Théorème** 3.10.1. — *Soit $\mathfrak{K}^p$ la catégorie des suites de $p$ complexes de cochaînes simpliciaux sur un anneau de base commutatif; alors les foncteurs covariants*

$$\mathbf{X} \to \mathrm{X}_1 \times \dots \times \mathrm{X}_p \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{X} \to \mathrm{X}_1 \otimes \dots \otimes \mathrm{X}_p,$$

*définis sur $\mathfrak{K}^p$ et à valeurs dans la catégorie des complexes de cochaînes, sont homotopiquement équivalents.*

Voici une application importante du résultat précédent. Considérons des complexes de chaînes simpliciaux *basiques* $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p$ et des *systèmes de coefficients* $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$ sur ces complexes; on peut en déduire sur $\mathrm{X}_1 \times \dots \times \mathrm{X}_p$ un système de coefficients $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_p$ en posant

$$\boxed{\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_p(s_1 \times \cdots \times s_p) = \mathcal{A}_1(s_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_p(s_p)}$$

et en définissant de façon évidente les opérateurs de restriction.

On a alors un homomorphisme canonique de complexes de cochaînes simpliciaux

$$\boxed{j_p : \mathrm{C}^*(\mathrm{X}_1; \mathcal{A}_1) \times \cdots \times \mathrm{C}^*(\mathrm{X}_p; \mathcal{A}_p) \to \mathrm{C}^*(\mathrm{X}_1 \times \cdots \times \mathrm{X}_p; \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_p)}$$

défini comme suit : étant données des cochaînes $\alpha_i \in \mathrm{C}^*(\mathrm{X}_i; \mathcal{A}_i)$, on prend pour $j_p(\alpha_1 \times \dots \times \alpha_p)$ la cochaîne

$$s_1 \times \dots \times s_p \to \alpha_1(s_1) \otimes \dots \otimes \alpha_p(s_p).$$

L'homomorphisme $j_p$ n'est généralement pas bijectif; en effet dans l'avant dernière formule, les termes de degré $n$ du premier membre forment le groupe

$$\bigotimes_{i=1}^{i=p} \prod_{\dim(s_i)=n} \mathcal{A}_i(s_i),$$

tandis qu'au second membre nous trouvons

$$\prod_{\dim(s_i)=n} \bigotimes_{i=1}^{i=p} \mathcal{A}_i(s_i);$$

or la formation des produits tensoriels n'est pas compatible avec celle des produits directs *infinis*. Cependant, cette difficulté ne se présente pas pour des produits directs finis, ce qui sera le cas si les complexes $X_i$ ne comportent, en chaque dimension, qu'un nombre *fini* de simplexes (nous dirons alors que les $X_i$ sont des complexes simpliciaux basiques *finis*). Dans ces conditions il est clair que le Théorème 3.10.1. démontre le résultat suivant :

***Théorème*** 3.10.2. — *Soient* $X_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ *des complexes de chaînes simpliciaux basiques* finis, *et* $\mathcal{A}_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ *des systèmes de coefficients sur les* $X_k$; *alors les groupes*

$$H^*(X_1 \times \ldots \times X_p;\ \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p)$$

*sont canoniquement isomorphes aux groupes de cohomologie du complexe*

$$C^*(X_1;\ \mathcal{A}_1) \otimes \ldots \otimes C^*(X_p;\ \mathcal{A}_p).$$

***Exemple*** 3.10.1. — Prenons deux schémas simpliciaux finis K et L; alors, quels que soient les groupes abéliens A et B, on peut calculer les groupes de cohomologie

$$H^*(K \times L;\ A \otimes B)$$

à l'aide du complexe produit tensoriel

$$C^*(K;\ A) \otimes C^*(L;\ B).$$

Par exemple, *pour tout corps $k$ on a des isomorphismes canoniques*

$$H^n(K \times L; k) = \sum_{p+q=n} H^p(K; k) \underset{k}{\otimes} H^q(L; k),$$

comme il résulte du Théorème de Künneth. On a un résultat analogue pour les complexes simpliciaux basiques finis lorsque les systèmes de coefficients considérés sont des *espaces vectoriels sur un corps $k$* (à condition bien entendu de sous-entendre — comme du reste nous le faisons dans tout ce § — que les produits cartésiens et tensoriels considérés sont relatifs à l'anneau de base $k$).

### 3. 11. — Produit cartésien de deux classes d'homologie

Choisissons une fois pour toutes, pour tout entier $p \geqslant 1$, une transformation naturelle

$$T_p : X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \to X_1 \times \ldots \times X_p$$

sur la catégorie $\mathfrak{K}_p$ des suites de $p$ complexes de chaînes simpliciaux sur un anneau de base commutatif donné A. Il en résulte pour tout $n$ un homomorphisme

$$H_n(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p) \to H_n(X_1 \times \ldots \times X_p)$$

qui est d'ailleurs *bijectif et indépendant du choix de* $T_p$ (puisque d'après les considérations du § 2 la transformation $T_p$ est unique à une homotopie près); autrement dit, *les foncteurs*

$$\mathbf{X} \to H_n(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{X} \to H_n(X_1 \times \ldots \times X_p)$$

*sont canoniquement isomorphes.*

Or on a d'autre part des homomorphismes canoniques

$$H_{n_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes H_{n_p}(X_p) \to H_{n_1+\cdots+n_p}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p);$$

on en déduit donc des homomorphismes *naturels*

$$\boxed{H_{n_1}(X_1) \otimes \cdots \otimes H_{n_p}(X_p) \to H_{n_1+\cdots+n_p}(X_1 \times \cdots \times X_p)}\,.$$

Etant données des classes d'homologie $\xi_i \in H_{n_i}(X_i)$, l'image de $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_p$ par cet homomorphisme se note

$$\xi_1 \times \ldots \times \xi_p;$$

c'est le *produit cartésien* des classes d'homologie données.

Par exemple, si l'on a des espaces topologiques E et F, et des classes

$$\xi \in H_r(E;\ A), \qquad \eta \in H_s(F;\ B),$$

où A et B sont des groupes abéliens, leur produit cartésien est une classe

$$\xi \times \eta \in H_{r+s}(E \times F;\ A \otimes B).$$

**Théorème** 3.11.1. — *Le produit cartésien possède les propriétés suivantes :*

*a) Soient* X, Y, Z *trois complexes de chaînes simpliciaux,* $\xi$, $\eta$, $\zeta$ *des classes d'homologie de* X, Y, Z; *alors moyennant l'indentification* $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$, *on a la relation*

$$\xi \times (\eta \times \zeta) = (\xi \times \eta) \times \zeta.$$

*b) Soient* X, Y *deux complexes de chaînes simpliciaux,* $\xi$, $\eta$ *des classes d'homologie de dimensions* $p$, $q$ *de* X, Y; *alors, moyennant l'identification* $X \times Y = Y \times X$, *on a la relation* (1)

$$\eta \times \xi = (-1)^{pq} \xi \times \eta.$$

*c) Soit* $0 \to X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'' \to 0$ *une suite exacte de complexes de chaînes simpliciaux, et* Y *un complexe de chaînes simplicial tel que la suite*

$$0 \to X' \times Y \to X \times Y \to X'' \times Y \to 0$$

*soit encore exacte; alors quelles que soient les classes d'homologie* $\xi''$ *et* $\eta$ *de* X'' *et* Y, *on a la relation*

$$\partial(\xi'' \times \eta) = (\partial\xi'') \times \eta.$$

(1) La commutativité de l'anneau de base est essentielle si l'on veut obtenir cette propriété.

***Démonstration de*** (*a*). — Considérons sur les catégories $\mathfrak{K}_p$ et $\mathfrak{K}_q$ les transformations naturelles

$$\begin{aligned} T_p &: X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \to X_1 \times \ldots \times X_p \\ T_q &: X_1 \otimes \ldots \otimes X_q \to X_1 \times \ldots \times X_q ; \end{aligned}$$

on en déduit sur la catégorie $\mathfrak{K}_{p+q}$ une transformation naturelle

$$T_p \otimes T_q : X_1 \otimes \ldots \otimes X_{p+q} \to (X_1 \times \ldots \times X_p) \otimes (X_{p+1} \times \ldots \times X_{p+q});$$

en composant avec la transformation $T_2$ on obtient une transformation naturelle

$$T_2 \circ (T_p \otimes T_q) : X_1 \otimes \ldots \otimes X_{p+q} \to X_1 \times \ldots \times X_{p+q}$$

qui se réduit à l'identité en dimension 0, et qui par conséquent *est homotope à* $T_{p+q}$.

Prenons alors des classes d'homologie $\xi_i \in H(X_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant p+q)$. Désignant encore, *par abus de notation*, par $\xi_1 \otimes \ldots$ l'image de $\xi_1 \otimes \ldots$ dans $H(X_1 \otimes \ldots)$, on a

$$\begin{aligned} T_p(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p) &= \xi_1 \times \cdots \times \xi_p \\ T_q(\xi_{p+1} \otimes \cdots \otimes \xi_{p+q}) &= \xi_{p+1} \times \cdots \times \xi_{p+q} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$T_p \otimes T_q(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_{p+q}) = (\xi_1 \times \ldots \times \xi_p) \otimes (\xi_{p+1} \times \ldots \times \xi_{p+q});$$

en appliquant $T_2$ et en tenant compte du résultat précédent, il vient donc

$$T_{p+q}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_{p+q}) = (\xi_1 \times \ldots \times \xi_p) \times (\xi_{p+1} \times \ldots \times \xi_{p+q});$$

le premier membre étant précisément $\xi_1 \times \ldots \times \xi_{p+q}$, on obtient la propriété d'associativité.

***Démonstration de*** (*b*). — Considérons les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \sigma &: X \times Y \to Y \times X \\ \sigma' &: X \otimes Y \to Y \otimes X \end{aligned}$$

(on se place sur la catégorie $\mathfrak{K}_2$) donnés par

$$\sigma(a \times b) = b \times a; \qquad \sigma'(a \otimes b) = (-1)^{pq} b \otimes a$$

pour $a$ de dimension $p$ et $b$ de dimension $q$. Les transformations naturelles

$$T_2 \quad \text{et} \quad \sigma^{-1} \circ T_2 \circ \sigma' : \qquad X \otimes Y \to X \times Y$$

sont identiques en dimension 0, donc homotopes. Si donc on prend des classes d'homologie $\xi \in H_p(X)$, $\eta \in H_q(Y)$, on aura

$$T_2(\xi \otimes \eta) = \sigma^{-1} \circ T_2 \circ \sigma'(\xi \otimes \eta);$$

mais comme on a visiblement

$$\sigma'(\xi \otimes \eta) = (-1)^{pq} \eta \otimes \xi$$

le résultat cherché s'ensuit aussitôt.

***Démonstration de*** (*c*). — Représentons les classes d'homologie données $\xi''$ et $\eta$ par des cycles $x'' \in X''$ et $y \in Y$. Il existe un cycle $x' \in X'$ et une chaîne $x \in X$ tels que l'on ait

$$x'' = p(x), \qquad j(x') = dx,$$

et par définition de l'opérateur $\partial$ la classe $\partial\xi''$ est représentée par $x'$. Considérons alors la transformation naturelle $T_2$. Comme $\xi \otimes \eta$ est représentée dans $X'' \otimes Y$ par $x'' \otimes y$ on voit que $\xi'' \times \eta$ est représentée par $T_2(x'' \otimes y)$; de même $(\partial\xi'') \times \eta$ est représentée par $T_2(x' \otimes y)$.

Or puisque $T_2$ est *naturelle* on a

$$T_2(x'' \otimes y) = T_2(p(x) \otimes y) = p \times 1(T_2(x \otimes y))$$

et de même

$$j \times 1(T_2(x' \otimes y)) = T_2(j(x') \otimes y) = T_2(dx \otimes y);$$

comme $y$ est un cycle on a $dx \otimes y = d(x \otimes y)$, et comme $T_2$ commute à $d$ il vient donc

$$j \times 1(T_2(x' \otimes y)) = d(T_2(x \otimes y))$$

d'où l'on déduit par construction de $\partial$ que

$$\partial(\xi'' \times \eta) \text{ est représentée par } T_2(x' \otimes y),$$

ce qui achève la démonstration.

On laisse au lecteur, à titre d'exercice, le soin d'interpréter (*c*) en homologie singulière (prendre la suite exacte associée à un espace topologique E et à un sous-espace E' de E, et pour Y le complexe singulier d'un espace F).

Il va de soi que toutes les définitions et tous les résultats de ce n° s'appliquent, sans aucun changement si ce n'est dans les notations, aux complexes de *cochaînes* simpliciaux.

En particulier prenons des complexes de chaînes simpliciaux basiques $X_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ et des systèmes de coefficients $\mathcal{A}_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ sur ceux-ci; étant données des classes de cohomologie

$$\xi_k \in H^*(X_k; \mathcal{A}_k),$$

leur produit cartésien $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$ est une classe de cohomologie du complexe $C^*(X_1, \mathcal{A}_1) \times \ldots \times C^*(X_p; \mathcal{A}_p)$; mais on a (n° 3.10) un homomorphisme canonique $j_p$ de ce complexe dans $C^*(X_1 \times \ldots \times X_p; \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p)$; on en déduit donc des homomorphismes canoniques

$$\boxed{\begin{aligned} &H^{n_1}(X_1; \mathcal{A}_1) \otimes \cdots \otimes H^{n_p}(X_p; \mathcal{A}_p) \\ &\qquad \to H^{n_1 + \cdots + n_p}(X_1 \times \cdots \times X_p; \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_p) \end{aligned}}$$

Si les $X_k$ sont *finis*, il n'y a aucun inconvénient à *identifier* $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$ à son image dans la cohomologie de $X_1 \times \ldots \times X_p$; en fait, même si les $X_k$ ne sont pas finis, on désigne souvent par $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$ la classe de cohomologie de $X_1 \times \ldots \times X_p$ que nous venons de définir.

Par exemple, si l'on a des *espaces topologiques* $E_1, \ldots, E_p$ et des classes de cohomologie singulières $\xi_i \in H^*(E_i; A_i)$, alors $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$ (par abus de notation) est une classe de cohomologie de l'espace produit $E_1 \times \ldots \times E_p$, à valeurs dans le groupe abélien $A_1 \otimes \ldots \otimes A_p$. On a un résultat analogue pour les schémas simpliciaux.

## 3. 12. — Applications diagonales : cup-produit

Plaçons-nous sur la catégorie des complexes de chaînes simpliciaux *basiques*; il existe alors une transformation naturelle

$$D : X \to X \times X,$$

savoir celle qui transforme tout *simplexe* $s$ de X en le simplexe

$$D(s) = s \times s$$

de $X \times X$.

Si $X = C_*(K)$ où K est un schéma simplicial, l'application qu'on vient de définir correspond évidemment à l'application simpliciale $x \to (x, x)$ de K dans $K \times K$; si $X = CS_*(E)$, où E est un espace topologique, elle correspond à l'application continue $x \to (x, x)$ de E dans $E \times E$. Pour ces raisons, on appelle D l'*application diagonale*. *On ne peut pas* la définir sur la catégorie des complexes simpliciaux (non basiques) — car si on le pouvait, on en déduirait, sur la catégorie des *groupes abéliens*, une transformation naturelle non nulle $G \to G \times G$, ce qui est visiblement imposible.

Considérons maintenant des systèmes de coefficients $\mathcal{A}_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ sur X; on en déduit sur X un nouveau système de coefficients

$$\boxed{\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_p : s \to \mathcal{A}_1(s) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_p(s)},$$

et il est clair qu'en « transposant » l'application diagonale on trouve un homomorphisme canonique

$$\boxed{{}^t D_p : C^*(X \times \cdots \times X; \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_p) \to C^*(X; \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_p)};$$

cet homomorphisme transforme une cochaîne $\gamma$ du produit cartésien en la cochaîne $s \to \gamma\,(s \times \ldots \times s)$ de X.

On en déduit des homomorphismes

$$D_p^* : H^n(X \times \ldots \times X; \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p) \to H^n\,(X; \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_p);$$

en composant avec les homomorphismes définis à la fin du n° 3.11 il vient donc des homomorphismes canoniques

$$\boxed{H^{n_1}(X; \mathcal{A}_1) \otimes \cdots \otimes H^{n_p}(X; \mathcal{A}_p) \to H^{n_1 + \cdots + n_p}(X; \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_p)};$$

on les désigne plus explicitement par la notation

$$\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_1 \to \xi_1 \cup \ldots \cup \xi_p;$$

ce sont les *cup-produits*.

Avec l'abus de notation signalé à la fin du nº précédent on a donc

$$\boxed{\xi_1 \cup \cdots \cup \xi_p = D_p^*(\xi_1 \times \cdots \times \xi_p)}\cdot$$

**Théorème** 3.12.1. — *Le cup-produit est associatif, anticommutatif, et compatible avec les homomorphismes de systèmes de coefficients. De plus, soit*

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$$

*une suite exacte de systèmes de coefficients, et soit* $\mathcal{B}$ *un système de coefficients tel que la suite*

$$0 \to \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A}'' \otimes \mathcal{B} \to 0$$

*soit encore exacte; alors quelles que soient les classes de cohomologie* $\xi''$ *et* $\eta$ *à valeurs dans* $\mathcal{A}''$ et $\mathcal{B}$ *respectivement, on a la relation*

$$\delta(\xi'' \cup \eta) = (\delta\xi'') \cup \eta\cdot$$

Le fait que le cup-circuit soit compatible avec les homomorphismes de systèmes de coefficients est trival. Pour démontrer l'associativité il faut prouver la formule

$$D_2^*(D_p^*(\xi_1 \times \cdots \times \xi_p) \times D_q^*(\xi_{p+1} \times \cdots \times \xi_{p+q})) = D_{p+q}^*(\xi_1 \times \cdots \times \xi_{p+q});$$

celle-ci résulte de l'associativité des produits cartésiens et de l'associativité des applications diagonales. L'anticommutativité se prouve de même. Enfin, la dernière assertion du Théorème se prouve par un raisonnement direct analogue à celui qu'on a développé dans la démonstration du Théorème 3.11.1, (On notera que le résultat cherché n'est une conséquence de la propriété similaire des produits cartésiens que si la suite

$$0 \to \mathcal{A}' \times \mathcal{B} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}'' \times \mathcal{B} \to 0$$

est exacte, hypothèse plus forte que celle de l'énoncé; c'est pourquoi un raisonnement direct semble nécessaire). On laisse au lecteur le soin de détailler la démonstration à titre d'exercice.

Notons encore la propriété suivante : étant données des classes

$$\begin{array}{ll} \xi' \in H^*(X;\mathcal{A}'), & \xi'' \in H^p(X;\mathcal{A}'') \\ \eta' \in H^q(Y;\mathcal{B}'), & \eta'' \in H^*(Y;\mathcal{B}'') \end{array}$$

on a la formule

$$(\xi' \cup \xi'') \times (\eta' \cup \eta'') = (-1)^{pq}(\xi' \times \eta') \cup (\xi'' \times \eta'').$$

Comme application de ces résultats, supposons donné sur le complexe simplicial basique X un *système d'anneaux commutatifs avec unité* $\mathcal{A}$ (i.e. un système de coefficients avec un homomorphisme

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

induisant sur chaque groupe $\mathcal{A}(s)$ une structure d'anneau commutatif avec élément unité). On peut alors composer le cup-produit

$$H^*(X ; \mathcal{A}) \otimes H^*(X ; \mathcal{A}) \to H^*(X ; \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$$

avec l'homomorphisme

$$H^*(X ; \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \to H^*(X ; \mathcal{A})$$

résultant de la structure multiplicative de $\mathcal{A}$. On obtient ainsi sur $H^*(X; \mathcal{A})$ une structure multiplicative; il est clair que celle ci-est *associative, distributive par rapport à l'addition, compatible avec la graduation de* $H^*(X; \mathcal{A})$, ce qui veut dire que

$$\deg(\xi\eta) = \deg(\xi) + \deg(\eta)$$

si $\xi$ et $\eta$ sont homogènes, *anticommutative*, ce qui veut dire que

$$\eta\xi = (-1)^{\deg(\xi)\deg(\eta)} . \xi\eta$$

si $\xi$ et $\eta$ sont homogènes, et qu'enfin l'anneau $H^*(X; \mathcal{A})$ possède un *élément unité* — à savoir la classe du cocycle de degré 0

$$s \to \text{élément unité de } \mathcal{A}(s).$$

Muni de cette structure, $H^*(X; \mathcal{A})$ s'appelle l'*anneau de cohomologie* de X à valeurs dans $\mathcal{A}$.

# 4. SUITES SPECTRALES

## 4. 1. — Modules filtrés

Soit K un module sur un anneau A possédant un élément unité. On appelle *filtration décroissante* de K toute suite de sous-modules $K_p$ vérifiant les conditions suivantes :

$$K_p \supset K_{p+1}; \qquad \bigcup K_p = K.$$

On définirait de même des filtrations croissantes. Dans tout ce § nous nous bornerons à étudier des filtrations décroissantes, et nous appellerons *module filtré* tout A-module K muni d'une filtration décroissante.

Etant donné un module filtré K, on appelle *module gradué associé à* K le module

$$G(K) = \sum K_p/K_{p+1}$$

muni de la graduation évidente.

Soit $K = \Sigma K^p$ un module gradué, et filtrons-le à l'aide des sous-modules

$$K_p = \sum_{i \geqslant p} K^i;$$

il est clair qu'alors le module gradué G(K) est isomorphe à K lui-même.

Soit K un module filtré, et supposons par ailleurs K muni d'une graduation par des sous-modules $K^p$; on dit que la filtration et la graduation de K sont *compatibles* si

$$K_p = \sum_q K_p \cap K^q;$$

i.e, si les $K_p$ sont homogènes. Par exemple considérons un module bigradué

$K = \Sigma K^{ij}$; on définit la *première filtration* de K à l'aide des sous-modules

$$'K_p = \sum_{i \geqslant p} K^{ij}$$

et la *seconde filtration* à l'aide des sous-modules

$$''K_p = \sum_{j \geqslant p} K^{ij};$$

il est clair que chacune de ces filtrations est compatible avec chacune des trois graduations possibles de K.

Au lieu de dire qu'une filtration de K est compatible avec une graduation de K, nous dirons souvent que c'est une *filtration du module gradué* obtenu en munissant K de la graduation en question, et K, muni de la graduation et de la filtration données, sera appelé un *module gradué filtré*.

Soit K un module gradué filtré; on dit que la filtration de K est *régulière* s'il existe des entiers $n_i$ tels que l'on ait

$$K_p \cap K^i = 0 \qquad \text{pour} \qquad p > n_i.$$

Par exemple soit K un module bigradué et munissons-le de sa graduation *totale*; alors la *première* filtration de K est régulière dès que l'une des conditions suivantes est réalisée : la *première* graduation de K est bornée *supérieurement*; la *seconde* graduation de K est bornée *inférieurement*.

Soient K et L deux modules gradués filtrés, et $f$ un *homomorphisme* de K dans L, i.e, un homomorphisme de A-modules tel que

$$f(K_p) \subset L_p, \qquad f(K^q) \subset L^q.$$

Il est clair que $f$ définit un homomorphisme $G(K) \to G(L)$, homogène et de bidegré $(0, 0)$.

**Lemme** 4.1.1. — *Soit $f$ un homomorphisme d'un module gradué filtré* K *dans un module gradué filtré* L. *Si la filtration de* K *est régulière et si l'homomorphisme*

$$G(K) \to G(L)$$

*associé à $f$ est injectif, alors $f$ est injectif. Si la filtration de* L *est régulière et si l'homomorphisme* $G(K) \to G(L)$ *associé à $f$ est surjectif, alors $f$ est surjectif.*

Pour démontrer la première assertion, prenons un $x \in K$ tel que $f(x) = 0$; comme $f$ est compatible avec les graduations, on peut supposer $x \in K^i$ pour un $i$. Par ailleurs, il existe $p$ tel que $x \in K_p$; $f$ annulant l'image de $x$ dans $K_p/K_{p+1}$ on voit que $x \in K_{p+1}$; donc on a $x \in K_n$ pour $n$ assez grand — mais comme

$$K_n \cap K^i = 0$$

pour $n$ assez grand on en conclut que $x = 0$.

La seconde assertion se démontre de façon analogue.

## 4. 2. — La suite spectrale d'un module différentiel filtré

On appelle *module différentiel filtré* tout module différentiel K muni d'une filtration telle que l'on ait $d(K_p) \subset K_p$ pour tout $p$. La théorie des suites spectrales consiste essentiellement à utiliser la filtration de K pour construire par « approximations successives » le module dérivé H(K).

Soit un entier $r$. Nous poserons

$$Z_r^p = Z(K_p \bmod K_{p+r}), \tag{4.2.1}$$

ensemble des

$$x \in K_p \text{ tels que } dx \in K_{p+r}.$$

Pour $r \leqslant 0$ on a évidemment $Z_r^p = K_p$.

Parmi les éléments de $Z_r^p$ se trouvent d'une part ceux de $Z_{r-1}^{p+1}$, et d'autre part tous les éléments de $K_p$ qui sont des bords; en particulier $Z_r^p$ contient $dZ_{r-1}^{p+1-r}$, ensemble des éléments de $K_p$ qui sont des bords d'éléments de $K_{p-r+1}$. Nous poserons

$$E_r^p = Z_r^p/(dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}); \qquad E_r = \sum_p E_r^p. \tag{4.2.2}$$

On notera que si un $x \in K_p$ est un cycle, il définit un élément de $E_r^p$ pour tout $r$, et si c'est un bord l'élément de $E_r^p$ défini par $x$ est nul pour $r$ assez grand.

***Théorème*** 4.2.1. — *Il existe sur le module gradué* $E_r$ *une différentielle* $d_r$ *de degré* $r$ *telle que le module dérivé* $H(E_r)$ *soit canoniquement isomorphe à* $E_{r+1}$.

En effet, la différentielle $d$ de K applique $Z_r^p$ dans $Z_r^{p+r}$, et $dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}$ sur $dZ_{r-1}^{p+1}$; étant donné que l'on a

$$E_r^{p+r} = Z_r^{p+r}/(dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1})$$

on voit que par passage au quotient $d$ induit une différentielle

$$d_r : E_r^p \to E_r^{p+r}.$$

Pour qu'un $x \in Z_r^p$ définisse un cycle de degré $p$ de $E_r$, il faut et il suffit que $dx \in dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}$, i.e. que $dx = dy + z$ avec $y \in Z_{r-1}^{p+1}$ et $z \in Z_{r-1}^{p+r+1}$; posant $x = y + u$, donc $du = z$, on a à la fois $u \in K_p$ et $du \in K_{p+r+1}$, i.e. $u \in Z_{r+1}^p$; il résulte immédiatement de ces calculs que

$$Z^p(E_r) = (Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1})/(dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}).$$

D'autre part, $B^p(E_r)$ est formé des classes représentées par des éléments de $dZ_r^{p-r}$, et comme ce module contient $dZ_{r-1}^{p-r+1}$ on en déduit que

$$B^p(E_r) = (dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})/(dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}).$$

Il vient par suite

$$\begin{aligned} H^p(E_r) &= (Z^p_{r+1} + Z^{p+1}_{r-1})/(dZ^{p-r}_r + Z^{p+1}_{r-1}) \\ &= Z^p_{r+1}/(Z^p_{r+1} \cap (dZ^{p-r}_r + Z^{p+1}_{r-1})); \end{aligned}$$

comme on a visiblement

$$Z^p_{r+1} \supset dZ^{p-r}_r, \qquad Z^p_{r+1} \cap Z^{p+1}_{r-1} = Z^p_{r-1},$$

il vient finalement

$$H^p(E_r) = Z^p_{r+1}/(dZ^{p-r}_r + Z^{p+1}_r) = E^p_{r+1},$$

ce qui termine la démonstration.

La *suite spectrale* de K est par définition formée des complexes $E_r$ définis ci-dessus.

On définit en outre un terme $E_\infty$ comme suit. Posons

$$\begin{aligned} &K_\infty = 0, \qquad K_{-\infty} = K \\ &Z^p_\infty = Z(K_p \bmod K_\infty) = \text{cycles de } K_p \\ &B^p_\infty = K_p \cap dK_{-\infty} = \text{bords de } K_p \text{ dans } K; \end{aligned}$$

on définit alors

$$E^p_\infty = Z^p_\infty/(B^p_\infty + Z^{p+1}_\infty), \qquad E_\infty = \sum E^p_\infty.$$

Si l'on posait d'une manière générale

$$B^p_r = K_p \cap dK_{p-r}$$

on aurait pour tout $r$ la formule

$$E^p_r = Z^p_r/(B^p_{r-1} + Z^{p+1}_{r-1}).$$

***Théorème*** 4.2.2. — *Soit* $H(K)_p$ *l'image de* $H(K_p)$ *dans* $H(K)$; *alors, en filtrant* $H(K)$ *par les sous-modules* $H(K)_p$, *on a un isomorphisme canonique*

$$E_\infty = G(H(K)).$$

En effet on a un homomorphisme surjectif $Z^p \to H(K)_p$; pour qu'il applique un $z \in Z^p$ dans $H(K)_{p+1}$ il faut et il suffit que $z$ soit homologue à un élément de $K_{p+1}$, i.e, appartienne à $B^p_\infty + Z^{p+1}_\infty$, d'où le Théorème.

Examinons maintenant le cas où le module K est muni d'une *graduation* compatible avec la filtration donnée, et pour laquelle $d$ est homogène et de degré $+1$ (on dira alors que K est un *complexe filtré*). On peut alors introduire sur les termes $E_r$ une bigraduation; il suffit de poser

$$\begin{aligned} Z^{pq}_r = Z^p_r \cap K^{p+q}, \qquad B^{pq}_r = B^p_r \cap K^{p+q}, \\ E^{pq}_r = Z^{pq}_r/(B^{pq}_{r-1} + Z^{p+1,q-1}_{r-1}). \end{aligned}$$

Pour un élément de $E^{pq}_r$, on dit souvent que $p$ est le *degré filtrant*, $p+q$ le *degré total*, et $q$ le *degré complémentaire*.

Il est clair que l'on a
$$d_r : E_r^{pq} \to E_r^{p+r, q-r+1},$$
et que, moyennant l'identification $E_{r+1} = H(E_r)$, $E_{r+1}^{pq}$ est formé des classes des cycles de $E_r^{pq}$.

Il est par ailleurs clair que, dans $H(K)$, la filtration par les $H(K)_p$ et la graduation par les $H^q(K)$ sont compatibles; posant
$$H^q(K)_p = H^q(K) \cap H(K)_p$$
on a alors la relation
$$E_\infty^{pq} = H^{p+q}(K)_p / H^{p+q}(K)_{p+1}.$$

## 4. 3. — Approximation de $E_\infty$ par les $E_r$

Soit K un complexe filtré; nous supposerons dans ce n° que *la filtration de* K *est régulière*; on a donc
$$K_p \cap K^q = 0 \text{ pour } p > n(q).$$

On en déduit tout d'abord que
$$Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq} \text{ pour } r > n(p+q+1) - p,$$
car si $z \in Z_r^{pq}$ on a $dz \in K_{p+r} \cap K^{p+q+1}$, module qui est nul pour
$$p + r > n(p+q+1).$$
D'autre part,
$$d_r = 0 \text{ sur } E_r^{pq} \text{ pour } r > n(p+q+1) - p,$$
car pour les valeurs en question de $r$ on a $Z_r^{p+r, q-r+1} = 0$.

Puisque, pour $p$ et $q$ donnés et $r$ assez grand, $d_r$ est nulle sur $E_r^{pq}$, on a, moyennant l'identification $H(E_r) = E_{r+1}$, une application de $E_r^{pq}$ sur $E_{r+1}^{pq}$. En itérant ces homomorphismes on trouve donc des épimorphismes
$$\theta_s^r : E_r^{pq} \to E_s^{pq} \text{ définis pour } s > r > n(p+q+1) - p.$$

On a évidemment les relations de transitivité qui permettent de définir la *limite inductive* des $E_r^{pq}$ quand $r$ augmente indéfiniment. Nous allons montrer que *cette limite inductive n'est autre que* $E_\infty^{pq}$.

En effet, pour $r$ assez grand on a $Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq}$, $Z_{r-1}^{p+1, q-1} = Z_\infty^{p+1, q-1}$; de plus pour tout $r$ on a $B_r^{pq} \subset B_\infty^{pq}$.

Comme on a les formules
$$E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1})$$
$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}),$$

on a pour $r$ assez grand un homomorphisme canonique
$$\theta_\infty^r : E_r^{pq} \to E_\infty^{pq}$$

déduit de l'application identique $Z_r^{pq} \to Z_\infty^{pq}$. Cet homomorphisme est évidemment surjectif; d'autre part, puisque $\theta_s^r$ se déduit de l'application identique $Z_r^{pq} \to Z_s^{pq}$, on a la relation de compatibilité $\theta_\infty^r = \theta_\infty^s \circ \theta_s^r$ pour $r < s$. Pour établir que $E_\infty^{pq}$ s'identifie à la limite inductive des $E_r^{pr}$ il reste donc à faire voir que $B_\infty^{pq}$ est la réunion des $B_r^{pq}$, ce qui résulte du fait que K est réunion des $K_p$. D'où le résultat annoncé.

Ce résultat a la conséquence suivante. Considérons deux complexes filtrés K et L, et un homomorphisme $f : K \to L$ (compatible avec les graduations et filtrations); on en déduit de façon évidente des homomorphismes

$$E_r(K) \to E_r(L)$$

commutant aux différentielles $d_r$ pour $r$ fini, compatibles avec les identification $E_{r+1} = H(E_r)$ pour $r$ fini, et avec les identifications $E_\infty(K) = G(H(K))$, $E_\infty(L) = G(H(L))$. Cela dit supposons les filtrations de K et L régulières; il en est alors de même des filtrations de H(K) et H(L); si donc l'homomorphisme $E_\infty(K) \to E_\infty(L)$ déduit de $f$ est bijectif il en sera de même de $f^* : H(K) \to H(L)$. Tenant compte du fait que si $f^* : E_r(K) \to E_r(L)$ est bijectif pour un indice $r_0$ il en est de même pour tout $r \geqslant r_0$, on obtient le

**Théorème** 4.3.1. — *Soit $f$ un homomorphisme d'un complexe filtré* K *dans un complexe filtré* L; *supposons les filtrations de* K *et* L *régulières. Si, pour un entier $r$, l'homomorphisme $f^* : E_r(K) \to E_r(L)$ est bijectif il en est de même de*

$$f^* : H^*(K) \to H^*(L).$$

Voici une autre conséquence du théorème d'approximation. Soit K un complexe filtré, et supposons $E_r^{pq} = 0$ pour des valeurs données de $p$, $q$, $r$; alors, en vertu de $E_{r+1} = H(E_r)$, il est clair qu'on aura plus généralement $E_s^{pq} = 0$ pour $r \leqslant s < \infty$; si la filtration de K est régulière on en déduit à la limite que $E_\infty^{pq} = 0$.

## 4. 4. — Suites spectrales dégénérées

Soit K un complexe filtré, dont nous supposerons la filtration régulière. Nous dirons que la suite spectrale de K est *dégénérée* s'il existe un entier $r$ tel que, pour tout $n$, on ait

$$E_r^{n-q,\,q} = 0 \text{ pour } q \neq q(n)$$

où $q(n)$ est un entier dépendant de $n$; cela signifie que dans le groupe bigradué $E_r$ les seuls termes non nuls sont ceux de $E_r^{n-q(n),\,q(n)}$.

Par passage à la limite on en déduit, comme on l'a vu à la fin du n° précédent, que l'on aura aussi

$$E_r^{n-q,\,q} = E_\infty^{n-q,\,q} = 0 \text{ pour } q \neq q(n).$$

Or $E_\infty$ est le groupe gradué associé à $H^*(K)$; plus précisément, $H^n(K)$ est filtré, et le groupe gradué associé est la somme directe des $E_\infty^{n-q,\,q}$; comme tous ces groupes sont nuls sauf un, et comme on a

$$\bigcup_p H^n(K)_p = H^n(K), \qquad \bigcap_p H^n(K)_p = 0$$

(la seconde relation résultant du fait que la filtration de K est régulière), on obtient en définitive le résultat suivant :

**Théorème** 4.4.1. — *Soit* K *un complexe filtré, dont la filtration est régulière. Supposons que pour un entier $r$ on ait*

$$E_r^{n-q,\,q} = 0 \textit{ pour } q \neq q(n);$$

*alors on a des isomorphismes canoniques*

$$H^n(K) = E_r^{n-q(n),\,q(n)}.$$

## 4. 5. — Cas d'une filtration ou d'une graduation positive

Soit K un complexe filtré; nous dirons que la filtration de K est *positive* si l'on a $K_0 = K$, et par suite

$$K_p = K \text{ pour } p \leqslant 0.$$

On a alors $E_r^p = 0$ pour $p < 0$; en effet on a $E_r^p = Z_r^p/(B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1})$; or $Z_r^p$ est formé des $z \in K_p$ tels que $dz \in K_{p+r}$, et $Z_{r-1}^{p+1} = Z_r^p \cap K_{p+1}$; étant donné que pour $p < 0$ on a $K_{p+1} = K$ il vient $Z_r^p = Z_{r-1}^{p+1}$, d'où évidemment notre assertion. Bien entendu ce résultat vaut aussi pour $r = \infty$.

Considérons alors $H^n(K)$; ce groupe est filtré, et admet pour groupe gradué associé $\Sigma E_\infty^{p,\,n-p}$; comme on a évidemment

$$H^n(K)_p = H^n(K) \qquad \text{pour} \qquad p \leqslant 0$$

d'après l'hypothèse faite, on voit qu'en particulier il vient

$$E_\infty^{0n} = H^n(K)/H^n(K)_1$$

d'où une suite exacte

$$H^n(K) \to E_\infty^{0n} \to 0.$$

D'autre part, les éléments de $E_r^{pq}$ qui sont des bords pour $d_r$ proviennent, par $d_r$, d'éléments de $E_r^{p-r,\,q+r-1}$; aucun élément non nul de $E_r^{0n}$ n'est donc un bord si $r \geqslant 1$, de sorte que moyennant l'identification $E_{r+1} = H(E_r)$ on a des inclusions naturelles

$$E_1^{0n} \supset E_2^{0n} \supset E_3^{0n} \supset \ldots,$$

chaque terme s'identifiant au sous-groupe des cycles du terme précédent.

De plus, $E_\infty^{0,n}$ se plonge aussi dans chaque $E_r^{0,n}$ ($r \geqslant 1$); en effet il est clair que $B_\infty^{0,n} = B_{r-1}^{0,n}$ et que $Z_\infty^{0,n} \cap Z_{r-1}^{1,n-1} = Z_\infty^{1,n-1}$; on a donc

$$Z_\infty^{0,n} \cap (B_{r-1}^{0,n} + Z_{r-1}^{1,n-1}) = B_\infty^{0,n} + Z_\infty^{1,n-1},$$

de sorte que l'injection $Z_\infty^{0,n} \to Z_r^{0,n}$ conduit par passage au quotient à une injection $E_\infty^{0,n} \to E_r^{0,n}$ pour $r \geqslant 1$.

En combinant ces résultats on en déduit que, si la filtration de K est positive, on a pour tout $n$ et tout $r \geqslant 1$ des homomorphismes canoniques

$$H^n(K) \to E_r^{0,n}.$$

Examinons maintenant un autre cas important, celui où *la filtration est inférieure à la graduation*, i.e. où l'on a

$$K^n \cap K_p = 0 \text{ pour } p > n$$

(la filtration de K est donc alors régulière). Etant donné que $Z_r^{pq} \subset K^{p+q} \cap K_p$ il vient trivialement

$$E_r^{pq} = 0 \qquad \text{pour} \qquad q < 0.$$

Considérons alors $E_r^{n,0}$; par $d_r$, ce groupe est appliqué dans $E_r^{n+r,-r+1}$, donc sur 0 si $r \geqslant 2$, de sorte qu'alors tous ses éléments sont des cycles; par conséquent on a pour $r \geqslant 2$ des homomorphismes

$$E_r^{n,0} \to E_{r+1}^{n,0},$$

d'ailleurs surjectifs, et d'après le n° 4.3 le groupe $E_\infty^{n,0}$ s'identifie à la limite inductive des $E_r^{n,0}$ suivant les homomorphismes en question. On aura en particulier un homomorphisme

$$E_2^{n,0} \to E_\infty^{n,0}.$$

D'autre part, il est clair que $H^n(K)_p = 0$ pour $p > n$; par suite

$$E_\infty^{n,0} = H^n(K)_n/H^n(K)_{n+1} = H^n(K)_n$$

se plonge canoniquement dans $H^n(K)$. En conséquence, *on trouve un homomorphisme canonique*

$$E_2^{n,0} \to H^n(K)$$

*dans le cas où la filtration est inférieure à la graduation.*

Dans le cas où les deux hypothèses examinées successivement ci-dessus sont simultanément remplies, on a un résultat important pour les termes de bas degré :

**Théorème** 4.5.1. — *Soit* K *un complexe filtré, satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$K_0 = K; \qquad K^n \cap K_p = 0 \textit{ pour } p > n.$$

*On a alors une suite exacte*

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(K) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(K).$$

Tous les homomorphismes figurant dans cette suite ont déjà été définis; il reste donc à prouver l'exactitude de cette suite.

Pour montrer que $E_2^{1,0} \to H^1(K)$ est injectif, il suffit de montrer que

$$E_2^{1,0} \to E_\infty^{1,0}$$

est injectif, et donc de montrer que $E_r^{1,0} \to E_{r+1}^{1,0}$ est injectif (donc bijectif) pour tout $r \geqslant 2$; or un élément de $E_r^{1,0}$ ne peut être un bord que s'il provient, par $d_r$, d'un élément de $E_r^{1-r,\, r-1}$; comme $E_r^{p,q} = 0$ pour $p < 0$, notre assertion est démontrée.

Le groupe gradué associé à $H^1(K)$ est $E_\infty^{1,0} + E_\infty^{0,1}$ (puisque $E_\infty^{pq} \neq 0$ exige $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$); on a donc une suite exacte

$$0 \to E_\infty^{1,0} \to H^1(K) \to E_\infty^{0,1} \to 0;$$

comme l'homomorphisme $H^1(K) \to E_2^{0,1}$ s'obtient en composant les homomorphismes $H_1(K) \to E_\infty^{0,1}$ et $E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1}$, on voit que la seconde propriété à établir est que $E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1}$ est *injectif*, ce que nous avons démontré plus haut dans le cas où la filtration est positive.

Montrons maintenant que l'image de $H^1(K)$ dans $E_2^{0,1}$ est identique au noyau de $d_2$. On a $E_2^{0,1} = Z_2^{0,1} / (B_1^{0,1} + Z_1^{1,0})$ et d'autre part

$$E_2^{2,0} = Z_2^{2,0} / (B_1^{2,0} + Z_1^{3,-1}) = Z_2^{2,0} / B_1^{2,0}.$$

Le noyau de $d_2$ est donc formé des classes des $z \in Z_2^{0,1}$ tels que $dz \in B_1^{2,0}$ i. e. tels que $dz = du$ avec $u \in K_1 \cup K^1$; posant $z = u + v$ on a $dv = 0$ et

$$v \in K_0 \cap K^1, \qquad \text{i.e.} \quad v \in Z_\infty^{0,1};$$

comme de plus on a à la fois $u \in K_1 \cap K^1$ et $du \in K_2$ on voit que $u \in Z_1^{0,1}$; donc la classe de $z$ dans $E_2^{0,1}$ appartient à l'image de $E_\infty^{0,1}$, i.e. de $H^1(K)$. Inversement, si une classe de $E_2^{0,1}$ peut être représentée dans $Z_2^{0,1}$ par un élément de $Z_\infty^{0,1}$ i.e. par un cycle, elle est évidemment annulée par $d_2$.

Il reste à établir que le noyau de $E_2^{2,0} \to H^2(K)$ est l'image de $d_2$. Il est clair qu'il contient l'image de $d_2$, puisque celle-ci, dans $Z_2^{2,0}$, est représentée par des bords. D'autre part prenons un $z \in Z_2^{2,0}$ dont la classe dans $E_2^{2,0}$ s'annule dans $H^2(K)$; comme l'homomorphisme $E_r^{2,0} \to H^2(K)$ provient par passage au quotient des relations $Z_2^{2,0} = Z_3^{2,0} = \cdots = Z_\infty^{2,0}$, l'hypothèse faite signifie que $z$ est un bord dans K. On peut donc écrire $z = du$; comme $z \in K_2 \cap K^2$ on peut supposer $u \in K^1 = K_0 \cap K^1$ et donc $u \in Z_1^{0,1}$; donc l'élément de $E_2^{2,0}$ représenté par $z$ est dans l'image de $d_2$, ce qui achève la démonstration.

## 4. 6. — Cas où la base ou la fibre est sphérique

Soit K un complexe filtré; nous dirons que l'on est dans le cas où la base est sphérique s'il existe un entier $n \geqslant r$ tel que l'on ait

$$E_r^{pq} = 0 \text{ pour } p \neq 0,\ n,$$

et dans le cas où la fibre est sphérique s'il existe un entier $n \geqslant r$ tel que l'on ait

$$E_r^{pq} = 0 \text{ pour } q \neq 0, n.$$

Ce genre de situation s'est rencontré pour la première fois lorsque l'on a étudié des espaces fibrés dont la base (resp. la fibre) est une sphère de dimension $n$, ce qui explique la terminologie.

***Théorème*** 4.6.1. — *Soit* K *un complexe filtré, et supposons qu'il existe un entier* $n \geqslant r$ *tel que* $E_r^{pq} = 0$ *pour* $p \neq 0, n$. *Alors, si la filtration de* K *est régulière, on a une suite exacte*

$$\cdots \to E_r^{n,i-n} \to H^i(K) \to E_r^{0,i} \to E_r^{n,i+1-n} \to H^{i+1}(K) \to \cdots$$

Comme la filtration de K est régulière, on voit tout d'abord comme à la fin nº 4.3 que l'on a

$$E_\infty^{pq} = 0 \text{ pour } p \neq 0, n,$$

et par conséquent une suite exacte

$$0 \to E_\infty^{n,i-n} \to H^i(K) \to E_\infty^{0,i} \to 0$$

pour tout entier $i$.

Considérons maintenant la différentielle $d_r$; elle applique $E_r^{pq}$ dans $E_r^{p+r,q-r+1}$; elle est donc nulle sur $E_r$ si $r < n$, en sorte qu'alors $E_{r+1}$ est canoniquement isomorphe à $E_r$; si $r + 1 < n$ le même raisonnement montre que $d_{r+1}$ est nulle, donc que $E_r = E_{r+1} = E_{r+2}$; poursuivant ainsi de suite on voit donc qu'on a des isomorphismes canoniques

$$E_r^{pq} = E_n^{pq};$$

autrement dit nous pouvons supposer $r = n$.

Il est alors clair que, pour la différentielle $d_n$, tout élément de $E_n^{nq}$ est un cycle, et qu'aucun élément de $E_n^{0q}$ n'est un bord. Puisque $E_{n+1} = H(E_n)$ on a donc

$$E_{n+1}^{0q} = \operatorname{Ker}(E_n^{0q} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,q-n+1})$$

$$E_{n+1}^{n,q-n} = E_n^{n,q-n}/\operatorname{Im}(E_n^{0,q-1} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,q-n})$$

et comme on a, pour des raisons de degré, $d_{n+1} = d_{n+2} = \cdots = 0$, on en déduit à la limite des isomorphismes

$$\begin{aligned} E_\infty^{0q} &= \operatorname{Ker}(E_n^{0q} \to E_n^{n,q-n+1}) \\ E_\infty^{n,q-n} &= E_n^{n,q-n}/\operatorname{Im}(E_n^{0,q-1} \to E_n^{n,q-n}). \end{aligned}$$

Définissons alors

$$E_n^{n,i-n} \to H^i(K)$$

en composant la surjection $E_n^{n,\,i-n} \to E_\infty^{n,\,i-n}$ et l'injection $E_\infty^{n,\,i-n} \to H^i(K)$, et définissons de même

$$H^i(K) \to E_n^{0,i}$$

en composant la surjection $H^i(K) \to E_\infty^{0,i}$ et l'injection $E_\infty^{0,i} \to E_n^{0,i}$, nous trouvons pour tout $i$ la suite exacte

$$E_n^{0,i-1} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,i-n} \to H^i(K) \to E_n^{0,i} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,i+1-n},$$

ce qui démontre le Théorème.

On démontre bien entendu, par des raisonnements analogues, le résultat suivant :

***Théorème* 4.6.2.** — *Soit* K *un complexe filtré, et supposons qu'il existe des entiers* $r \geqslant 1$ *et* $n \geqslant r$ *tels que l'ont ait* $E_r^{pq} = 0$ *pour* $q \neq 0, n$. *Si la filtration de* K *est régulière, on a une suite exacte*

$$\cdots \to E_r^{i,0} \to H^i(K) \to E_r^{i-n,n} \to E_r^{i+1,0} \to H^{i+1}(K) \to \cdots$$

***Remarque* 4.6.1.** — Le cas en apparence plus général où l'on suppose $E_r^{pq} = 0$ pour $p \neq p_0, p_1$ (resp. $E_r^{pq} = 0$ pour $q \neq q_0, q_1$) se ramène au cas précédent en faisant subir à la filtration (resp. à la graduation) de K une translation convenablement choisie.

On trouvera dans le livre de H. Cartan et S. Eilenberg (*Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956) des résultats plus détaillés (cf. Chapitre XV, § 5 du livre en question).

### 4.7. Les termes $E_0$, $E_1$, $E_2$.

Soit K un module différentiel filtré. Il est clair que l'on a

$$Z_0^p = K_p, \qquad Z_{-1}^{p+1} = K_{p+1}, \qquad dZ_{-1}^{p+1} \subset K_{p+1},$$

et par suite

$$E_0^p = K_p/K_{p+1};$$

par conséquent, *le terme* $E_0$ *est identique au module gradué associé à* K, la différentielle $d_0$ se déduisant par passage au quotient de la différentielle $d$ de K.

On a par suite

$$E_1^p = H(K_p/K_{p+1});$$

il est facile de préciser la différentielle $d_1$. Considérons en effet la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to K_{p+1}/K_{p+2} \to K_p/K_{p+2} \to K_p/K_{p+1} \to 0;$$

il en résulte une suite exacte de cohomologie, et en particulier des homomorphismes

$$\delta : E_1^p = H(K_p/K_{p+1}) \to H(K_{p+1}/K_{p+2}) = E_1^{p+1};$$

ce sont ces homomorphismes qui constituent la différentielle cherchée $d_1$. En effet, considérons un élément $\alpha \in H(K_p/K_{p+1})$ représenté par un $z \in Z(K_p \bmod K_{p+1}) = Z_1^p$; par définition, $d_1\alpha$ est représenté par l'élément

$dz \in Z(K_{p+1} \bmod K_{p+2})$ : mais c'est précisément ainsi qu'on définit le troisième homomorphisme $\delta$ associé à une suite exacte de cohomologie.

On déduit de là que le terme $E_2$ est le module de cohomologie du complexe obtenu en munissant le groupe gradué

$$E_1 = \sum H(K_p/K_{p+1})$$

de la différentielle $\delta$ définie par les suites exactes (*).

#### 4. 8. — Suite spectrale d'un double complexe

Soit

$$K = \sum K^{pq}$$

un complexe double, muni de différentielles

$$d' : K^{pq} \to K^{p+1,q}; \qquad d'' : K^{pq} \to K^{p,q+1}$$

vérifiant $d'd'' + d''d' = 0$. Dans ce qui suit nous considérerons K comme un complexe « simple », en utilisant la graduation totale

$$K^n = \sum_{p+q=n} K^{pq}$$

et la différentielle totale $d = d' + d''$.

En considérant les sous-groupes

$$'K_p = \sum_{i \geqslant p} K^{ij}$$

on définit la *première filtration* du complexe K; les termes de la suite spectrale correspondante sont notés $'E_r^{pq}$. Nous allons les calculer pour $r = 1, 2$.

Nous avons tout d'abord

$$'E_1^p = H('K_p/'K_{p+1});$$

or $'K_p/'K_{p+1}$ s'identifie canoniquement au groupe gradué

$$K^{p*} = \sum_j K^{pj}$$

et cette identification transforme évidemment la différentielle $d_0$ en $d''$, puisque $d'$ envoie $'K_p$ dans $'K_{p+1}$; on a donc

$$'E_1^p = {}''H(K^{p*}),$$

l'indice $''$ rappelant qu'on calcule la cohomologie à l'aide de la différentielle $d''$. Pour calculer $d_1$, nous devons maintenant expliciter l'opérateur $\delta$ associé à la suite exacte

$$0 \to {}'K_{p+1}/'K_{p+2} \to {}'K_p/'K_{p+2} \to {}'K_p/'K_{p+1} \to 0;$$

or celle-ci s'identifie à la suite exacte

$$0 \to K^{p+1,*} \to K^{p+1,*} + K^{p*} \to K^{p*} \to 0;$$

dans cette suite, les termes extrêmes sont munis de $d''$, et le terme du milieu de la différentielle induite par $d$ (i.e. de la différentielle égale à $d$ sur la composante $K^{p*}$ et à $d''$ sur la composante $K^{p+1,*}$); comme $d = d' + d''$ et comme les cocycles du troisième terme sont annulés par $d''$, on en conclut que l'*opérateur*

$$\delta : {}''\mathrm{H}(K^{p*}) \to {}''\mathrm{H}(K^{p+1,*})$$

*est induit par* $d'$.

En conséquence, si l'on munit le groupe $''\mathrm{H}(K)$, qui représente la $d''$-cohomologie de K, de la graduation définie par la formule

$$''\mathrm{H}(K) = \sum {}''\mathrm{H}(K^{p*})$$

et de la différentielle induite par les homomorphismes

$$d' : K^{p*} \to K^{p+1,*},$$

on obtient des isomomorphismes canoniques

$$'E_2^p = {}'\mathrm{H}^p({}''\mathrm{H}(K)).$$

Pour obtenir un résultat complet nous devons encore expliciter la seconde graduation du terme $E_2$; or $'E_2^{pq}$ est formé des éléments de $'E_2^p$ qui peuvent être représentés par des éléments de degré $p+q$ de K, étant entendu que K est muni de sa graduation totale. Mais évidemment $'E_2^p$ est l'ensemble des éléments de $'E_2$ représentés par des éléments de $K^{p*}$; parmi ceux-ci, les éléments de degré total $p+q$ forment le groupe $K^{pq}$. Si donc nous désignons par $''\mathrm{H}^q(K)$ le groupe de cohomologie de degré $q$ de K, calculé à l'aide de la *seconde* différentielle et de la *seconde* graduation de K, nous obtenons la formule finale que voici :

$$\boxed{'E_2^{pq} = {}'\mathrm{H}^p({}''\mathrm{H}^q(K))}\,.$$

On peut du reste retrouver ce résultat directement en partant de la formule

$$E_2^{pq} = Z_2^{pq}/(B_1^{pq} + Z_1^{p+1,q-1})$$

qui définit le terme $E_2$. En effet, il est clair que $Z_2^{pq}$ est formé des éléments de K de la forme $x = x^{pq} + x^{p+1,q-1} + \ldots$ tels que l'on ait

$$(1) \qquad \boxed{\begin{array}{l} 0 = d''x^{pq} \\ 0 = d''x^{p+1,q-1} + d'x^{pq} \end{array}}\,;$$

$Z_1^{p+1,q-1}$ est autre part formé des $x \in Z_2^{pq}$ pour lesquels $x^{pq}$ est nul; enfin,

$B_1^{pq}$ est formé des $x \in Z_2^{pq}$ qui sont cobords d'éléments de $'K_{p-1}$, i.e. pour lesquels on peut résoudre le système

$$\begin{cases} x^{pq} = d''x^{p,q-1} + d'x^{p-1,q} & \text{avec} \quad d''x^{p-1} = 0 \\ x^{p+1,q-1} = d''x^{p+1,q-2} + d'x^{p,q-1} \\ x^{p+2,q-2} = d''x^{p+2,q-3} + d'x^{p+1,q-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Cela étant, puisque $Z_2^{pq}$ contient tous les éléments de la forme

$$x^{p+2,q-2} + x^{p+3,q-3} + \dots,$$

on voit déjà que tout élément de $'E_2^{pq}$ peut être représenté par un

$$x = x^{pq} + x^{p+1,q-1}$$

vérifiant (1). Si de plus un tel élément définit l'élément 0 de $'E_2^{pq}$, on a nécessairement une relation de la forme

$$(2) \qquad \boxed{x^{pq} = d''x^{p,q-1} + d'x^{p-1,q} \qquad \text{avec} \qquad d''x^{p-1,q} = 0};$$

inversement, considérons une solution de (1) pour laquelle on peut résoudre (2), et posons

$$x^{p+1,q-1} = d'x^{p,q-1} + z^{p+1,q-1};$$

on aura, en utilisant (1) et (2) :

$$\begin{aligned} d''z^{p+1,q-1} &= d''x^{p+1,q-1} - d''d'x^{p,q-1} \\ &= -d'x^{pq} + d'd''x^{p,q-1} \\ &= -d'x^{pq} + d'(x^{pq} - d'x^{p-1,q}) = 0; \end{aligned}$$

donc l'élément $x = x^{pq} + x^{p+1,q-1}$ est somme de l'élément $z^{p+1,q-1}$ de $Z_1^{p+1,q-1}$ et de l'élément

$$d''x^{p,q-1} + d'x^{p-1,q} + d'x^{p,q-1} = d(x^{p-1,q} + x^{p,q-1})$$

de $B_1^{pq}$, i.e. définit 0 dans $'E_2^{pq}$.

On voit que $'E_2^{pq}$ *est formé des solutions du système* (1) *modulo celles pour lesquelles on peut résoudre* (2). Or considérons une solution de (1); la première équation montre que $x^{pq}$ définit un élément de $''H^q(K)$, de premier degré $p$, et la seconde prouve que celui-ci est un cocycle pour $d'$, i.e. définit un élément de $'H^p(''H^q(K))$, et évidemment tout élément de ce dernier groupe provient d'une solution de (1); pour qu'on obtienne l'élément o de $'H^p(''H^q(K))$ il faut et il suffit que l'élément de $''H^q(K)$ défini par $x^{pq}$ soit le $d'$-cobord d'un élément de premier degré $p-1$ de $''H^q(K)$; cet élément sera donc représenté par un $x^{p-1,q}$ vérifiant $d''x^{p-1,q} = 0$, son $d'$-cobord sera représenté par $d'x^{p-1,}$, et comme $x^{pq}$ et $d'x^{p-1,q}$ doivent définir la même classe de $d''$-cohomologie on doit avoir une relation $x^{pq} - d'x^{p-1,q} = d''x^{p,q-1}$; autrement dit, $'H^p(''H^q(K))$ s'identifie aux solutions de (1) modulo les solutions de (2), ce qui donne à nouveau l'isomorphisme canonique

$$'E_2^{pq} = 'H^p(''H^q K)).$$

Pour terminer nous allons expliciter, en raison de son importance pratique, un cas particulier du Théorème 4.4.1 :

***Théorème*** 4.8.1 — *Soit* K *un double complexe de cochaînes* ($K^{pq} = 0$ si $p < 0$ ou si $q < 0$); *supposons que l'on ait*

$$'H^p(''H^q(K)) = 0 \textit{ pour } q \geqslant 1.$$

*Soit* L *le sous-complexe de* K *formé des éléments*

$$x = \sum x^{p0} \qquad \text{tels que} \qquad d''x^{p0} = 0.$$

*Alors l'injection* L $\rightarrow$ K *induit un isomorphisme de la cohomologie de* L *sur celle de* K.

Considérons en effet L comme un double complexe dont la seconde graduation et la seconde différentielle sont triviales. La première suite spectrale de L est donnée par

$$'E_2^{pq}(L) = 'H^p(''H^q(L))$$

de sorte qu'évidemment

$$'E_2^{pq}(L) = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 0, \qquad 'E_2^{p0}(L) = H^p(L);$$

on a d'autre part

$$'E_2^{pq}(K) = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 0$$

par hypothèse, et

$$'E_2^{p0}(K) = 'H^p(''H^0(K));$$

mais comme la bigraduation de K est positive il est clair que $''H^0(K)$ s'identifie canoniquement à L, de sorte que

$$'E_2^{p0}(K) = H^p(L).$$

On en conclut que l'injection L $\rightarrow$ K applique isomorphiquement la première suite spectrale de L sur celle de K; comme les filtrations de K et L sont régulières, le résultat cherché est une conséquence du Théorème 4.3.1.

Bien entendu, le résultat précédent conduit plus généralement à une interprétation des homomorphismes canoniques

$$'E_2^{p0}(K) \rightarrow H^p(K)$$

valables pour tout double complexe de cochaînes, et résultant des considérations du n° 4.5.

# 5. LES GROUPES $\mathrm{Ext}^n_A(L, M)$ ET $\mathrm{Tor}^A_n(L, M)$

Dans tout ce § on désigne par A un anneau avec élément unité. Étant donnés des A-modules L et M, on écrira Hom(L, M) au lieu de $\mathrm{Hom}_A(L, M)$, et $L \otimes M$ au lieu de $L \otimes_A M$.

## 5. 1. Résolutions projectives et résolutions injectives

Soit L sur A-module à gauche; on appelle *résolution projective* de L toute résolution *homologique*

$$\ldots \to L_1 \to L_0 \to L \to 0$$

de L par des A-modules projectifs $L_i$. De même, on appelle *résolution injective* de L toute résolution *cohomologique*

$$0 \to L \to L^0 \to L^1 \to \ldots$$

de L par des A-modules injectifs $L^i$. L'existence de telles résolutions résulte immédiatement du fait que tout module est un module-quotient (resp. un sous-module) d'un module projectif (resp. injectif). Nous regarderons toujours une résolution projective (resp. injective) de L comme étant un complexe de chaînes (resp. de cochaînes), acyclique en dimension (resp. degré) $n \neq 0$.

**Théorème** 5.1.1. — *Soient* L, M *deux* A-*modules à gauche, $f$ un homomorphisme de* L *dans* M, *et* $L_*$, $M_*$ (*resp.* $L^*$, $M^*$) *deux résolutions projectives* (*resp. injectives*) *de* L, M. *Il existe un homomorphisme $g$ de la première résolution dans la seconde compatible avec $f$, et $g$ est unique à une homotopie près.*

Examinons par exemple le cas projectif. Nous devons compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots L_1 & \xrightarrow{d} & L_0 & \xrightarrow{p} & L & \to & 0 \\ & & & & \downarrow f & & \\ \cdots M_1 & \xrightarrow{d} & M_0 & \xrightarrow{p} & M & \to & 0 \end{array}$$

par des homomorphismes $g_n : L_n \to M_n$ de façon à le rendre commutatif. Or considérons $f \circ p : L_0 \to M$; comme $L_0$ est projectif il existe $g_0 : L_0 \to M_0$ tel que $f \circ p = p \circ g_0$; $g_0$ étant construit, on considère $g_0 \circ d : L_1 \to M_0$; par exactitude cet homomorphisme applique $L_1$ dans les cycles de $M_0$, i.e. dans $d(M_1)$; puisque $L_1$ est projectif il existe donc $g_1 : L_1 \to M_1$ tel que $g_0 \circ d = d \circ g_1$. En poursuivant de proche en proche on obtient l'homomorphisme cherché $g$. L'unicité de $g$ à une homotopie près se démontre par des raisonnements analogues.

Si $L = M$ et si $f$ est l'identité, on trouve que *deux résolutions projectives* (*resp. injectives*) *d'un module sont toujours homotopiquement équivalentes.*

**Théorème** 5.1.2. — *Soit* $0 \to L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \to 0$ *une suite exacte de A-modules à gauche. Étant données des résolutions projectives* $L'_*$ *et* $L''_*$ *de* $L'$ *et* $L''$, *il existe une résolution projective* $L_*$ *de* $L$ *de telle sorte que l'on ait une suite exacte*

$$0 \to L'_* \to L_* \to L''_* \to 0$$

*compatible avec la suite exacte donnée. De même, étant données des résolutions injectives* $L'^*$ *et* $L''^*$ *de* $L'$ *et* $L''$ *il existe une résolution injective* $L^*$ *de* $L$ *et une suite exacte*

$$0 \to L'^* \to L^* \to L''^* \to 0$$

*compatible avec la suite exacte donnée.*

Nous examinerons par exemple le cas projectif et construirons les modules $L_n$ par récurence sur $n$ (en partant de $L_n = 0$ pour $n < 0$). Nous désignerons l'ensemble des cycles de degré $n$ de $L'_*$ par $Z'_n$, et utiliserons des notations analogues pour $L_*$ et $L''_*$.

Supposons la construction effectuée en dimension $\leqslant n - 1$. On a alors un diagramme *commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L'_{n-1} & \to & L_{n-1} & \to & L''_{n-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & L'_{n-2} & \to & L_{n-2} & \to & L''_{n-2} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & L'_{n-3} & \to & L_{n-3} & \to & L''_{n-3} & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont *exactes*; on en déduit facilement que la suite $0 \to Z'_{n-1} \to Z_{n-1} \to Z''_{n-1} \to 0$ est exacte. Pour construire $L_n$, tout revient évidemment à compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} & & L'_n & & & & L''_n & & \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \to & Z'_{n-1} & \to & Z_{n-1} & \to & Z''_{n-1} & \to & 0 \end{array}$$

en un diagramme *commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L'_n & \to & L_n & \to & L''_n & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & Z'_{n-1} & \to & Z_{n-1} & \to & Z''_{n-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes soient *exactes*, et dans lequel $L_n$ soit *projectif* : or la possibilité d'effectuer cette construction résulte du Théorème 1.3.2; d'où le résultat.

On peut généraliser le résultat précédent en définissant la notion de résolution projective (resp. injective) d'un *complexe*. Partons par exemple d'un complexe $L_*$ de A-modules, dont nous supposerons la différentielle de degré — 1. On appelle alors *résolution projective* de $L_*$ toute *suite exacte de complexes*

$$(1) \qquad \ldots \to L_{*1} \to L_{*0} \to L_* \to 0$$

satisfaisant aux conditions suivantes : *pour tout entier n, les suites de modules et d'homomorphismes*

$$\begin{array}{l} \cdots \to C_n(L_{*1}) \to C_n(L_{*0}) \to C_n(L_*) \to 0 \\ \cdots \to Z_n(L_{*1}) \to Z_n(L_{*0}) \to Z_n(L_*) \to 0 \\ \cdots \to B_n(L_{*1}) \to B_n(L_{*0}) \to B_n(L_*) \to 0 \\ \cdots \to H_n(L_{*1}) \to H_n(L_{*0}) \to H_n(L_*) \to 0 \end{array}$$

*déduites de* (1) *sont des résolutions projectives de* $C_n(L_*) = L_n$, $Z_n(L_*)$, $B_n(L_*)$ *et* $H_n(L_*)$.

On définirait de même des résolutions injectives.

**Théorème** 5.1.3. — *Tout complexe de A-modules admet des résolutions projectives (resp. injectives).*

Etablissons par exemple l'existence de résolutions injectives pour un complexe $L^*$ dont la différentielle est de degré 1. Nous poserons

$$Z^n = Z^n(L^*), \qquad B^n = B^n(L^*), \qquad H^n = H^n(L^*).$$

Supposons construites des résolutions injectives $I^*(L^n)$, $I^*(Z^n)$, $I^*(B^n)$ et $I^*(H^n)$ des divers modules $L^n$, $Z^n$, $B^n$ et $H^n$, et des homomorphismes de ces résolutions les unes dans les autres ,de telle sorte que pour tout $n$ on ait des diagrammes *commutatifs* de suites *exactes* de la forme suivante :

$$(2) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I^*(Z^n) & \to & I^*(L^n) & \to & I^*(B^{n+1}) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & Z^n & \to & L^n & \to & B^{n+1} & \to & 0; \end{array}$$

$$(3) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I^*(B^n) & \to & I^*(Z^n) & \to & I^*(H^n) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & B^n & \to & Z^n & \to & H^n & \to & 0. \end{array}$$

On aura alors, comme on le vérifie immédiatement, une résolution injective de $L^*$ en posant $L^{*n} = \Sigma\, I^n(L^p)$, en définissant la différentielle du complexe $L^{*n}$ à l'aide des homomorphismes $I^n(L^p) \to I^n(L^{p+1})$ qu'on obtient en composant les homomorphismes

$$I^*(L^p) \to I^*(B^{p+1}), \qquad I^*(B^{p+1}) \to I^*(Z^{p+1}), \qquad I^*(Z^{p+1}) \to I^*(L^{p+1})$$

qui figurent dans les diagrammes (2) et (3), et en définissant $L^{*n} \to L^{*n+1}$ à l'aide des homomorphismes $I^n(L^p) \to I^{n+1}(L^p)$.

On voit donc que tout revient à construire les diagrammes (2) et (3).

Pour cela, choisissons arbitrairement $I^*(B^0)$ et $I^*(H^0)$; d'après le Théorème 5.1.2 on peut construire (3) pour $n = 0$. $I^*(Z^0)$ étant ainsi choisi, choisissons arbitrairement $I^*(B^1)$; alors, pour la même raison que ci-dessus, il est possible de construire (2) pour $n = 0$. Ceci fait, choisissons arbitrairement $I^*(H^1)$; il est alors possible de construire (3) pour $n = 1$, puis, en choisissant arbitrairement $I^*(B^2)$, de construire (2) pour $n = 1$. En procédant ainsi de proche en proche on effectue la construction pour tous les $n \geqslant 0$. Un raisonnement analogue permet d'effectuer la construction pour $n \leqslant 0$.

## 5. 2. — Dérivés d'un foncteur

Considérons, sur la catégorie des A-modules à gauche, un foncteur $X \to F(X)$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens; nous supposerons F *additif, covariant et exact à droite.*

Choisissons, pour tout A-module à gauche X, une résolution projective $X_*$ de X; nous poserons

$$F(X_*) = \sum F(X_n),$$

et munirons ce groupe gradué de la différentielle déduite par F de celle de $X_*$. Cela fait, nous appellerons *dérivés* de F les foncteurs

$$F_n : X \to H_n(F(X_*)).$$

Pour justifier cette définition il faut définir, pour tout homomorphisme $u : X \to Y$, des homomorphismes $F_n(u) : F_n(X) \to F_n(Y)$; pour cela, il suffit de prolonger $u$ en un homomorphisme $X_* \to Y_*$, ce qui est possible et, à une homotopie près, d'une seule façon en vertu du Théorème 5.1.1.

Il va de soi que si l'on changeait le choix de la résolution $X_*$ attachée à chaque module X, les foncteurs $F_n$ resteraient les mêmes à des isomorphismes près.

Etablissons les principales propriétés des foncteurs $F_n$. Ce sont évidemment des foncteurs covariants et additifs. On a d'autre part un isomorphisme canonique

$$\boxed{F_0 = F}$$

puisque de la suite exacte

$$X_1 \xrightarrow{d} X_0 \to X \to 0$$

et de l'hypothèse que F est exact à droite résulte la suite exacte

$$F(X_1) \to F(X_0) \to F(X) \to 0.$$

Par ailleurs il est clair que l'on a

$$\boxed{F_n(X) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \quad \text{si} \quad X \text{ est projectif}}$$

étant donné qu'alors on peut supposer $X_*$ nulle en dimension $n \geqslant 1$. Enfin considérons une suite exacte

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0;$$

on peut alors choisir des résolutions projectives de ces modules de façon à avoir une suite exacte

$$0 \to X'_* \to X_* \to X''_* \to 0;$$

comme de plus $X''_*$ est *projectif*, $X'_*$ s'identifie à un *facteur direct* de $X_*$, en sorte que la suite de complexes

$$0 \to F(X'_*) \to F(X_*) \to F(X''_*) \to 0$$

est elle-même exacte; par conséquent, il vient une suite exacte d'homologie de la forme suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c} \cdots \to F_n(X') \to F_n(X) \to F_n(X'') \xrightarrow{\delta} F_{n-1}(X') \to \cdots \\ \cdots \to F_1(X'') \xrightarrow{\delta} F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0. \end{array}}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les homomorphismes

$$F_n(X'') \to F_{n-1}(X')$$

ainsi obtenus sont indépendants de la façon dont on a choisi des résolutions projectives des modules $X'$, $X$ et $X''$ considérés.

Il résulte de là, en particulier, que pour que la suite

$$0 \to F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0$$

soit exacte il *suffit* que $F_1(X'') = 0$.

Considérons maintenant un foncteur F *contravariant* et *exact à droite*; cette fois, $F(X_*)$ est un complexe de cochaînes, et l'on définit

$$F^n(X) = H^n(F(X_*)).$$

On a des propriétés entièrement analogues aux précédentes :

$$F^0 = F;$$

$$F^n(X) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \text{ si } X \text{ est projectif};$$

et à toute suite exacte de modules est associée une suite exacte de cohomologie

$$0 \to F(X'') \to F(X) \to F(X') \xrightarrow{\delta} F^1(X'') \to \dots$$

Si au contraire on étudie des foncteurs *exacts à gauche*, on utilise, pour tout A-module X, une résolution *injective* $X^*$ de X.

Etant donné un foncteur additif F, *covariant et exact à gauche*, on définira

$$F^n(X) = H^n(F(X^*));$$

si au contraire F est *contravariant et exact à gauche* on posera

$$F_n(X) = H_n(F(X^*)).$$

On laisse au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer les propriétés de ces foncteurs dérivés.

Notons qu'on peut étudier par des méthodes analogues des foncteurs qu'on ne suppose pas être exacts à gauche ou à droite; le lecteur consultera, sur cette question, l'ouvrage de H. Cartan et S. Eilenberg.

### 5. 3. Les foncteurs $\mathrm{Ext}^n(L, M)$ et $\mathrm{Tor}_n(L, M)$.

Soient L et M deux A-modules à gauche, et considérons les foncteurs

$$F(X) = \mathrm{Hom}(L, X), \qquad G(X) = \mathrm{Hom}(X, M);$$

F est additif, covariant et exact à gauche, tandis que G est additif, contravariant et exact à droite. On peut donc former des foncteurs dérivés

$$F^n(X) = H^n(\mathrm{Hom}(L, X^*))$$
$$G^n(X) = H^n(\mathrm{Hom}(X_*, M)).$$

En particulier on peut considérer les groupes

$$F^n(M) = H^n(\mathrm{Hom}(L, M^*)); \qquad G^n(L) = H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M));$$

nous allons démontrer qu'ils sont canoniquement isomorphes. Plus précisément : formons le double complexe Hom $(L_*, M^*)$ et les homomorphismes de complexes

$$\mathrm{Hom}(L_*, M) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^*) \leftarrow \mathrm{Hom}\,(L, M^*)$$

déduits de $L_0 \to L$ et $M \to M^0$; nous allons démontrer que ces homomorphismes induisent des isomomorphismes en cohomologie. Remarquons tout d'abord que l'image de $\mathrm{Hom}(L_*, M)$ dans le double complexe Hom $(L_*, M^*)$ est formée des éléments de second degré 0 annulés par $d''$; pour montrer que l'homomorphisme

$$H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M)) \to H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M^*))$$

est bijectif il suffit donc de faire voir que la première suite spectrale du double complexe est dégénérée. Or on a évidemment

$$'E_1^{pq} = H^q(\mathrm{Hom}(L_p, M^*)) = \mathrm{Hom}(L_p, H^q(M^*))$$

puisque $L_p$ est projectif; comme $H^q(M^*) = 0$ pour $q \neq 0$ notre assertion est démontrée. On prouverait de même l'assertion relative à l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(L, M^*) \to \mathrm{Hom}(L^*, M^*)$.

Etant donnés deux A-modules à gauche L et M, on pose

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n(L,M) = H^n(\mathrm{Hom}(L_*,M)) = H^n(\mathrm{Hom}(L,M^*)) = H^n(\mathrm{Hom}(L_*,M^*));}$$

pour éviter toute ambiguité on peut convenir qu'on a choisi une fois pour toutes, pour tout module X, une résolution projective $X_*$ et une résolution injective $X^*$. Il est clair que $\mathrm{Ext}^n(L, M)$ est un foncteur additif covariant par rapport à M, et contravariant par rapport à L. On a

$$\boxed{\mathrm{Ext}^0(L,M) = \mathrm{Hom}(L,M)};$$

d'autre part

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n(L,M) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \quad \begin{matrix} \text{si} & L \text{ est projectif} \\ \text{ou si} & M \text{ est injectif} \end{matrix}};$$

enfin, à toute suite exacte

$$0 \to L' \to L \to L'' \to 0$$

correspond une suite exacte

$$\boxed{0 \to \mathrm{Hom}(L'',M) \to \mathrm{Hom}(L,M) \to \mathrm{Hom}(L',M) \to \mathrm{Ext}^1(L'',M) \cdots}$$

et à toute suite exacte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

correspond une suite exacte

$$\boxed{0 \to \mathrm{Hom}(L, M') \to \mathrm{Hom}(L, M) \to \mathrm{Hom}(L, M'') \to \mathrm{Ext}^1(L, M') \cdots}$$

On notera que pour définir les opérateurs

$$\delta : \mathrm{Ext}^n(L, M'') \to \mathrm{Ext}^{n+1}(L, M')$$

qui figurent dans cette suite, on doit, en vertu du n° précédent, considérer une suite exacte

$$0 \to M'^* \to M^* \to M''^* \to 0$$

et former la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{Hom}(L, M'^*) \to \mathrm{Hom}(L, M^*) \to \mathrm{Hom}(L, M''^*) \to 0;$$

mais on peut aussi considérer la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{L}_*, \mathrm{M}') \to \mathrm{Hom}(\mathrm{L}_*, \mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{L}_*, \mathrm{M}'') \to 0:$$

le fait que les opérateurs $\delta$ obtenus à partir de ces deux suites exactes de complexes coïncident se démontre en « immergeant » ces deux suites dans la suite exacte de doubles complexes

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{L}_*, \mathrm{M}'^*) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{L}_*, \mathrm{M}^*) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{L}_*, \mathrm{M}''^*) \to 0.$$

Considérons maintenant un A-module à droite L et un A-module à gauche M, et formons les foncteurs

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{L} \otimes \mathrm{X}, \qquad \mathrm{G}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y} \otimes \mathrm{M}$$

définis respectivement sur la catégorie des A-modules à gauche et sur celle des A-modules à droite. Ils sont tous deux additifs, covariants, et exacts à droite. On peut donc considérer les foncteurs dérivés

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{L} \otimes \mathrm{X}_*); \qquad \mathrm{G}_n(\mathrm{Y}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{Y}_* \otimes \mathrm{M}).$$

Nous allons démontrer que les groupes

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{M}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{L} \otimes \mathrm{M}_*), \qquad \mathrm{G}_n(\mathrm{L}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{L}_* \otimes \mathrm{M})$$

sont canoniquement isomorphes.

Pour cela il suffit de prouver que les homomorphismes

$$\mathrm{L}_* \otimes \mathrm{M} \leftarrow \mathrm{L}_* \otimes \mathrm{M}_* \to \mathrm{L} \otimes \mathrm{M}_*$$

déduits des applications $\mathrm{M}_0 \to \mathrm{M}$ et $\mathrm{L}_0 \to \mathrm{L}$, induisent des isomorphismes en homologie; nous allons l'établir en calculant les deux suites spectrales du double complexe $\mathrm{L}_* \otimes \mathrm{M}_*$. On a évidemment

$$'\mathrm{E}^1_{pq} = \mathrm{H}_q(\mathrm{L}_p \otimes \mathrm{M}_*) = \mathrm{L}_p \otimes \mathrm{H}_q(\mathrm{M}_*)$$

puisque $\mathrm{L}_p$ est projectif; or $\mathrm{H}_q(\mathrm{M}_*) = 0$ pour $q \neq 0$ et $\mathrm{H}_0(\mathrm{M}_*) = \mathrm{M}$; d'où immédiatement le résultat cherché.

On pose

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{L}_* \otimes \mathrm{M}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{L} \otimes \mathrm{M}_*) = \mathrm{H}_n(\mathrm{L}_* \otimes \mathrm{M}_*)}\,.$$

Il est clair qu'on obtient ainsi des foncteurs covariants et additifs par rapport à L et à M. D'autre part on a évidemment

$$\boxed{\mathrm{Tor}_0(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = \mathrm{L} \otimes \mathrm{M}}\,.$$

Si le module L est *plat* (à fortiori s'il est projectif) on a

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{L} \otimes \mathrm{M}_*) = \mathrm{L} \otimes \mathrm{H}_n(\mathrm{M}^*);$$

par suite

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \qquad \text{si} \quad \mathrm{L} \quad \text{ou si} \quad \mathrm{M} \text{ est plat.}}$$

Enfin, à toute suite exacte $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ correspond une suite exacte d'homologie

$$\boxed{\cdots \to \mathrm{Tor}_1(L'', M) \to L' \otimes M \to L \otimes M \to L'' \otimes M \to 0};$$

on tire de là que les modules *plats* sont *caractérisés* par le fait que

$$\mathrm{Tor}_1(X, M) = 0 \text{ pour tout } X.$$

Notons, comme conséquence des propriétés des $\mathrm{Tor}_n$, le résultat suivant :

***Théorème*** 5.3.1. — *Pour qu'un module à gauche* L *sur un anneau* A *soit plat, il faut et il suffit que, pour tout idéal à droite* I *de type fini de* A, *l'homomorphisme* $I \otimes L \to L$ *déduit de l'injection* $I \to A$ *soit injectif.*

Supposons en effet la condition vérifiée. Par passage à la limite inductive on voit qu'elle est vérifiée même si I n'est pas de type fini. D'autre part, de la suite exacte

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

et du fait que A est projectif résulte la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(A/I, L) \to I \otimes L \to L \to (A/I) \otimes L \to 0;$$

l'hypothèse signifie donc que l'on a

$$\mathrm{Tor}_1(X, L) = 0$$

pour tout A-module X *monogène*.

Puisque tout module X à $n$ générateurs admet un sous-module à $n - 1$ générateurs, de telle sorte que le quotient soit monogène, on voit en utilisant la suite exacte des Tor que la relation précédente est vraie pour tout A-module X de type fini. Comme tout A-module est limite inductive de A-modules de type fini, et comme le foncteur $X \to \mathrm{Tor}_n(X, L)$ est évidemment compatible avec la formation des limites inductives, on en conclut que cette relation est vraie sans restriction. Le module L est donc plat.

Comme corollaire, on voit qu'*un module sur un anneau principal est plat si et seulement s'il est sans torsion.*

Lorsque l'anneau de base A est *principal*, tout sous-module d'un module projectif (i.e. libre) est projectif, et tout module quotient d'un module injectif est injectif; on peut donc, pour tout A-module X, former des résolutions projectives (resp. injectives) nulles en dimension $n \geqslant 2$. Il s'ensuit que l'on a

$$\mathrm{Ext}^n(L, M) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tor}_n(L, M) = 0 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

On écrit alors simplement

$$\mathrm{Ext}^1(L, M) = \mathrm{Ext}(L, M); \qquad \mathrm{Tor}_1(L, M) = \mathrm{Tor}(L, M).$$

**5. 4. — Complexes d'homomorphisme**

Sur un anneau de base quelconque A, considérons un complexe $L_*$ dont la différentielle est de degré $-1$, un complexe $M^*$ dont la différentielle est de degré $+1$, et le double complexe

$$\mathrm{Hom}(L_*, M^*) = \Sigma\, \mathrm{Hom}(L_p, M^q).$$

On a vu au nº 2.8 qu'on a des homomorphismes canoniques

$$H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)) \to \sum_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_p(L_*), H^q(M^*)).$$

Nous allons, à titre le lemme aux calculs qui vont suivre, démontrer que ces homomorphismes sont bijectifs dans l'hypothèse (du reste beaucoup trop restrictive, comme on le verra), où tous les modules $L_n$, $B_n(L_*)$, $Z_n(L_*)$ et $H_n(L_*)$ sont projectifs.

Ecrivons en effet, avec des notations évidentes, la suite exacte de complexes

$$0 \to Z_* \xrightarrow{j} L_* \xrightarrow{d} B_* \to 0;$$

puisque $B_*$ est projectif on obtient une suite exacte de doubles complexes

$$0 \to \mathrm{Hom}(B_*, M^*) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^*) \to \mathrm{Hom}(Z_*, M^*) \to 0,$$

d'où en passant à la cohomologie un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & H(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)) \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "f"] & H(\mathrm{Hom}(Z_*, M^*)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g"] & H(\mathrm{Hom}(B_*, M^*)) \arrow[r, "d'^*"] \arrow[d, "h"] & H(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H(L_*), H(M^*)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z_*, H(M^*)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_*, H(M^*)) \arrow[r] & 0;
\end{tikzcd}$$

la seconde ligne de ce diagramme se déduit de la suite exacte

$$0 \to B_* \to Z_* \to H(L_*) \to 0$$

et de l'hypothèse que $H(L_*)$ est projectif.

Montrons que le diagramme précédent est commutatif; le seul point non trivial est d'établir que le troisième homomorphisme $\delta$ se déduit de façon évidente de l'injection $B_* \to Z_*$. Pour cela prenons une classe de cohomologie $\alpha$ de $\mathrm{Hom}(Z_*, M^*)$, représentée par un cocycle $u$. Nous devons écrire $u$ comme image d'un $v \in \mathrm{Hom}(L_*, M^*)$, i.e *prolonger* $u : Z_* \to M^*$ en $v : L_* \to M^*$ (ce qui est possible); alors $dv$ est dans le sous-complexe

$$\mathrm{Hom}(B_*, M^*)$$

et définit $\delta\alpha$.

Or soit $w$ l'élément de $\mathrm{Hom}(B_*, M^*)$ ainsi obtenu; puisque

$$\mathrm{Hom}(B_*, M^*) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^*)$$

s'obtient en transposant $d : L_* \to B_*$, on a la relation $dv = w \circ d$ entre homomorphismes $L_* \to M^*$. D'autre part on a $dv = v \circ d \pm d \circ v$ par construction de la différentielle dans $\mathrm{Hom}(L_*, M^*)$. Or on peut supposer $d \circ v = 0$; en effet, on a $d \circ u = 0$, i.e. $u$ applique $Z_*$ dans le cocycles de $M^*$, de sorte qu'on peut (puisque $Z_*$ est facteur direct de $L_*$) imposer la même condition à $v$. Ceci dit, il vient $w \circ d = v \circ d$, et comme $v$ coincide avec $u$ sur $Z_*$ et à fortiori sur $B_*$ ceci démontre que $w$ n'est autre que la restriction de $u$ à $B_*$, ce qui établit évidemment notre assertion.

Cela étant, dans le diagramme commutatif précédent, $g$ et $h$ sont bijectifs puisque $Z_*$ et $B_*$ sont projectifs et ont pour différentielle 0. On déduit facilement de là que $f$ est lui aussi bijectif (on établit tout d'abord que $\delta$ est surjectif; par exactitude il vient alors $d'^* = 0$, de sorte que, pour la même raison, $j'^*$ est injectif; le reste du raisonnement est trivial).

Bien entendu, on pourrait aussi établir le même résultat en supposant que les modules $M^*$, $B(M^*)$, $Z(M^*)$ et $H(M^*)$ sont injectifs.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal :

***Théorème*** 5.4.1. — *Soient* $L_*$ *et* $M^*$ *deux complexes de* A*-modules à gauche; on suppose* $L_*$ *projectif ou bien* $M^*$ *injectif. Alors il existe une suite spectrale donnée par*

$$E_2^{pq} = \sum_{i+j=q} \mathrm{Ext}^p(H_i(L_*),\ H^j(M^*))$$

*et dont le terme* $E_\infty$ *est le groupe bigradué associé à une filtration convenable de la cohomologie du complexe* $\mathrm{Hom}\,(L_*, M^*)$.

Nous examinerons par exemple le cas où $L_*$ est projectif. Choisissons une résolution injective $M^{**}$ du complexe $M^*$; en considérant $M^{**}$ comme un double complexe, formons le triple complexe $\mathrm{Hom}\,(L_*, M^{**})$; on a une injection canonique

$$j : \mathrm{Hom}(L_*, M^*) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^{**})$$

sur l'ensemble des termes de troisième degré 0 annulés par la troisième différentielle.

Filtrons ce triple complexe à l'aide de son premier et de son second degré; il vient une suite spectrale pour laquelle

$$E_1^{pq} = \sum_{i+j=p} H^q\,(\mathrm{Hom}(L_i, M^{j*}));$$

or pour $j$ donné $M^{j*}$ est une résolution de $M^j$; puisque $L_i$ est un module projectif il reste donc

$$E_1^{p0} = \sum_{i+j=p} \mathrm{Hom}(L_i, M^{j*}), \qquad E_1^{pq} = 0 \qquad \text{pour} \qquad q \neq 0.$$

Comme la troisième graduation est positive, cette suite spectrale est convergente, et l'on voit donc que l'*homomorphisme j induit un isomorphisme en cohomologie.*

Filtrons maintenant le triple complexe à l'aide de son troisième degré; il vient une suite spectrale pour laquelle

$$E_1^{pq} = H^q(\mathrm{Hom}(L_*, M^{*p}));$$

or, pour $p$ donné, les modules $M^{*p}$, $Z(M^{*p})$, $B(M^{*p})$ et $H(M^{*p})$ sont injectifs; d'après le cas particulier étudié au début de ce n° (ou plutôt le cas « dual ») il vient donc

$$E_1^{pq} = \sum_{i+j=q} \mathrm{Hom}(H_i(L_*), H^j(M^{*p})),$$

la différentielle $d_1$ étant induite par $M^{*p} \to M^{*p+1}$. Mais la suite

$$0 \to H^j(M^*) \to H^j(M^{*0}) \to H^j(M^{*1}) \to \dots$$

est une résolution injective de $H^j(M^*)$; puisque $E_2 = H(E_1)$ il vient donc

$$E_2^{pq} = \sum_{i+j=q} \mathrm{Ext}^p(H_i(L_*), H^j(M^*)),$$

ce qui achève la démonstration.

On laisse au lecteur le soin d'énoncer les résultats qu'on obtient lorsque l'on suppose, en outre, que $L_*$ (ou $M^*$) se réduit à son terme de degré 0.

On notera que la suite spectrale précédente ne converge, en général, que si le complexe $\mathrm{Hom}(L_*, M^*)$ est borné inférieurement, par exemple si $L_*$ est un complexe de chaînes et $M^*$ un complexe de cochaînes, cas de loin le plus important dans les applications. Cependant, ces restrictions sont inutiles si la troisième graduation est bornée *supérieurement*, et l'on peut toujours supposer qu'il en est ainsi lorsque l'anneau de base A est *principal*. De plus, dans ce cas, on a $E_2^{pq} = 0$ pour $q \neq 0,1$; utilisant le Théorème 4.6.2. on trouve donc le résultat suivant :

**Théorème** 5.4.2. — *Soient* $L_*$ *et* $M^*$ *deux complexes sur un anneau de base principal; on suppose* $L_*$ *libre ou bien* $M^*$ *injectif. Alors on a pour tout n une suite exacte*

$$\boxed{\begin{aligned} 0 \to \sum_{i+j=n-1} \mathrm{Ext}(H_i(L_*), H^j(M^*)) &\to H^n(\mathrm{Hom}(L_*, (M^*)) \\ &\to \sum_{i+j=n} \mathrm{Hom}(H_i(L_*), H^j(M^*)) \to 0. \end{aligned}}$$

Par exemple, soit $L_*$ un complexe de A-modules *libres*; alors pour tout A-module M on a les suites exactes

$$\boxed{0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(L_*), M) \to H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M)) \to \mathrm{Hom}(H_n(L_*), M) \to 0.}$$

Ce résultat permet par exemple de calculer la cohomologie singulière d'un espace topologique en fonction de son homologie singulière entière.

## 5. 5. Produit tensoriel de complexes

Soient $L_*$ un complexe de A-modules à droite et $M_*$ un complexe de A-modules à gauche; les méthodes du n° précédent, convenablement modifiées, s'appliquent à l'étude du double complexe $L_* \otimes M_*$ lorsque $L_*$ est formé de modules *plats*.

On montre d'abord que l'homomorphisme canonique

$$\sum_{p+q=n} H_p(L_*) \otimes H_q(M_*) \to H_n(L_* \otimes M_*)$$

est bijectif lorsque tous les modules $L_*$, $Z(L_*)$, $B(L_*)$ et $H(L_*)$ sont plats, ou bien lorsque cette condition est vérifiée par $M_*$ au lieu de $L_*$ (le second cas se ramenant d'ailleurs au premier si l'on remplace A par l'anneau opposé). Cela fait, et $L_*$ étant supposé plat, on choisit une résolution projective $M_{**}$ de $M_*$ et l'on étudie le triple complexe $L_* \otimes M_{**}$; en le filtrant à l'aide de son premier et de son second degré, on voit que son homologie est canoniquement isomorphe à celle de $L_* \otimes M_*$; en le filtrant par son troisième degré, on trouve une suite spectrale analogue à celle du n° précédent. Finalement on obtient le résultat suivant :

**Théorème** 5.5.1. — *Soient* $L_*$ *un complexe de* A*-modules à droite et* $M_*$ *un complexe de* A*-modules à gauche; on suppose que* $L_*$ *est plat. Il existe alors une suite spectrale pour laquelle*

$$E^2_{pq} = \sum_{i+j=q} \mathrm{Tor}_p(H_i(L_*), H_j(M_*))$$

*et dont le terme* $E^\infty$ *est le groupe bigradué associé à une filtration convenable de l'homologie du complexe* $L_* \otimes M_*$.

Lorsque l'anneau de base est principal il vient :

**Théorème** 5.5.2. — *Soient* $L_*$ *et* $M_*$ *des complexes de modules sur un anneau principal; on suppose* $L_*$ *sans torsion. On a alors des suites exactes*

$$\boxed{0 \to \sum_{i+j=n} H_i(L_*) \otimes H_j(M_*) \to H_n(L_* \otimes M_*) \to \sum_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}(H_i(L_*), H_j(M)) \to 0}$$

Ce résultat permet par exemple de calculer l'homologie d'un produit *cartésien* de deux complexes de chaînes simpliciaux basiques, puisque celle-ci est isomorphe à l'homologie de leur produit *tensoriel*. En particulier, l'homologie singulière d'un espace produit peut s'obtenir (en principe) à l'aide des formules précédentes.

Lorsque $M_*$ se réduit à son terme de degré 0 on trouve les suites exactes

$$\boxed{0 \to H_n(L_*) \otimes M \to H_n(L_* \otimes M) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(L_*), M) \to 0.}$$

Par exemple, l'homologie singulière d'un espace topologique X, à coefficients dans un groupe abélien, se calcule à l'aide de l'homologie entière en utilisant les formules précédentes.

### 5. 6. — Exemple d'application : homologie et cohomologie des groupes discrets

Soit G un groupe « discret » (i.e. un groupe arbitraire sur lequel on va raisonner de façon purement agébrique...). On peut appliquer les résultats du présent § à l'*algèbre de* G sur l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels; rappelons que celle-ci est le groupe abélien libre $\mathbf{Z}(G)$ ayant pour base l'ensemble des éléments de G, la multiplication dans $\mathbf{Z}(G)$ étant définie par la condition de se réduire à celle de G sur les éléments de base.

Il est clair qu'un $\mathbf{Z}(G)$-module à gauche (resp. à droite) n'est autre qu'un groupe abélien L sur lequel G opère à gauche (resp. à droite); c'est donc, en utilisant une terminologie plus classique, une représentation linéaire dans L du groupe G (resp. du groupe opposé). Nous dirons aussi L est un G-module à gauche (resp. à droite).

Si L et M sont des G-modules à gauche, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}(G)}(L, M)$, que nous noterons aussi $\mathrm{Hom}_G(L, M)$, est le groupe des homomorphismes $u$ du groupe abélien L dans le groupe abélien M qui vérifient $u(sx) = s.u(x)$ pour $s \in G$, $x \in L$. Si L est un G-module à droite et M un G-module à gauche, alors $L \underset{\mathbf{Z}(G)}{\otimes} M$, que nous noterons aussi $L \underset{G}{\otimes} M$, s'obtient en prenant le quotient de $L \otimes M$, produit tensoriel sur l'anneau $\mathbf{Z}$, par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $xs \otimes y - x \otimes sy$; les homomorphismes de $L \underset{G}{\otimes} M$ dans un groupe abélien N s'identifient donc aux applications bilinéaires $f: L \times M \to N$ qui vérifient $f(xs, y) = f(x, sy)$.

Dans ce qui suit nous regarderons le groupe abélien $\mathbf{Z}$ comme un G-module, en convenant que $s.x = x$ pour $s \in G$ et $x \in \mathbf{Z}$; on obtient ainsi la « représentation unité » du groupe G.

Etant donné un G-module à gauche L, on pose

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}, L) = L^G :$$

c'est évidemment le sous-groupe de L formé des $x$ *invariants* par G, i.e., tels que $sx = x$ pour tout $s \in G$. De même, en faisant cette fois opérer G à droite sur **Z**, nous poserons

$$\mathbf{Z} \underset{G}{\otimes} L = L_G :$$

c'est évidemment le quotient de L par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $sx - x$ $(s \in G, x \in L)$.

Cela dit, soit L un G-module à gauche; on pose

$$\begin{aligned} H_n(G; L) &= \mathrm{Tor}_n(\mathbf{Z}, L) \\ H^n(G; L) &= \mathrm{Ext}^n(\mathbf{Z}, L), \end{aligned}$$

l'anneau de base choisi étant bien entendu $\mathbf{Z}(G)$. On a évidemment les propriétés suivantes :

(I) : $\qquad H_0(G; L) = L_G; \qquad H^0(G; L) = L^G;$

(II) : soit $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ une suite exacte de G-modules à gauche; alors on a des suites exactes

$$\ldots \to H_n(G; L') \to H_n(G; L) \to H_n(G; L'') \to H_{n-1}(G; L') \ldots$$
$$\ldots \to H_1(G; L'') \to L'_G \to L_G \to L''_G \to 0$$

et

$$0 \to L'^G \to L^G \to L''^G \to H^1(G; L') \to H^1(G; L) \to \ldots$$

(III) : $H_n(G; L) = 0$ pour $n \geqslant 1$ si le G-module L est projectif,
$H^n(G; L) = 0$ pour $n \geqslant 1$ si le G-module L est injectif.

Montrons maintenant comment l'on peut calculer explicitement les groupes $H_n(G; L)$ et $H^n(G; L)$ : tout revient évidemment à construire des résolutions projectives (par exemple libres) du G-module **Z**. Remarquons tout d'abord que si X est un *ensemble* sur lequel G opère à gauche, alors G opère à gauche de façon évidente sur le groupe abélien libre F(X) ayant pour base X, et que F(X) est un G-module *libre* si et seulement si G opère sur X *sans point fixe* (i.e. si $sx = x$ pour un $x \in X$ implique $s = e$). On obtient du reste de cette façon le G-module libre *le plus général.*

Cela dit, prenons un *complexe de chaînes simplicial basique* $F_*$ sur l'anneau des entiers rationnels; supposons que, pour tout $n \geqslant 0$, le groupe G opère à gauche sur l'ensemble $S_n(F_*)$ des simplexes de dimension $n$ de $F_*$ (nº 3.1), donc, par linéarité, sur $F_n$, et ce bien entendu de façon compatible avec la structure simpliciale de $F_*$; alors $F_*$ sera un complexe de G-modules libres si G opère sans point fixe sur $S_n(F_*)$ pour tout $n$. Il est clair de plus que l'augmentation canonique $F_0 \to \mathbf{Z}$ de $F_*$, qui applique chaque simplexe de dimension 0 sur le nombre 1, est un homomorphisme de G-modules. Si donc $F_*$ est *acyclique* nous aurons contruit de la sorte une résolution libre du G-module **Z**, et pour tout module à droite (resp. à gauche) L on aura les formules suivantes :

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{G}; \mathrm{L}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{F}_* \underset{\mathrm{G}}{\otimes} \mathrm{L})$$
$$\mathrm{H}^n(\mathrm{G}; \mathrm{L}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{F}_*, \mathrm{L})).$$

La construction précédente s'applique à de nombreuses situations. Partons d'un *schéma simplicial* K et supposons que G opère à gauche sans point fixe sur K, en transformant tout simplexe de K en simplexes de K; on peut alors dans ce qui précède prendre pour $\mathrm{F}_*$ le complexe $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ des chaînes singulières entières de K : si $s \in \mathrm{G}$ et si $(x_0, \ldots, x_n)$ est un simplexe singulier de dimension $n$ de K on a

$$s.(x_0, \ldots, x_n) = (sx_0, \ldots, sx_n).$$

Cela dit, si le schéma simplicial K est acyclique, on voit que $\mathrm{C}_*(\mathrm{K})$ est une résolution libre de **Z**. Soit alors L un G-module à gauche; on peut interpréter comme suit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}_*(\mathrm{K}), \mathrm{L})$ : on fait opérer G sur

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{C}_*(\mathrm{K}), \mathrm{L}) = \mathrm{C}^*(\mathrm{K}; \mathrm{L})$$

en posant

$$(s.f)\ (u) = s.(f(s^{-1}.u))$$

pour $s \in \mathrm{G}$, $f \in \mathrm{C}^*(\mathrm{K}; \mathrm{L})$, et tout simplexe singulier $u$ de K; ceci dit il est clair que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}_*(\mathrm{K}); \mathrm{L}) = \mathrm{C}^*(\mathrm{K}; \mathrm{L})^{\mathrm{G}}.$$

Autrement dit, *si* K *est un schéma simplicial acyclique sur lequel* G *opère sans point fixe on a, pour tout* G*-module* L, *des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{G}; \mathrm{L}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{C}^*(\mathrm{K}; \mathrm{L})^{\mathrm{G}}).$$

On trouverait évidemment de même, en homologie, les formules

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{G}; \mathrm{L}) = \mathrm{H}_n(\mathrm{C}_*(\mathrm{K}; \mathrm{L})_{\mathrm{G}}).$$

Le cas le plus important est celui où K est le schéma simplicial G, toute partie finie et non vide de G étant un simplexe, et G opérant sur lui-même par les translations à gauche. On obtient alors par exemple $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}; \mathrm{L})$ en calculant la cohomologie du complexe de cochaînes $\mathrm{C}^*(\mathrm{G}; \mathrm{L})$ que voici : les éléments de degré $n$ sont les applications $f : \mathrm{G}^{n+1} \to \mathrm{L}$ vérifiant

$$f(sx_0, \ldots, sx_n) = s.f(x_0, \ldots, x_n),$$

et la différentielle est donnée par

$$df(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum (-1)^i . f(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}).$$

Voici encore un exemple important de résolution libre du G-module **Z**.

Faisons maintenant opérer G sur un *espace topologique* X (on suppose bien entendu que les $s \in G$ définissent des homéomorphismes $X \to X$); si $u : J_n \to X$ est un simplexe singulier de X de dimension $n$, et si $s \in G$, on notera $s.u$ le simplexe singulier $s \circ u$; il est alors clair que le complexe singulier $CS_*(X)$ est formé de G-modules, qui sont libres si et seulement si G opère sans point fixe sur X. Si L est un G-module, on peut faire opérer G de façon évidente sur les complexes $CS_*(X; L)$ et $CS^*(X; L)$ et il est clair que l'on a

$$CS_*(X; L)_G = L \otimes_G CS_*(X)$$

pour tout G-module à droite, et

$$CS^*(X; L)^G = \mathrm{Hom}_G(CS_*(X), L)$$

pour tout G-module à gauche. On en conclut, comme plus haut, que *si G opère à gauche sans point fixe sur un espace topologique X, acyclique en homologie singulière, alors on a des isomorphismes*

$$H_n(G; L) = H_n(CS_*(X; L)_G)$$
$$H^n(G; L) = H^n(CS^*(X; L)^G)$$

*pour tout G-module L à droite (resp. à gauche)*. Nous verrons dans la suite de cet ouvrage que, dans de nombreux cas, les groupes précédents peuvent s'interpréter à l'aide de l'espace quotient X/G.

Le lecteur désireux d'approfondir ces questions pourra consulter le Séminaire 1950-51 de H. Cartan, dont la première moitié traite de la cohomologie des groupes. Nous reviendrons du reste sur ces problèmes à propos de la théorie des faisceaux.

CHAPITRE II

# THÉORIE DES FAISCEAUX

# 1. FAISCEAUX D'ENSEMBLES

## 1. 1. — Axiomes des faisceaux

Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un pré faisceau d'ensembles de base X (Chapitre 1, n° 1.9). On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau* d'ensembles lorsque les conditions suivantes sont vérifiées [1] :

(F 1) : *soient* $(U_i)_{i \in I}$ *une famille d'ensembles ouverts dans* X, U *la réunion des* $U_i$, *et* $s'$, $s''$ *deux éléments de* $\mathcal{F}(U)$; *si les restrictions de* $s'$ *et* $s''$ *à chaque* $U_i$ *sont égales, on a* $s' = s''$.

(F 2) : *soit* $(U_i)_{i \in I}$ *une famille d'ensembles ouverts dans* X, *de réunion* U, *et supposons donnés des* $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ *de telle sorte que, quels que soient* $i, j \in I$, *les restrictions de* $s_i$ *et* $s_j$ *à* $U_i \cap U_j$ *soient égales; alors il existe un* $s \in \mathcal{F}(U)$ *dont la restriction à* $U_i$ *est* $s_i$ *pour tout* $i \in I$.

On remarquera que, d'après (F 1), l'élément $s$ de $\mathcal{F}(U)$ dont (F 2) assure l'existence est *unique*. D'autre part, si l'on applique (F 2) au cas où I est l'ensemble vide, on constate que $\mathcal{F}(\varnothing)$ est un ensemble à un élément (à moins que les $\mathcal{F}(U)$ ne soient tous vides, cas trivial que nous écarterons généralement). Il suffit donc, dans l'énoncé de l'axiome (F 2), d'examiner les couples $i, j$ pour lesquels $U_i \cap U_j$ n'est pas vide.

Appelons *espace découpé de base* X tout couple $(E, p)$, où E est un espace topologique et $p$ une application continue de E dans X. Étant donné un sous-ensemble M de X, on appelle *section* de $(E, p)$ au-dessus de M toute application *continue* $s : M \to E$ telle que $p(s(x)) = x$ pour tout $x \in M$; cela dit, attachons à chaque ouvert U de X l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ des sections de $(E, p)$ au-dessus de U, et

[1] Étant donnés des ouverts U et $V \subset U$, et un $s \in \mathcal{F}(U)$, l'image de $s$ par l'application structurale $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ est la *restriction* de $s$ à $\mathcal{F}(V)$. Cette terminologie s'expliquera au n° suivant.

pour $U \supset V$ définissons la restriction à V d'une section au-dessus de U comme étant la restriction à V de l'application $U \to E$ correspondante; il est alors immédiat de constater que l'application $U \to \mathcal{F}(U)$ définit un *faisceau* d'ensembles de base X; c'est le *faisceau des sections* de l'espace découpé $(E, p)$. Cet exemple est naturellement susceptible de nombreuses variantes; on peut par exemple se limiter — dans la mesure où cela a un sens — aux sections « différentiables », ou « analytiques », de $(E, p)$.

## 1. 2. — L'espace étalé attaché à un faisceau

Soit $(E, p)$ un espace découpé de base X. On dit que $(E, p)$ est un *espace étalé dans* X lorsque l'application $p$ est un homéomorphisme local, i.e. lorsque tout point $u \in E$ possède dans E un voisinage ouvert que $p$ applique *homéomorphiquement* sur un voisinage ouvert de $p(u)$ dans X. Lorsqu'il en est ainsi, alors pour toute section $s$ de $(E, p)$ au-dessus d'un ouvert U de X, l'ensemble $s(U)$ est *ouvert* dans E; de plus, pour tout $u \in E$, il existe une section $s$ de $(E, p)$ définie dans un voisinage du point $x = p(u)$, et telle que $s(x) = u$; on en conclut que les ouverts de E ne sont autres que les réunions d'ensembles de la forme $s(U)$. Enfin, il est clair que si deux sections de $(E, p)$ définies dans des voisinages ouverts U et V d'un point $x$ de X sont égales en $x$, alors elles sont égales dans tout un *voisinage* $W \subset U \cap V$ du point $x$. Autrement dit, l'ensemble

$$E(x) = p^{-1}(x)$$

s'identifie à la *limite inductive* des $\mathcal{F}(U)$ lorsque U décrit l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de $x$ dans X.

Nous allons montrer que le procédé précédent conduit à *tous* les faisceaux d'ensembles de base X.

Partons plus généralement d'un *préfaisceau* d'ensembles $\mathcal{F}$ de base X. Pour tout $x \in X$, les voisinages ouverts de $x$ dans X forment un ensemble filtrant décroissant $\Phi(x)$, et les conditions de transitivité imposées aux opérations de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ permettent de définir l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{F}}(x) = \varinjlim_{U \in \Phi(x)} \mathcal{F}(U).$$

On désignera par $\tilde{\mathcal{F}}$ l'ensemble *somme* des divers $\tilde{\mathcal{F}}(x)$, et par $p$ l'application de $\tilde{\mathcal{F}}$ dans X qui applique chaque sous-ensemble $\tilde{\mathcal{F}}(x)$ sur le point $x$.

Soient U un ouvert et $x$ un point de U; par définition même des limites inductives, on a une application canonique

$$\mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(x),$$

que nous noterons $s \to \tilde{s}(x)$. A chaque $s \in \mathcal{F}(U)$ est ainsi associée une application $\tilde{s} : U \to \tilde{\mathcal{F}}$, à savoir $x \to \tilde{s}(x)$, et celle-ci vérifie $p(\tilde{s}(x)) = x$ pour tout

$x \in U$. De plus prenons un ouvert $V \subset U$ et remplaçons $s$ par sa restriction $t$ à $V$; pour $x \in V$ l'application $\mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(x)$ est composée des applications $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ et $\mathcal{F}(V) \to \tilde{\mathcal{F}}(x)$; par suite, *l'application* $\tilde{t} : V \to \tilde{\mathcal{F}}$ *est la restriction à* $V$ *de l'application* $\tilde{s} : U \to \tilde{\mathcal{F}}$.

Nous allons maintenant munir $\tilde{\mathcal{F}}$ de *la topologie la moins fine qui rende continues les applications* $\tilde{s}$ ($s \in \mathcal{F}(U)$, $U$ ouvert dans $X$). Une partie $G$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ est donc ouverte si et seulement si, pour tout $U$ et tout $s \in \mathcal{F}(U)$, les $x \in U$ tels que $\tilde{s}(x) \in G$ forment dans $X$ un ensemble ouvert.

L'application $p$ est évidemment continue. D'autre part, pour tout ouvert $U$ de $X$ et tout $s \in \mathcal{F}(U)$ l'ensemble $\tilde{s}(U)$ est *ouvert* dans $\tilde{\mathcal{F}}$; il suffit de vérifier que quels que soient $s \in \mathcal{F}(U)$ et $t \in \mathcal{F}(V)$ les $x \in U \cap V$ où l'on a $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x)$ forment un ouvert — ce qui résulte de la définition même des limites inductives.

Ce qui précède montre évidemment que le couple $(\tilde{\mathcal{F}}, p)$ est un *espace étalé dans* $X$. Désignant par $\bar{\mathcal{F}}(U)$ l'ensemble des sections de $\tilde{\mathcal{F}}$ au-dessus de $U$, il est clair qu'on obtient un homomorphisme de préfaisceaux en considérant les applications canoniques

$$\mathcal{F}(U) \to \bar{\mathcal{F}}(U);$$

nous allons montrer qu'il est bijectif si (et seulement si) $\mathcal{F}$ est un *faisceau*.

Cet homomorphisme est injectif si $\mathcal{F}$ vérifie l'axiome (F 1) des faisceaux. En effet, supposons que $s'$ et $s''$ dans $\mathcal{F}(U)$ définissent la même section de $\tilde{\mathcal{F}}$ au-dessus de $U$; comme $\tilde{s}'(x) = \tilde{s}''(x)$ implique l'existence d'un voisinage de $x$ auquel les restrictions de $s'$ et $s''$ soient égales, on voit qu'on peut écrire $U$ comme réunion d'ouverts $U_i$ tels que les restrictions de $s'$ et $s''$ à chaque $U_i$ soient égales, d'où notre assertion.

Cet homomorphisme est surjectif si $\mathcal{F}$ vérifie (F 1) et (F 2). Considérons en effet une section $f : U \to \tilde{\mathcal{F}}$; comme deux sections qui coïncident en un point coïncident au voisinage, on peut écrire $U$ comme réunion d'ouverts $U_i$ et trouver des $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que $\tilde{s}_i = f$ dans $U_i$. Comme $\tilde{s}_i = \tilde{s}_j$ dans $U_i \cap U_j$ et comme (F 1) est vérifié, les restrictions de $s_i$ et $s_j$ à $U_i \cap U_j$ sont égales; d'après (F 2) il existe donc un $s \in \mathcal{F}(U)$ dont la restriction à chaque $U_i$ soit $s_i$, d'où $\tilde{s} = f$ dans $U$, ce qui prouve notre assertion.

Disons que deux espaces étalés $(E, p)$ et $(E', p')$ sont *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme de $E$ sur $E'$ qui transforme $p$ en $p'$; il est clair que les considérations précédentes démontrent le résultat suivant :

**Théorème** 1.2.1. — *Tout faisceau d'ensembles de base* $X$ *est isomorphe au faisceau des sections d'un espace étalé dans* $X$, *unique à un isomorphisme près.*

**Remarque** 1.2.1. — Par la suite nous ne ferons *aucune distinction* entre un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ et l'espace étalé $(\tilde{\mathcal{F}}, p)$ qu'on lui a associé ci-dessus; nous désignerons donc aussi cet espace étalé par la lettre $\mathcal{F}$ (la « projection » $p$ étant le plus souvent omise de la notation) et, pour toute partie M de X, nous désignerons par $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble de ses sections au-dessus de M; en particulier les éléments de l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ seront identifiés aux sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U. Bien entendu si M se réduit à un point $x$ on retrouve l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}}(x)$, qui sera lui aussi noté simplement $\mathcal{F}(x)$.

Ces identifications ne nous empêcheront naturellement pas d'adopter, tantôt le point de vue des « espaces étalés », tantôt celui des préfaisceaux.

***Remarque*** 1.2.2. — Si $\mathcal{F}$ est le faisceau des sections d'un espace découpé $(E, p)$ de base X, les éléments de $\mathcal{F}(x)$ s'appellent les *germes de sections* de $(E, p)$ au point $x$; deux sections de $(E, p)$ au-dessus de voisinages U et V de $x$ définissent le même germe de section en $x$ si et seulement si elles coïncident dans un *voisinage* $W \subset U \cap V$ du point $x$; en général l'espace étalé attaché à $\mathcal{F}$ est tout à fait différent de $(E, p)$ — à moins bien entendu que $(E, p)$ ne soit lui-même étalé dans X.

***Remarque*** 1.2.3. — La démonstration du Théorème 1.2.1 prouve que tout *préfaisceau* d'ensembles $\mathcal{F}$ définit canoniquement un espace étalé dans X, i.e, un *faisecau* $\tilde{\mathcal{F}}$ d'ensembles de base X; on dit que c'est le *faisceau engendré par* $\mathcal{F}$; on notera qu'on a un homomorphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ de préfaisceaux.

***Remarque*** 1.2.4. — Un espace $\mathcal{F}$ étalé dans X *n'est en général pas séparé*, même si X lui-même l'est. En effet, soient $s$ et $t$ des sections au-dessus d'un ouvert U de X; nous avons vu que les $x \in U$ où $s(x) = t(x)$ forment un ensemble *ouvert* dans U; mais si $\mathcal{F}$ est un espace séparé cet ensemble est aussi *fermé* dans l'espace U. En d'autres termes lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau séparé, deux sections $s$ et $t$ au-dessus d'un ouvert U qui sont égales en un point $x$ de U sont égales dans toute la composante connexe de $x$ dans U — le faisceau $\mathcal{F}$ vérifie le « principe du prolongement analytique ». Par exemple, si X est une variété analytique complexe, le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X — obtenu en prenant pour $\mathcal{F}(U)$ l'ensemble des fonctions définies et holomorphes dans U — est séparé; mais le faisceau des germes de fonctions continues ne saurait l'être.

### 1. 3. — Sections au-dessus d'un ensemble quelconque

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de base X. Puisqu'on a défini les sections de $\mathcal{F}$ au-dessus d'une partie quelconque de X, et qu'on a évidemment des opérations de « restriction », on peut se demander si les axiomes (F 1) et (F 2) sont encore valables si l'on y supprime l'hypothèse que les ensembles considérés sont ouverts. Il en est évidemment ainsi de l'axiome (F 1), mais non de (F 2) : sinon toute application $s : X \to \mathcal{F}$ telle que $p(s(x)) = x$ serait continue, puisque X est réunion des ensembles réduits à un point. On a toutefois un résultat partiel, qui nous sera utile plus loin :

***Théorème*** 1.3.1. — *Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de base* X *et* $(M_i)_{i \in I}$ *un recouvrement fermé localement fini de* X. *Supposons données des sections* $s_i \in \mathcal{F}(M_i)$ *de telle sorte que* $s_i = s_j$ *dans* $M_i \cap M_j$ *quels que soient i et j; alors il existe une section* $s \in \mathcal{F}(X)$ *qui coïncide avec* $s_i$ *dans* $M_i$ *quel que soit* $i \in I$.

Il existe évidemment une application et une seule $s : X \to \mathcal{F}$ qui coïncide avec $s_i$ dans $M_i$; tout revient à prouver qu'elle est *continue*. Or tout point $x$ admet un voisinage ouvert $U(x)$ qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles $M_i$; soient $M_{i_1}, \ldots, M_{i_p}$ ces ensembles; comme ils sont fermés on peut supposer qu'ils contiennent $x$ en prenant $U(x)$ assez petit, et l'on peut aussi supposer qu'il existe une section $t$ de $\mathcal{F}$ au-dessus de $U(x)$ telle que l'on ait

$$t(x) = s(x) = s_{i_1}(x) = \ldots = s_{i_p}(x).$$

Considérant la restriction de $t$ à $M_{i_k}$ on voit qu'il existe un voisinage de $x$, soit $U_{i_k}(x)$, tel que $t = s_{i_k}$ dans $U_{i_k}(x) \cap M_{i_k}$; on peut évidemment supposer $U_{i_k}(x) = U(x)$ pour tout $k$, alors $s$ et $t$ coïncident dans

$$U(x) \cap (M_{i_1} \cup \ldots \cup M_{i_k}) = U(x),$$

ce qui prouve la continuité de $s$ en $x$.

## 1. 4. — Faisceaux simples

Soient X un espace topologique et A un ensemble quelconque. On appelle *faisceau simple de base* X *et de fibre* A le faisceau engendré par le pré faisceau $U \to A$, les opérations de restriction se réduisant à l'identité.

Il est facile de construire l'espace étalé $\mathcal{F}$ correspondant. En effet $\mathcal{F}(x)$ est défini comme limite inductive, d'où évidemment $\mathcal{F}(x) = A$ pour tout $x$ et $\mathcal{F} = X \times A$; de plus il est clair que les sections définies à partir du préfaisceau considéré ne sont autres que les applications $U \to X \times A$ qui, en tant qu'applications $U \to A$, sont *constantes*; autrement dit, la topologie de $\mathcal{F} = X \times A$ est le produit de celle de X par la topologie *discrète* de A.

Pour tout ouvert U, l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ s'identifie donc canoniquement à l'ensemble des applications continues $U \to A$, autrement dit à l'ensemble des applications *localement constantes* de U dans A.

Par la suite, et sauf danger de confusion, nous désignerons le plus souvent par la lettre A le faisceau simple de base X et de fibre A.

### 1. 5. — Faisceaux induits

Soient X un espace topologique, Y un sous-espace de X, et $\mathcal{F}$ un faisceau de base X. Il est clair que l'ensemble des points de l'espace étalé $\mathcal{F}$ qui se projettent dans Y définit un espace étalé dans Y, i.e. un faisceau de base Y; on le note $\mathcal{F}|\mathrm{Y}$, et on l'appelle le *faisceau induit par* $\mathcal{F}$ *dans* Y.

Il est clair que pour toute partie M de Y, l'ensemble des sections de $\mathcal{F}|\mathrm{Y}$ au-dessus de M n'est autre que $\mathcal{F}(\mathrm{M})$. Ceci permettrait de définir autrement le faisceau $\mathcal{F}|\mathrm{Y}$, en attachant à tout ensemble $\mathrm{U} \subset \mathrm{Y}$, ouvert relativement à Y, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{U})$ des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U.

### 1. 6. — Homomorphismes de faisceaux

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux faisceaux d'ensembles de base X; par un homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ on entend un homomorphisme du préfaisceau $\mathcal{A}$ dans le préfaisceau $\mathcal{B}$, autrement dit une collection d'applications

$$f(\mathrm{U}) : \mathcal{A}(\mathrm{U}) \to \mathcal{B}(\mathrm{U})$$

vérifiant les conditions de compatibilité évidentes.

Considérons maintenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ comme des espaces étalés dans X. Par passage à la limite inductive, $f$ définit alors des applications

$$f(x) : \mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)$$

et par suite une application, que nous noterons $\tilde{f}$, de l'espace étalé $\tilde{\mathcal{A}}$ dans l'espace étalé $\tilde{\mathcal{B}}$; si $s$ est une section de $\tilde{\mathcal{A}}$ au-dessus d'un ouvert U, alors

$$f(\mathrm{U})(s) \in \mathcal{B}(\mathrm{U})$$

n'est autre évidemment, comme section de $\tilde{\mathcal{B}}$ au-dessus de U, que l'application $x \to \tilde{f}(s(x))$; il suit aussitôt de là que $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ est un *homéomorphisme local* compatible avec les projections.

Réciproquement donnons-nous une application *continue* $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ compatible avec les projections; on en déduit pour tout ouvert U une application $f(\mathrm{U}) : \mathcal{A}(\mathrm{U}) \to \mathcal{B}(\mathrm{U})$, transformant une section $s(x)$ en la section $\tilde{f}(s(x))$. On en conclut aussitôt qu'*il existe une correspondance biunivoque entre les homomorphismes de faisceaux* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *et les applications continues* $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ *compatibles avec les projections*, une telle application continue étant d'ailleurs nécessairement un homéomorphisme local, et appliquant donc $\tilde{\mathcal{A}}$ sur un sous-espace *ouvert* de $\tilde{\mathcal{B}}$.

On notera que plus généralement tout homomorphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de préfaisceaux définit canoniquement un homomorphisme du faisceau engendré par $\mathcal{A}$ dans le faisceau engendré par $\mathcal{B}$.

Un homomorphisme de faisceaux $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dit *injectif* (resp. *surjectif*) si l'application correspondante $\tilde{f}$ est injective (resp. surjective), i.e. s'il en est ainsi, pour tout $x$, de l'application $f(x) : \mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)$. Si $f$ est injectif alors pour tout ensemble ouvert $U \subset X$ l'application $f(U) : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U)$ est injective; mais si $f$ est surjectif, les applications $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U)$ ne sont pas surjectives en général.

Soit par exemple X une variété analytique complexe, et considérons les faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ que voici : pour tout ouvert U, $\mathcal{A}(U)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes dans U, et $\mathcal{B}(U)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes et partout $\neq 0$ dans U. On a un homomorphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ en associant à toute fonction $f(x)$ holomorphe dans U la fonction $e^{f(x)}$; comme *localement* toute fonction holomorphe ne s'annulant pas est de la forme $e^{f(x)}$ cet homomorphisme de faisceaux est surjectif; mais il est bien connu que, si U n'est pas simplement connexe, l'application $f \to e^f$ de $\mathcal{A}(U)$ dans $\mathcal{B}(U)$ n'est pas surjective.

## 1. 7. — Faisceaux de germes d'homomorphismes

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux faisceaux d'ensembles de base X; on notera Hom $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

Si Y est un sous-espace de X, tout homomorphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ définit évidemment un homomorphisme $f|Y : \mathcal{A}|Y \to \mathcal{B}|Y$. En particulier, si l'on a des ouverts U et $V \subset U$ de X, on en déduit une application canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A}|U, \mathcal{B}|U) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}|V, \mathcal{B}|V),$$

et les relations de compatibilité usuelles étant vérifiées on peut considérer le préfaisceau

$$U \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}|U, \mathcal{B}|U);$$

celui-ci est en fait un *faisceau* d'ensembles de base X comme on le voit trivialement. On le note

$$\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

et on l'appelle le *faisceau des germes d'homomorphismes de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{B}$. Par contruction on a donc pour tout ensemble *ouvert* U la relation

$$\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}|U, \mathcal{B}|U).$$

On notera que pour tout point $x$ on a une application canonique

$$\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$$

puisque tout germe d'homomorphisme en $x$ provient d'un homomorphisme au-dessus d'un voisinage de $x$. Toutefois l'application précédente n'est en général *ni injective ni surjective.*

### 1. 8. — Sous-faisceaux : image d'un homomorphisme

Un sous-faisceau d'un faisceau $\mathcal{A}$ de base X est un faisceau $\mathcal{B}$ de base X tel que l'on ait

$$\mathcal{B}(\mathrm{U}) \subset \mathcal{A}(\mathrm{U})$$

pour tout ouvert U, les opérations de restrictions dans $\mathcal{B}$ étant induites par celles de $\mathcal{A}$.

La collection des applications identiques $\mathcal{B}(\mathrm{U}) \to \mathcal{A}(\mathrm{U})$ définit alors un homomorphisme de faisceaux, lequel est évidemment *injectif*; par suite l'espace étalé $\mathcal{B}$ s'identifie canoniquement à un sous-espace *ouvert* de $\mathcal{A}$. Réciproquement il est clair que tout sous-espace ouvert de $\mathcal{A}$ est étalé dans X, et définit un sous-faisceau de $\mathcal{A}$. (On notera qu'un sous-espace quelconque de $\mathcal{A}$ définit aussi un sous-faisceau de $\mathcal{A}$, à savoir le faisceau des sections à valeurs dans ce sous-espace; mais si le sous-espace donné n'est pas ouvert dans $\mathcal{A}$ il ne s'identifie pas à l'espace étalé attaché au sous-faisceau qu'il définit). En conclusion les notions de sous-faisceau et de sous-espace ouvert sont identiques.

Si l'on a une famille *finie* $(\mathcal{B}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de sous-faisceaux de $\mathcal{A}$ on peut définir leur *intersection* : c'est l'intersection des sous-espaces ouverts correspondants de $\mathcal{A}$. On peut aussi définir

$$\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{B}_i$$

lorsque l'ensemble d'indices I est infini, en posant

$$\mathcal{B}(\mathrm{U}) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{B}_i(\mathrm{U})$$

pour tout ouvert U de X (il est immédiat de vérifier les axiomes des faisceaux); mais on ne peut plus alors interpréter $\mathcal{B}$ comme étant l'intersection des sous-espaces ouverts $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{A}$; c'est seulement *l'intérieur* de cette intersection.

Soit maintenant un homomorphisme de faisceaux

$$f : \mathcal{B} \to \mathcal{A};$$

plaçons-nous au point de vue des espaces étalés : alors $f(\mathcal{B})$ est un sous-espace ouvert, donc un sous-faisceau, de $\mathcal{A}$; on l'appelle *image de* $\mathcal{B}$ *par* $f$. Évidemment, $f$ induit un homomorphisme *surjectif* de $\mathcal{B}$ sur le faisceau image $f(\mathcal{B})$. On peut encore définir $f(\mathcal{B})$ comme étant le faisceau *engendré par le préfaisceau*

$$\mathrm{U} \to \mathrm{Im}[\mathcal{B}(\mathrm{U}) \xrightarrow{f(\mathrm{U})} \mathcal{A}(\mathrm{U})],$$

comme on le voit facilement.

### 1. 9. — Faisceaux quotients

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles de base X, et supposons donnée pour chaque ouvert $U \subset X$ une relation d'équivalence $R(U)$ dans l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ ; nous dirons que la collection des $R(U)$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{F}$ si elle vérifie la condition suivante : pour que $s$, $t \in \mathcal{F}(U)$ soient équivalents mod. $R(U)$, il faut et il suffit qu'on puisse représenter U comme réunion d'ouverts $U_i$ de telle sorte que, pour tout $i$, les restrictions de $s$ et $t$ à $U_i$ soient équivalentes mod. $R(U_i)$.

Lorsqu'il en est ainsi, on peut munir la famille des ensembles quotients

$$\mathcal{F}(U)/R(U)$$

d'une structure de *préfaisceau*, en définissant de façon évidente les applications $\mathcal{F}(U)/R(U) \to \mathcal{F}(V)/R(V)$ pour $U \supset V$. Le préfaisceau ainsi défini vérifie l'axiome (F 1) des faisceaux, mais non (F 2) en général. On note $\mathcal{F}/R$ le faisceau qu'il engendre [de sorte que $\mathcal{F}(U)/R(U)$ se plonge biunivoquement dans $(\mathcal{F}/R)(U)$]. La collection des applications canoniques $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)/R(U)$ permet évidemment de définir un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/R$, lequel est *surjectif*.

Par exemple considérons un homomorphisme de faisceaux $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et, dans $\mathcal{A}(U)$, prenons pour $R(U)$ la relation d'équivalence exprimée par la condition « $f(U)s = f(U)t$ ». Alors les conditions imposées plus haut sont satisfaites, et le faisceau quotient $\mathcal{A}/R$ s'identifie canoniquement à $f(\mathcal{A})$.

### 1. 10. — Produit direct de faisceaux

Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de faisceaux sur un espace X, et considérons le préfaisceau

$$U \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U),$$

l'application de restriction, pour $U \supset V$, étant définie comme produit des applications de restriction $\mathcal{F}_i(U) \to \mathcal{F}_i(V)$. Ce préfaisceau est en fait un *faisceau* d'ensembles. Soit en effet une famille d'ouverts $(U_\lambda)$, de réunion U, et supposons donnés des éléments

$$s_\lambda = (s_{i\lambda})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U_\lambda)$$

de telle sorte que $s_\lambda = s_\mu$ dans $U_\lambda \cap U_\mu$. Alors pour tout $i$ il existe une section et une seule $s_i \in \mathcal{F}_i(U)$ qui, dans $U_\lambda$, coïncide avec $s_{i\lambda}$; il est clair que $s = (s_i)_{i \in I}$ est le seul élément de $\Pi\mathcal{F}_i(U)$ qui, dans chaque $U_\lambda$, induits $s_\lambda$ — d'où évidemment le résultat.

Le faisceau ainsi défini se note

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

et s'appelle *produit direct* des $\mathcal{F}_i$. Soit $\mathcal{F}$ ce faisceau. Pour tout $i$, on a de façon canonique un homomorphisme de faisceaux

$$pr_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_i$$

d'où en chaque point $x$ une application canonique

$$\mathcal{F}(x) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(x);$$

il est visible que celle-ci est *injective*, mais non surjective en général : car si l'on se donne, pour tout $i$, un germe de section de $\mathcal{F}_i$ au point $x$, il n'est généralement pas possible — à moins bien entendu que l'ensemble I soit fini — de prolonger *simultanément* ces germes à un voisinage de $x$ dans X.

Notons que la notion de produit direct possède la propriété « universelle » que voici : étant donnés des homomorphismes

$$f_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}_i$$

il existe un homomorphisme et un seul

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

tel que l'on ait

$$f_i = pr_i \circ f$$

pour tout $i \in I$.

## 1. 11. — Limites inductives de faisceaux

Donnons-nous, sur un espace X, une famille $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de faisceaux, et supposons d'une part que l'ensemble d'indiçes $\Lambda$ soit filtrant décroissant, d'autre part que pour $\lambda \geqslant \mu$ on se soit donné un homomorphisme de faisceaux

$$f_\mu^\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu,$$

de telle sorte que les conditions de transitivité suivantes soient vérifiées :

$$f_\lambda^\lambda = \text{identité}; \qquad f_\nu^\lambda = f_\nu^\mu \circ f_\mu^\lambda \qquad \text{pour } \lambda \geqslant \mu \geqslant \nu.$$

On peut alors définir un faisceau

$$\mathcal{F} = \lim_{\substack{\lambda}}.\text{ind.}\, \mathcal{F}_\lambda,$$

comme suit. Pour tout ouvert U, les homomorphismes $f_\mu^\lambda(\mathrm{U})$ permettent de former l'ensemble $\lim_{\lambda}. \operatorname{ind.} \mathcal{F}_\lambda(U)$ ; comme, pour $U \supset V$, les diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\lambda(U) & \xrightarrow{f^\lambda_\mu(U)} & \mathcal{F}_\mu(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_\lambda(V) & \xrightarrow{f^\lambda_\mu(V)} & \mathcal{F}_\mu(V) \end{array}$$

sont commutatifs, on a pour $U \supset V$ une application canonique

$$\lim_{\lambda}. \operatorname{ind.} \mathcal{F}_\lambda(U) \rightarrow \lim_{\lambda}. \operatorname{ind.} \mathcal{F}_\lambda(V),$$

ce qui permet de former le *préfaisceau*

$$U \rightarrow \lim_{\lambda}. \operatorname{ind.} \mathcal{F}_\lambda(U);$$

cela dit, $\mathcal{F}$ est par définition le faisceau engendré par le préfaisceau qu'on vient de définir.

En composant les applications évidentes

$$\mathcal{F}_\lambda(U) \rightarrow \lim_{\lambda}. \operatorname{ind.} \mathcal{F}_\lambda(U)$$

et

$$\lim_{\lambda}. \operatorname{ind.} \mathcal{F}_\lambda(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

on définit évidemment des homomorphismes de faisceaux

$$f^\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}$$

avec la relation de compatibilité

$$f^\lambda = f^\mu \circ f^\lambda_\mu \qquad \text{pour} \qquad \lambda \geqslant \mu.$$

Ici encore on a une propriété de caractère « universel » : étant donnés des homomorphismes

$$h^\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{H}$$

tels que l'on ait

$$h^\lambda = f^\lambda_\mu \circ h^\mu \qquad \text{pour} \qquad \lambda \geqslant \mu,$$

il existe un homomorphisme et un seul

$$h : \lim_{\lambda}. \operatorname{ind.} \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{H}$$

tel que l'on ait

$$h^\lambda = h \circ f^\lambda \qquad \text{pour tout } \lambda.$$

On notera que l'on peut déterminer comme suit les ensembles ponctuels $\mathcal{F}(x)$. Tout d'abord, on a des applications

$$f^\lambda(x) : \mathcal{F}_\lambda(x) \rightarrow \mathcal{F}(x)$$

qui, pour des raisons de transitivité évidentes, définissent une application canonique

$$\lim_{\lambda}\text{ind.}\ \mathcal{F}_\lambda(x) \to \mathcal{F}(x);$$

celle-ci est *bijective*, car en vertu de la construction des ensembles ponctuels attachés à un préfaisceau on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) &= \lim_{U \ni x}\text{ind.}\ (\lim_{\lambda}\text{ind.}\ \mathcal{F}_\lambda(U))\\ &= \lim_{\lambda}\text{ind.}\ (\lim_{U \ni x}\text{ind.}\ \mathcal{F}_\lambda(U)) = \lim_{\lambda}\text{ind.}\ \mathcal{F}_\lambda(x)\end{aligned}$$

comme annoncé. Le lecteur vérifiera sans peine qu'en tant qu'espace topologique, $\mathcal{F}$ est la limite inductive des espaces topologiques $\mathcal{F}_\lambda$ : une partie de $\mathcal{F}$ est ouverte si et seulement si ses images réciproques par les applications $f^\lambda : \mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}$ sont ouvertes dans les $\mathcal{F}_\lambda$.

On remarquera que, pour tout sous-espace Y de X, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{F}|Y = \lim_{\lambda}\text{ind.}\ (\mathcal{F}_\lambda|Y).$$

La façon la plus commode de le voir est de se placer au point de vue des espaces étalés.

## 1. 12. — Image réciproque d'un faisceau par une application continue

Soient X et Y deux espaces topologiques, $f$ une application continue de X dans Y, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des faisceaux d'ensembles de bases X et Y. Nous appellerons *homomorphisme de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{B}$ *compatible avec* $f$ toute application *continue* $\bar{f}$ de l'espace étalé $\mathcal{A}$ dans l'espace étalé $\mathcal{B}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{B}\\ \downarrow & & \downarrow\\ X & \xrightarrow{f} & Y.\end{array}$$

Nous dirons aussi que $\bar{f}$ est un *$f$-homomorphisme* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

Nous allons montrer que X, Y, $f$ et $\mathcal{B}$ étant donnés, il existe sur X un faisceau $f^*(\mathcal{B})$, et un $f$-homomorpnisme $f^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{\bar{f}} \mathcal{B}$, tel que tout $f$-homomorphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ s'obtienne en composant $\bar{f}$ avec un homomorphisme $\mathcal{A} \to f^*(\mathcal{B})$ entièrement déterminé.

Remarquons tout d'abord que si l'on a un $f$-homomorphisme $f' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, alors pour toute section $s \in \mathcal{A}(U)$ l'application

$$s' : x \to f'(s(x))$$

de U dans l'espace étalé $\mathcal{B}$ est *continue* et vérifie

$$(*) \qquad s'(x) \in \mathcal{B}(f(x)) \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{U}.$$

Cela dit, désignons par $f^*(\mathcal{B})(\mathrm{U})$ l'ensemble des applications continues $s'$ de U dans $\mathcal{B}$ qui satisfont à la condition précédente; définissant de façon évidente l'opérateur de restriction

$$f^*(\mathcal{B})(\mathrm{U}) \to f^*(\mathcal{B})(\mathrm{V})$$

pour $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, on vérifie trivialement que l'application $\mathrm{U} \to f^*(\mathcal{B})(\mathrm{U})$ est un *faisceau d'ensembles* $f^*(\mathcal{B})$ de base X.

Soient $s'$ et $s''$ deux sections de $f^*(\mathcal{B})$ au voisinage d'un point $x$; pour que les germes $\tilde{s}'(x), \tilde{s}''(x) \in f^*(\mathcal{B})(x)$ coïncident en $x$, il faut et il suffit que les restrictions des fonctions $s'$ et $s''$ à un voisinage U de $x$ soient identiques; cela implique

$$s'(x) = s''(x).$$

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée; désignons par $t$ une section de $\mathcal{B}$ dans un voisinage V de $f(x)$, égale à $s'(x) = s''(x)$ en $x$; comme $f$ est continue on peut supposer $s'$ et $s''$ définies dans un voisinage U de $x$ tel que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$; comme d'autre part les applications $s'$ et $s''$ de U dans $\mathcal{B}$ sont continues, et comme l'ensemble $t(\mathrm{V}) \subset \mathcal{B}$ est ouvert si V est ouvert, les $y \in \mathrm{U}$ tels que l'on ait $s'(y) \in t(\mathrm{V})$ (resp. $s''(y) \in t(\mathrm{V})$) forment un voisinage U' (resp. U'') de $x$; il est clair en vertu de (*) que l'on a $s'(y) = s''(y)$ dans $\mathrm{U}' \cap \mathrm{U}''$, d'où $\tilde{s}'(x) = \tilde{s}''(x)$.

Il suit de là qu'il existe une application $\bar{f} : f^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ et une seule telle que, pour toute section $s$ de $f^*(\mathcal{B})$ au voisinage d'un point $x$, on ait

$$\bar{f}(\tilde{s}(x)) = s(x).$$

Le raisonnement précédent montre du reste que $\bar{f}$ est continue; comme $\bar{f}$ est évidemment compatible avec $f$, c'est un $f$-homomorphisme de $f^*(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}$.

Il est immédiat de vérifier que pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\bar{f}$ induit une *bijection* de $f^*(\mathcal{B})(x)$ sur $\mathcal{B}(f(x))$; il est en effet clair d'après les raisonnements précédents que $\bar{f}$ est injective; il reste alors à montrer que, quels que soient $x \in \mathrm{X}$ et $b \in \mathcal{B}(f(x))$, il existe une section $s$ de $f^*(\mathcal{B})$ dans un voisinage U de $x$, telle que $s(x) = b$; pour cela on construit une section $t$ de $\mathcal{B}$ dans un voisinage V de $f(x)$, égale à $b$ en $f(x)$, on pose $\mathrm{U} = f^{-1}(\mathrm{V})$, et on définit $s$ par la relation $s = t \circ f$.

Cette construction montre du reste que, pour tout ouvert V de Y, on a une application canonique de $\mathcal{B}(\mathrm{V})$ dans $f^*(\mathcal{B})(f^{-1}(\mathrm{V}))$, compatible avec les opérations de restriction. Cette application est injective, mais n'est surjective que « localement » comme on le voit facilement (on obtiendrait un contre-exemple en supposant Y réduit à un point, et X non connexe).

Considérons enfin un $f$-homomorphisme $f' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$; associons à toute section $s \in \mathcal{A}(\mathrm{U})$ l'application $s' : x \to f'(s(x))$ de U dans $\mathcal{B}$; on trouve une section $s' \in f^*(\mathcal{B})(\mathrm{U})$; d'où immédiatement un homomorphisme $\mathcal{A} \to f^*(\mathcal{B})$ qui, composé avec $f : f^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$, permet de reconstituer $f'$.

Le faisceau $f^*(\mathcal{B})$ s'appelle l'*image réciproque de* $\mathcal{B}$ *par* $f$.

A titre d'exemple, signalons le résultat suivant : soient X un espace, Y un sous-espace de X, et $\mathcal{A}$ un faisceau de base X; alors le faisceau induit $\mathcal{A}|\mathrm{Y}$ est canoniquement isomorphe à l'image réciproque de $\mathcal{A}$ par l'injection canonique $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

## 1. 13. — Image directe d'un faisceau

Soit une application continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, et considérons un faisceau $\mathcal{A}$ de base X. Nous allons définir un faisceau

$$\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$$

de base Y comme suit : pour tout ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{Y}$, on pose

$$\mathcal{B}(\mathrm{V}) = \mathcal{A}(f^{-1}(\mathrm{V})),$$

et pour $\mathrm{V}' \subset \mathrm{V}''$ on définit l'application de restriction $\mathcal{B}(\mathrm{V}'') \to \mathcal{B}(\mathrm{V}')$ comme étant l'application de restriction $\mathcal{A}(f^{-1}(\mathrm{V}'')) \to \mathcal{A}(f^{-1}(\mathrm{V}''))$. Il est évident que les axiomes des faisceaux sont vérifiés.

On dit que $f(\mathcal{A})$ est l'*image directe de* $\mathcal{A}$ *par* $f$. L'application $\mathcal{A} \to f(\mathcal{A})$ est de façon évidente un *foncteur covariant* défini sur la catégorie des faisceaux de base X, et à valeurs dans la catégorie des faisceaux de base Y.

On laisse au lecteur le soin d'étudier, à titre d'exercice, les relations existant entre les opérations image directe et image réciproque.

# 2. FAISCEAUX DE MODULES

## 2. 1. — Faisceaux d'anneaux

Nous avons, au chapitre I, §1, défini d'une façon générale la notion de préfaisceau à valeurs dans une *catégorie*; si les objets de cette catégorie sont des *ensembles* et si les homomorphismes de ces objets les uns dans les autres s'identifient à des *applications*, on pourra évidemment parler de *faisceaux* à valeurs dans la catégorie en question.

Par exemple, sur un espace de base X, un faisceau de groupes (resp. de groupes abéliens, d'anneaux, d'anneaux commutatifs avec élément unité, etc...) est un préfaisceau de base X, à valeurs dans la catégorie des groupes (resp. des groupes abéliens, etc...) et qui, en tant que préfaisceau d'ensembles, satisfait aux axiomes des faisceaux.

Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur X; pour tout ouvert U, les ensembles $\mathcal{A}(\mathrm{U})$ sont des anneaux, et pour $\mathrm{U} \supset \mathrm{V}$ l'application de restriction $\mathcal{A}(\mathrm{U}) \to \mathcal{A}(\mathrm{V})$ est un homomorphisme d'anneaux. Il s'ensuit qu'à la limite les ensembles ponctuels

$$\mathcal{A}(x) = \underset{\mathrm{U} \ni x}{\text{lim.ind.}}\, \mathcal{A}(\mathrm{U})$$

sont canoniquement munis de structures d'anneaux. Du point de vue des espaces étalés on a donc dans $\mathcal{A}$ deux lois de composition $(u, v) \to u + v$ et $(u, v) \to uv$, définies pour $p(u) = p(v)$, induisant sur chaque fibre $\mathcal{A}(x)$ une structure d'anneau, et de plus *continues*. Si $s$ et $t$ sont deux sections de $\mathcal{A}$ au-dessus d'un ouvert U, il est clair que $s + t$ et $st$ sont les *sections*

$$x \to s(x) + t(x) \quad \text{et} \quad x \to s(x)t(x).$$

***Exemple*** 2.1.1. — Si A est un anneau fixe, le faisceau simple de base X et de fibre A est canoniquement un faisceau d'anneaux, qu'on identifiera le plus souvent à l'anneau A lui-même.

***Exemple*** 2.1.2. — Si X est un espace topologique (resp. une variété différentiable, analytique complexe) le faisceau des germes de fonctions continues (resp. différentiables, holomorphes) sur X est un faisceau d'anneaux de façon évidente.

***Exemple*** 2.1.3. — Soit A un anneau commutatif avec l'élément unité; un idéal $\mathfrak{p} \neq A$ de A est dit *premier* si l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est d'intégrité; rappelons que, si $\mathfrak{a}$ est un idéal autre que A, l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$ est formé des $x$ tels que l'on ait $x^n \in \mathfrak{a}$ pour un entier $n$ au moins.

Soit $X = \Omega(A)$ l'ensemble de tous les idéaux premiers de A (« spectre premier » de A); on peut définir une topologie sur X (« topologie de Zariski ») en disant qu'une partie de X est *fermée* si elle est de la forme $F(\mathfrak{a})$, $F(\mathfrak{a})$ étant l'ensemble de tous les idéaux premiers contenant un idéal donné $\mathfrak{a}$; la vérification des axiomes des espaces topologiques est triviale en raison des formules

$$\bigcap F(\mathfrak{a}_i) = F(\sum \mathfrak{a}_i); \qquad F(\mathfrak{a}) \cup F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

Nous supposerons pour simplifier que A est un *anneau d'intégrité*; dans ce cas, *l'intersection de deux ouverts non vides n'est jamais vide*, car si l'on a $F(\mathfrak{a}) \cup F(\mathfrak{b}) = X$ on voit que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est contenu dans tous les idéaux premiers de A, donc est nul, de sorte que l'un des idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, au moins est lui-même nul.

Nous allons maintenant définir un *faisceau d'anneaux* sur X comme suit. Soit K le corps des fractions de A; si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, on note $A_{\mathfrak{p}}$ l'ensemble des éléments de K qui sont de la forme $x/y$, avec $x, y \in A, y \notin \mathfrak{p}$; c'est un anneau ayant pour unique idéal maximal $\mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}}$. Cela dit, pour tout ouvert non vide U de X posons

$$\mathcal{A}(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}};$$

pour $U \supset V$ nous définirons l'application de restriction $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ comme étant l'application identique, ce qui a un sens puisque l'on a évidemment $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{A}(V)$. Bien entendu on pose $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$. Pour vérifier les axiomes des faisceaux prenons une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts non vides, de réunion U, et des $s_i \in \mathcal{A}(U_i)$ tels que, quels que soient $i$ et $j$, les restrictions de $s_i$ et $s_j$ soient égales; comme $U_i \cap U_j$ n'est jamais vide, cela signifie que l'élément $s_i$ de K est indépendant de $i$, d'où un élément

$$s \in \mathcal{A}(U) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}(U_i)$$

et un seul qui « induit » $s_i$ dans chaque $U_i$, ce qui prouve bien que les $\mathcal{A}(U)$ forment sur X un faisceau d'anneaux.

On peut encore réaliser le faisceau précédent comme faisceau de germes de fonctions sur X. Soit un élément $f$ de K; nous dirons que $f$ est *défini en un point* $\mathfrak{p}$ de X si $f \in A_\mathfrak{p}$; il est immédiat de vérifier que l'ensemble $D(f)$ des points où $f$ est défini est *ouvert* dans X (considérer dans A l'idéal des $q$ tels que $qf \in A$); si $f$ est défini en $\mathfrak{p}$, appelons *valeur de $f$ en* $\mathfrak{p}$ l'image de $f$ dans le corps

$$K(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p},$$

qui n'est autre que le corps des fractions de l'anneau d'intégrité $A/\mathfrak{p}$; on associe ainsi à chaque $f \in K$ une fonction définie sur l'ouvert $D(f)$ et à valeurs dans les corps variables $K(\mathfrak{p})$; cela dit il est clair que $\mathcal{A}(U)$ n'est autre que l'anneau des $f \in K$ qui sont définis en tout point de U.

On notera que les $f \in K$ qui sont partout définis sur X ne sont autres que les éléments de A lui-même, autrement dit que A est l'intersection des anneaux locaux $A_\mathfrak{p}$ (on peut même se borner aux idéaux $\mathfrak{p}$ *maximaux*) comme on le voit immédiatement; comme de plus l'intersection de tous les idéaux premiers de A est nulle on voit que la correspondance entre un $f \in K$ et la fonction $\mathfrak{p} \to f(\mathfrak{p})$ sur X est *biunivoque*.

Notons enfin qu'on peut déterminer facilement les anneaux ponctuels $\mathcal{A}(\mathfrak{p})$; pour cela il faut calculer la limite inductive des $\mathcal{A}(U)$ lorsque U décrit l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de $\mathfrak{p}$ : évidemment, on trouve le sous-anneau de K réunion des divers $\mathcal{A}(U)$ pour $U \ni \mathfrak{p}$; cette réunion n'est autre que l'anneau local $A_\mathfrak{p}$; tout d'abord elle est évidemment contenue dans $A_\mathfrak{p}$; reste à voir que tout $f \in A_\mathfrak{p}$ appartient à un $\mathcal{A}(U)$ au moins — ce qui est évident si l'on prend $U = D(f)$. Pour cette raison, on appelle $\mathcal{A}$ le *faisceau des anneaux locaux de* X.

***Exemple*** 2.1.4 (Variétés algébriques). — Les considérations qui précèdent, légèrement modifiées, conduisent à définir un faisceau d'anneaux locaux sur toute *variété algébrique*. Rappelons d'abord, suivant Chevalley [1], comme on peut définir celles-ci.

Nous aurons besoin des notions suivantes. Un anneau commutatif avec unité A est un *anneau local* si A possède un seul idéal maximal, noté $\mathfrak{r}(A)$. Etant donnés des anneaux locaux A et $B \supset A$, on dit que B *domine* A si l'on a $\mathfrak{r}(A) = A \cap \mathfrak{r}(B)$. Enfin, étant donnés des anneaux locaux A et B contenus dans un corps K, on dit qu'ils sont *apparentés* s'il existe dans K un anneau local qui domine A et B; cela signifie que, dans le sous-anneau C de K engendré par A et B, l'idéal engendré par $\mathfrak{r}(A)$ et $\mathfrak{r}(B)$ est distinct de C.

[1] C. Chevalley, *Sur la notion de variété algébrique* (Nagoya Math. J., 6 (1955), p. 1); H. Cartan — C. Chevalley, *Séminaire E.N.S* 1955-1956.

Considérons alors un corps $k$ que, pour simplifier, nous supposerons algébriquement clos, et une extension K de type fini de $k$; donc $K = k(x_1, \ldots, x_n)$. Un sous-anneau A de K contenant $k$ sera appelé une *algèbre affine* s'il existe $y_1, \ldots, y_s \in A$ tels que A soit le sous-anneau engendré par $k$ et les $y_i$, et si de plus K est le corps des fractions de A. On appellera *localité* de l'extension $K/k$ tout anneau local de la forme $A_\mathfrak{m}$, où A est une algèbre affine et où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A; rappelons (Nullstellensatz) que $\mathfrak{m}$ est nécessairement le noyau d'un homomorphisme de A sur $k$.

Cela dit, une *variété algébrique sur* K, *ayant* K *pour corps de fonctions*, est un ensemble X muni de la structure définie par la donnée, pour chaque $x \in X$, d'une *localité* $\mathbf{O}(x)$ de K, et ceci de telle sorte que les axiomes suivants soient vérifiées :

VA 1) : *les localités* $\mathbf{O}(x)$ *et* $\mathbf{O}(y)$ *ne sont apparentées que si* $x = y$;

(VA 2) : *il existe dans* K *un nombre fini d'algèbre affines* $A_i$ *telles que l'ensemble des localités* $\mathbf{O}(x)$, $x \in X$, *soit identique à l'ensemble des localités de* K *définies par les idéaux maximaux des* $A_i$.

Etant donné un $x \in X$, on notera $\mathfrak{m}(x)$ l'unique idéal maximal de $\mathbf{O}(x)$, de sorte que l'on peut identifier canoniquement à $k$ le corps $\mathbf{O}(x)/\mathfrak{m}(x)$. On dira qu'un $f \in K$ est *défini en* $x$ si $f \in \mathbf{O}(x)$; il existe alors un $f(x) \in k$ tel que

$$f \equiv f(x) \bmod. \mathfrak{m}(x);$$

on dit que c'est la *valeur de* $f$ *en* $x$; enfin on note $D(f)$ l'ensemble des $x \in X$ où $f$ est défini, de sorte que chaque $f \in K$ définit une application $D(f) \to k$ qui, on le voit facilement, dépend biunivoquement de $f$; plus précisément, étant donnés $f, g \in K$, la relation

$$f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in D(f) \cap D(g)$$

implique $f = g$. Les fonctions ainsi définies sur certaines parties de X sont les *fonctions rationnelles* sur X.

On peut alors munir X d'une *topologie* en convenant qu'une partie de X est ouverte si et seulement si c'est une réunion d'ensembles de la forme

$$D(f_1) \cap \ldots \cap D(f_n).$$

On vérifie immédiatement que *toute suite décroissante de fermés est stationnaire*, et de plus que *deux ouverts non vides se rencontrent toujours*.

On peut alors définir sur X un *faisceau d'anneaux* $\mathcal{O}$ comme suit : pour un ouvert U de X, $\mathcal{O}(U)$ sera l'ensemble des $f \in K$ tels que $D(f) \supset U$ — i.e.

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_{x \in U} \mathbf{O}(x),$$

et pour $U \supset V$, l'homomorphisme de restriction $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ sera simplement l'injection de $\mathcal{O}(U)$ dans $\mathcal{O}(V) \supset \mathcal{O}(U)$. Il est trivial de vérifier les axiomes des faisceaux, et aussi de vérifier que les anneaux ponctuels du faisceau $\mathcal{O}$ ne sont autres que les anneaux locaux $O(x)$.

On vérifie sans peine que si un $f \in K$ défini sur un ouvert U prend en chaque point de U la valeur 0, alors $f = 0$. Il s'ensuit qu'on peut encore identifier $\mathcal{O}(U)$ à l'ensemble des applications $U \to k$ induites par les fonctions rationnelles de X définies dans U au moins. On peut donc regarder $\mathcal{O}$ comme un sous-faisceau du faisceau des germes d'applications de X dans $k$.

## 2. 2. — Modules sur un faisceau d'anneaux

Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X. Nous appellerons *$\mathcal{A}$-Module à gauche* tout faisceau d'ensembles $\mathcal{L}$ de base X muni de la structure suivante : pour tout ouvert U, on se donne sur l'ensemble $\mathcal{L}(U)$ une structure de module à gauche sur l'anneau $\mathcal{A}(U)$, et ce de telle sorte que pour $V \subset U$ l'application de restriction $\mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}(V)$ soit un homomorphisme de modules compatible avec l'homomorphisme d'anneaux $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$.

Si l'on considère sur X les faisceaux produits $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ et $\mathcal{A} \times \mathcal{L}$ (n° 1.10) il revient évidemment au même de se donner des homomorphismes $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ et $\mathcal{A} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ de faisceaux d'ensembles tels que, pour chaque $x \in X$, les applications $\mathcal{L}(x) \times \mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x)$ et $\mathcal{A}(x) \times \mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x)$ qui en résultent définissent sur $\mathcal{L}(x)$ une structure de module à gauche sur l'anneau $\mathcal{A}(x)$.

Lorsque $\mathcal{A}$ est le faisceau simple de base X ayant pour fibre un anneau donné A, il est clair que les $\mathcal{A}$-Modules à gauche ne sont autres que les faisceaux de base X à valeurs dans la catégorie des A-modules à gauche.

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ deux $\mathcal{A}$-Modules à gauche; un *homomorphisme* $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ sera un homomorphisme de faisceaux d'ensembles tel que, pour tout ouvert U, l'application $f(U) : \mathcal{L}(U) \to \mathcal{M}(U)$ soit un homomorphisme de $\mathcal{A}(U)$-modules à gauche. Il reviendrait du reste au même d'exiger que, pour tout point $x \in X$, l'application $f(x) : \mathcal{L}(x) \to \mathcal{M}(x)$ soit un homomorphisme de $\mathcal{A}(x)$-modules à gauche. Il est clair qu'en définissant de façon évidente la somme de deux homomorphismes de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}$, on obtient une structure de *groupe abélien* sur l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$$

des homomorphismes de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}$, ce qui permet de considérer la collection de tous les $\mathcal{A}$-Modules à gauche comme une *catégorie additive.* Nous verrons qu'en fait c'est même une catégorie abélienne.

On peut d'autre part, étant donnés deux $\mathcal{A}$-Modules à gauche $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, définir le *faisceau*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$$

des germes d'homomorphismes de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{M}$, en considérant (cf. n° 1.7) l'application

$$U \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}|U}(\mathscr{L}|U, \mathscr{M}|U).$$

On obtient ainsi un faisceau de groupes abéliens, dont les sections au-dessus de X sont précisément les homomorphismes de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{M}$. Si le faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ est *commutatif*, le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})$ est canoniquement un $\mathscr{A}$-Module lui-même comme on le voit aussitôt; il en est de même plus généralement si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sont des $\mathscr{A}$-Modules à gauche et si $\mathscr{L}$ est muni en outre d'une structure de $\mathscr{A}$-Module à droite « commutant » avec sa structure de $\mathscr{A}$-Module à gauche.

Par exemple, pour tout $\mathscr{A}$-Module à gauche $\mathscr{L}$ on a, si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux avec élément unité, un isomorphisme canonique de $\mathscr{A}$-Modules à gauche

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}, \mathscr{L}) = \mathscr{L};$$

pour cela on observe que les homomorphismes $\mathscr{A}|U \to \mathscr{L}|U$ correspondent biunivoquement aux éléments de $\mathscr{L}(U)$ — il suffit d'associer à un tel homomorphisme $f$ la section de $\mathscr{L}$, image par $f$ de la section unité de $\mathscr{A}$ au-dessus de U.

***Exemple*** 2.2.1. — Soient X une variété différentiable et E une variété fibrée de base X, dont la fibre-type est un espace vectoriel réel de dimension finie. On peut alors regarder le faisceau des germes de sections différentiables de E comme un Module sur le faisceau des germes de fonctions différentiables sur X.

### 2. 3. — Sous-Modules et Modules-quotients

Soient $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de base X et $\mathscr{L}$ un $\mathscr{A}$-Module à gauche; on appelle *sous-Module* de $\mathscr{L}$ tout sous-faisceau $\mathscr{L}'$ de $\mathscr{L}$ tel que, pour tout $x$, l'ensemble $\mathscr{L}'(x) \subset \mathscr{L}(x)$ soit un sous-$\mathscr{A}(x)$-module de $\mathscr{L}(x)$. Il est clair qu'alors, pour tout ouvert U, $\mathscr{L}'(U)$ est un sous-$\mathscr{A}(U)$-module de $\mathscr{L}(U)$, ce qui permet de munir canoniquement $\mathscr{L}'$ d'une structure de $\mathscr{A}$-Module à gauche, qui est du reste caractérisée par le fait que l'homomorphisme canonique $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ est compatible avec les structures algébriques de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$.

Définissons maintenant le *Module-quotient* $\mathscr{L}'' = \mathscr{L}/\mathscr{L}'$. Pour cela introduisons, pour tout ouvert U de X, une relation d'équivalence R(U) dans $\mathscr{L}(U)$ en écrivant que

$$s \equiv t \text{ mod. } R(U) \text{ équivaut à } s \equiv t \text{ mod. } \mathscr{L}'(U);$$

Il est clair que la condition du n° 1.9 est satisfaite, et qu'on peut par conséquent définir le faisceau d'ensembles $\mathscr{L}/R$; celui-ci est par définition engendré par le préfaisceau

$$U \to \mathscr{L}(U)/R(U) = \mathscr{L}(U)/\mathscr{L}'(U);$$

comme une limite inductive de suites exactes est exacte, on a évidemment des isomorphismes canoniques

$$\mathscr{L}''(x) = \mathscr{L}(x)/\mathscr{L}''(x),$$

d'où une structure de $\mathcal{A}(x)$-module à gauche sur $\mathscr{L}''(x)$ pour tout $x$; ceci permet évidemment de considérer $\mathscr{L}''$ comme un $\mathcal{A}$-Module à gauche, et on obtient de cette façon le $\mathcal{A}$-Module cherché $\mathscr{L}/\mathscr{L}'$. On voit que la structure de $\mathcal{A}$-Module de $\mathscr{L}''$ s'obtient en imposant à l'homomorphisme canonique de faisceaux d'ensembles $\mathscr{L} \to \mathscr{L}''$ d'être un homomorphisme de $\mathcal{A}$-Modules.

Lorsque $\mathscr{L} = \mathcal{A}$ muni de sa structure canonique de $\mathcal{A}$-Module à gauche, on dit que les sous-$\mathcal{A}$-Modules de $\mathscr{L}$ sont des *faisceaux d'idéaux à gauche* sur X.

***Exemple*** 2.3.1. — Soient X un espace, A un anneau, et $\mathcal{A}$ le faisceau simple de base X et de fibre A; soit $\mathscr{L}$ un faisceau d'idéaux dans $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}(x)$ s'identifie canoniquement à A, les idéaux $\mathscr{L}(x)$ peuvent être regardés comme des idéaux de l'anneau A, et puisque les sections de $\mathcal{A}$ (donc de $\mathscr{L}$) s'identifient aux fonctions localement constantes à valeurs dans A, on voit que la famille d'idéaux $\mathscr{L}(x)$ de A possède la propriété suivante : *pour tout* $a \in$ A *l'ensemble des* $x$ *tels que* $a \in \mathscr{L}(x)$ *est ouvert dans* X. Cette propriété *caractérise* les faisceaux d'idéaux.

Lorsque A est *noethérien* à gauche, la propriété précédente conduit évidemment au résultat suivant : pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A, les $x$ tels que l'on ait $\mathfrak{a} \subset \mathscr{L}(x)$ forment un ouvert de X; on peut encore l'exprimer comme suit : pour tout $x$, on a

$$\mathscr{L}(x) \subset \mathscr{L}(y)$$

dès que $y$ est suffisamment voisin de $x$.

Plus particulièrement encore prenons pour A l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels; les idéaux de $\mathbf{Z}$ correspondent biunivoquement aux entiers positifs; donc, dans ce cas, les faisceaux d'idéaux correspondent aux fonctions $x \to n(x)$, à valeurs entières $\geqslant 0$, et vérifiant la condition que voici : *pour tout* $y$ *suffisamment voisin de* $x$, *l'entier* $n(x)$ *est un multiple de* $n(y)$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, les $x$ tels que $n(x)$ divise $n$ forment donc un ouvert; il s'ensuit que si X est quasi-compact (i.e. vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue), la fonction $n(x)$ ne prend qu'un nombre *fini* de valeurs distinctes.

***Exemple*** 2.3.2. — Soient X une variété algébrique sur un corps algébriquement clos $k$, K le corps des fonctions rationnelles sur X, et $\mathcal{O}$ le faisceau des anneaux locaux de X (cf. *Exemple* 2.1.4); nous allons déterminer tous les faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}$. Soit $\mathfrak{J}$ un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}$; pour chaque $x \in$ X, $\mathfrak{J}(x)$ est un idéal de $\mathcal{O}(x)$, et tout revient à déterminer les conditions sous lesquelles la donnée, pour chaque $x$, d'un idéal $\mathfrak{J}(x)$ de l'anneau local $\mathcal{O}(x)$ définit un faisceau d'idéaux dans X. Or, le problème étant évidemment local, on peut supposer que la variété X est *affine*, i.e. qu'il existe dans K une algèbre affine $A = \mathcal{O}(X)$ telle que les $\mathcal{O}(x)$ soient les anneaux locaux $A_{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m}$ décrit l'ensemble des idéaux maximaux de A; nous noterons $\mathfrak{m}(x)$ l'idéal associé au point $x$ (c'est l'ensemble des fonctions rationnelles partout définies sur X et nulles au point $x$). Un idéal $\mathfrak{J}(x)$ de $\mathcal{O}(x)$ est alors engendré par un idéal de A, à savoir $\mathfrak{a}(x) = A \cap \mathfrak{J}(x)$ en vertu des propriétés élémentaires des anneaux de fractions. Or, l'anneau A est noethérien puisqu'il est à engendrement fini sur $k$; considérons alors un $x \in X$ et des fonctions $f_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ qui engendrent l'idéal $\mathfrak{a}(x)$; considérant les $f_i$ comme des sections de $\mathcal{O}$ au-dessus de X, on voit que les germes de sections qu'elles définissent en $x$ appartiennent à $\mathfrak{J}(x)$; donc, pour $y$ assez voisin de $x$, les germes de sections de $\mathcal{O}$ définies par les $f_i$ au point $y$ doivent aussi appartenir à $\mathfrak{J}(y)$, ce qui évidemment signifie que l'on a $f_i \in \mathfrak{a}(y)$ pour $y$ voisin de $x$, autrement dit que l'on a $\mathfrak{a}(x) \subset \mathfrak{a}(y)$ pour $y$ assez voisin de $x$.

***Exemple*** 2.3.3. (Diviseurs d'une variété analytique complexe). Soit X une variété analytique complexe, et $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans X. Pour tout $x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}(x)$ est sans diviseur de zéro; on peut donc former le corps des fractions $\mathcal{M}(x)$ de $\mathcal{O}(x)$. Sur l'ensemble $\mathcal{M}$ somme des ensembles $\mathcal{M}(x)$, on obtient une structure de faisceau de base X en imposant la condition suivante : étant données des sections $f$ et $g$ de $\mathcal{O}$ au-dessus d'un ouvert U de X, avec $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$, alors l'application $x \to f(x)/g(x)$ est une section de $\mathcal{M}$ au-dessus de U. (Bien entendu $g(x)$ désigne le *germe* de fonction défini par $g$ en $x$, et non pas la *valeur* en $x$ de la fonction holomorphe $g$). On dit que $\mathcal{M}$ est le *faisceau des germes de fonctions méromorphes dans* X : une section de $\mathcal{M}$ au-dessus d'un ouvert U est, par définition, une fonction méromorphe dans U.

$\mathcal{M}$ est évidemment un faisceau d'anneaux commutatifs, et $\mathcal{O}$ un sous-faisceau de $\mathcal{M}$. Pour tout ouvert U, désignons par $\mathcal{M}^*(U)$ (resp. $\mathcal{O}^*(U)$) le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}(U)$ (resp. $\mathcal{O}(U)$); les applications

$$U \to \mathcal{M}^*(U), \qquad U \to \mathcal{O}^*(U)$$

constituent des faisceaux de groupes abéliens (multiplicatifs) sur X, et $\mathcal{O}^*$ est un sous-faisceau de groupes abéliens de $\mathcal{M}^*$. Le faisceau-quotient

$$\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$$

est par définition le *faisceau des germes de diviseurs* de X et ses sections au-dessus de X sont par définition les *diviseurs* de la variété X. Un diviseur de X s'obtient donc (d'une infinité de manières) de la façon suivante : on prend un recouvrement ouvert $(U_i)$ de X, dans chaque $U_i$ une fonction méromorphe inversible $f_i$, et l'on suppose que dans $U_i \cap U_j$ le rapport $f_i/f_j$ est une fonction *holomorphe inversible*, i.e. ne s'annulant en aucun point de $U_i \cap U_j$.

Il est clair en particulier que toute fonction méromorphe dans X définit un diviseur de X; les diviseurs ainsi obtenus sont les *diviseurs principaux* de X. En général, il existe sur X des diviseurs non principaux (si X est compacte et de dimension complexe 1, le quotient du groupe des diviseurs de X par le sous-groupe des diviseurs principaux de X est, en vertu du théorème classique d'Abel, isomorphe au produit direct du groupe additif des entiers par un tore complexe de dimension $g$, où $g$ est le genre de la courbe X).

***Exemple*** 2.3.4. (Diviseurs d'une variété algébrique). — Soient X une variété algébrique sur un corps algébriquement clos $k$, et $\mathcal{O}$ le faisceau des anneaux locaux de X. En procédant exactement comme dans l'*Exemple* ci-dessus on définit des faisceaux $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{O}^*$ et $\mathfrak{D}$, les sections de $\mathfrak{D}$ au-dessus d'un ouvert U étant les diviseurs de U par définition.

La situation est ici plus simple que dans le cas analytique complexe. En effet, il est clair que si K est le corps des fonctions rationnelles de X, le faisceau $\mathcal{M}$ n'est autre que le faisceau simple de base X et de fibre K attendu que le corps des fractions de $\mathcal{O}(x)$ est, pour tout $x$, canoniquement isomorphe à K, ainsi que le corps des fractions de $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ pour tout ouvert assez petit U de X (on suppose bien entendu X *irréductible*). Pour tout ouvert U on a donc $\mathcal{M}^*(\mathrm{U}) = \mathrm{K}^*$, groupe multiplicatif des éléments non nuls de K, et $\mathcal{O}^*(\mathrm{U})$ est le sous-groupe de $\mathrm{K}^*$ formé des fonctions rationnelles qui sont partout définies et partout $\neq 0$ dans U.

## 2. 4. — Décomposition canonique d'un homomorphisme

Nous allons démontrer dans ce n° que la catégorie additive des Modules à gauche sur un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ de base X vérifie l'axiome (KA 2) des catégorie abéliennes.

Considérons pour cela un homomorphisme $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$-Modules à gauche. Nous allons construire un noyau, un conoyau, une image et une coimage de $f$, et ceci de façon canonique.

*a*) *Noyau de f.* — Pour tout $x \in \mathrm{X}$, désignons par $\mathcal{L}'(x)$ le noyau de l'application $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{M}(x)$ définie par $f$; il est immédiat de vérifier que la réunion $\mathcal{L}'$ des divers ensembles $\mathcal{L}'(x)$ est un sous-$\mathcal{A}$-Module de $\mathcal{L}$; soit $i$ l'homomorphisme canonique de $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}$; alors *le couple* $(\mathcal{L}', i)$ *est un noyau de f.* En effet considérons un homomorphisme $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L}$ tel que $f \circ g = 0$; cela signifie que pour tout $x$, $g$ applique $\mathcal{R}(x)$ dans $\mathcal{L}'(x)$; donc $g$ se factorise d'une façon et d'une seule en un homomorphisme $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L}'$ suivi de l'homomorphisme $i$, ce qui prouve notre assertion.

*b*) *Image de f.* — Soit $\mathcal{M}'$ le sous-faisceau d'ensembles de $\mathcal{M}$, image de $\mathcal{L}$ par $f$ (n° 1.8); il est évident que c'est un sous-$\mathcal{A}$-Module de $\mathcal{M}$, et que $f$ se factorise en un homomorphisme canonique $p : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}'$ suivi de l'homomorphisme canonique $j : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$. *Le couple* $(p, \mathcal{M}')$ *est une image de* $f$; en effet, comme on a

$$\mathcal{M}'(x) = f(x)(\mathcal{L}(x))$$

il est clair que, moyennant $p$, $\mathcal{M}'$ s'identifie au Module quotient $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$, ce qui montre, comme on le voit aussitôt, que pour qu'un homomorphisme $g : \mathcal{L} \to \mathcal{P}$ vérifie $g \circ i = 0$ ($i$ étant l'homomorphisme canonique $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}$) il faut et il suffit que $g$ puisse se factoriser en un homomorphisme $\mathcal{M}' \to \mathcal{P}$ précédé de l'homomorphisme canonique $p$.

*c*) *Conoyau de* $f$. — Considérons le Module quotient $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}/\mathcal{M}'$ et l'homomorphisme canonique $q : \mathcal{M} \to \mathcal{M}''$. Pour qu'un homomorphisme $h : \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ vérifie $h \circ f = 0$ il faut et il suffit qu'il annule tous les modules $\mathcal{M}'(x)$, i.e. que l'on ait $g \circ j = 0$, où $j$ est l'homomorphisme canonique $\mathcal{M}' \to \mathcal{M}$; d'où, comme plus haut, le résultat annoncé : $(q, \mathcal{M}'')$ est un conoyau de $f$.

*d*) *Coimage de* $f$. — C'est le couple $(\mathcal{M}', j)$ comme on le voit aussitôt.

Nous voyons donc que tout homomorphisme admet un noyau et un conoyau, et de plus que l'image et la coimage d'un homomorphisme sont canoniquement isomorphes : l'axiome (KA 2) est donc vérifié.

Par la suite, étant donné un homomorphisme $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, nous identifierons toujours le noyau de $f$ au sous-Module $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$, et l'image et la coimage de $f$ au sous-Module $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$; le conoyau de $f$ s'identifiera alors au Module quotient $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$. On a donc pour tout point $x \in X$ des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f)(x) &= \mathrm{Ker}(f(x));\\
\mathrm{Im}(f)(x) &= \mathrm{Im}(f(x));\\
\mathrm{Coker}(f)(x) &= \mathrm{Coker}(f(x));\\
\mathrm{Coim}(f)(x) &= \mathrm{Coim}(f(x)).
\end{aligned}$$

## 2. 5. — Suites exactes de $\mathcal{A}$-Modules

Les considérations du nº précédent permettent de définir la notion de *suite exacte* dans la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules à gauche : une suite

$$\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{N}$$

est dite *exacte* si $g \circ f = 0$ et si l'homomorphisme $\mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ qui résulte de cette hypothèse est un isomorphisme; comme nous avons convenu d'identifier $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ à des sous-$\mathcal{A}$-Modules de $\mathcal{M}$, l'exactitude de la suite considérée signifie évidemment que ces sous-$\mathcal{A}$-Modules sont identiques, autrement dit que, pour chaque point $x \in X$, la suite correspondante de $\mathcal{A}(x)$-modules

$$\mathcal{L}(x) \xrightarrow{f(x)} \mathcal{M}(x) \xrightarrow{g(x)} \mathcal{N}(x)$$

est exacte, ceci parce que le faisceau $\mathrm{Im}(f)$ est réunion des modules

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}(x) \to \mathcal{M}(x))$$

et le sous-faisceau $\mathrm{Ker}(g)$ réunion des modules $\mathrm{Ker}(\mathcal{M}(x) \to \mathcal{N}(x))$. Bien entendu on définirait à partir de là les suites exactes à un nombre quelconque de termes, et les considérations précédentes nous permettent d'énoncer le résultat suivant :

**Théorème** 2.5.1. — *Pour qu'une suite de $\mathcal{A}$-Modules à gauche et d'homomorphismes soit exacte, il faut et il suffit que, pour tout $x \in X$, le foncteur $\mathcal{L} \to \mathcal{L}(x)$ la transforme en une suite exacte de $\mathcal{A}(x)$-modules à gauche.*

Par conséquent, $\mathcal{L} \to \mathcal{L}(x)$ est un *foncteur exact* sur la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules, à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{A}(x)$-modules.

Par contre, si M est une partie quelconque de X, le foncteur $\mathcal{L} \to \mathcal{L}(M)$ est seulement *exact à gauche*, à cause du fait que si l'on a un faisceau quotient $\mathcal{L}/R$, les sections de celui-ci ne peuvent généralement pas se « relever » globalement en sections de $\mathcal{L}$, comme on l'a déjà vu au n° 1.9.

Un autre exemple, particulièrement important, de foncteur exact à gauche, s'obtient comme suit. Tout d'abord, étant donné un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur un espace X, nous poserons

$$\Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X):$$

$\Gamma(\mathcal{F})$ est donc le groupe abélien des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de l'espace X tout entier. Étant donnée une telle section $s$, on appelle *support* de $s$ l'ensemble $|s|$ des $x \in X$ tels que $s(x) \neq 0$; comme le complémentaire de $|s|$ est l'ensemble des points où les sections $s$ et 0 sont égales, il est clair que $|s|$ est *fermé* dans X. Cela dit, donnons-nous dans X un ensemble $\Phi$ de parties *fermées* vérifiant les deux conditions suivantes :

*a*) *la réunion de deux ensembles de $\Phi$ est dans $\Phi$;*
*b*) *tout fermé contenu dans un ensemble de $\Phi$ est dans $\Phi$.*

Nous dirons que $\Phi$ est une *famille de supports* dans X. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens de base X, l'ensemble $\Gamma_\Phi(\mathcal{F})$ des $s \in \Gamma(\mathcal{F})$ telles que $|s| \in \Phi$ est alors un sous-groupe de $\Gamma(\mathcal{F})$; l'application

$$\mathcal{F} \to \Gamma_\Phi(\mathcal{F})$$

est évidemment un *foncteur exact à gauche* sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens de base X.

**Exemple** 2.5.1. — Soit X une variété différentiable de dimension $n$. Pour tout entier $p \geqslant 0$ considérons le faisceau $\Omega^p$ des germes de formes différentielles de degré $p$ sur X, défini en attachant à tout ouvert U l'ensemble des formes différentielles de degré $p$ de U. Les opérateurs de *dérivation extérieure* $\Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ définissent évidemment des homomorphismes $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ de faisceaux d'espaces vectoriels réels. D'autre part, on a une injection

$$j : \mathbf{R} \to \Omega^0$$

du faisceau simple de fibre $\mathbf{R}$ dans $\Omega^0$, obtenue en observant que parmi les formes différentielles de degré 0 dans U (i.e. les fonctions différentiables dans U) figurent les fonctions localement constantes. Ceci dit, *la suite*

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{j} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0$$

*est exacte.* La question étant purement locale, on peut supposer que X est l'espace $\mathbf{R}^n$ — mais alors il résulte d'un théorème classique dû à Poincaré qu'une forme différentielle $\omega$ sur $\mathbf{R}^n$, vérifiant $d\omega = 0$, est de la forme $d\varpi$ si son degré est $\geqslant 1$, et est constante si son degré est 0, d'où évidemment le résultat annoncé.

Bien entendu, sur une variété X quelconque, on n'a pas de résultat analogue en général — autrement dit la suite de groupes abéliens

$$0 \to \mathbf{R} \to \Omega^0(X) \to \cdots \to \Omega^n(X) \to 0$$

*n'est pas exacte* en général; voir au n° 4.7 une réponse à cette question.

***Exemple*** 2.5.2. — Soient X un espace topologique et A un groupe abélien quelconque. Étant donné un entier $n \geqslant 0$, attachons à tout ouvert U de X le groupe abélien des applications $U^{n+1} \to A$, et pour $U \supset V$ définissons de façon évidente les opérations de restriction; on obtient ainsi un préfaisceau sur X (il est facile de vérifier l'axiome (F 2), mais (F 1) est généralement en défaut); le *faisceau* de groupes abéliens qu'il engendre est le *faisceau des germes de cochaînes d'Alexander-Spanier de degré n de* X *à valeurs dans* A; notons-le $\mathscr{F}^n(X; A)$.

Si à toute application $f: U^{n+1} \to A$ on associe l'application $df: U^{n+2} \to A$ définie par

$$df(x_0, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i \cdot f(x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{n+1}),$$

on définit évidemment un homomorphisme de faisceaux

$$d: \mathscr{F}^n(X; A) \to \mathscr{F}^{n+1}(X; A).$$

D'autre part, identifiant A au faisceau simple de base X et de fibre A, on a une injection

$$j: A \to \mathscr{F}^0(X; A);$$

cela dit, *la suite de faisceaux de groupes abéliens*

$$0 \to A \xrightarrow{j} \mathscr{F}^0(X; A) \xrightarrow{d} \mathscr{F}^1(X; A) \xrightarrow{d} \cdots$$

*est exacte.* Soit en effet un germe de cochaîne de degré $n$ en un point $x$, annulé par $d$; dans un voisinage U de $x$ on peut le représenter par une application $f$ : $U^{n+1} \to A$ annulée par $d$; si $n = 0$ cela signifie évidemment que $f$ est constante; si $n \geqslant 1$, définissons $g : U^n \to A$ par

$$g(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(x, x_0, \ldots, x_{n-1});$$

on vérifie aussitôt que $f = dg$, d'où le résultat.

On notera que dans ces exemples on a fait usage du principe suivant pour établir l'exactitude d'une suite

$$\mathscr{L} \xrightarrow{f} \mathscr{M} \xrightarrow{g} \mathscr{N} :$$

on vérifie d'abord que $g \circ f = 0$, puis que, étant donnée une section $s \in \mathscr{M}(U)$ annulée par $g$, il existe dans tout ouvert $V \subset U$ *suffisamment petit* une section $t \in \mathscr{L}(V)$ telle que la restriction de $s$ à V soit l'image de $t$ par $f$. Cela signifie en effet que le faisceau $\mathrm{Ker}(g)$, donné par

$$U \to \mathrm{Ker}(\mathscr{M}(U) \to \mathscr{N}(U)),$$

est *engendré* par le *pré*faisceau

$$U \to \mathrm{Im}(\mathscr{L}(U) \to \mathscr{M}(U)).$$

## 2. 6. — Produits directs de $\mathscr{A}$-Modules

Soit $(\mathscr{L}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de $\mathscr{A}$-Modules à gauche; alors le faisceau

$$\mathscr{L} = \prod_{i \in I} \mathscr{L}_i$$

défini au n° 1.10 est canoniquement un $\mathscr{A}$-Module à gauche, et les homomorphismes

$$pr_i : \mathscr{L} \to \mathscr{L}_i$$

sont des homomorphismes de $\mathscr{A}$-Modules à gauche, qui sont d'ailleurs surjectifs. La propriété universelle énoncée au n° 1.10 se transcrit ici comme suit : étant donnés des homomorphismes de $\mathscr{A}$-Modules

$$f_i : \mathscr{M} \to \mathscr{L}_i$$

il existe un homomorphisme et un seul

$$f : \mathscr{M} \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}_i$$

tel que l'on ait $f_i = pr_i \circ f$ pour tout $i$. Autrement dit, on a la formule

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}, \prod_{i \in I} \mathscr{L}_i) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}, \mathscr{L}_i)}\,.$$

Il résulte évidemment de là que la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules à gauche vérifie l'axiome (KA 3) des catégories abéliennes (et même un axiome beaucoup plus fort!). C'est donc, comme on l'avait annoncé, une *catégorie abélienne*.

## 2. 7. — Sommes directes de $\mathcal{A}$-Modules

Dans les mêmes conditions qu'au n° précédent, on définit un faisceau

$$\mathcal{L}' = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$$

comme étant le faisceau *engendré* par le préfaisceau

$$U \to \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(U);$$

c'est évidemment un sous-$\mathcal{A}$-Module à gauche du produit direct des $\mathcal{L}_i$. Pour qu'une section $(s_i)$ du *produit* direct, définie dans un ouvert U, soit une section de la *somme* directe, il faut et il suffit que, dans tout ouvert $V \subset U$ assez petit, les $s_i$ non nulles soient en nombre fini. Il résulte de là que les notions de produit direct et de somme directe coïncident toutes les fois que la famille $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ est *localement finie*, i.e. lorsque, pour tout ouvert U suffisamment petit, les faisceaux induits $\mathcal{L}_i|U$ non nuls sont en nombre fini.

Au point de vue des espaces étalés, on a

$$\mathcal{L}'(x) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(x),$$

et la topologie de $\mathcal{L}'$ est telle que les injections évidentes $\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}'$ soient des homomorphismes de faisceaux.

On a pour la notion de somme directe une propriété « universelle » analogue à celle du n° précédent; on peut l'exprimer par la relation

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i, \mathcal{M}) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_i, \mathcal{M})}.$$

Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche et $\mathcal{L}'$ un sous-$\mathcal{A}$-Module à gauche; posons $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}/\mathcal{L}'$. On dit que $\mathcal{L}'$ est *facteur direct* de $\mathcal{L}$ s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ sur $\mathcal{L}$ qui induise l'identité sur $\mathcal{L}'$; il revient au même de dire que l'injection $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}'$ se prolonge en un homomorphisme $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, ou encore qu'il existe un homomorphisme $\mathcal{L}'' \to \mathcal{L}$ qui, composé avec $\mathcal{L} \to \mathcal{L}''$, donne l'identité.

Soit une suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$$

et considérons un foncteur T covariant, exact à gauche, à valeurs par exemple dans la catégorie des groupes abéliens; alors, pour que la suite

$$0 \to \mathrm{T}(\mathscr{L}') \to \mathrm{T}(\mathscr{L}) \to \mathrm{T}(\mathscr{L}'') \to 0$$

soit exacte il suffit que $\mathscr{L}'$ soit facteur direct dans $\mathscr{L}$ [1].

## 2. 8. — Produits tensoriels

Soient $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur X, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{A}$-Module à droite et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-Module à gauche; on désigne alors par la notation

$$\mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}$$

le *faisceau de groupes abéliens* engendré par le préfaisceau

$$\mathrm{U} \to \mathscr{L}(\mathrm{U}) \underset{\mathscr{A}(\mathrm{U})}{\otimes} \mathscr{M}(\mathrm{U}),$$

les opérations de restriction se définissant à partir de celles de $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ de façon évidente. On notera que si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux commutatifs, le produit tensoriel est encore un $\mathscr{A}$-Module.

En vertu des résultats du Chapitre 1, n° 1.6, sur les limites inductives de produits tensoriels, on peut encore définir comme suit le produit tensoriel : le groupe ponctuel au point $x$ est

$$\mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}(x) = \mathscr{L}(x) \underset{\mathscr{A}(x)}{\otimes} \mathscr{M}(x),$$

et la topologie d'espace étalé de $\mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}$ est telle que si $s$ et $t$ sont des sections de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ au-dessus d'un ouvert U, alors la formule

$$x \to s(x) \otimes t(x)$$

définit une section du produit tensoriel au-dessus de U.

On peut caractériser les produits tensoriels de $\mathscr{A}$-Modules à l'aide d'une propriété universelle analogue à celle qu'on utilise en Algèbre; on laisse au lecteur le soin de le faire. La plupart des propriétés algébriques des produits tensoriels s'étendent d'ailleurs, en général trivialement, au cas des faisceaux; par exemple on a pour tout $\mathscr{A}$-Module à gauche un isomorphisme canonique

$$\mathscr{A} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M} = \mathscr{M}$$

(à condition bien entendu que $\mathscr{A}$ soit un faisceau d'anneaux avec élément

[1] Ce résultat appartient évidemment à la théorie des catégories abéliennes.

unité). D'autre part, *le foncteur* $\mathcal{M} \to \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}$ *est exact à droite,* comme on le voit en considérant les modules ponctuels.

***Exemple*** 2.8.1. — Soient X une variété différentiable et E une variété fibrée, à fibre vectorielle, de base X. Notons $\Omega^0$ le faisceau des germes de fonctions différentiables sur X, et $\Omega^0_E$ le faisceau des germes de sections différentiables de E, qui est un $\Omega^0$-Module. Alors les sections du faisceau

$$\Omega^p_E = \Omega^0_E \underset{\Omega^0}{\otimes} \Omega^p$$

sont les *formes différentielles de degré $p$ de* X *à valeurs dans* E.

De même, si l'on note $\mathcal{D}'^p$ le faisceau des *germes de courants de degré $p$ de* X (cf. le livre de G. de Rham sur la théorie des variétés différentiables), les courants de degré $p$ à valeurs dans E sont les sections du faisceau $\Omega^0_E \underset{\Omega^0}{\otimes} \mathcal{D}'^p$.

Pour $p = 0$, on trouve les *sections-distributions* de la variété fibrée E. On définirait de même plus particulièrement les *sections-mesures* de E, etc...

## 2. 9. — Suite exacte associée à un sous-espace localement fermé

On dit qu'un sous-espace Y de X est *localement fermé* si tout point $a \in Y$ possède dans X un voisinage ouvert $U(a)$ tel que $Y \cap U(a)$ soit fermé relativement au sous-espace $U(a)$. Il revient au même de dire que Y est un sous-espace ouvert de $\overline{Y}$, ou encore que

$$Y = U \cap F$$

avec U ouvert et F fermé dans X.

***Théorème*** 2.9.1. — *Soit* A *un sous-espace de* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(LF 1) : A *est localement fermé dans* X;

(LF 2) : *pour tout faisceau $\mathcal{L}$ de groupes abéliens sur* X, *il existe un faisceau $\mathcal{L}_A$ sur* X *qui induit sur* A *un faisceau isomorphe à $\mathcal{L}|A$ et qui induit sur* X-A *le faisceau nul.*

Montrons d'abord que (LF 2) implique (LF 1). Supposons en effet qu'il existe sur X un faisceau $\mathcal{L}$ qui induit 0 dans X-A et $\mathbf{Z}$ sur A. Pour tout $a \in A$ il existe alors, dans un voisinage ouvert $U(a)$ de $a$ dans X, une section $s$ de $\mathcal{L}$ telle que $s(a) = 1$; si $U(a)$ est assez petit on aura du reste $s(x) = 1$ pour tout $x \in A \cap U(a)$, et bien entendu $s(x) = 0$ dans $U(a) - A \cap U(a)$; comme les points de $U(a)$ où $s$ est nulle forment un ouvert, on voit bien que A est localement fermé.

Pour démontrer la réciproque, il suffit d'établir le résultat suivant :

**Théorème** 2.9.2. — *Soit* A *un sous-espace localement fermé de* X. *Pour tout faisceau* $\mathscr{L}$ *de groupes abéliens sur* A, *il existe un faisceau* $\mathscr{L}^X$ *de groupes abéliens sur* X, *et un seul, qui induit* $\mathscr{L}$ *sur* A *et* 0 *dans* X-A.

Supposons trouvé un faisceau répondant à la question, Puisque $\mathscr{L}^X(x) = 0$ pour $x \in$ X-A, il est clair que pour tout ouvert U on a une inclusion

$$\mathscr{L}^X(U) \subset \mathscr{L}(U \cap A),$$

obtenue en identifiant une section $s$ au-dessus de U à sa restriction à $U \cap A$. Les sections $s \in \mathscr{L}(U \cap A)$ ainsi obtenues sont évidemment celles qui, prolongées par 0 dans $U - U \cap A$, restent *continues*, autrement dit celles dont le *support* (¹) est *fermé dans* U (et pas seulement dans $U \cap A$). Ceci prouve l'unicité du faisceau $\mathscr{L}^X$.

Pour établir son existence désignons par $\mathscr{L}^X(U)$ *le sous-groupe de* $\mathscr{L}(U \cap A)$ *formé des sections dont le support est fermé relativement à* U. Pour $U \supset V$, l'opération de restriction $\mathscr{L}(U \cap A) \to \mathscr{L}(V \cap A)$ applique évidemment $\mathscr{L}^X(U)$ dans $\mathscr{L}^X(V)$, d'où un préfaisceau $U \to \mathscr{L}^X(U)$; c'est en fait un *faisceau* de groupes abéliens, comme on le voit aussitôt. Reste à prouver qu'il induit 0 dans X-A et $\mathscr{L}$ sur A.

Il est évident que $\mathscr{L}^X$ induit 0 dans $X-\overline{A}$. Soit maintenant $x \in \overline{A}-A$ et prenons une section $s \in \mathscr{L}^X(U)$, U étant un voisinage ouvert de $x$ dans X. Comme $s$, en tant que section de $\mathscr{L}$ au-dessus de $U \cap A$, a pour support S un sous-ensemble fermé de l'espace U, et comme S ne contient pas $x$, il y a un voisinage ouvert V de $x$ dans U, i.e. dans X, qui ne rencontre pas S; donc $s$ induit 0 dans V, ce qui prouve à la limite que $\mathscr{L}^X(x) = 0$.

Prenons maintenant un $x \in A$. Il y a un voisinage U de $x$ tel que $A \cap U$ soit fermé dans U; donc pour tout voisinage ouvert $V \subset U$ contenu dans U on aura $\mathscr{L}^X(V) = \mathscr{L}(V \cap A)$ d'où à la limite $\mathscr{L}^X(x) = \mathscr{L}(x)$ pour tout $x \in A$; reste à montrer que cette identification de $\mathscr{L}^X|A$ et $\mathscr{L}$ respecte les topologies de ces deux faisceaux; ou encore que les sections au-dessus de $U \cap A$ du faisceau induit par $\mathscr{L}^X$ sont bien celles de $\mathscr{L}$; mais si l'on désigne provisoirement par $\mathscr{M}$ le faisceau induit par $\mathscr{L}^X$, et si l'on observe que $A \cap U$ est fermé dans U on voit, en tenant compte de ce que $\mathscr{L}^X$ induit 0 dans $U-U \cap A$, que les sections de $\mathscr{M}$ au-dessus de $U \cap A$, prolongées par 0 dans $U-U \cap A$, sont continues — autrement dit que $\mathscr{M}(U \cap A) = \mathscr{L}^X(U) = \mathscr{L}(U \cap A)$, d'où le résultat. Les Théorèmes 2.9.1 et 2.9.2 sont donc entièrement démontrés.

(¹) Soit $\mathscr{L}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et $s$ une section de $\mathscr{L}$ au-dessus d'une partie M de X. On appelle *support* de $s$ l'ensemble des points $x \in$ M tels que $s(x) \neq 0$. Comme toute section nulle en un point est nulle au voisinage (et ce parce que l'application $x \to 0$ est une section de $\mathscr{L}$), on voit que le support de $s$ est une partie *relativement fermée* de M.

Au point de vue des espaces étalés, on peut plonger l'ensemble $\mathscr{L}_A$ dans l'ensemble $\mathscr{L}$ (on reprend les notations du Théorème 2.9.1); mais ce plongement n'est compatible avec les topologies que si A est *ouvert* dans X. Il est du reste évident directement dans ce cas que si l'on note $\mathscr{L}_A$ l'ensemble des points de $\mathscr{L}$ qui sont nuls ou bien se projettent dans A, on obtient un *sous-faisceau* de $\mathscr{L}$ qui induit $\mathscr{L}|A$ dans A, et 0 dans X-A.

Par contre, si A est *fermé* dans X, la relation

$$\mathscr{L}_A(U) = \mathscr{L}(A \cap U)$$

montre qu'on a un homomorphisme canonique $\mathscr{L} \to \mathscr{L}_A$, évidemment *surjectif*, en associant à toute section au-dessus de U sa restriction à $U \cap A$. On notera d'ailleurs que cet homomorphisme annule une section $s$ au-dessus de U si et seulement si $s$ est nulle sur $U \cap A$, autrement dit, si le support de $s$ est contenu dans $U - U \cap A$; par suite :

**Théorème** 2.9.3. — *Pour tout sous-espace fermé* A *de* X *et tout faisceau* $\mathscr{L}$ *de groupes abéliens sur* X, *la suite*

$$0 \to \mathscr{L}_{X-A} \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}_A \to 0$$

*est exacte.*

On remarquera que si l'on a deux sous-espaces localement fermés A et B, alors on a un isomorphisme canonique

$$(\mathscr{L}_A)_B = \mathscr{L}_{A \cap B}$$

en vertu de la caractérisation du second membre. Si en particulier on écrit $A = U \cap F$, avec U ouvert et F fermé dans X, il vient $\mathscr{L}_A = (\mathscr{L}_U)_F = (\mathscr{L}_F)_U$, ce qui prouve que $\mathscr{L}_A$ est un quotient d'un sous-faisceau de $\mathscr{L}$, et aussi un sous-faisceau d'un quotient de $\mathscr{L}$.

Un raisonnement analogue prouverait qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{L}_A = \mathbf{Z}_A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{L}$$

pour tout faisceau $\mathscr{L}$ de groupes abéliens sur X. Comme $\mathbf{Z}_A$ est un faisceau de groupes abéliens dont les groupes ponctuels sont isomorphes à 0 ou à $\mathbf{Z}$, il s'ensuit évidemment que *le foncteur* $\mathscr{L} \to \mathscr{L}_A$ *est exact.*

Le théorème 2.9.1. montre que tout faisceau sur un sous-espace localement fermé de X est induit par un faisceau de base X; en fait :

**Théorème** 2.9.4. — *Soit* A *un sous-espace d'un espace topologique* X; *tout faisceau* $\mathscr{L}$ *d'ensembles* (*resp. de groupes abéliens*) *de base* A *est induit par un faisceau d'ensembles* (*resp. de groupes abéliens*) *de base* X.

Considérons en effet sur X le faisceau

$$^{X}\mathscr{L} : \mathrm{U} \to \mathscr{L}(\mathrm{A} \cap \mathrm{U}),$$

avec les opérations de restriction évidentes; il est trivial de vérifier les axiomes des faisceaux.

En un point $a$ de A, l'ensemble ponctuel $^{X}\mathscr{L}(a)$ est la limite inductive des ensembles $\mathscr{L}(\mathrm{A} \cap \mathrm{U})$ lorsque U parcourt l'ordonné filtrant décroissant des voisinages ouverts de $a$ dans X; mais alors, $\mathrm{A} \cap \mathrm{U}$ parcourt l'ordonné filtrant décroissant des voisinages ouverts de $a$ dans A; par conséquent on a un isomorphisme canonique

$$^{X}\mathscr{L}(a) = \mathscr{L}(a)$$

pour tout $a \in \mathrm{A}$. Au point de vue des espaces étalés, on a donc une bijection de l'espace étalé $\mathscr{L}$ sur l'espace étalé $^{X}\mathscr{L}|\mathrm{A}$, compatible avec les projections canoniques de ces deux espaces sur A. Il reste à faire voir que cette bijection est bicontinue. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout ouvert U de X, les sections de $^{X}\mathscr{L}$ au-dessus de $\mathrm{U} \cap \mathrm{A}$ s'identifient aux sections de $\mathscr{L}$ au-dessus de $\mathrm{U} \cap \mathrm{A}$; or soit $s$ une section de $^{X}\mathscr{L}$ au-dessus de $\mathrm{U} \cap \mathrm{A}$; pour tout $a \in \mathrm{U} \cap \mathrm{A}$, il existe un voisinage ouvert $\mathrm{V}(a)$ de $a$ dans X et une section $s_a$ de $^{X}\mathscr{L}$ dans $\mathrm{V}(a)$ qui induit $s$ sur $\mathrm{V}(a) \cap \mathrm{A}$; mais par construction de $^{X}\mathscr{L}$, $s_a$ s'identifie à une section de $\mathscr{L}$ au-dessus de $\mathrm{V}(a) \cap \mathrm{A}$; ceci prouve évidemment la continuité de $s$ en tant qu'application de $\mathrm{A} \cap \mathrm{U}$ dans l'espace étalé $\mathscr{L}$. Réciproquement, il est clair par construction de $^{X}\mathscr{L}$ que toute section de $\mathscr{L}$ au-dessus de $\mathrm{U} \cap \mathrm{A}$ définit une section de $^{X}\mathscr{L}$ au-dessus du même ensemble, d'où le Théorème.

Bien entendu, le faisceau $^{X}\mathscr{L}$ n'est généralement pas concentré sur le sous-espace A de X.

***Remarque* 2.9.1.** — Soient $\mathscr{L}$ un faisceau de groupes abéliens de base X, et U un ouvert de X; on a alors un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}, \mathscr{L}) = \mathscr{L}(\mathrm{U}).$$

En effet considérons un homomorphisme $f : \mathbf{Z}_{\mathrm{U}} \to \mathscr{L}$; il transforme la section unité de $\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}$ au-dessus de U en une section $\bar{f} \in \mathscr{L}(\mathrm{U})$ dont la connaissance détermine entièrement $f$; réciproquement partons d'une section $s \in \mathscr{L}(\mathrm{U})$; elle définit évidemment un homomorphisme du faisceau simple de fibre $\mathbf{Z}$ et de base U dans le faisceau induit $\mathscr{L}|\mathrm{U}$, donc, en prenant les extensions canoniques de ces faisceaux à X, un homomorphisme de $\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}$ dans $\mathscr{L}_{\mathrm{U}}$, i.e. dans $\mathscr{L}$ puisque $\mathscr{L}_{\mathrm{U}}$ est un sous-faisceau de $\mathscr{L}$; d'ou le résultat annoncé.

On déduit de là que $\mathscr{H}om(\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}, \mathscr{L})$ n'est autre que le faisceau

$$\mathrm{V} \to \mathscr{L}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$$

avec les opérations de restriction évidentes; on ne confondra pas ce faisceau avec $\mathscr{L}_{\mathrm{U}}$.

***Remarque*** 2.9.2. — La relation $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_U, \mathcal{L}) = \mathcal{L}(U)$ établie ci-dessus permet de prouver que *tout faisceau $\mathcal{L}$ de groupes abéliens sur* X *est un quotient d'une somme directe de faisceaux de la forme* $\mathbf{Z}_U$. Considérons en effet une famille $(U_i, s_i)_{i \in I}$ où les $U_i$ sont des ouverts de X et les $s_i$ des sections de $\mathcal{L}$ au-dessus des $U_i$; chaque $s_i$ détermine un homomorphisme $\mathbf{Z}_{U_i} \to \mathcal{L}$, d'ou (nº 2.7) un homomorphisme

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}_{U_i} \to \mathcal{L};$$

pour que cet homomorphisme soit surjectif il faut et il suffit que, pour tout $x$, le groupe abélien $\mathcal{L}(x)$ soit engendré par les $s_i(x)$ correspondant aux indices $i$ tels que $x \in U_i$; d'où évidemment notre assertion.

***Remarque*** 2.9.3. — Soient X un espace topologique, $\mathbf{Z}$ le faisceau simple de base X ayant pour fibre l'anneau des entiers rationnels, et $\mathcal{L}$ un sous-faisceau de groupes abéliens de $\mathbf{Z}$. On a vu que pour tout $x$, on a $\mathcal{L}(x) = n(x).\mathbf{Z}$, où $n(x)$ est un entier $\geqslant 0$ bien déterminé, avec la propriété que $n(y)$ divise $n(x)$ pour tout $y$ suffisamment voisin de $x$ (Exemple 2.3.1.). Nous allons en déduire des renseignements importants sur la structure de $\mathcal{L}$ lorsque l'espace X est quasi-compact, hypothèse qui assure que l'entier $n(x)$ ne prend qu'un nombre *fini* de valeurs.

Soit U l'ensemble des $x$ tels que $n(x) \neq 0$; c'est évidemment un *ouvert* de X puisque le faisceau $\mathbf{Z}$ est séparé. Pour tout entier $s \geqslant 1$, la relation $n(x) \leqslant s$ définit alors dans U un *ouvert* $U_s$ puisque tout diviseur de $n(x)$ est $\leqslant n(x)$. On a évidemment les relations

$$U_1 \subset U_2 \subset \ldots$$

et de plus $U_n = U$ pour $n$ assez grand puisque X est quasi-compact. Considérons alors les sous-faisceaux

$$\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{U_s} \quad (s \geqslant 1)$$

de $\mathcal{L}$; on obtient ainsi dans $\mathcal{L}$ une « suite de composition »

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \quad \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L},$$

dont nous allons examiner les quotients successifs.

Il est clair tout d'abord que $\mathcal{L}_1 = \mathbf{Z}_{U_1}$. Considérons maintenant $\mathcal{L}_s/\mathcal{L}_{s-1}$ pour $s > 1$; introduisant l'ensemble localement fermé

$$A_s = U_s - U_{s-1},$$

il est clair que ce quotient n'est autre que $\mathcal{L}_{A_s}$; comme $n(x) = s$ pour tout $x \in A_s$, entier indépendant de $x$, on voit immédiatement que $\mathcal{L}_s/\mathcal{L}_{s-1}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_{A_s}$.

En conclusion, on voit que $\mathcal{L}$ *admet une suite de composition de longueur finie dont les quotients successifs sont de la forme* $\mathbf{Z}_A$, *où* A *est localement fermé dans* X.

## 2. 10. — Produit tensoriel total

Soient X et Y deux espaces topologiques, A un anneau de base, $\mathcal{L}$ un faisceau de A-modules à droite de base X, et $\mathcal{M}$ un faisceau de A-modules à gauche de base Y; nous allons définir *sur l'espace produit* un faisceau de groupes abéliens

$$\mathcal{N} = \mathcal{L} \mathop{\hat{\otimes}}_{A} \mathcal{M},$$

appelé *produit tensoriel total* de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sur l'anneau A; l'emploi de cette terminologie et de la notation $\hat{\otimes}$ a pour but d'éviter, dans le cas où X = Y, les confusions possibles avec la notion de produit tensoriel définie au n° 2.8.

Quels que soient $x \in$ X et $y \in$ Y, nous définirons

$$\mathcal{N}(x,y) = \mathcal{L}(x) \mathop{\otimes}_{A} \mathcal{M}(y);$$

il nous reste à préciser les conditions pour qu'une application

$$(x,y) \rightarrow u(x,y) \in \mathcal{N}(x,y),$$

définie dans un ouvert W de X $\times$ Y, soit une *section* de $\mathcal{N}$; ces conditions sont les suivantes : *quel que soit* $(x_0, y_0) \in$ W *il existe un voisinage ouvert* U *de* $x_0$ *dans* X, *un voisinage ouvert* V *de* $y_0$ *dans* Y, *des sections* $s_i \in \mathcal{L}(U)$ *et des sections* $t_i \in \mathcal{M}(V)$, *en nombre fini, tels que l'on ait*

$$U \times V \subset W \qquad et \qquad u(x, y) = \sum s_i(x) \otimes t_i(y) \qquad pour \qquad x \in U, y \in V.$$

Désignons par $\mathcal{N}(W)$ l'ensemble des applications $u$ qui vérifient ces conditions; si W' $\subset$ W on a un homomorphisme de restriction $\mathcal{N}(W) \rightarrow \mathcal{N}(W')$ de façon évidente, et il est clair que les axiomes des préfaisceaux sont vérifiés. La vérification des axiomes (F1) et (F2) des faisceaux est triviale. Il reste, pour établir le fait que $\mathcal{N}(x,y)$ est bien le groupe des germes de sections de $\mathcal{N}$ en $(x, y)$, à montre que par tout élément de $\mathcal{N}(x,y)$ « passe » une section (ce qui est clair) et essentiellement une seule.

Il suffit évidemment pour cela de démontrer que, si l'on a des sections $s_i \in \mathcal{L}(U)$ et $t_i \in \mathcal{M}(V)$ en nombre fini, telles que l'élément $\Sigma s_i(x) \otimes t_i(y) \in \mathcal{L}(x) \mathop{\otimes}_{A} \mathcal{M}(y)$ soit nul en un point $(x_0,y_0)$ de U $\times$ V, alors il est aussi nul au voisinage de $(x_0, y_0)$.

Or puisque l'on a canoniquement

$$\mathcal{L}(x) = \lim_{U \ni x} \text{ind.}\, \mathcal{L}(U), \qquad \mathcal{M}(y) = \lim_{V \ni y} \text{ind.}\, \mathcal{M}(V),$$

on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{L}(x) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(y) = \lim_{\substack{U \ni x \\ V \ni y}} \mathrm{ind.}\, \mathscr{L}(U) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(V);$$

puisque par hypothèse l'élément $\Sigma s_i \otimes t_i$ de $\mathscr{L}(U) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(V)$ s'annule dans $\mathscr{L}(x_0) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(y_0)$, on peut, au besoin en modifiant U et V, le supposer identiquement nul — en vertu de la définition même des limites inductives. Ceci démontre évidemment notre assertion.

Il est clair que, quels que soient les ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$, on a une application

$$\mathscr{L}(U) \times \mathscr{M}(V) \rightarrow \mathscr{L} \underset{A}{\widehat{\otimes}} \mathscr{M}(U \times V)$$

qui est bilinéaire sur l'anneau de base A, et qui est, en un sens évident, compatible avec les opérations de restriction.

Réciproquement, donnons-nous un faisceau $\mathscr{R}$ de groupes abéliens sur $X \times Y$, et des applications A-bilinéaires

$$\mathscr{L}(U) \times \mathscr{M}(V) \rightarrow \mathscr{R}(U \times V)$$

compatibles avec les opérations de restriction; alors ces applications s'obtiennent en composant les applications bilinéaires définies précédemment, avec un homomorphisme

$$\mathscr{L} \underset{A}{\widehat{\otimes}} \mathscr{M} \rightarrow \mathscr{R}$$

bien déterminé. Cette propriété montre que le produit tensoriel total est la solution d'un « problème universel », analogue à celui qui conduit, en Algèbre, à la notion de produit tensoriel de deux modules sur un anneau.

### 2. 11. — Image réciproque d'un faisceau par une application continue

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f$ une application continue de X dans Y; on a vu (nº 1.12) que $f$ permet d'associer, à tout faisceau d'ensembles $\mathscr{M}$ de base Y, un faisceau d'ensembles

$$\mathscr{L} = f^*(\mathscr{M}),$$

appelé *image réciproque* de $\mathscr{M}$ par $\mathscr{L}$; rappelons que, pour tout ouvert $U \subset X$, les sections de $\mathscr{L}$ au-dessus de U s'identifient canoniquement aux applications *continues* $s$ de U dans l'espace étalé $\mathscr{M}$ qui vérifient

$$(1) \qquad s(x) \in \mathscr{M}(f(x)) \qquad \text{pour tout } x \in U.$$

Supposons maintenant que $\mathscr{M}$ soit un *faisceau d'anneaux* sur Y; il est clair que les solutions de (1) forment canoniquement un anneau, dans lequel la somme et le produit sont définis par

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x); \qquad (st)(x) = s(x)t(x);$$

de plus, ces opérations sont compatibles avec les opérations de restriction dans $\mathcal{L}$; par conséquent, $\mathcal{L}$ est muni canoniquement d'une structure de *faisceau d'anneaux.*

Plus généralement, partons d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{B}$ sur Y et d'un $\mathcal{B}$-Module à gauche $\mathcal{M}$; alors $\mathcal{L} = f^*(\mathcal{M})$ est canoniquement un $\mathcal{A}$-Module à gauche, où l'on pose $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$. Il suffit pour le voir de définir de façon « naturelle » le produit d'une section $s \in \mathcal{A}(\mathrm{U})$ par une section $t \in \mathcal{L}(\mathrm{U})$; représentant $s$ et $t$ par des applications de U dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{M}$, on posera évidemment

$$(st)(x) = s(x)t(x).$$

Il est clair que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, $f$ induit alors un homomorphisme d'*anneaux* $\mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(f(x))$, et un homomorphisme $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{M}(f(x))$ de *modules* compatible avec l'homomorphisme précédent.

A titre d'exemple des notions précédentes, considérons un espace X, un anneau de base A, un faisceau $\mathcal{L}$ de A-modules à droite et un faisceau $\mathcal{M}$ de A-modules à gauche, de base X. Alors *le produit tensoriel* $\mathcal{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathcal{M}$ *est canoniquement isomorphe à l'image réciproque du produit tensoriel total* $\mathcal{L} \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} \mathcal{M}$ *par l'application diagonale*

$$x \to (x, x)$$

*de* X *dans* X×X. On laisse au lecteur le soin de vérifier cette assertion à titre d'exercice.

Un autre exemple s'obtient en considérant un faisceau $\mathcal{L}$ de groupes abéliens sur un espace X; alors, pour tout sous-espace Y de X, *le faisceau induit* $\mathcal{L}|\mathrm{Y}$ *est canoniquement isomorphe à l'image réciproque de* $\mathcal{L}$ *par l'injection canonique* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

La propriété la plus importante de l'opération « image réciproque » est la suivante : le foncteur $\mathcal{M} \to f^*(\mathcal{M})$, défini sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens de base Y et à valeurs dans celle des faisceaux de groupes abéliens de base X, est *exact*. En effet, on a pour tout $x \in \mathrm{X}$ une *bijection* canonique de $f^*(\mathcal{M})(x)$ sur $\mathcal{M}(f(x))$ (nº 1.12), évidemment compatible avec les structures additives de ces deux ensembles; d'où immédiatement notre assertion.

## 2. 12. — Image directe d'un faisceau

Considérons toujours deux espaces X et Y et une application continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Pour tout faisceau $\mathcal{A}$ d'ensembles de base X, on a alors (nº 1.13) un faisceau image $f(\mathcal{A})$ de base Y, à savoir

$$V \to \mathcal{A}(f^{-1}(V)).$$

Supposons alors que $\mathcal{A}$ soit un faisceau d'anneaux de base X; la définition précédente montre que l'on a sur les ensembles $f(\mathcal{A})(V)$ une structure d'anneau compatible avec les opérations de restriction : par suite, $f(\mathcal{A})$ peut être considéré, de façon « naturelle », comme un *faisceau d'anneaux* de base Y. Si de plus on considère un $\mathcal{A}$-module à gauche $\mathcal{L}$, un raisonnement analogue montre que $f(\mathcal{L})$ est un $f(\mathcal{A})$-Module à gauche.

On notera que le foncteur $\mathcal{L} \to f(\mathcal{L})$ est *exact à gauche*; si en effet l'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}''$$

de $\mathcal{A}$-Modules sur X, alors pour tout ouvert U il vient la suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}'(U) \to \mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}''(U)$$

et donc, pour tout ouvert $V \subset Y$, la suite exacte

$$0 \to f(\mathcal{L}')(V) \to f(\mathcal{L})(V) \to f(\mathcal{L}'')(V),$$

d'où notre assertion. Par contre, le foncteur $\mathcal{L} \to f(\mathcal{L})$ n'est pas exact à droite, sauf dans des cas triviaux peu intéressants...

# 3. PROBLÈMES DE PROLONGEMENT ET DE RELÈVEMENT DE SECTIONS

## 3. 1. — Faisceaux flasques.

Un faisceau $\mathcal{F}$ d'ensembles sur un espace X est dit *flasque* si, pour tout ouvert U de X, l'application de restriction

$$\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$$

est *surjective*.

C'est par exemple le cas si $\mathcal{F}$ est le faisceau des germes de section d'un espace découpé *discret* de base X. Comme tout faisceau est le faisceau des germes de section d'un espace étalé dans X, on voit, en munissant celui-ci de la topologie discrète, que *tout faisceau d'ensembles se plonge dans un faisceau flasque*; de manière précise, pour tout faisceau $\mathcal{F}$, le faisceau $\mathcal{C}^0(X;\mathcal{F})$ donné par

$$U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}(x),$$

avec les applications de restriction évidentes, est un faisceau flasque contenant $\mathcal{F}$. Les faisceaux de ce genre joueront un rôle fondamental au § suivant.

***Exemple*** 3.1.1. — Soit X une variété algébrique irréductible sur un corps $k$; on a vu que l'intersection de deux ouverts non vides n'est jamais vide — donc tout ouvert de X est *connexe*; on en déduit que *tout faisceau simple sur* X *est flasque* (« Théorème de Grothendieck »). On peut voir aussi facilement que le faisceau des germes de diviseurs de X est flasque (mais non, bien entendu, le faisceau des anneaux locaux de X).

Le fait pour un faisceau $\mathcal{F}$ d'être flasque est une propriété *locale*. Supposons en effet que $\mathcal{F}|U$ soit flasque pour tout ouvert U assez petit, et soit $s$ une section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert quelconque U. Considérons l'ensemble E des couples $(U', s')$, où $U' \supset U$ et où $s' \in \mathcal{F}(U')$ induit $s$ dans U; ordonnant E par « prolongement » on obtient évidemment un ensemble inductif; soit $(U', s')$ un élément maximal de E, et supposons $U' \neq X$; il existe alors un ouvert V non contenu dans U', tel que $\mathcal{F}|V$ soit flasque — ce qui permet de prolonger à V la restriction de $s'$ à $U' \cap V$, donc de prolonger $s'$ à $U' \cup V$; donc $U' = X$, et $\mathcal{F}$ est flasque « globalement ».

Il est clair réciproquement qu'un faisceau flasque induit sur tout ouvert un faisceau flasque.

***Théorème*** 3.1.1. — *L'image directe d'un faisceau flasque par une application continue est flasque.*

Soient une application continue $f : X \to Y$ et un faisceau flasque $\mathcal{A}$ de base X; posant $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$ on a pour tout ouvert V de Y un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X) & \to & \mathcal{A}(f^{-1}(V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(Y) & \to & \mathcal{B}(V) \end{array} ;$$

par définition de l'image directe, les flèches verticales sont bijectives; la flèche horizontale supérieure est surjective puisque $\mathcal{A}$ est flasque; d'ou le théorème.

***Théorème*** 3.1.2. — *Soit*

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$$

*une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens; si $\mathcal{L}'$ est flasque, alors pour tout ouvert* U *on a une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{L}'(U) \to \mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}''(U) \to 0$$

(i.e. on a une suite exacte de préfaisceaux).

On peut supposer $U = X$, et tout revient à prouver qu'une section $s'' \in \mathcal{L}''(X)$ provient d'une section de $\mathcal{L}$. Or soit E l'ensemble des couples $(U, s)$ où $s \in \mathcal{L}(U)$ représente $s''$ dans U; ordonnant E par prolongement on a encore une fois un ensemble inductif; soit $(U, s)$ un élément maximal de E. Si $x \in X\text{-}U$, il existe un voisinage V de $x$ et une section $t \in \mathcal{L}(V)$ qui représente $s''$ dans V; dans $U \cap V$, $s$ et $t$ ne diffèrent que par une section de $\mathcal{L}'$, laquelle, puisque $\mathcal{L}'$ est flasque, se prolonge à V; on peut donc, en modifiant $t$, supposer $s = t$ dans $U \cap V$ — mais alors $(U, s)$ n'est pas maximal. Donc $U = X$, et le théorème est démontré.

***Corollaire*** — *Si $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ sont flasques, $\mathcal{L}''$ est flasque.*

En effet une section $s''$ de $\mathcal{L}''$ au-dessus de U est représentée par une section de $\mathcal{L}$ au-dessus de U, laquelle se prolonge à X; il en est donc de même de $s''$.

Soit $\Phi$ une famille de supports dans X (nº 2.5). Si $\mathscr{L}$ est un faisceau de groupes abéliens sur X, nous désignerons par $\Gamma_\Phi(\mathscr{L})$ l'ensemble des sections $s \in \mathscr{L}(X)$ à support dans la famille $\Phi$ ; c'est évidemment un groupe abélien, et $\mathscr{L} \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L})$ est un foncteur exact à gauche (nº 2.5).

***Théorème*** 3.1.3. — *Soit*

$$0 \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \cdots$$

*une suite exacte de faisceaux flasques de groupes abéliens. Pour toute famille* $\Phi$ *de supports, la suite correspondante*

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^0) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^1) \to \cdots$$

*de groupes abéliens est exacte.*

Posons en effet

$$\mathscr{Z}^p = \mathrm{Ker}(\mathscr{L}^p \to \mathscr{L}^{p+1}) = \mathrm{Im}(\mathscr{L}^{p-1} \to \mathscr{L}^p);$$

on a évidemment

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{Z}^p) = \mathrm{Ker}(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^p) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^{p+1}))$$

et tout revient à prouver l'exactitude des suites partielles

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{Z}^p) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^p) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{Z}^{p+1}) \to 0.$$

Or on a les suites exactes

$$0 \to \mathscr{Z}^p \to \mathscr{L}^p \to \mathscr{Z}^{p+1} \to 0;$$

si donc $\mathscr{Z}^p$ est flasque il en est de même de $\mathscr{Z}^{p+1}$ ; comme $\mathscr{Z}^0 = 0$ est flasque on voit donc que tous les $\mathscr{Z}^p$ sont flasques. Donc toute section $z^{p+1}$ de $\mathscr{Z}^{p+1}$, de support $S \in \Phi$, se relève en une section $l^p$ de $\mathscr{L}^p$ : reste à montrer qu'on peut supposer le support de $l^p$ dans $\Phi$. Or, dans X-S, $l^p$ induit une section de $\mathscr{Z}^p$, laquelle, puisque $\mathscr{Z}^p$ est flasque, se prolonge à tout X; retranchant de $l^p$ cette section de $\mathscr{Z}^p$ il est clair qu'on parvient au résultat cherché.

## 3. 2. — Espaces paracompacts

Un espace X est dit *paracompact* s'il est *séparé* et si, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)$ de X, il existe un recouvrement ouvert *localement fini* plus fin que $(U_i)$. Un tel espace est normal, la réciproque étant fausse. Tout sous-espace *fermé* d'un espace paracompact est paracompact. Un espace *métrisable* est paracompact (ainsi du reste que tous ses sous-espaces, puisqu'ils sont métrisables), de même qu'un espace localement compact dénombrable à l'infini.

Nous utiliserons constamment sans référence le résultat suivant : *soit* $(U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert localement fini d'un espace normal* X; *alors il existe un recouvrement ouvert* $(V_i)_{i\in I}$ *tel que l'on ait* $\overline{V_i} \subset U_i$ *pour tout* $i \in I$.

Soit X un espace quelconque; nous appellerons *famille paracompactifiante* dans X toute famille $\Phi$ de parties de X satisfaisant aux conditions suivantes :

(PRK 1) : *les* $S \in \Phi$ *sont fermés et paracompacts;*

(PRK 2) : *toute réunion finie d'ensembles de* $\Phi$ *est dans* $\Phi$*;*

(PRK 3) : *toute partie fermée d'un* $S \in \Phi$ *appartient à* $\Phi$*;*

(PRK 4) : *tout* $S \in \Phi$ *possède un voisinage appartenant à* $\Phi$.

Par exemple, si X s'identifie à un sous-espace ouvert d'un espace paracompact $\widehat{X}$, les $S \in X$ qui sont *fermés dans* $\widehat{X}$ forment une famille paracompactifiante dans X. On obtient ainsi toute famille paracompactifiante, pourvu que la réunion des $S \in \Phi$ soit X tout entier.

Si $\Phi$ est une famille de supports dans X, et Y un sous-espace de X, nous désignerons toujours par $\Phi|Y$ l'ensemble des $S \in \Phi$ contenus dans Y; si Y est fermé, c'est aussi l'ensemble des $S \cap Y$, $S \in \Phi$.

Si $\Phi$ est paracompactifiante, et si Y est *localement fermé* dans X, alors $\Phi|Y$ est une famille paracompactifiante dans Y, comme on le vérifie facilement en écrivant $Y = U \cap F$, U ouvert et F fermé.

### 3.3. — Prolongement local d'une section

**Théorème** 3.3.1. — *Soient* $\mathcal{F}$ *un faisceau d'ensembles sur un espace* X, S *un sous-ensemble de* X, *et s une section de* $\mathcal{F}$ *au-dessus de* S.

*Si* S *admet dans* X *un système fondamental de voisinages paracompacts, s se prolonge à un voisinage de* S *dans* X.

On peut évidemment supposer X paracompact; on peut d'autre part recouvrir S par des ouverts $U_i$ et trouver des $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telles que $s_i = s$ dans $S \cap U_i$; en remplaçant X par un voisinage paracompact de S contenu dans $\bigcup U_i$, on peut donc supposer que les $U_i$ forment un recouvrement de X, et même que ce recouvrement est localement fini. Prenons un second recouvrement $V_i$, avec $\overline{V_i} \subset U_i$ pour tout $i$, et soit W l'ensemble des $x \in X$ tels que

$$x \in \overline{V_i} \cap \overline{V_j} \quad \text{implique} \quad s_i(x) = s_j(x).$$

D'après le Théorème 1.3.1 appliqué au faisceau $\mathcal{F}|W$, il existe une section de $\mathcal{F}$ au-dessus de W qui, dans $W \cap \overline{V_i}$, se réduit à $s_i$; elle prolonge évidemment $s$; il reste donc à montrer que W est un voisinage de S.

Or soit $x \in S$; il existe un voisinage ouvert $W(x)$ qui, parmi les $\overline{V_i}$, ne rencontre que $\overline{V_{i_1}}, \ldots, \overline{V_{i_p}}$; en modifiant au besoin $W(x)$ on peut supposer que tous les ensembles précédents contiennent $x$, et que $W(x)$ est contenu dans les ensembles $\overline{U_{i_1}}, \ldots, \overline{U_{i_p}}$. Les sections $s_{i_1}, \ldots, s_{i_p}$ sont définies en $x$, et évidemment égales; comme elles sont en nombre fini on peut les supposer égales dans tout $W(x)$; il est clair qu'alors $W(x) \subset W$, ce qui termine la démonstration.

**Corollaire** 1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\mathcal{F}$ *un faisceau de base* X *et* S *un sous-espace de* X *admettant un système fondamental de voisinages paracompacts. On a alors*

$$\mathcal{F}(S) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supset S}} \text{ind.}\, \mathcal{F}(U)$$

*suivant l'ordonné filtrant décroissant des voisinages* U *de* S *dans* X.

En effet toute section de $\mathcal{F}$ au-dessus de S se prolonge à un voisinage U de S; et si des sections au-dessus de voisinages U, V de S coïncident sur S, elles coïncident dans un voisinage $W \subset U \cap V$ de S.

Le Corollaire précédent s'applique notamment si X est paracompact et S fermé, ou bien si X est métrisable et S quelconque.

**Corollaire** 2. — *Soit* A *un sous-espace d'un espace métrisable* X. *Tout faisceau flasque de base* X *induit dans* A *un faisceau flasque.*

En fait, si $\mathcal{F}$ est un faisceau flasque de base X, il est clair qu'une section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un sous-ensemble *quelconque* de X se prolonge à X tout entier; d'où évidemment le Corollaire.

### 3. 4. — Faisceaux mous dans les espaces paracompacts

Soient X un espace paracompact, $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles sur X; si $\mathcal{F}$ est flasque, il résulte du théorème 3.3.1 que *toute section de* $\mathcal{F}$ *au-dessus d'un fermé se prolonge à* X *tout entier.*

Nous dirons plus généralement qu'un faisceau de base X est *mou* s'il possède cette propriété. Celle-ci est en fait de nature *locale*; plus précisément on a le résultat suivant :

**Théorème** 3.4.1. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau sur un espace* X *paracompact. Supposons que tout point de* X *possède un voisinage* U *vérifiant la condition suivante : toute section de* $\mathcal{F}$ *au-dessus d'un sous-ensemble fermé de* X *contenu dans* U, *se prolonge à* U. *Alors* $\mathcal{F}$ *est mou.*

Soit $s$ une section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un fermé S; il est possible de trouver un recouvrement localement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X par des ouverts possèdant la propriété indiquée dans l'énoncé, puis un recouvrement $(V_i)$ tel que $\overline{V}_i \subset U_i$ pour tout $i$. Nous poserons $F_i = \overline{V}_i$, et plus généralement

$$F_J = \bigcup_{i \in J} F_i$$

pour toute partie J de I.

Cela dit, considérons l'ensemble E des couples $(t, J)$, où $J \subset I$ et où $t$ est une section de $\mathscr{F}$ au-dessus de $F_J$, telle que $t = s$ sur $S \cap F_J$; cet ensemble n'est pas vide (prendre un $U_i$ qui rencontre S et prolonger à $F_i$ la section $s$ définie sur $S \cap F_i$). On peut l'ordonner en écrivant $(t', J') < (t'', J'')$ si l'on a $J' \subset J''$ et $t' = t''$ sur $F_{J'}$; l'ensemble ordonné E est alors *inductif*, comme on le voit en faisant usage du théorème 1.3.1. Soit donc $(t, J)$ un élément maximal de E : tout revient à prouver que $J = I$. Or supposons qu'il existe un indice $i$ non dans J, et posons $J' = J \cup \{i\}$; pour aboutir à une contradiction, il suffit de construire sur $F_i$ une section $t'$ qui, sur $F_J \cap F_i$, se réduise à $t$, et qui, sur $F_i \cap S$, se réduise à $s$; mais comme $t = s$ sur $F_J \cap S$ le problème est de prolonger à $F_i$ une section donnée sur une partie fermée de $F_i$, ce qui est possible d'après le choix de $U_i$ — d'où le théorème.

**Théorème** 3.4.2. — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau mou sur un espace paracompact* X; *$\mathscr{F}$ induit un faisceau mou sur tout sous-espace fermé de* X, *et même sur tout sous-espace localement fermé de* X *si* X *est métrisable.*

La première assertion est triviale. Pour établir la seconde, considérons un sous-espace A localement fermé de X, et un point $x$ de A; $x$ possède dans X un voisinage *fermé* $V(x)$ tel que $A \cap V(x)$ soit fermé; donc tout fermé de A, contenu dans $V(x)$, est fermé dans X, d'où le résultat par définition des faisceaux mous et en appliquant le théorème 3.4.1 (ce qui est permis puisque A est paracompact).

**Corollaire.** — *Soit $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de faisceaux de groupes abéliens sur un espace* X *paracompact. Si tous les $\mathscr{F}_i$ sont mous, il en est de même de leur somme directe.*

Soit en effet $x \in X$; il existe un voisinage U de $x$ tel que la famille des faisceaux induits $\mathscr{F}_i|U$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls; on peut évidemment supposer U fermé, donc paracompact. Comme le corollaire est trivial pour une famille finie, on voit que la somme directe $\mathscr{F}$ des $\mathscr{F}_i$ induit dans U un faisceau mou; donc $\mathscr{F}$ est mou.

## 3. 5. — Faisceaux Φ-mous

Soient X un espace quelconque, $\Phi$ une famille paracompactifiante dans X, et $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur X. On dit que F est *Φ-mou* si, pour tout $S \in \Phi$, le faisceau induit $\mathscr{F}|S$ est mou, i.e. si, pour $S'$, $S'' \in \Phi$ avec $S' \supset S''$, l'application de restriction

$$\mathscr{F}(S') \to \mathscr{F}(S'')$$

est surjective. Il est clair que *tout faisceau flasque est Φ-mou* en vertu du Théorème 3.3.1. D'autre part, *une somme directe localement finie de faisceaux $\mathscr{F}_i$*

*de groupes abéliens est un faisceau Φ-mou si tous les $\mathcal{F}_\iota$ sont Φ-mous*; si en effet $\mathcal{F}$ est la somme directe des $\mathcal{F}_\iota$, on a pour tout $S \in \Phi$ la relation

$$\mathcal{F}|S = \oplus (\mathcal{F}_\iota|S);$$

notre assertion résulte donc du Corollaire du Théorème 3.4.2.

**Théorème** 3.5.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\mathcal{F}$ *un faisceau de groupes abéliens sur* X, *et* Φ *une famille paracompactifiante dans* X. *Pour que* $\mathcal{F}$ *soit* Φ*-mou il faut et il suffit que, pour tout* $S \in \Phi$, *l'homomorphisme* $\Gamma_\Phi(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}(S)$ *soit surjectif.*

Soit en effet une section $s$ au-dessus d'un $S \in \Phi$; prenons un *voisinage* $S' \in \Phi$ de S; on peut définir une *section* de $\mathcal{F}$ au-dessus du fermé $S \cup F$ (où F est la *frontière* de S′) en lui imposant d'être égale à $s$ sur S et à o sur F; cette section se prolonge à S′ si $\mathcal{F}$ est Φ*-mou,* mais comme elle est nulle sur F on peut la prolonger à X en lui attribuant la valeur o dans X-S′, d'où le Théorème.

**Théorème** 3.5.2. — *Soient* X *un espace topologique,* Φ *une famille paracompactifiante dans* X, *et*

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$$

*une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens; si* $\mathcal{L}'$ *est* Φ*-mou, la suite*

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}') \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}'') \to 0$$

*est exacte.*

Supposons tout d'abord X paracompact, Φ étant la famille de tous les fermés de X. Soit $s''$ une section de $\mathcal{L}''$ : il faut la « relever » en une section de $\mathcal{L}$. Comme c'est possible localement, et comme X est paracompact, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et des sections $s_\iota \in \mathcal{L}(U_\iota)$ qui, dans les $U_\iota$, représentent $s''$. Prenons un recouvrement $(V_\iota)$ tel que

$$F_\iota = \overline{V_\iota} \subset U_\iota$$

pour tout $\iota$.

Considérons alors l'ensemble E des couples $(s, J)$, où $J \subset I$ et où $s$ est une section de $\mathcal{L}$ au-dessus de $F_J = \bigcup_{\iota \in J} F_\iota$ qui, dans cet ensemble, représente $s''$. Évidemment E est non vide, et en l'ordonnant par prolongement il est inductif; soit alors $(s, J)$ un élément maximal de E : tout revient à prouver que $J = I$. Or si $\iota \in I\text{-}J$, prenons un relèvement $s_\iota$ de $s''$ à l'ouvert $U_\iota$; dans $F_J \cap F_\iota$, $s$ et $s_\iota$ ne diffèrent que par une section de $\mathcal{L}'$ qui, $\mathcal{L}'$ étant mou, se prolonge à $U_\iota$; donc on peut prolonger $s$ à $F_J \cup F_\iota$, d'où une contradiction.

Dans le cas général, prenons une section $s'' \in \Gamma_\Phi(\mathcal{L}'')$, et soit $S'' \in \Phi$ son support; comme $\mathcal{L}' \mid S''$ est mou, le raisonnement précédent montre qu'on peut relever $s''$ en une section $s$ de $\mathcal{L}$ au-dessus de $S''$; soit $S \in \Phi$ un voisinage de $S''$; on peut supposer que $s$ se prolonge à S : tout revient à faire voir qu'on peut supposer $s$ nulle sur la frontière F de S. Mais comme $s''$ est nulle sur F, la restriction de $s$ à F est une section de $\mathscr{L}'$ qui, $\mathscr{L}'$ étant $\Phi$-mou, se prolonge en une section $s'$ de $\mathscr{L}'$ au-dessus de S; remplaçant $s$ par $s$-$s'$ on obtient le résultat cherché.

**Corollaire.** — *Soit* X *un espace paracompact* (*resp. métrisable*) *et soit*

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}'' \to 0$$

*une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur* X; *si* $\mathscr{L}'$ *est mou, la suite*

$$0 \to \mathscr{L}'(A) \to \mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}''(A) \to 0$$

*est exacte pour tout sous-espace fermé* (*resp. localement fermé*) *de* X.

En effet le faisceau $\mathscr{L}'|A$ est mou.

**Théorème** 3.5.3. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille paracompactifiante dans* X, *et*

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}'' \to 0$$

*une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens de base* X. *Si* $\mathscr{L}'$ *et* $\mathscr{L}$ *sont* $\Phi$*-mous, il en est de même de* $\mathscr{L}''$.

**Théorème** 3.5.4. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille paracompactifiante dans* X, *et*

$$0 \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \dots$$

*une suite exacte de faisceaux* $\Phi$*-mous de groupes abéliens de base* X. *Alors on a une suite exacte*

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^0) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^1) \to \cdots.$$

Ces deux théorèmes se démontrent comme les résultats analogues relatifs aux faisceaux flasques.

**Théorème** 3.5.5. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille paracompactifiante dans* X, *et* A *un sous-espace localement fermé de* X.

(*a*) *tout faisceau* $\mathscr{L}$ *de base* X *et* $\Phi$*-mou induit dans* A *un faisceau* $(\Phi|A)$*-mou;*

(*b*) *si* $\mathscr{L}$ *est un faisceau* $\Phi$*-mou de groupes abéliens de base* X, *le faisceau* $\mathscr{L}_A$ *est* $\Phi$*-mou;*

(*c*) *si* $\mathscr{F}$ *est un faisceau* $(\Phi|A)$*-mou de groupes abéliens de base* A, *le faisceau* $\mathscr{F}^X$ *de base* X *est* $\Phi$*-mou.*

L'assertion (*a*) est triviale.

Pour démontrer (*b*), prenons un $S \in \Phi$; il faut prouver que $\mathscr{L}_A|S$ est mou; comme $\mathscr{L}_A|S = (\mathscr{L}|S)_{A \cap S}$ on peut faire abstraction de $\Phi$ en supposant X paracompact, et tout revient à examiner le cas où A est ouvert et celui où A est fermé.

Si A est ouvert, soit $s$ une section de $\mathscr{L}_A$ au-dessus d'un fermé $S \subset X$; c'est une section de $\mathscr{L}$ au-dessus de S, nulle sur $S \cap (X - A)$. Comme $\mathscr{L}$ est mou, on peut la prolonger en une section $t$ définie dans X tout entier; tout revient à prouver qu'on peut supposer $t$ nulle sur X-A. Or comme $s$ est nulle sur le fermé $S \cap (X\text{-}A)$ il existe une section $s'$ de $\mathscr{L}$ au-dessus du fermé $S \cup (X\text{-}A)$ égale à $s$ sur S et à 0 en dehors; prenant pour $t$ un prolongement de $s'$ on obtient le résultat cherché. Si A est fermé, il suffit (Théorème 3.5.3) de remarquer que $\mathscr{L}_A = \mathscr{L}/\mathscr{L}_{X-A}$.

Pour démontrer ($c$), on se ramène au cas où $\Phi$ est la famille de tous les fermés, X étant paracompact; $\Phi|A$ est alors formée des $S \subset A$ qui sont fermés dans X. Soit $s$ une section de $\mathscr{F}^X$ au-dessus d'un fermé B; les $x \in B$ où $s(x) \neq 0$ forment un fermé dans X, contenu dans A, i.e. un ensemble $S \in \Phi|A$; donc (Théorème 3.5.2) la restriction de $s$ à $A \cap B$ se prolonge en une section de $\mathscr{F}$ au-dessus de A, de support fermé dans X — d'où évidemment un prolongement de $s$ à X tout entier.

### 3. 6. — Partitions d'une section d'un faisceau mou

Soient $\mathscr{L}$ un faisceau de groupes abéliens sur un espace X, et $(s_i)_{i \in I}$ une famille de sections de $\mathscr{L}$ au-dessus de X; on dit que la famille en question est *localement finie* si les supports des $s_i$ forment dans X une famille localement finie d'ensembles fermés, autrement dit si, pour tout ouvert U assez petit, les $s_i$ non nulles dans U sont en nombre fini. On peut alors définir une *section*

$$s = \sum_{i \in I} s_i$$

de $\mathscr{L}$ en posant

$$s(x) = \sum_{i \in I} s_i(x)$$

pour tout $x \in X$.

Soient maintenant une section $s$ de $\mathscr{L}$ au-dessus de X, et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *partition de s subordonnée à* $(U_i)$ toute décomposition $s = \Sigma\, s_i$ de $s$ en une somme *localement finie* de sections, avec la condition que le support de chaque $s_i$ soit contenu dans l'ouvert $U_i$ correspondant. Il est clair que s'il existe une partition de $s$ subordonnée à un recouvrement plus fin que $(U_i)$, il en existe aussi une subordonnée à $(U_i)$, obtenue en groupant convenablement les termes de la première partition.

**Théorème** 3.6.1. — *Soit $\mathscr{L}$ un faisceau mou de groupes abéliens sur un espace paracompact* X. *Pour toute section s de $\mathscr{L}$ au-dessus de* X, *et pour tout recouvrement ouvert* $(U_i)_{i \in I}$ *de* X, *il existe une partition de s subordonnée à* $(U_i)$.

On peut supposer le recouvrement $(U_i)$ localement fini, et prendre un recouvrement fermé $(F_i)$, avec $F_i \subset U_i$ pour tout $i$.

Considérons l'ensemble E des familles $(s_i)_{i \in J}$, où $J \subset I$, où $s_i$ est une section de $\mathcal{L}$ au-dessus de X, de support contenu dans $U_i$, et où l'on a

$$\sum_{i \in J} s_i = s \qquad \text{sur} \qquad F_J = \bigcup_{i \in J} F_i.$$

Cet ensemble n'est pas vide et, en l'ordonnant par prolongement, il est inductif. Soit donc $(s_i)_{i \in J}$ un élément maximal de E : tout revient à prouver que $J = I$.

Or s'il existe un $i \in I$-J, il suffit, pour aboutir à une contradiction, de construire une section $s_i \in \mathcal{L}(X)$ vérifiant les conditions suivantes : $s_i = 0$ dans X-$U_i$, et

$$s_i = s - \sum_{j \in J} s_j \qquad \text{sur} \qquad F_J \cup F_i;$$

en vertu de cette condition on connaît déjà $s_i$ sur le fermé

$$(F_J \cup F_i) \cup (X - U_i),$$

de sorte que la construction de $s_i$ est possible si $\mathcal{L}$ est mou; d'où le Théorème.

## 3. 7. — Faisceaux fins

Démontrons d'abord le résultat suivant :

**Théorème** 3.7.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\mathcal{A}$ *un faisceau d'anneaux avec élément unité sur* X, *et* $\Phi$ *une famille paracompactifiante dans* X. *Si* $\mathcal{A}$ *est* $\Phi$*-mou, tout* $\mathcal{A}$*-Module est* $\Phi$*-mou.*

On peut faire abstraction de $\Phi$ et supposer X paracompact. Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche et $s$ une section de $\mathcal{L}$ au-dessus d'un fermé A; on sait déjà que $s$ se prolonge à un voisinage B de A, qu'on peut supposer fermé dans X; tout revient à montrer qu'on peut astreindre le prolongement de $s$ à B à être nul sur la frontière F de B dans X.

Or comme $\mathcal{A}$ est mou, il existe une section $u$ de $\mathcal{A}$ au-dessus de X qui est égale à 1 sur A et à 0 sur F; remplaçant le prolongement $s$ considéré par la section $x \to u(x)s(x)$ on parvient au résultat cherché.

On notera que le raisonnement précédent, compte tenu de ce que le fait d'être mou est une propriété locale, conduit au résultat que voici :

**Théorème** 3.7.2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *un faisceau d'anneaux avec unité sur un espace paracompact* X. *Pour que* $\mathcal{A}$ *soit mou, il faut et il suffit que tout point de* X *possède un voisinage* U *tel que, étant donnés des fermés disjoints* S, $T \subset U$, *il existe une section de* $\mathcal{A}$ *au-dessus de* U, *égale à* 1 *sur* S *et à* 0 *sur* T.

Considérons maintenant un faisceau $\mathscr{L}$ de groupes abéliens sur un espace paracompact X (resp. sur un espace X muni d'une famille paracompactifiante $\Phi$); on dit que $\mathscr{L}$ est *fin* (resp. $\Phi$-fin) si le faisceau d'anneaux $\mathscr{H}om_{\mathbf{Z}}(\mathscr{L}, \mathscr{L})$ est *mou* (resp. si $\mathscr{L}|S$ est fin pour tout $S \in \Phi$). Pour qu'un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{L}$, sur un espace paracompact X, soit fin, il est donc nécessaire et suffisant qu'étant donnés deux fermés disjoints A et B de X, il existe un homomorphisme $\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ induisant l'identité au voisinage de A et 0 au voisinage de B; et il suffit d'ailleurs de vérifier cette propriété *localement* pour s'assurer que $\mathscr{L}$ est fin. Il est d'autre part clair qu'*un faisceau $\Phi$-fin est a fortiori $\Phi$-mou* (Théorème 3.7.1). L'importance des faisceaux $\Phi$-fins provient de cette dernière propriété et du résultat suivant :

**Théorème** 3.7.3. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille paracompactifiante dans* X, *et* $\mathscr{L}$ *un faisceau $\Phi$-fin de groupes abéliens. Pour tout faisceau $\mathscr{M}$ de groupes abéliens de base* X, *le faisceau* $\mathscr{L} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathscr{M}$ *est $\Phi$-fin.*

On peut évidemment se ramener au cas où $\mathscr{L}$ est un faisceau fin sur un espace paracompact X; comme $\mathscr{L}$ est un Module à gauche sur un faisceau d'anneaux qui est mou [à savoir $\mathscr{H}om_{\mathbf{Z}}(\mathscr{L}, \mathscr{L})$], il en est de même de $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$, d'où évidemment le résultat.

En fait nous utiliserons toujours le Théorème précédent sous la forme affaiblie que voici : *si $\mathscr{L}$ est fin, alors $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ est mou quel que soit $\mathscr{M}$.*

***Exemple*** 3.7.1. — Soit X un espace topologique et $\Phi$ une famille paracompactifiante; alors le faisceau $\mathscr{F}^0(X; \mathbf{Z})$ des cochaînes d'Alexander-Spanier de degré 0 de X à valeurs entières, i.e. le faisceau des germes d'applications de X dans $\mathbf{Z}$, est $\Phi$-fin; c'est en effet un faisceau d'anneaux, il suffit donc de prouver qu'il est $\Phi$-mou; or soient un $S \in \Phi$ et des fermés disjoints $A, B \subset S$; prenons un voisinage $S' \in \Phi$ de S; comme S′ est normal, il existe des voisinages U et V de A et B dans S′ qui ne se rencontrent pas, et donc une application $s$ de S′ dans $\mathbf{Z}$ égale à 1 sur U et à 0 sur V; restreignant cette fonction à l'intérieur W de S′, on obtient une section de $\mathscr{F}^0(X; \mathbf{Z})$ dont la restriction à S (restriction qu'on ne confondra pas avec celle de la fonction $s$...) est égale à 1 sur A et à 0 sur B, d'où le résultat.

Il suit de là que tout $\mathscr{F}^0(X; \mathbf{Z})$-Module est $\Phi$-mou, et même $\Phi$-fin; c'est notamment le cas des faisceaux d'Alexander-Spanier $\mathscr{F}^n(X; G)$ quel que soit $n \geqslant 0$ et quel que soit le groupe abélien G.

Une démonstration analogue, où l'on emploiera cette fois le théorème d'Urysohn, prouve que le faisceau des germes de fonctions numériques *continues* est $\Phi$-fin, ainsi par suite que tout Module sur ce faisceau d'anneaux, par exemple le faisceau des germes de sections d'un espace fibré à fibre vectorielle.

Si X est une *variété différentiable paracompacte*, montrons que le faisceau $\Omega^0$ des germes de fonctions différentiables sur X est fin. En vertu du Théorème 3.7.2 on peut, en remplaçant X par un ouvert relativement compact isomorphe à $\mathbf{R}^n$, se borner pour le voir à établir le résultat suivant : étant donnés dans $\mathbf{R}^n$ des *compacts* disjoints A et B, il existe une fonction différentiable $f$ égale à 1 au voisinage de A et à 0 au voisinage de B. Pour cela on prend (théorème d'Urysohn) une fonction continue $g$ possédant ces propriétés, puis on « régularise » $g$, i.e. on la remplace par

$$f(x) = \int g(x-y)h(y)dy,$$

où $h$ est une fonction différentiable positive, nulle en dehors d'un voisinage assez petit de l'origine, et d'intégrale égale à 1.

Il suit de là que les faisceaux $\Omega^p$ sont fins, ainsi que tous les $\Omega^0$-Modules, par exemple les faisceaux de germes de *courants* à valeurs dans une variété fibrée à fibre vectorielle.

### 3. 8. — Un lemme sur les recouvrements d'un espace normal

Avant de poursuivre l'étude des faisceaux dans les espaces paracompacts, nous démontrerons le lemme suivant :

**Lemme** 3.8.1. — *Soit* $(U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert localement fini d'un espace normal* X. *Pour tout couple* $i, j$ *et tout* $x \in U_{ij}$ *supposons donné un voisinage* $V_{ij}(x) \subset U_{ij}$ *de* $x$. *Alors on peut trouver un voisinage* $V(x)$ *de tout point* $x$ *de* X *de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(*a*) : *la relation* $x \in U_{ij}$ *implique* $V(x) \subset V_{ij}(x)$;

(*b*) : *si* $V(x)$ *et* $V(y)$ *se rencontrent, il existe un* $i$ *tel que* $U_i$ *contienne* $V(x)$ *et* $V(y)$.

Puisque le recouvrement $U_i$ est localement fini, il est trivial de réaliser la condition (*a*). Pour réaliser (*b*), formons un recouvrement ouvert $(U'_i)$ avec $\overline{U'_i} \subset U_i$ pour tout $i$. La condition (*a*) étant déjà réalisée, on peut supposer en outre que $x \in U'_i$ implique $V(x) \subset U'_i$. D'autre part, les indices $i$ tels que $V(x)$ rencontre $\overline{U'_i}$ sont en nombre fini, de sorte qu'on peut en outre imposer la condition que $V(x)$ ne rencontre $\overline{U'_i}$ que si $x \in \overline{U'_i}$.

Cela dit, supposons que $V(x)$ et $V(y)$ se rencontrent; il y a un $i$ tel que $x \in U'_i$, en sorte que $V(x) \subset U'_i$; donc $V(y)$ rencontre $U'_i$, ce qui prouve que $y \in \overline{U'_i}$; mais alors $y \in U_i$, en sorte que $U_i$ contient $V(x)$ et $V(y)$, d'où le lemme.

### 3. 9. — Application aux préfaisceaux

Soient $\mathscr{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur un espace X, et $\bar{\mathscr{F}}$ le faisceau qu'il engendre; nous avons vu (n° 1.2) que l'application

$$\mathscr{F}(X) \to \bar{\mathscr{F}}(X)$$

est injective si $\mathcal{F}$ vérifie l'axiome (F1) des faisceaux. Nous allons voir que, si X est paracompact, cette application est surjective si $\mathcal{F}$ vérifie l'axiome (F2); plus généralement :

***Théorème*** 3.9.1. — *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur un espace paracompact* X. *Supposons réalisée la condition suivante : étant donnés un recouvrement ouvert* $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *localement fini de* X, *et des* $s_i \in \mathcal{F}(\mathrm{U}_i)$, *tels que les restrictions de* $s_i$ *et* $s_j$ *à* $\mathrm{U}_{ij}$ *soient égales quels que soient i et j, il existe un* $s \in \mathcal{F}(\mathrm{X})$ *dont la restriction à* $\mathrm{U}_i$ *est* $s_i$ *quel que soit i. Alors l'application canonique* $\mathcal{F}(\mathrm{X}) \to \tilde{\mathcal{F}}(\mathrm{X})$ *est surjective.*

Soit en effet une section $s \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathrm{X})$; il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_i)$ de X, qu'on peut supposer être localement fini, et des $s_i \in \mathcal{F}(\mathrm{U}_i)$ qui représentent $s$ dans les $\mathrm{U}_i$. Soit $x \in \mathrm{U}_{ij}$; puisque $s_i$ et $s_j$ définissent le même germe de section en $x$, il existe un voisinage $\mathrm{V}_{ij}(x) \subset \mathrm{U}_{ij}$ tel que les restrictions de $s_i$ et $s_j$ à $\mathrm{V}_{ij}(x)$ soient identiques.

Construisons alors les voisinages $\mathrm{V}(x)$ dont l'existence est assurée par le lemme 3.8.1. Pour tout $i$ tel que $x \in \mathrm{U}_i$, on a $\mathrm{V}(x) \subset \mathrm{U}_i$, ce qui permet de considérer la restriction de $s_i$ à $\mathrm{V}(x)$; celle-ci *ne dépend pas de l'indice i* en vertu de la condition ($a$) du Lemme; notons-la $s_x$. Si $\mathrm{V}(x) \cap \mathrm{V}(y)$ n'est pas vide, il existe un $\mathrm{U}_i$ qui contient $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{V}(y)$; $s_x$ et $s_y$ sont donc les restrictions de $s_i$, donc coïncident dans $\mathrm{V}(x) \cap \mathrm{V}(y)$.

Remplaçant le recouvrement $(\mathrm{V}(x))_{x\in\mathrm{X}}$ par un recouvrement localement fini plus fin, on voit qu'on est ramené au cas où les restrictions de $s_i$ et $s_j$ à $\mathrm{U}_{ij}$ sont toujours égales; mais alors, d'après l'hypothèse, les $s_i$ sont les restrictions aux $\mathrm{U}_i$ d'un élément de $\mathcal{F}(\mathrm{X})$; celui-ci représente la section $s$ donnée, d'où le Théorème.

On voit que, dans les hypothèses du Théorème 3.9.1, on peut construire $\tilde{\mathcal{F}}(\mathrm{X})$ comme suit : disons que des éléments $s$, $t$ de $\mathcal{F}(\mathrm{X})$ sont *localement égaux* si leurs restrictions à tout ouvert assez petit sont égales; on obtient ainsi dans $\mathcal{F}(\mathrm{X})$ une relation d'équivalence, et $\tilde{\mathcal{F}}(\mathrm{X})$ n'est pas autre chose que l'ensemble quotient correspondant. Si en particulier $\mathcal{F}$ est un préfaisceau de groupes abéliens, $\tilde{\mathcal{F}}(\mathrm{X})$ est le quotient de $\mathcal{F}(\mathrm{X})$ par le sous-groupe formé des éléments *localement nuls* de $\mathcal{F}(\mathrm{X})$.

***Exemple*** 3.9.1 (Cochaînes singulières). — Soit J un espace topologique « type » (par exemple, l'un des « simplexes types » ou des « cubes types » de la théorie de l'homologie singulière). Si X est un espace topologique on appellera J-*simplexe singulier* de X toute application continue $s : \mathrm{J} \to \mathrm{X}$; soit $\mathrm{S}_{\mathrm{J}}(\mathrm{X})$ l'ensemble de ces applications. Si A est un ensemble quelconque (en pratique, un groupe abélien) on désignera par

$$\mathrm{CS}^{\mathrm{J}}(\mathrm{X}; \mathrm{A})$$

l'ensemble des applications $S_J(X) \to A$ (« J - cochaînes singulières de X à valeurs dans A »).

Si l'on a des ouverts U et V de X, avec $U \supset V$, on a une injection $S_J(V) \to S_J(U)$ et par suite une opération de restriction

$$CS^J(U;\ A) \to CS^J(V;\ A),$$

d'où évidemment un *préfaisceau* d'ensembles

$$U \to CS^J(U;\ A)$$

sur X. Le *faisceau* qu'il engendre se note $\mathscr{S}^J(X;\ A)$. Les sections de ce faisceau au-dessus de X s'appellent les J - *cochaînes singulières localisées de* X *à valeurs dans* A.

Notons $S^J(X;\ A)$ leur ensemble; on a donc une application canonique

$$CS^J(X;\ A) \to S^J(X;\ A),$$

et des éléments $\alpha$, $\beta \in CS^J(X;\ A)$ définissent la même cochaîne si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)$ tel que l'on ait $\alpha(s) = \beta(s)$ pour tout J-simplexe singulier $s$ « petit d'ordre $(U_i)$ », i.e. tel que $s(J) \subset U_i$ pour un $i$.

*Le préfaisceau* $U \to CS^J(U;\ A)$ *vérifie toujours l'axiome* (F2) *des faisceaux*. Soit en effet une famille d'ouverts $U_i$, de réunion U, et donnons-nous des $\alpha_i \in CS^J(U_i;\ A)$ de telle sorte que les restrictions de $\alpha_i$ et $\alpha_j$ à $U_{ij}$ soient égales : cela veut dire que si $s$ est un J-simplexe singulier de $U_{ij}$ on a $\alpha_i(s) = \alpha_j(s)$. Soit alors $s$ un J-simplexe singulier de U; si $s$ est contenu dans un $U_i$, l'élément $\alpha_i(s)$ de A est indépendant de $i$ — on peut donc le noter $\alpha(s)$; dans les autres cas, choisissons $\alpha(s)$ arbitrairement; on définit ainsi un $\alpha \in CS^J(U;\ A)$ qui, évidemment, induit $\alpha_i$ dans $U_i$.

On voit donc que *l'application*

$$CS^J(X;A) \to S^J(X;A)$$

*est surjective si* X *est paracompact*. On notera que cette application n'est jamais injective : on a vu ci-dessus, en effet, que des éléments $\alpha$, $\beta$ de $CS^J(X;\ A)$ définissent la même section du faisceau $\mathscr{S}^J(X;\ A)$ si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X tel que l'on ait $\alpha(s) = \beta(s)$ pour tout simplexe singulier $s$ petit d'ordre $\mathfrak{U}$.

Le résultat précédent permet de montrer que *le faisceau* $\mathscr{S}^J(X;\ A)$ *est flasque si l'espace* X *est métrisable*, ou, plus généralement, si tout ouvert U de X est paracompact. En effet il est clair que $\mathscr{S}^J(X;\ A)$ induit dans U le faisceau $\mathscr{S}^J(U;\ A)$, et l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CS^J(X;\ A) & \to & CS^J(U;A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^J(X;\ A) & \to & S^J(U;A) \end{array}$$

comme U et X sont paracompacts, les deux flèches verticales sont surjectives;

la première flèche horizontale l'est aussi trivialement; donc l'application de restriction $S^J(X; A) \to S^J(U; A)$ est surjective, ce qui prouve notre assertion. Montrons maintenant que, *pour tout espace paracompact* X, *le faisceau* $\mathscr{S}^J(X; A)$ *est mou* [1]. Définissons d'abord, pour tout sous-espace Y de X, un homomorphisme canonique

$$\mathscr{S}^J(X; A)|Y \to \mathscr{S}^J(Y; A); \tag{1}$$

il suffit pour cela d'attacher, de façon naturelle, à toute section $\alpha$ de $\mathscr{S}^J(X; A)$ au-dessus d'une partie Y de X, une section de $\mathscr{S}^J(Y; A)$ au-dessus de Y; pour cela, il suffit de recouvrir Y par des ouverts $U_i$ de X et de construire des J-cochaînes singulières $\alpha_i \in CS^J(U_i; A)$ qui représentent $\alpha$ dans les $U_i$ : chaque $\alpha_i$ induit une cochaîne singulière $\beta_i \in CS^J(U_i \cap Y; A)$, et la famille des $\beta_i$ définit évidemment une section $\beta$ de $\mathscr{S}^J(Y; A)$ au-dessus de Y, laquelle, comme on le vérifie trivialement, ne dépend que de $\alpha$.

Bien entendu l'homomorphisme (1) n'est pas bijectif en général; mais si l'on désigne par U l'intérieur de Y, l'homomorphisme

$$\mathscr{S}^J(X; A)\,|U \to \mathscr{S}^J(Y; A)|U$$

qui se déduit de (1) est bijectif, et du reste se réduit, modulo des identifications évidentes, à l'homomorphisme identique

$$\mathscr{S}^J(U; A) \to \mathscr{S}^J(U; A).$$

Nous pouvons maintenant établir que $\mathscr{S}^J(X; A)$ est mou si X est paracompact. Soit $\alpha$ une section de ce faisceau au-dessus d'un fermé F de X; on peut (Théorème 3.3.1) la supposer définie sur un voisinage fermé Y de F; soit $\beta$ la section de $\mathscr{S}^J(Y; A)$ au-dessus de Y qui se déduit de $\alpha$ par l'homomorphisme (1); comme Y est paracompact on peut représenter $\beta$ par un élément de $CS^J(Y; A)$, lequel sera, pour des raisons triviales, induit par un élément $\gamma$ de $CS^J(X; A)$. Il est alors visible que la section de $\mathscr{S}^J(X; A)$ au-dessus de X définie par $\gamma$ induit $\alpha$ dans l'intérieur U de Y, et *a fortiori* sur F; d'où le résultat annoncé.

Notons que les résultats précédents ne s'appliquent pas seulement aux cochaînes singulières usuelles; en prenant pour J l'un quelconque des ensembles $\Delta_n$ du Chapitre 1, n° 3.1, on obtient des résultats applicables aux *cochaînes d'Alexander-Spanier* (Exemple 2.4.2).

[1] Lorsque l'ensemble A est un groupe abélien, on vérifie trivialement que $\mathscr{S}^J(X; A)$ est un Module sur le faisceau d'anneaux $\mathscr{C}^0(X; \mathbf{Z})$ [on choisit une fois pour toutes un point $o \in J$, et pour tout ouvert U on regarde $CS^J(U; A)$ comme un $C^0(U; \mathbf{Z})$-module en définissant le produit d'une cochaîne singulière $\alpha \in CS^J(U; A)$ et d'une fonction $n \in C^0(U; \mathbf{Z})$ comme étant la cochaîne singulière $s \to n(s(o)) \cdot \alpha(s)$.]
Dans ce cas on voit donc que $\mathscr{S}^J(X;A)$ est même un faisceau fin.

### 3. 10. — Sections d'une limite inductive

Nous allons démontrer le résultat suivant, qu'il serait intéressant d'étendre, si possible, à des cas plus généraux :

**Théorème** 3.10.1. — *Soit* $\mathcal{F} = \varinjlim_{\lambda} \mathcal{F}_\lambda$ *une limite inductive de faisceaux d'ensembles sur un espace compact* X. *Alors l'application canonique*

$$\lim_{\lambda}\text{ind. } \mathcal{F}_\lambda(X) \to \mathcal{F}(X)$$

*est bijective.*

Pour montrer que cette application est *injective*, supposons que

$$s', s'' \in \text{lim. ind. } \mathcal{F}_\lambda(X)$$

définissent la même section de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est engendré par le préfaisceau

$$\mathcal{F}_0 : U \to \text{lim. ind. } \mathcal{F}_\lambda(U),$$

il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)$ de X tel que les restrictions de $s'$ et $s''$ à $U_i$ soient égales. Or, pour un indice convenablement choisi $\lambda$, il existe $s'_\lambda, s''_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda(X)$ qui représentent $s'$ et $s''$, et il y a des indices $\lambda_i \leqslant \lambda$ tels que les sections de $\mathcal{F}'_{\lambda_i}$ déduites de $s'_\lambda$ et $s''_\lambda$ par $\mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}_{\lambda_i}$ coïncident dans $U_i$. Remplaçant $\lambda$ par un indice inférieur à tous les $\lambda_i$ on peut donc supposer que $s'_\lambda$ et $s''_\lambda$ coïncident dans chaque $U_i$, donc dans X, ce qui prouve que $s' = s''$.

Pour montrer que l'application considérée est *surjective* on va appliquer le Théorème 3.9.1 au préfaisceau $\mathcal{F}_0$. Soit donc un recouvrement ouvert fini $(U_i)$ de X, et des $s_i \in \mathcal{F}_0(U_i)$ tels que les restrictions de $s_i$ et $s_j$ à $U_{ij}$ soient égales. Par raison de finitude, il y a un indice $\lambda$ et des $s_{i\lambda} \in \mathcal{F}_\lambda(U_i)$ qui représentent les $s_i$, et la condition de cohérence implique l'existence, quels que soient $i$ et $j$, d'un indice $\lambda_{ij} \leqslant \lambda$ tel que $s_{i\lambda}$ et $s_{j\lambda}$ définissent, dans $U_{ij}$, la même section de $\mathcal{F}_{\lambda_{ij}}$. Remplaçant $\lambda$ par un indice inférieur à tous les $\lambda_{ij}$ on peut donc supposer que $s_{i\lambda} = s_{j\lambda}$ dans $U_{ij}$; d'où une section $s_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda(X)$ qui induit $s_{i\lambda}$ dans $U_i$; l'élément de $\mathcal{F}_0(X)$ représenté par $s_\lambda$ induit évidemment $s_i$ dans $U_i$, ce qui achève la démonstration.

*Le théorème précédent est encore valable si* X *est un espace de Zariski*; on appelle ainsi tout espace dans lequel toute suite décroissante de parties fermées est stationnaire. Il est immédiat de voir que cette propriété équivaut à la suivante : *tout sous-espace de* X *est quasi-compact*, i.e. vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue (il suffit même que les *ouverts* de X soient quasi-compacts pour que X soit un espace de Zariski).

Pour établir qu'un espace de Zariski X vérifie le Théorème 3.10.1, remarquons d'abord que, X étant quasi-compact, la première partie de la démonstration de ce théorème s'applique sans changement. Considérons maintenant une section $s \in \mathcal{F}(X)$; puisque l'on a

$$\mathcal{F}(x) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \lambda}} \mathcal{F}_\lambda(x)$$

pour tout $x \in X$ on voit, en utilisant l'axiome de Borel-Lebesgue, qu'il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de X, des indices $\lambda_i$, et des sections $s_i \in \mathcal{F}_{\lambda_i}(U_i)$ qui « représentent » $s$ dans $U_i$. Posant $V_p = U_1 \cup \ldots \cup U_p$ nous allons construire par récurrence sur $p$ une section d'un faisceau $\mathcal{F}_\lambda$ au-dessus de $V_p$ qui, dans $V_p$, représente $s$; cela démontrera le théorème.

La construction étant triviale pour $p = 1$, il suffit de faire le passage de $p$ à $p+1$. Prenons donc une section $t \in \mathcal{F}_\lambda(V_p)$ qui représente $s$ dans $V_p$; dans $V_p \cap U_{p+1}$ les sections $t$ de $\mathcal{F}_\lambda$ et $s_{p+1}$ de $\mathcal{F}_{\lambda_{p+1}}$ représentent $s$; or comme X est un espace de Zariski il en est évidemment de même de tout sous-espace de X, en particulier de $V_p \cap U_{p+1}$, en sorte que d'après la première partie de la démonstration l'homomorphisme canonique

$$\lim.\ \mathrm{ind.}\ \mathcal{F}_\lambda(V_p \cap U_{p+1}) \rightarrow \mathcal{F}(V_p \cap U_{p+1})$$

est injectif. Par conséquent, on peut se ramener au cas où l'on a $\lambda = \lambda_{p+1}$ et $t = s_{p+1}$ dans $V_p \cap U_{p+1}$, ce qui évidemment termine la démonstration.

On déduit du résultat précédent que, *sur un espace de Zariski* X, *toute limite inductive de faisceaux flasques est un faisceau flasque.* Soit en effet $\mathcal{F}$ une limite inductive de faisceaux flasques $\mathcal{F}_\lambda$, et prenons une section $s$ de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert U; comme U est un espace de Zariski, le résultat précédent prouve l'existence d'un indice $\lambda$ et d'une section $s_\lambda$ de $\mathcal{F}_\lambda$ au-dessus de U qui représente $s$ dans U; prolongeant $s_\lambda$ à tout X et considérant la section de $\mathcal{F}$ qui se déduit du prolongement de $s_\lambda$ il est clair qu'on trouve ainsi un prolongement de $s$ à tout X, d'où le résultat.

Un raisonnement tout à fait semblable montrerait que *sur un espace compact toute limite inductive de faisceaux mous est un faisceau mou.*

# 4. COHOMOLOGIE A VALEURS DANS UN FAISCEAU

Dans tout ce § le mot « faisceau » désigne un faisceau *de groupes abéliens.*

## 4. 1. — Faisceaux différentiels

Soit X un espace topologique; on appelle *faisceau gradué* sur X toute suite $\mathscr{L}^* = (\mathscr{L}^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de faisceaux de base X; on dira alors que $\mathscr{L}^n$ est la composante de degré $n$ de $\mathscr{L}^*$. Si T est un foncteur défini sur la catégorie des faisceaux et à valeurs dans celle des groupes abéliens (ou dans toute autre catégorie abélienne), on désignera toujours par la notation $\mathrm{T}(\mathscr{L}^*)$ le groupe gradué $(\mathrm{T}(\mathscr{L}^n))_{n \in \mathbf{Z}}$. En particulier, pour toute famille $\Phi$ de supports dans X, on posera

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) = (\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^n))_{n \in \mathbf{Z}}.$$

On notera que la somme directe des groupes $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^n)$ ne s'identifie pas, en général, au groupe $\Gamma_\Phi(\oplus \mathscr{L}^n)$; c'est évidemment une des raisons pour lesquelles il est utile de distinguer une *suite* de faisceaux du faisceau somme directe des termes de la suite.

Soient $\mathscr{L}^*$ et $\mathscr{M}^*$ deux faisceaux gradués de base X; un *homomorphisme de degré r* de $\mathscr{L}^*$ dans $\mathscr{M}^*$ est une suite $f = (f^n)$ d'homomorphismes de faisceaux $f^n : \mathscr{L}^n \to \mathscr{M}^{n+r}$; pour $r = 0$ on obtient les *homomorphismes de $\mathscr{L}^*$ dans $\mathscr{M}^*$*, ce qui, moyennant des définitions évidentes, permet de parler de la *catégorie abélienne* des faisceaux gradués de base X.

On appelle *faisceau différentiel* (ou faisceau de complexes) sur X tout faisceau gradué $\mathscr{L}^*$ muni de la structure définie par la donnée d'un homomorphisme $d : \mathscr{L}^* \to \mathscr{L}^*$ d'un certain degré $r$, et vérifiant $d^2 = 0$. Sauf mention explicite du contraire nous supposerons toujours $r = + 1$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Soient $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ deux faisceaux différentiels; on dit que $\mathcal{M}^*$ est un sous-faisceau différentiel de $\mathcal{L}^*$ si l'on a $\mathcal{M}^n \subset \mathcal{L}^n$ pour tout $n$ et si la différentielle $d$ de $\mathcal{M}^*$ est induite par celle de $\mathcal{L}^*$. D'autre part, on appelle *homomorphisme* de $\mathcal{L}^*$ dans $\mathcal{M}^*$ tout homomorphisme de faisceaux gradués, de degré 0, commutant avec les différentielles de $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$. On peut évidemment parler de la *catégorie abélienne* des faisceaux différentiels de base X.
Soit $\mathcal{L}^*$ un faisceau différentiel; nous poserons toujours

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^n(\mathcal{L}^*) &= \mathcal{Z}^n = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}^n \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{n+1})\\ \mathcal{B}^n(\mathcal{L}^*) &= \mathcal{B}^n = \mathrm{Im}(\mathcal{L}^{n-1} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^n)\\ \mathcal{H}^n(\mathcal{L}^*) &= \mathcal{Z}^n(\mathcal{L}^*)/\mathcal{B}^n(\mathcal{L}^*),\end{aligned}$$

la dernière définition ayant un sens en vertu de $d^2 = 0$. On dit que $\mathcal{H}^n(\mathcal{L}^*)$ est le *faisceau dérivé* de degré $n$ de $\mathcal{L}^*$.

Soit T un foncteur covariant additif défini sur la catégorie des faisceaux de base X, et à valeurs, par exemple, dans celle des groupes abéliens. Pour tout faisceau différentiel $\mathcal{L}^*$, le groupe gradué $\mathrm{T}(\mathcal{L}^*)$ est canoniquement muni d'une différentielle $\mathrm{T}(d) = d : \mathrm{T}(\mathcal{L}^n) \to \mathrm{T}(\mathcal{L}^{n+1})$ (la relation $\mathrm{T}(d)^2 = 0$ provenant du fait que T est supposé *additif*), en sorte que $\mathrm{T}(\mathcal{L}^*)$ est non seulement un groupe gradué mais un *complexe*; il en est ainsi par exemple de $\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)$, et de $\mathcal{L}^*(\mathrm{A})$ pour toute partie A de X. Un cas particulièrement important est celui où T est *exact à gauche*; dans ce cas, de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{Z}^n \xrightarrow{j} \mathcal{L}^n \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{n+1}$$

résulte la suite exacte

$$0 \to \mathrm{T}(\mathcal{Z}^n) \to \mathrm{T}(\mathcal{L}^n) \to \mathrm{T}(\mathcal{L}^{n+1});$$

donc *on peut identifier canoniquement* $\mathrm{T}(\mathcal{Z}^n)$ *au groupe des cocycles de degré n de* $\mathrm{T}(\mathcal{L}^*)$, ce que nous ferons toujours; par contre, $\mathrm{T}(\mathcal{B}^n)$, qui se plonge canoniquement dans $\mathrm{T}(\mathcal{L}^n)$, ne s'identifie pas au groupe des cobords de degré $n$ de $\mathrm{T}(\mathcal{L}^*)$; on peut seulement dire que $\mathrm{T}(\mathcal{B}^n)$ se plonge dans le groupe des cocycles de degré $n$ de $\mathrm{T}(\mathcal{L}^*)$.

Si par contre T est *exact*, la situation est beaucoup plus simple; des suites exactes

$$\begin{aligned}0 \to \mathcal{Z}^n \to \mathcal{L}^n \to \mathcal{B}^{n+1} \to 0\\ 0 \to \mathcal{B}^n \to \mathcal{Z}^n \to \mathcal{H}^n \to 0\end{aligned}$$

on déduit par T des suites exactes analogues, en sorte que le groupe des cobords de degré $n$ de $\mathrm{T}(\mathcal{L}^*)$ n'est autre que $\mathrm{T}(\mathcal{B}^n)$, et que

$$\boxed{\mathrm{H}^n(\mathrm{T}(\mathcal{L}^*)) = \mathrm{T}(\mathcal{H}^n(\mathcal{L}^*)) \qquad \text{si T est exact.}}$$

Par exemple, pour tout point $x$ de X, on a un isomorphisme canonique

$$\boxed{\mathrm{H}^n(\mathscr{L}^*(x)) = \mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*)(x)},$$

ce qui permet en principe de calculer facilement les faisceaux dérivés de $\mathscr{L}^*$. On peut encore les calculer comme suit. Il est clair que les faisceaux $\mathscr{Z}^n$ et $\mathscr{B}^n$ sont engendrés par les préfaisceaux

$$\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{Z}^n(\mathscr{L}^*(\mathrm{U})), \qquad \mathrm{U} \rightarrow \mathrm{B}^n(\mathscr{L}^*(\mathrm{U})),$$

le premier étant d'ailleurs déjà un faisceau. On en conclut que *le faisceau dérivé* $\mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*)$ *est engendré par le préfaisceau*

$$\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{H}^n(\mathscr{L}^*(\mathrm{U}))$$

(il suffit pour le voir de remarquer que si l'on a une suite exacte de préfaisceaux, les faisceaux engendrés forment encore une suite exacte, à cause du fait qu'une limite inductive de suites exactes est encore exacte).

## 4. 2. — Résolutions d'un faisceau

Étant donné un faisceau $\mathscr{A}$ de base X, on appelle *résolution* de $\mathscr{A}$ (ou plus précisément, résolution *cohomologique* de $\mathscr{A}$) toute suite exacte de faisceaux, de la forme

$$(1) \qquad 0 \rightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{j} \mathscr{L}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{d} \cdots.$$

Une telle résolution définit de façon évidente un faisceau différentiel $\mathscr{L}^* = (\mathscr{L}^n)$, avec d'ailleurs $\mathscr{L}^n = 0$ pour $n \leqslant 0$, et les faisceaux dérivés correspondants sont donnés par

$$\mathscr{H}^0(\mathscr{L}^*) = \mathscr{A}, \qquad \mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq 0.$$

Si T est un foncteur covariant additif à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, $\mathrm{T}(\mathscr{L}^*)$ est alors un *complexe de cochaînes*, et l'on a un homomorphisme canonique de $\mathrm{T}(\mathscr{A})$ dans le groupe des cocycles de degré 0 de ce complexe; si T est *exact à gauche*, $\mathrm{T}(\mathscr{A})$ s'identifie à ce groupe; et si T est *exact*, alors $\mathrm{T}(\mathscr{L}^*)$ est une résolution de $\mathrm{T}(\mathscr{A})$ : par exemple, $\mathscr{L}^*(x)$ est, pour tout $x \in \mathrm{X}$, une résolution de $\mathscr{A}(x)$.

Puisque les faisceaux dérivés de $\mathscr{L}^*$ sont engendrés par les préfaisceaux $\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{H}^*(\mathscr{L}^*)(\mathrm{U})$ on voit que, pour vérifier que (1) est une résolution, il est nécessaire et suffisant de vérifier les conditions suivantes :

(a) *les sections de* $\mathscr{A}$ *s'appliquent biunivoquement dans les sections de* $\mathscr{L}^0$;
(b) *soit* $s$ *une section de* $\mathscr{L}^0$ *au-dessus d'un ouvert* U; *pour que* $ds = 0$ *il faut et il suffit que* $s$ *soit une section de* $\mathscr{A}$;
(c) *soit* $s$ *une section de* $\mathscr{L}^n (n \geqslant 1)$ *au-dessus d'un ouvert* U; *pour que* $ds = 0$ *il faut*

*et il suffit que, dans tout ouvert* $V \subset U$ *suffisamment petit, il existe une section* $s' \in \mathcal{L}^{n-1}(V)$ *telle que l'on ait* $s = ds'$ *dans* V.

Considérons deux faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, un homomorphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, deux résolutions $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et un homomorphisme de faisceaux différentiels $g : \mathcal{L}^* \to \mathcal{M}^*$; nous dirons que $g$ est *compatible* avec $f$ si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}^* & \xrightarrow{g} & \mathcal{M}^*, \end{array}$$

où les lignes verticales désignent les injections canoniques, est *commutatif*.

Donnons pour terminer des exemples de résolutions.

***Exemple*** 4.2.1. — Soit X un espace topologique quelconque, et soit A un groupe abélien, identifié au faisceau simple de base X et de fibre A; alors les faisceaux de cochaînes d'Alexander-Spanier de X à valeurs dans A (Exemple 2.4.2) constituent une résolution de A.

***Exemple*** 4.2.2. — Soit X une variété différentiable; alors les faisceaux $\Omega^p$ constituent une résolution du faisceau simple de base X et de fibre $\mathbf{R}$ (Exemple 2.4.1).

***Exemple*** 4.2.3. — Supposons donnée, sur un espace X, une résolution

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \dots$$

du faisceau simple de base X et de fibre $\mathbf{Z}$, groupe additif des entiers rationnels, et supposons que les faisceaux $\mathcal{L}^n$ soient *sans torsion* (i.e. que les groupes abéliens $\mathcal{L}^n(x)$ soient sans torsion); alors pour *tout* faisceau $\mathcal{A}$ sur X la suite

$$0 \to \mathbf{Z} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{L}^0 \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{A} \to \cdots$$

est exacte comme on le voit en considérant les groupes ponctuels; par conséquent, le faisceau différentiel $\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A}$ constitue une résolution de $\mathcal{A}$.

## 4. 3. — La résolution canonique d'un faisceau

Soit $\mathcal{A}$ un faisceau de base X; nous désignerons par la notation $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ le faisceau des *germes de sections non nécessairement continues de* $\mathcal{A}$; une section de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ au-dessus d'un ouvert U est donc une application $s$ de U dans l'espace étalé $\mathcal{A}$, assujettie à la seule condition de vérifier $p(s(x)) = x$ pour tout $x \in U$; on définit de façon évidente les opérations de restriction dans $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$.

Il est clair que l'on a une injection canonique

$$j : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$$

et que le faisceau $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ est *flasque* (cf. n° 3.1).

Nous allons maintenant définir des faisceaux $\mathcal{C}^n(X; \mathcal{A})$ comme suit :

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A})) \quad \text{où} \quad \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})/\mathcal{A}; \\ &\mathcal{C}^2(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^2(X; \mathcal{A})) \quad \text{où} \quad \mathcal{Z}^2(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A})/\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}), \end{aligned}$$

et ainsi de suite indéfiniment. Tous ces faisceaux sont flasques.

On a de plus des homomorphismes

$$d: \mathcal{C}^n(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^{n+1}(X; \mathcal{A})$$

en composant la surjection

$$\mathcal{C}^n(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{Z}^{n+1}(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^n(X; \mathcal{A})/\mathcal{Z}^n(X; \mathcal{A})$$

avec l'injection

$$\mathcal{Z}^{n+1}(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^{n+1}(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^{n+1}(X; \mathcal{A})),$$

et il est clair, par construction même, que l'on a la *suite exacte*

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \cdots;$$

autrement dit, nous avons construit canoniquement une *résolution de $\mathcal{A}$ par des faisceaux flasques*; on la désignera par $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$.

Pour toute famille $\Phi$ de supports dans X, on posera de plus

$$\boxed{C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))}.$$

On peut regarder les applications

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}), \qquad \mathcal{A} \to C^*_\Phi(X; \mathcal{A})$$

comme des foncteurs covariants et additifs définis sur la catégorie des faisceaux, et à valeurs, le premier dans la catégorie des faisceaux différentiels, le second dans la catégorie des complexes de cochaînes. *Ces foncteurs sont exacts.*

Considérons en effet une suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0;$$

pour tout ouvert U on obtient évidemment une suite exacte

$$0 \to \prod_{x \in U} \mathcal{A}'(x) \to \prod_{x \in U} \mathcal{A}(x) \to \prod_{x \in U} \mathcal{A}''(x) \to 0;$$

cela prouve que

$$0 \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}') \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}'') \to 0$$

est une suite exacte de préfaisceaux, et *a fortiori* de faisceaux; par passage au quotient on obtient donc la suite exacte

$$0 \to \mathcal{Z}^1(X;\mathcal{A}') \to \mathcal{Z}^1(X;\mathcal{A}) \to \mathcal{Z}^1(X;\mathcal{A}'') \to 0,$$

d'où, en raisonnant par récurrence, l'exactitude des foncteurs

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}^n(X;\mathcal{A}).$$

L'exactitude des foncteurs

$$\mathcal{A} \to C^n_\Phi(X;\mathcal{A})$$

résulte de là et du Théorème 3.1.3.

***Remarque*** 4.3.1. — Désignons provisoirement par $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)$ la résolution canonique d'un faisceau $\mathcal{A}$; nous allons montrer que, pour tout $x \in X$, *le complexe augmenté* $\mathcal{A}^*(x)$ *est homotopiquement trivial.*
Posant $\mathcal{Z}^n = \mathcal{Z}^n(X;\mathcal{A})$ il suffit (Chapitre 1, Théorème 2.4.1) de montrer que pour tout $n$, $\mathcal{Z}^n(x)$ est facteur direct de $\mathcal{C}^n(x)$; comme d'ailleurs $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^0(X;\mathcal{Z}^n)$ il suffit de faire la démonstration pour $n = 0$; mais il est clair qu'on obtient une projection de $\mathcal{A}^0(x)$ sur $\mathcal{A}(x)$ en associant à un germe de section (non nécessairement continue) de $\mathcal{A}$ en $x$ la *valeur* qu'il prend en $x$; d'où notre assertion.

***Remarque*** 4.3.2 [1]. — Il est possible de donner des sections des faisceaux $\mathcal{A}^p = \mathcal{C}^p(X;\mathcal{A})$ une construction explicite les rattachant aux cochaînes d'Alexander-Spanier.

Considérons un ouvert U de X; une section de $\mathcal{A}^0$ dans U est évidemment une fonction

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{A}(x_0)$$

définie dans U, et par ailleurs quelconque.

On a d'autre part

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{C}^0(X;\mathcal{A}^0/\mathcal{A}),$$

de sorte qu'une section de $\mathcal{A}^1$ dans U est une fonction $f(x_0)$ à valeurs dans les groupes quotients $\mathcal{A}^0(x_0)/\mathcal{A}(x_0)$. Or d'après la Remarque précédente, $\mathcal{A}^0(x)$ est somme directe de $\mathcal{A}(x)$ et du sous-groupe $\mathcal{N}^0(x)$ formé des germes de sections (non continues) de $\mathcal{A}$ en $x$ qui, au point $x$, prennent la valeur 0; on peut donc représenter une section $f$ de $\mathcal{A}^1$ dans U comme une fonction

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{N}^0(x_0).$$

(1) La lecture de cette Remarque est inutile et même nuisible pour la compréhension de ce §; on ne s'en servira pas avant le § 6, où elle ne jouera du reste qu'un rôle tout à fait secondaire.

On notera d'autre part que l'élément $f(x_0) \in \mathcal{Z}^0(x_0)$ se représente (non biunivoquement) par une application

$$x_1 \rightarrow f(x_0, x_1) \in \mathcal{A}(x_1)$$

définie dans un voisinage ouvert $\mathrm{U}(x_0)$ de $x_0$, et nulle pour $x_0 = x_1$; par suite *les sections de* $\mathcal{A}^1$ *au-dessus de* U *sont les fonctions*

$$f(x_0, x_1) \in \mathcal{A}(x_1),$$

*définies pour*

$$x_0 \in \mathrm{U}, \qquad x_1 \in \mathrm{U}(x_0),$$

*et telles que*

$$f(x_0, x_0) = 0 \qquad \textit{pour tout } x_0 \in \mathrm{U};$$

*en outre deux fonctions* $f'$ *et* $f''$ *définissent la même section de* $\mathcal{A}^1$ *dans* U *si et seulement si tout* $x_0 \in \mathrm{U}$ *possède un voisinage* $\mathrm{V}(x_0)$ *tel que l'on ait*

$$f'(x_0, x_1) = f''(x_0, x_1) \qquad \textit{pour} \qquad x_1 \in \mathrm{V}(x_0).$$

La construction précédente permet de plus d'expliciter l'opérateur $d\colon \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1$. Partons en effet d'une section $f$ de $\mathcal{A}^0$, au-dessus de U, i.e. d'une application

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \in \mathcal{A}(x_0), \qquad x_0 \in \mathrm{U};$$

$df$ est la section de $\mathcal{A}^0/\mathcal{A}$ déduite de $f$ par passage au quotient; si donc on représente $df$ comme une fonction à valeurs dans les groupes variables $\mathcal{Z}^0(x_0)$, on aura

$$df(x_0) \equiv \tilde{f}(x_0) \qquad \mathrm{mod.}\, \mathcal{A}(x_0),$$

où bien entendu $\tilde{f}(x_0) \in \mathcal{A}^0(x_0)$ est le germe de section continue de $\mathcal{A}^0$ défini par $f$ en $x_0$. Or représentons $df(x_0)$ par une application

$$x_1 \rightarrow df(x_0, x_1) \in \mathcal{A}(x_1)$$

définie au voisinage de $x_1$; la relation précédente exprime simplement que la section

$$x_1 \rightarrow df(x_0, x_1) - f(x_1)$$

de $\mathcal{A}$ est *continue* en $x_0$; comme $df(x_0, x_0) = 0$, l'application précédente est nécessairement égale, au voisinage de $x_0$, à la section *continue* de $\mathcal{A}$ qui, en $x_0$, vaut $f(x_0)$; si nous désignons par

$$x_1 \rightarrow f(x_0)\,(x_1)$$

l'une quelconque de ces sections, définie dans un ouvert $\mathrm{U}(x_0)$, nous obtenons donc la formule

$$df(x_0, x_1) = f(x_1) - f(x_0)\,(x_1)$$

valable dans un ensemble de la forme $x_0 \in \mathrm{U}$, $x_1 \in \mathrm{U}(x_0)$.

Enfin, puisque $\mathcal{A}^1 = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}^0/\mathcal{A})$, le même raisonnement que plus haut montre que pour tout $x$, $\mathcal{A}^1(x)$ est somme directe du sous-groupe $\mathcal{Z}^1(x) = \mathcal{N}^0(x)$ et du sous-groupe $\mathcal{N}^1(x)$ formé des germes de sections (non continues) de $\mathcal{Z}^1$ qui, en $x$, prennent la valeur o.

Si l'on représente une section $f(x_0, x_1)$ de $\mathcal{A}^1$ par une application

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{N}^0(x_0),$$

il est clair que le germe $\tilde{f}(x) \in \mathcal{A}^1(x)$ défini par $f$ en $x$ appartient à $\mathcal{N}^1(x)$ si et seulement si $f(x) = 0$; comme $f(x)$ est, au point $x$, le germe de section (non continue) de $\mathcal{A}$ défini par l'application $x_1 \to f(x, x_1)$, on voit que la relation

$$\tilde{f}(x) \in \mathcal{N}^1(x)$$

équivaut au fait que l'on a $f(x, x_1) = 0$ lorsque $x_1$ est assez voisin de $x$.

Avant d'étendre ces résultats à un degré $p$ quelconque, notons qu'en posant $\mathcal{Z}^p = \mathcal{Z}^p(X; \mathcal{A}) = \mathcal{A}^{p-1}/\mathcal{Z}^{p-1}$ on a la relation

$$\mathcal{A}^p = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^p)$$

et par suite que, pour tout $x$, $\mathcal{A}^p(x)$ est somme directe du sous-groupe $\mathcal{Z}^p(x) = \mathcal{A}^{p-1}(x)/\mathcal{Z}^{p-1}(x)$ et du sous-groupe $\mathcal{N}^p(x)$ forme des germes de sections non continues de $\mathcal{Z}^p$ qui prennent la valeur o en $x$. Cela dit, nous allons démontrer par récurrence sur $p$ les assertions suivantes :

$(a_p)$ : *toute section de $\mathcal{A}^p$ au-dessus d'un ouvert* U *peut se représenter par une fonction $f(x_0, x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p)$ nulle dès que $x_0 = x_1$ et définie dans un ensemble de la forme*

$$x_0 \in U;\ x_1 \in U(x_0);\ \ldots;\ x_p \in U(x_0, \ldots, x_{p-1}), \tag{1}$$

*où l'on désigne d'une manière générale par $U(x_0, \ldots, x_i)$ un ouvert contenant $x_i$ et dépendant de $x_0, \ldots, x_i$; de plus, deux telles fonctions $f'$ et $f''$ définissent la même section de $\mathcal{A}^p$ si et seulement si elles coïncident dans un ensemble de la forme* (1);

$(b_p)$ : *l'homomorphisme $d : \mathcal{A}^{p-1} \to \mathcal{A}^p$ est donné par la formule*

$$df(x_0, \ldots, x_p) = \sum_{i=0}^{i=p-1} (-1)^i . f(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) + (-1)^p . f(x_0, \ldots, x_{p-1})(x_p), \tag{2}$$

*où $f(x_0, \ldots, x_{p-1})(x_p)$ désigne la valeur au point $x_p$ d'une section continue de $\mathcal{A}$ dans un ouvert $U(x_0, \ldots, x_{p-1})$, et égale à $f(x_0, \ldots, x_{p-1})$ pour $x_p = x_{p-1}$;*

$(c_p)$ : *soit $f$ une section de $\mathcal{A}^p$ au voisinage d'un point $x$, représentée par une fonction $f(x_0, x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p)$; pour que le germe $\tilde{f}(x) \in \mathcal{A}^p(x)$ défini par $f$ en $x$ soit dans le sous-groupe $\mathcal{N}^p(x)$ il faut et il suffit que l'on ait*

$$f(x, x_1, \ldots, x_p) = 0 \tag{3}$$

*dans un ensemble de la forme*

$$x_1 \in \mathrm{U}, x_2 \in \mathrm{U}(x_1), \ldots, x_p \in \mathrm{U}(x_1, \ldots, x_{p-1}),$$

*où* U *est un voisinage de* $x$.

Il nous suffit de démontrer que si les assertions précédentes sont vraies pour $p-1$ elles le sont pour $p$. Prouvons d'abord $(a_p)$. Soit $f$ une section de $\mathscr{A}^p$ dans U, i.e. une section non continue de $\mathscr{Z}^p$ dans U; en vertu des isomorphismes canoniques $\mathscr{Z}^p(x) = \mathscr{B}^{p-1}(x)$ on peut représenter biunivoquement $f$ par une application

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathscr{B}^{p-1}(x_0), \qquad x_0 \in \mathrm{U};$$

or d'après l'assertion $(c_{p-1}), f(x_0)$ est représenté par une application

$$(x_1, \ldots, x_p) \to f(x_0, x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{A}(x_p)$$

définie pour $x_1 \in \mathrm{U}(x_0), \ldots, x_p \in \mathrm{U}(x_0, \ldots, x_{p-1})$ et que l'on peut évidemment supposer nulle dès que $x_1 = x_0$, puisque $f(x_0) \in \mathscr{B}^{p-1}(x_0)$. L'assertion $(a_p)$ résulte immédiatement de là.

Soit maintenant $f$ une section de $\mathscr{A}^{p-1}$ représentée par une fonction

$$f(x_0, \ldots, x_{p-1});$$

on va calculer la fonction $df(x_0, \ldots, x_p)$ qui représente la section $df$ de $\mathscr{A}^p$. Si l'on représente $df$ par une application $x \to df(x) \in \mathscr{B}^{p-1}(x)$, on aura évidemment la relation

$$df(x_0) \equiv \tilde{f}(x_0) \quad \text{mod.} \quad \mathscr{Z}^{p-1}(x_0),$$

où $\tilde{f}(x) \in \mathscr{A}^{p-1}(x)$ est le germe de section de $\mathscr{A}^{p-1}$ défini par $f$ en $x$. Mais l'on sait par exactitude que

$$\mathscr{Z}^{p-1}(x) = d(\mathscr{B}^{p-2}(x));$$

donc nous devons exprimer qu'il existe un germe

$$\tilde{g}(x_0) \in \mathscr{B}^{p-2}(x_0)$$

tel que

$$df(x_0) = \tilde{f}(x_0) + d\tilde{g}(x_0).$$

Si l'on représente $\tilde{g}(x_0)$ par une fonction $g(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ définie pour $x_1 \in \mathrm{U}(x_0)$, etc... l'assertion $(a_{p-1})$ et l'assertion $(b_{p-1})$ montrent que la relation précédente s'écrit

$$df(x_0, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p) + \sum_{i=1}^{i=p-1} (-1)^{i+1} g(x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) + (-1)^{p+1} g(x_0, \ldots, x_{p-1})(x_p)$$

et doit être valable dans un ensemble de la forme habituelle. Nous allons déduire de là l'assertion $(b_p)$.

D'après $(c_{p-2})$ on peut en effet supposer $g(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ nulle dès que $x_0 = x_1$; et il en est nécessairement de même de $df(x_0, x_1, ..., x_p)$ en vertu de $(a_p)$ que nous avons déjà établi; faisant $x_0 = x_1$ dans la formule précédente il reste donc

$$0 = f(x_0, x_2, ..., x_p) + g(x_0, x_2, ..., x_p),$$

relation valable dans un ensemble de la forme $x_2 \in U(x_0), ...$; en remplaçant $g$ par la valeur que nous venons de trouver dans la relation qui donne $df$ on obtient l'assertion $(b_p)$.

Considérons enfin le germe $\tilde{f}(x) \in \mathcal{A}^p(x)$ défini par une section $f$ de $\mathcal{A}^p$ au voisinage de $x$; représentant $f$ par une fonction $f(x_0) \in \mathcal{N}^{p-1}(x_0)$, la relation $\tilde{f}(x) \in \mathcal{N}^{p-1}(x)$ équivaut à la relation $f(x) = 0$; or le germe $f(x) \in \mathcal{A}^{p-1}(x)$ est défini par la fonction $f(x, x_0, ..., x_{p-1})$ des variables $x_0, ..., x_{p-1}$; l'assertion $(c_p)$ résulte donc de l'assertion $(c_{p-1})$.

On notera l'analogie existant entre la formule (2) et celle qui donne la différentielle d'une cochaîne d'Alexander-Spanier (Exemple 2.4.2); une différence notable entre la situation actuelle et la situation classique est la condition

$$f(x_0, x_0, x_2, ..., x_p) = 0$$

imposée aux cochaînes considérées ici; nous montrerons plus loin (nº 6.4) qu'en supprimant cette condition, on obtient une autre résolution de $\mathcal{A}$ par des faisceaux flasques, et présentant de plus une structure « semi-simpliciale » naturelle, ce qui n'est pas le cas de la résolution canonique.

## 4. 4. — Cohomologie à valeurs dans un faisceau

Étant donnés un espace X, une famille $\Phi$ de supports dans X, et un faisceau $\mathcal{A}$ de base X, nous poserons

$$\boxed{H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^n(C^*_\Phi(X; \mathcal{A}))};$$

si l'on a un homomorphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on en déduit de façon évidente des homomorphismes

$$f^* : H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{B}).$$

***Théorème*** 4.4.1. — *Les foncteurs* $\mathcal{A} \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A} \to H^0_\Phi(X; \mathcal{A})$ *sont isomorphes.*

Car de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A})$$

et du fait que $\Gamma_\Phi$ est exact à gauche résulte la suite exacte

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \xrightarrow{j} C^0_\Phi(X;\mathcal{A}) \xrightarrow{d} C^1_\Phi(X;\mathcal{A}).$$

**Théorème** 4.4.2. — *A toute suite exacte de faisceaux*

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{j} \mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}'' \to 0$$

*correspond une suite exacte de cohomologie de la forme*

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}') \xrightarrow{j^*} \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \xrightarrow{p^*} \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H^1_\Phi(X;\mathcal{A}') \xrightarrow{j^*} \cdots;$$

*de plus, si l'on a un diagramme commutatif de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{A}' & \to & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{B}' & \to & \mathcal{B} & \to & \mathcal{B}'' & \to & 0, \end{array}$$

*les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} H^n_\Phi(X;\mathcal{A}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X;\mathcal{A}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X;\mathcal{B}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X;\mathcal{B}') \end{array}$$

*sont commutatifs.*

La suite exacte de cohomologie provient du fait qu'on a une suite exacte de complexes

$$0 \to C^*_\Phi(X;\mathcal{A}') \to C^*_\Phi(X;\mathcal{A}) \to C^*_\Phi(X;\mathcal{A}'') \to 0.$$

La seconde partie du Théorème s'obtient en écrivant le diagramme commutatif de complexes correspondant au diagramme donné.

**Corollaire** — *Soit* $0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux de base* X. *Pour que la suite correspondante*

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}') \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') \to 0$$

*soit exacte il suffit que* $H^1_\Phi(X;\mathcal{A}') = 0$.

**Théorème** 4.4.3. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, *et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X. *On a*

$$H^n_\Phi(X;\mathcal{A}) = 0 \qquad \textit{pour } n \geqslant 1$$

*dans les deux cas suivants :*

(a) : *le faisceau* $\mathcal{A}$ *est flasque;*

(b) : *la famille* $\Phi$ *est paracompactifiante et* $\mathcal{A}$ *est* $\Phi$*-mou.*

Écrivons en effet la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) \to \cdots;$$

dans le cas (*a*) *tous* les faisceaux qui y figurent sont flasques : on peut donc appliquer le Théorème 3.1.3; dans le cas (*b*), *tous* les faisceaux qui y figurent sont $\Phi$-mous : on peut donc appliquer le Théorème 3.5.4; d'où les résultats annoncés.

Notons encore le résultat suivant, qui nous sera utile au § 5 :

***Théorème*** 4.4.4. — *Soit* $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ *une famille localement finie de faisceaux de base* X, *et* $\mathcal{F}$ *le produit direct des* $\mathcal{F}_i$. *On a des isomorphismes canoniques*

$$H^n(X; \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} H^n(X; \mathcal{F}_i.)$$

Il suffit pour cela de montrer qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{C}^n(X; \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} \mathcal{C}^n(X; \mathcal{F}_i)$$

car alors, d'après la définition d'un produit direct (n° 2.6), on aura

$$\Gamma(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{F})) = \prod_{i \in I} \Gamma(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{F}_i))$$

et le théorème s'obtiendra en observant que, si l'on a une famille quelconque de complexes, l'homologie du produit direct est le produit direct des homologies des facteurs.

Établissons d'abord l'isomorphisme cherché pour $n = 0$. Si U est un ouvert on a

$$\mathcal{C}^0(X; \mathcal{F})\,(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}(x);$$

mais comme la famille donnée est localement finie il vient

$$\mathcal{F}(x) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(x),$$

et par suite

$$\mathcal{C}^0(X; \mathcal{F})\,(U) = \prod_{x \in U} \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(x) = \prod_{i \in I} \prod_{x \in U} \mathcal{F}_i(x) = \prod_{i \in I} \mathcal{C}^0(X; \mathcal{F}_i)\,(U),$$

d'où notre assertion.

Il est clair que les $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{F}_i)$ forment eux aussi une famille localement finie; par conséquent, en utilisant le résultat précédent et en effectuant le produit direct des suites exactes

$$0 \to \mathcal{F}_i \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{F}_i) \to \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{F}_i) \to 0$$

on trouve un isomorphisme canonique

$$\mathscr{Z}^1(X;\mathscr{F}) = \prod_{i\in I} \mathscr{Z}^1(X;\mathscr{F}_i);$$

comme il s'agit d'un produit localement fini, le résultat relatif au foncteur $\mathscr{C}^0$, appliqué à la formule précédente, donne un isomorphisme canonique

$$\mathscr{C}^1(X;\mathscr{F}) = \prod_{i\in I} \mathscr{C}^1(X;\mathscr{F}_i).$$

En poursuivant indéfiniment, i.e. en raisonnant par récurrence sur le degré $n$, on parvient évidemment au résultat cherché.

### 4. 5. — Les suites spectrales associées à un faisceau différentiel

Soient X un espace topologique, $\Phi$ une famille de supports dans X, et $\mathscr{L}^*$ un faisceau différentiel dans X. Considérons le groupe bigradué

$$K = K(\mathscr{L}^*) = C^*_\Phi(X;\mathscr{L}^*) = \sum C^p_\Phi(X;\mathscr{L}^q);$$

on peut le considérer comme un *complexe double* en définissant la différentielle

$$d'\colon C^p_\Phi(X;\mathscr{L}^q) \to C^{p+1}_\Phi(X;\mathscr{L}^q)$$

à l'aide de la différentielle du complexe $C^*_\Phi(X;\mathscr{L}^q)$, et en définissant

$$d''\colon C^p_\Phi(X;\mathscr{L}^q) \to C^p_\Phi(X;\mathscr{L}^{q+1})$$

comme étant, au facteur $(-1)^p$ près, l'homomorphisme déduit de la différentielle $\mathscr{L}^q \to \mathscr{L}^{q+1}$ de $\mathscr{L}^*$; de cette façon la relation $d'd'' + d''d' = 0$ est vérifiée, et l'on peut définir la différentielle totale $d = d' + d''$ de K. Bien entendu on peut aussi considérer K comme un complexe simple en utilisant $d$ et la graduation par les sous-groupes

$$K^n = \sum_{p+q=n} C^p_\Phi(X;\mathscr{L}^q).$$

Nous allons calculer les deux suites spectrales de K (Chapitre I, nº 4.8), ou du moins leurs premiers termes.

On sait que la première suite spectrale est donnée par

$${}'E_2^{pq} = {}'H^p({}''H^q(K)),$$

où ${}''H^q(K)$ est la $d''$-cohomologie de degré $q$ de K muni de sa seconde graduation, et où ${}'H^p({}''H^q(K))$ est la $d'$-cohomologie de degré $p$ du complexe ${}''H^q(K)$, muni de la graduation déduite de la première graduation de K et de la différentielle déduite de $d'$.

Nous devons donc, pour obtenir les termes de degré $p$ de $''\mathrm{H}^q(\mathrm{K})$, calculer la cohomologie de degré $q$ du complexe

$$\mathrm{C}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{L}^*) = \sum_q \mathrm{C}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{L}^q)$$

muni de la différentielle induite par celle de $\mathscr{L}^*$, au facteur $(-1)^p$ près. Or le foncteur $\mathscr{A} \to \mathrm{C}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{A})$ est *exact*; on a donc, d'après la fin du n° 4.1, un isomorphisme canonique de la cohomologie de degré $q$ du complexe en question sur le groupe $\mathrm{C}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*))$ ; autrement dit on a la formule

$$'\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{C}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)),$$

la différentielle $d_1$ étant induite par $d'$ ; en conséquence il vient

$$\boxed{'\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*))}. \tag{1}$$

De même, on a $''\mathrm{E}_1^{pq} = ''\mathrm{H}^p('\mathrm{H}^q(\mathrm{K}))$ ; ici, $'\mathrm{H}^q(\mathrm{K})$ est la $d'$-cohomologie de K muni de sa première graduation; les termes de degré $p$ de ce groupe constituent donc le groupe $\mathrm{H}^q_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{L}^p)$ :

$$''\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^q_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{L}^p);$$

et pour calculer le terme $\mathrm{E}_2$, on forme le complexe

$$\mathrm{H}^q_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{L}^*) = \sum_q \mathrm{H}^q_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{L}^p),$$

muni de la différentielle induite par celle de $\mathscr{L}^*$ (au signe près), de sorte qu'il vient finalement

$$\boxed{''\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathrm{H}^q_\Phi(\mathrm{X}; \mathscr{L}^*))}. \tag{2}$$

Ces formules sont fondamentales.

On observera que *la seconde filtration de* K *est toujours régulière* et que *la première filtration de* K *est régulière dès que l'on a*

$$\mathscr{L}^n = 0 \qquad \text{pour} \qquad n < n_0. \tag{3}$$

On observera d'autre part qu'on a en particulier

$$\boxed{''\mathrm{E}_2^{p0} = \mathrm{H}^p(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*))} \tag{4}$$

d'où l'on déduit un homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^p(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{K}); \tag{5}$$

celui-ci résulte du fait que la première graduation de K est positive. D'après la théorie des suites spectrales on peut encore l'obtenir comme suit (Chapitre I, n° 4.8) : dans le double complexe $C^*_\Phi(X; \mathcal{L}^*)$, les éléments de premier degré 0 annulés par $d'$ forment un sous-complexe relativement à la seconde graduation et à $d''$, soit $'Z^{0*}$; l'injection canonique $'Z^{0*} \to K$ définit des homomorphismes $''H^p('Z^{0*}) \to H^p(K)$ qui ne sont autres que les homomorphismes $''E_2^{p0} \to H^p(K)$. Or, ici, $'Z^{0*}$ n'est autre que $\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)$ moyennant l'injection $\Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to C^0_\Phi(X; \mathcal{A})$ valable pour tout faisceau $\mathcal{A}$; on voit donc que *les homomorphismes* (5) *sont déduits de l'homomorphisme de complexes*

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*) \to K. \tag{6}$$

#### 4. 6. — Théorèmes fondamentaux

Reprenons les homomorphismes (5); si les $''E_2^{pq}$ sont nuls pour $q \geqslant 1$, ces homomorphismes sont bijectifs puisque la seconde filtration de K est régulière; tenant compte de la première suite spectrale on obtient donc le résultat suivant :

**Théorème** 4.6.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, *et* $\mathcal{L}^*$ *un faisceau différentiel sur* X. *Supposons que les complexes* $H^q_\Phi(X; \mathcal{L}^*)$ *soient acycliques en tout degré pour* $q \geqslant 1$. *Alors il existe une suite spectrale dont le terme* $E_2$ *est donné par*

$$E_2^{pq} = H^p_\Phi(X; \mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*))$$

*et dont le terme* $E_\infty$ *est le groupe gradué associé à une filtration convenable de la cohomologie du complexe* $\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)$.

Considérons maintenant un homomorphisme de faisceaux différentiels

$$f : \mathcal{L}^* \to \mathcal{M}^*;$$

il en résulte un homomorphisme de doubles complexes

$$C^*_\Phi(X; \mathcal{L}^*) \to C^*_\Phi(X; \mathcal{M}^*)$$

et des homomorphismes des suites spectrales correspondantes, lesquels sont d'ailleurs induits par $f$ de façon évidente compte tenu des formules du n° précédent. Or on sait (Chapitre I, Théorème 4.3.1) que si les homomorphismes $'E_2 \to {}'E_2$ induits par $f$ sont bijectifs, et si les premières filtrations sont régulières, l'homomorphisme de la cohomologie totale du premier complexe dans celle du second induit par $f$ sera aussi bijectif; par suite, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème** 4.6.2. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports* *dans* X, *et* $f : \mathcal{L}^* \to \mathcal{M}^*$ *un homomorphisme de faisceaux différentiels de base* X. *Supposons réalisées les conditions suivantes* :

(*a*) *les homomorphismes* $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*) \to \mathcal{H}^q(\mathcal{M}^*)$ *induits par f sont bijectifs;*

(*b*) *pour tout* $q \geqslant 1$, *les complexes* $H^q_\Phi(X; \mathcal{L}^*)$ *et* $H^q_\Phi(X; \mathcal{M}^*)$ *sont acycliques en tout degré;*

(*c*) *les faisceaux gradués* $\mathcal{L}^*$ *et* $\mathcal{M}^*$ *sont bornés inférieurement.*

*Alors les homomorphismes*

$$H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{M}^*))$$

*induits par f sont bijectifs.*

On notera que la condition (*b*) est toujours réalisée, en vertu du Théorème 4.4.3, dans les deux cas suivants :

(*b'*) les faisceaux $\mathcal{L}^n$, $\mathcal{M}^n$ sont flasques pour tout $n$;

(*b''*) la famille $\Phi$ est paracompactifiante, et les faisceaux $\mathcal{L}^n$, $\mathcal{M}^n$ sont $\Phi$-mous pour tout $n$.

En ce qui concerne la condition (*c*), nous montrerons au n° 4.13 qu'on peut la supprimer pourvu que l'espace X soit « de dimension finie » en un sens que nous préciserons — à savoir, s'il existe un entier $n$ tel que l'on ait $H^p_\Phi(X; \mathcal{A}) = 0$ pour tout $p > n$ et *tout* faisceau $\mathcal{A}$ de base X.

### 4. 7. — Application aux résolutions

Soit

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \dots$$

une résolution d'un faisceau $\mathcal{A}$; on peut appliquer les calculs précédents au double complexe

$$K(\mathcal{L}^*) = C^*_\Phi(X; \mathcal{L}^*) = \sum_{\substack{p \geqslant 0 \\ q \geqslant 0}} C^p_\Phi(X; \mathcal{L}^q);$$

on remarquera que cette fois on a deux homomorphismes importants, qui sont du reste injectifs :

$$(1) \qquad C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j''} C^*_\Phi(X; \mathcal{L}^*) \xleftarrow{j'} \Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*);$$

l'image de $j''$ est évidemment l'ensemble des éléments de second degré 0 annulés par $d''$, et l'image de $j'$ est l'ensemble des éléments de premier degré 0 annulés par $d'$; les homomorphismes correspondants

$$(2) \qquad H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j''^*} H^n(K) \xleftarrow{j'^*} H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*))$$

s'identifient donc aux homomorphismes

$$'E_2^{n0} \to H^n(K) \leftarrow ''E_2^{n0},$$

valables pour tout complexe double *positif*, moyennant les formules du n° 4.5 et l'identification de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^*)$.

On observera qu'ici les groupes

$$'E_2^{pq} = H_\Phi^p(X; \mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*))$$

sont forcément nuls pour $q \geqslant 1$ ; par conséquent *les homomorphismes*

$$j''^*: H_\Phi^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(K)$$

*sont bijectifs*, ce qui en tenant compte de $j'^*$ conduit à des *homomorphismes canoniques*

(3) $$\boxed{H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H_\Phi^n(X; \mathcal{A})}$$

*définis pour toute résolution $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{A}$.*

Bien entendu, on a même en fait un résultat beaucoup plus complet : *il existe une suite spectrale pour laquelle*

$$E_2^{pq} = H^p(H_\Phi^q(X; \mathcal{L}^*))$$

*et dont le terme $E_\infty$ est le groupe gradué associé à une filtration convenable de la $\Phi$-cohomologie de $X$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.*

Indiquons rapidement comment on peut obtenir l'homomorphisme (3) par des considérations élémentaires. Posons

$$\mathcal{Z}^q = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}^q \to \mathcal{L}^{q+1});$$

les suites exactes

$$0 \to \mathcal{Z}^q \to \mathcal{L}^q \to \mathcal{Z}^{q+1} \to 0$$

et le Théorème 4.4.2 conduisent à des homomorphismes

(4) $$\delta: H_\Phi^p(X; \mathcal{Z}^{q+1}) \to H_\Phi^{p+1}(X; \mathcal{Z}^q);$$

d'où successivement

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^n) = H_\Phi^0(X; \mathcal{Z}^n) \to H_\Phi^1(X; \mathcal{Z}^{n-1}) \to H_\Phi^2(X; \mathcal{Z}^{n-2}) \to \ldots$$
$$\to H_\Phi^n(X; \mathcal{Z}^0) = H_\Phi^n(X; \mathcal{A})$$

i.e., en composant les résultats obtenus, on obtient un homomorphisme $\Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^n) \to H_\Phi^n(X; \mathcal{A})$ ; cela dit (3) provient de l'homomorphisme qu'on vient de définir et de l'homomorphisme surjectif $\Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^n) \to H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*))$.

Étudions maintenant les principales propriétés des homomorphismes (3). La première de toutes est évidemment celle que voici :

**Théorème** 4.7.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, *et* $\mathscr{L}^*$ *une résolution d'un faisceau* $\mathscr{A}$. *Les homomorphismes canoniques*

$$H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)) \to H^n_\Phi(X;\mathscr{A})$$

*sont bijectifs dans les deux cas suivants :*

(*a*) *les faisceaux* $\mathscr{L}^q$ *sont flasques pour tout* $q$;

(*b*) *la famille* $\Phi$ *est paracompactifiante et les faisceaux* $\mathscr{L}^q$ *sont* $\Phi$*-mous pour tout* $q$.

*Plus généralement, ces homomorphismes sont bijectifs dès que l'on a*

$$H^p(H^q_\Phi(X;\mathscr{L}^*)) = 0 \qquad \textit{pour tout } q \geqslant 1 \textit{ et tout } p \geqslant 0.$$

**Exemple** 4.7.1. — Soient X un espace topologique, $\Phi$ une famille *paracompactifiante* dans X, et A un groupe abélien. Les cochaînes d'Alexander-Spanier de X à valeurs dans A forment une *résolution* $\mathscr{F}^*(X;A)$ de A par des faisceaux $\Phi$*-mous*; donc *on peut calculer les groupes* $H^n_\Phi(X;A)$ *à l'aide des sections à support dans* $\Phi$ *du faisceau différentiel* $\mathscr{F}^*(X;A)$ (cf. Exemple 3.9.2 pour une définition explicite de ces sections).

**Exemple** 4.7.2. — La famille $\Phi$ étant paracompactifiante, prenons une résolution

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \dots$$

de $\mathbf{Z}$ par des faisceaux $\Phi$-*fins et sans torsion*; alors, quel que soit $\mathscr{A}$, le faisceau différentiel $\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A}$ est une *résolution* de $\mathscr{A}$ par des faisceaux $\Phi$-*mous* (cf. Théorème 3.7.3); donc on a des isomorphismes canoniques

$$H^n_\Phi(X;\mathscr{A}) = H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A})).$$

**Exemple** 4.7.3. — X étant une *variété différentiable* on a une résolution du faisceau simple $\mathbf{R}$ à l'aide des faisceaux $\Omega^p$ de germes de formes différentielles; ces faisceaux sont $\Phi$-mous pour toute famille paracompactifiante $\Phi$; donc les groupes $H^p_\Phi(X;\mathbf{R})$ *peuvent se calculer en formant la cohomologie du complexe des formes différentielles de* X *à support* (¹) *dans* $\Phi$ (Théorème de de Rham). On pourrait aussi utiliser les *courants* au lieu des formes différentielles. On voit donc que, si X est paracompacte, les propriétés suivantes sont *équivalentes* pour tout entier $p$ :

(¹) Soit $\omega$ une forme différentielle de degré $p$ sur X; en tant que section du faisceau $\Omega^p$, le support de $\omega$ est le plus petit ensemble *fermé* $|\omega|$ tel que $\omega$ induise dans $X-|\omega|$ la section 0 de $\Omega^p$; i.e. tel que la restriction à $X-|\omega|$ de la forme différentielle $\omega$ soit nulle. On retrouve donc bien la notion usuelle de support d'une forme différentielle.

(*a*) dans X, toute forme différentielle *fermée* de degré $p$ ($d\omega = 0$) est *exacte* ($\omega = d\varpi$);

(*b*) la cohomologie réelle de degré $p$ de X est nulle.

On voit que la question de savoir si, pour $d\omega = 0$, on peut résoudre l'équation $\omega = d\varpi$, dépend uniquement de la structure *topologique* de X. Une étude plus détaillée des formes différentielles, en liaison avec la cohomologie singulière, figurera dans le second volume de cet ouvrage; nous n'avons voulu donner ici que le résultat le plus élémentaire.

Poursuivons l'étude générale des homomorphismes (3).

**Théorème** 4.7.2. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, *et* $\mathscr{L}^*$, $\mathscr{M}^*$ *deux résolutions de faisceaux* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$. *Supposons donné un homomorphisme* $g : \mathscr{L}^* \to \mathscr{M}^*$ *induisant un homomorphisme* $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. *Alors les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)) & \xrightarrow{g^*} & H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{M}^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X;\mathscr{A}) & \xrightarrow{f^*} & H^n_\Phi(X;\mathscr{B}) \end{array}$$

*sont commutatifs.*

Il suffit pour le voir d'examiner le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} C^*_\Phi(X;\mathscr{A}) & \to & C^*_\Phi(X;\mathscr{L}^*) & \leftarrow & \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^*_\Phi(X;\mathscr{B}) & \to & C^*_\Phi(X;\mathscr{M}^*) & \leftarrow & \Gamma_\Phi(\mathscr{M}^*). \end{array}$$

***Exemple*** 4.7.4. — Si la famille $\Phi$ est paracompactifiante et si $\mathscr{L}^*$ est une résolution de $\mathbf{Z}$ par des faisceaux $\Phi$-fins et sans torsion, alors, modulo les identifications expliquées plus haut (Exemple 4.7.2) on peut calculer

$$f^* : H^n_\Phi(X;\mathscr{A}) \to H^n_\Phi(X;\mathscr{B})$$

en considérant l'homomorphisme $1 \otimes f : \mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{L}^* \otimes \mathscr{B}$ et les homomorphismes

$$H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A})) \to H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{B}))$$

qui s'en déduisent de façon évidente.

Enfin, les opérateurs $\delta$ associés aux suites exactes de faisceaux peuvent aussi se calculer à l'aide de résolutions :

**Théorème** 4.7.3. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, *et* $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}''$ *des résolutions de faisceaux* $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}''$. *Supposons qu'on ait un diagramme commutatif de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{A}' & \to & \mathscr{A} & \to & \mathscr{A}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathscr{L}' & \to & \mathscr{L} & \to & \mathscr{L}'' & \to & 0; \end{array}$$

*enfin supposons que la suite correspondante*

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}') \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}'') \to 0$$

*soit exacte* (ce qui est toujours le cas si les résolutions considérées sont formées de faisceaux flasques, ou $\Phi$-mous). *Alors les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}'')) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X; \mathcal{A}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}') \end{array}$$

*sont commutatifs.*

Il suffit pour le voir d'écrire le diagramme commutatif de suites exactes suivant, et de passer aux suites exactes de cohomologie correspondantes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{A}') & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{A}'') & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{L}') & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{L}) & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{L}'') & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \Gamma_\Phi(\mathcal{L}') & \to & \Gamma_\Phi(\mathcal{L}) & \to & \Gamma_\Phi(\mathcal{L}'') & \to & 0 \end{array}$$

***Exemple*** 4.7.5. — Soit $\mathcal{L}^*$ une résolution de $\mathbf{Z}$ par des faisceaux $\Phi$-fins et sans torsion; alors la suite exacte de cohomologie se déduit de la suite exacte de complexes

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A}') \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A}'') \to 0$$

modulo les identifications faites dans l'Exemple 4.7.2.

## 4. 8. — Caractérisation axiomatique des groupes de cohomologie

Soient un espace topologique X et une famille $\Phi$ de supports dans X. Nous allons montrer rapidement, sans entrer dans des détails fastidieux et par ailleurs triviaux, comment les propriétés des foncteurs $H^*_\Phi(X; \mathcal{A})$ exposées au n° 4.4 permettent de *caractériser* ceux-ci à des isomorphismes près.

Supposons en effet donnés deux foncteurs additifs covariants

$$\mathcal{A} \to {}'H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \to {}''H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, et satisfaisant aux théorèmes du n° 4.4, à savoir :

(I) *on a des isomorphismes de foncteurs*

$$\begin{aligned} j' &: \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to {}'H^0_\Phi(X; \mathcal{A}) \\ j'' &: \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to {}''H^0_\Phi(X; \mathcal{A}); \end{aligned}$$

(II) *à toute suite exacte*

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{f} \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{A}'' \to 0$$

*sont attachés des homomorphismes*

$$\delta' : {}'\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \to {}'\mathrm{H}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}')$$
$$\delta'' : {}''\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \to {}''\mathrm{H}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}')$$

*dépendant fonctoriellement de $f$ et $g$, et des suites exactes*

$$\ldots {}'\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \xrightarrow{g^*} {}'\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta'} {}'\mathrm{H}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \xrightarrow{f^*} {}'\mathrm{H}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \ldots$$
$$\ldots {}''\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \xrightarrow{g^*} {}''\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta''} {}''\mathrm{H}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \xrightarrow{f^*} {}''\mathrm{H}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \ldots$$

(III) : *on a*

$${}'\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) = {}''\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1$$

*dès que $\mathcal{A}$ est flasque.*

Nous allons prouver que, dans ces conditions, il existe des *isomorphismes de foncteurs*

$$\mathrm{T}^n : {}'\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to {}''\mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A})$$

compatibles avec les opérateurs $\delta'$ et $\delta''$.

Tout d'abord la condition (I) donne immédiatement un isomorphisme

$$\mathrm{T}^0 : {}'\mathrm{H}^0_\Phi \to {}''\mathrm{H}^0_\Phi.$$

Procédant par récurence, supposons alors défini $\mathrm{T}^{n-1}$; nous allons montrer comment on en déduit $\mathrm{T}^n$.

Considérons pour cela la suite exacte de faisceaux

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \mathcal{Z}^1(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to 0;$$

on en déduit, en vertu de l'axiome (II), deux suites exactes de cohomologie. Distinguons alors deux cas.

Si $n = 1$, on obtient en vertu des axiomes (I) et (III) le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) & \to & \mathrm{C}^0_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) & \to & \mathrm{Z}^1_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) & \xrightarrow{\delta'} & {}'\mathrm{H}^1_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 \to & \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) & \to & \mathrm{C}^0_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) & \to & \mathrm{Z}^1_\Phi(\mathrm{X}; \mathrm{A}) & \xrightarrow{\delta''} & {}''\mathrm{H}^1_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) & \to 0
\end{array}$$

dont les trois flèches verticales se réduisent à l'identité par l'intermédiaire de l'isomorphisme $\mathrm{T}^0$ [on a posé $\mathrm{Z}^1_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^1(\mathrm{X}; \mathcal{A}))$].

Il s'ensuit qu'il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{T}^1 : {}'\mathrm{H}^1_\Phi \to {}''\mathrm{H}^1_\Phi$$

et un seul qui préserve la commutativité du diagramme précédent.

Supposons maintenant $n > 1$; alors les suites exactes de cohomologie de (1), compte tenu de l'axiome (III), donnent un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & {}'H_\Phi^{n-1}(X; \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A})) & \xrightarrow{\delta'} & {}'H_\Phi^n(X; \mathcal{A}) & \to & 0 \\ & & \downarrow T^{n-1} & & & & \\ 0 & \to & {}''H_\Phi^{n-1}(X; \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A})) & \xrightarrow{\delta''} & {}''H_\Phi^n(X; \mathcal{A}) & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes; d'où un isomorphisme de foncteurs et un seul

$$T^n : {}'H_\Phi^n \to {}''H_\Phi^n$$

qui rende commutatif le diagramme prédécent.

Il resterait à vérifier que les transformations naturelles ainsi construites satisfont bien à toutes les conditions posées; on laisse au lecteur le soin de le faire

***Exemple*** 4.8.1. — Nous allons utiliser le résultat précédent pour résoudre le problème suivant.

Nous avons vu qu'à toute résolution $\mathcal{L}^*$ d'un faisceau $\mathcal{A}$ est attaché un homomorphisme canonique

$$H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H_\Phi^*(X; \mathcal{A}).$$

Si l'on applique ce résultat à la résolution *canonique* $\mathcal{L}^* = \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$ on trouve donc (puisque cette résolution est flasque) un *isomorphisme*

$$T(\mathcal{A}) : H_\Phi^*(X; \mathcal{A}) \to H_\Phi^*(X; \mathcal{A});$$

il n'est nullement évident *a priori* que cet isomorphisme se réduise à l'identité; nous allons cependant montrer qu'il en est bien ainsi.

En effet, en vertu des théorèmes généraux du nº 4.7, T est en fait un isomorphisme de *foncteurs*, compatible avec les opérateurs $\delta$ des suites exactes de cohomologie. Pour vérifier que T est l'identité il suffit donc de le faire *en degré* 0 — auquel cas c'est évident.

On laisse au lecteur le soin de raisonner directement sur le complexe double

$$C_\Phi^*(X; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}));$$

une démonstration directe s'obtiendrait en considérant le faisceau différentiel $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))$, muni de sa différentielle et de sa graduation totales.

On pourrait naturellement itérer indéfiniment cette construction; on trouverait toujours le même résultat...

### 4. 9. — Cohomologie d'un sous-espace localement fermé

Soient X un espace, A un sous-espace localement fermé de X, et $\mathcal{L}$ un faisceau de base X; si $\Phi$ est une famille de supports dans A, nous poserons par abus de notation

$$H^*_\Phi(A;\mathscr{L}) = H^*_\Phi(A;\mathscr{L}|A).$$

Si les $S \in \Phi$ sont *fermés dans* X on pourra aussi considérer $\Phi$ comme une famille de supports dans X, et considérer les groupes $H^*_\Phi(X;\mathscr{L})$.

Nous dirons d'autre part qu'un faisceau $\mathscr{L}$ de base X est *localement concentré sur* A si tout $x \in A$ possède dans X un voisinage ouvert U tel que $\mathscr{L}$ induise 0 dans $U - U \cap A$; c'est en particulier le cas si $\mathscr{L}$ est *concentré sur* A, i.e. si $\mathscr{L}$ induit 0 dans X-A.

Montrons tout d'abord que, sans faire aucune hypothèse sur A ou sur $\mathscr{L}$, on peut définir un homomorphisme canonique de faisceaux différentiels

$$\mathscr{C}^*(X;\mathscr{L})|A \to \mathscr{C}^*(A;\mathscr{L}). \tag{1}$$

Il suffit évidemment de le faire en degré 0, puis d'itérer la construction de façon évidente.

Or soit U un ouvert du sous-espace A(U n'est pas nécessairement ouvert dans X); nous devons construire de façon *naturelle* un homomorphisme

$$\mathscr{C}^0(X;\mathscr{L})(U) \to \mathscr{C}^0(A;\mathscr{L})(U);$$

tout d'abord on a par définition

$$\mathscr{C}^0(A;\mathscr{L})(U) = \prod_{x\in U} \mathscr{L}(x); \tag{2}$$

considérons maintenant les groupes ponctuels $\mathscr{C}^0(X;\mathscr{L})(x)$; un germe de section en $x$ du faisceau $\mathscr{C}^0(X;\mathscr{L})$ n'est autre qu'un germe de section non nécessairement continue de $\mathscr{L}$ en $x$ : il a donc en $x$ une *valeur* bien déterminée, élément du groupe $\mathscr{L}(x)$; autrement dit on a pour tout $x$ un homomorphisme canonique

$$v(x) : \mathscr{C}^0(X;\mathscr{L})(x) \to \mathscr{L}(x);$$

donc pour toute partie U de X, *ouverte ou non*, on a un homomorphisme

$$v(U) : \mathscr{C}^0(X;\mathscr{L})(U) \to \prod_{x\in U} \mathscr{L}(x) :$$

si $s$ est un élément du premier membre, $v(U)s$ est l'élément $(v(x)s(x))_{x\in U}$ du second membre.

Cela dit, l'homomorphisme (1) sera défini en degré 0 par la collection des $v(U)$, U ouvert dans A.

Une fois (1) défini en degré 0, on en déduit par passage au quotient un homomorphisme

$$\mathscr{Z}^1(X;\mathscr{L})|A \to \mathscr{Z}^1(A;\mathscr{L}),$$

d'où, en composant avec l'homomorphisme (1) en degré 0 pour le faisceau $\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{L})$, l'homomorphisme (1) en degré 1, et ainsi de suite indéfiniment.

**Lemme** 4.9.1. — *Si le faisceau $\mathcal{L}$ est localement concentré sur* A, *l'homomorphisme canonique*

$$\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})|A \to \mathcal{C}^*(A; \mathcal{L})$$

*est bijectif.*

En raisonnant par récurence on voit qu'il suffit de faire la démonstration en degré 0, et pour cela d'examiner les groupes ponctuels en un point $x \in A$. Or on a

$$\mathcal{C}^0(X; \mathcal{L})(x) = \lim_{U \ni x} \text{ind.} \prod_{y \in U} \mathcal{L}(y)$$

$$\mathcal{C}^0(A; \mathcal{L})(x) = \lim_{U \ni x} \text{ind.} \prod_{y \in A \cap U} \mathcal{L}(y),$$

lorsque U décrit l'ensemble des voisinages ouverts de $x$ dans X. Étant donné que, pour U assez petit, on a $\mathcal{L}(y) = 0$ si $y \in U - U \cap A$, le résultat cherché s'obtient aussitôt.

Reprenons un sous-espace A et un faisceau $\mathcal{L}$ de base X. En composant l'homomorphisme (1) avec celui qui associe, à toute section au-dessus de X d'un faisceau, sa restriction au sous-espace A, on trouve un homomorphisme de complexes

$$C^*(X; \mathcal{L}) \to C^*(A; \mathcal{L}).$$

De plus, soit $\Phi$ une famille de supports dans X, et notons $\Phi \cap A$ la famille des ensembles $S \cap A$, $S \in \Phi$ (c'est donc une famille de supports dans l'espace A); il est évident que l'homomorphisme précédent induit un homomorphisme

$$C^*_\Phi(X; \mathcal{L}) \to C^*_{\Phi \cap A}(A; \mathcal{L})$$

ce qui, en passant à la cohomologie, donne des homomorphismes

$$\boxed{H^n_\Phi(X; \mathcal{L}) \to H^n_{\Phi \cap A}(A; \mathcal{L})}$$

définis sans aucune hypothèse sur A, $\Phi$ ou $\mathcal{L}$.

**Théorème** 4.9.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, $\mathcal{L}$ *un faisceau de base* X, *et* A *un sous-espace de* X. *Les homomorphismes canoniques*

$$H^n_\Phi(X; \mathcal{L}) \to H^n_{\Phi \cap A}(A; \mathcal{L})$$

*sont bijectifs dans les cas suivants :*

(*a*) A *est fermé dans* X, *et* $\mathcal{L}$ *est concentré sur* A;

(*b*) A *est localement fermé dans* X, $\mathscr{L}$ *est localement concentré sur* A, *et tous les* $S \in \Phi$ *sont contenus dans* A (de sorte que $\Phi = \Phi \cap A$).

En fait nous allons démontrer dans ces deux cas que l'homomorphisme

$$C^*_\Phi(X; \mathscr{L}) \to C^*_{\Phi \cap A}(A; \mathscr{L})$$

est bijectif, ce qui impliquera le théorème.

En effet, dans ces deux cas on a d'après le Lemme 4.9.1 un isomorphisme $\mathcal{C}^*(X; \mathscr{L})|A = \mathcal{C}^*(A; \mathscr{L})$. Or, si $\mathscr{L}$ induit 0 dans un *ouvert* U il est clair qu'il en est de même de $\mathcal{C}^*(X; \mathscr{L})$ par construction même. Dans le cas (*a*) on voit donc que $\mathcal{C}^*(X; \mathscr{L})$ est concentré sur A, ce qui démontre aussitôt l'assertion du Théorème. Dans le cas (*b*), prenons un $x \in A$; $x$ possède dans X un voisinage ouvert U tel que $A \cap U$ soit fermé dans U, et tel que $\mathscr{L}$ induise 0 dans $U - U \cap A$; comme $U - U \cap A$ est *ouvert* dans X, on voit que $\mathcal{C}^*(X; \mathscr{L})$ est lui aussi localement concentré sur A; donc tout revient à établir le

**Lemme** 4.9.2. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, $\mathscr{F}$ *un faisceau de base* X, *et* A *un sous-espace de* X. *Pour que l'homomorphisme canonique*

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{F}) \to \Gamma_{\Phi \cap A}(\mathscr{F}|A)$$

*soit bijectif il suffit que* $\mathscr{F}$ *soit localement concentré sur* A *et que tous les* $S \in \Phi$ *soient contenus dans* A.

Il est clair que dans les hypothèses faites l'homomorphisme considéré est injectif; il suffit donc de montrer qu'il est surjectif. Or soit une section $s \in \Gamma_{\Phi \cap A}(\mathscr{F}|A)$, i.e. une section de $\mathscr{F}$ au-dessus de A nulle en dehors d'un $S \in \Phi$, et notons $\bar{s}$ l'application de X dans l'espace étalé $\mathscr{F}$ égale à $s$ sur A, à 0 sur X-A : tout revient à montrer que $\bar{s}$ est continue en tout point $x \in X$. Il suffit d'ailleurs de faire la démonstration lorsque $x \in \bar{A}$. Tout d'abord, dans le cas où $x \in A$, le point $x$ possède dans X un voisinage ouvert U tel que $\mathscr{L}$ induise 0 dans $U - U \cap A$; puisque la restriction de $\bar{s}$ à $U \cap A$ est continue il est clair qu'alors $\bar{s}$ est continue dans U, et en particulier en $x$. Supposons maintenant $x \in \bar{A} - A$; comme $s$ est nulle en dehors d'un ensemble $S \subset A$ qui est *fermé dans* X, $\bar{s}$ est nulle au voisinage de $x$; ceci démontre le Lemme.

**Corollaire.** — *Soient* X *un espace topologique,* A *un sous-espace fermé de* X, *et* $\mathscr{F}$ *un faisceau de base* A. *On a des isomorphismes canoniques*

$$H^n(A; \mathscr{F}) = H^n(X; \mathscr{F}^X).$$

Ce dernier résultat ne s'étend pas aux sous-espaces localement fermés; en particulier il peut être en défaut pour les sous-espaces ouverts.

**4. 10. — Suite exacte associée à un sous-espace fermé**

Soient X un espace topologique, $\mathcal{L}$ un faisceau de base X, et A un sous-espace *fermé* de X; on a alors (Théorème 2.9.3) une suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}_{X-A} \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}_A \to 0;$$

il en résulte, pour toute famille $\Phi$ de supports dans X, une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \to H^n_\Phi(X; \mathcal{L}_{X-A}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{L}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{L}_A) \to H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{L}_{X-A}) \to \cdots.$$

Notons d'une manière générale, pour tout sous-espace Y de X, par $\Phi|Y$ l'ensemble des $S \in \Phi$ contenus dans Y (on a $\Phi|Y = \Phi \cap Y$ si Y est fermé dans X). D'après le Théorème 4.9.1, (*a*), il vient

$$\text{(1)} \qquad H^n_\Phi(X; \mathcal{L}_A) = H^n_{\Phi|A}(A; \mathcal{L}).$$

Considérons maintenant les groupes $H^n_\Phi(X; \mathcal{L}_{X-A})$; ce sont les groupes de cohomologie du complexe

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_{X-A})) = C^*_\Phi(X; \mathcal{L}_{X-A}).$$

Or, puisque X-A est *ouvert*, on a un homomorphisme canonique

$$\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_{X-A})_{X-A} \to \mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_{X-A}),$$

d'où résulte un homomorphisme

$$\text{(2)} \qquad \Gamma_\Phi[\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_{X-A})_{X-A}] \to C^*_\Phi(X; \mathcal{L}_{X-A});$$

mais si un faisceau $\mathcal{F}$ de base X est concentré sur X-A, ses sections ont pour supports des ensembles contenus dans X-A, d'où immédiatement, en appliquant le Lemme 4.9.2, un isomorphisme

$$\text{(3)} \qquad \Gamma_\Phi(\mathcal{F}) = \Gamma_{\Phi|X-A}(\mathcal{F}|X-A);$$

par suite il vient

$$\begin{aligned}\Gamma_\Phi[\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_{X-A})_{X-A}] &= \Gamma_{\Phi|X-A}[\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_{X-A})|X-A] \\ &= \Gamma_{\Phi|X-A}[\mathcal{C}^*(X-A; \mathcal{L})] = C^*_{\Phi|X-A}(X-A; \mathcal{L})\end{aligned}$$

en vertu du Lemme 4.9.1 (on observera que, X-A étant ouvert, *tout* faisceau de base X est localement concentré sur X-A).

Par suite (2) se traduit en un homomorphisme canonique

$$C^*_{\Phi|X-A}(X-A; \mathcal{L}) \to C^*_\Phi(X; \mathcal{L}_{X-A});$$

de là résultent des homomorphismes canoniques

$$\boxed{H^n_{\Phi|X-A}(X-A;\mathcal{L}) \to H^n_\Phi(X;\mathcal{L}_{X-A})}. \tag{4}$$

*Si la famille $\Phi$ est paracompactifiante, ces homomorphismes sont bijectifs.* En effet, l'homomorphisme

$$\mathcal{C}^*(X;\mathcal{L}_{X-A})_{X-A} \to \mathcal{C}^*(X;\mathcal{L}_{X-A})$$

dont nous sommes partis est manifestement un homomorphisme de *résolutions* de $\mathcal{L}_{X-A}$; tout revient donc à montrer que $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{L}_{X-A})_{X-A}$ est $\Phi$-mou; cela résulte directement du Théorème 3.5.5, (*b*).

En conséquence :

**Théorème** 4.10.1. — *Soient* X *un espace topologique,* A *un sous-espace fermé de* X, *et* $\Phi$ *une famille paracompactifiante dans* X. *Pour tout faisceau* $\mathcal{L}$ *de base* X, *on a une suite exacte de cohomologie*

$$\cdots \to H^n_{\Phi|X-A}(X-A;\mathcal{L}) \to H^n_\Phi(X;\mathcal{L}) \to H^n_{\Phi|A}(A;\mathcal{L}) \to H^{n+1}_{\Phi|X-A}(X-A;\mathcal{L}) \cdots$$

L'un des cas les plus importants est celui où X est compact, $\Phi$ étant la famille de tous les fermés de X; on trouve alors dans la suite précédente la cohomologie *à supports compacts* de l'espace localement compact X—A.

**Remarque** 4.10.1. — Sans supposer la famille $\Phi$ paracompactifiante, on peut définir des homomorphismes

$$H^n_{\Phi|A}(A;\mathcal{L}) \to H^n_\Phi(X;\mathcal{L}_A)$$

pour tout sous-espace *localement fermé* A de X; en effet, le premier membre est la cohomologie du complexe $\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(X;\mathcal{L})_A)$; or il est clair que $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{L})_A$ est une *résolution* de $\mathcal{L}_A$; les homomorphismes cherchés résultent alors du n° 4.7. Bien entendu, si A est ouvert, on retrouve les homomorphismes définis plus haut sans utilisation de suites spectrales, à cause du Théorème 4.7.2.

Si la famille $\Phi$ est paracompactifiante, le Théorème 3.5.5, (*b*), montre encore que $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{L})_A$ est une résolution de $\mathcal{L}_A$ par des faisceaux $\Phi$-mous; par suite, les homomorphismes en question sont bijectifs dans ce cas. On pourrait d'ailleurs retrouver ce fait en combinant le cas d'un sous-espace ouvert, traité plus haut, avec celui d'un sous-espace fermé, élucidé dans le Théorème 4.9.1.

**Remarque** 4.10.2. — On peut encore obtenir la suite exacte de cohomologie du Théorème 4.10.1 comme suit; prenons une résolution $\mathcal{F}^*$ du faisceau $\mathcal{L}$ par des faisceaux $\Phi$-mous, et écrivons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}^*_{X-A} \to \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}^*_A \to 0;$$

tous les faisceaux qui interviennent ici sont $\Phi$-mous, de sorte qu'il vient une suite exacte de complexes

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{F}^*_{X-A}) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{F}^*) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{F}^*_A) \to 0$$

et par conséquent une suite exacte correspondante en cohomologie; on sait en vertu du Théorème 4.7.3 que celle-ci s'identifie canoniquement à la suite exacte reliant les faisceaux $\mathscr{L}_{X-A}$, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_A$; par ailleurs on a

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{F}^*_{X-A}) = \Gamma_{\Phi|X-A}(\mathscr{F}^*|X-A); \ \Gamma_\Phi(\mathscr{F}^*_A) = \Gamma_{\Phi|A}(\mathscr{F}^*|A);$$

comme $\mathscr{F}^*$ induit dans X-A (resp. A) une résolution de $\mathscr{L}|$X-A (resp. $\mathscr{L}|$A) par des faisceaux ($\Phi|$X-A)-mous (resp. ($\Phi|$A)-mous), en vertu du Théorème 3.5.5, on obtient des isomorphismes canoniques

$$H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{F}^*_{X-A})) = H^n_{\Phi|X-A}(X-A; \mathscr{L}); \ H^n_\Phi(\Gamma_\Phi(\mathscr{F}^A_*)) = H^n_{\Phi|A}(A; \mathscr{L}),$$

ce qui donne tous les résultats cherchés.

Ce procédé est souvent utile pour exprimer les groupes $H^n_{\Phi|X-A}(X\text{-}A; \mathscr{L})$ comme groupes de cohomologie « relatifs » au sens classique du terme.

***Exemple*** 4.10.1. — L'espace X étant provisoirement quelconque, considérons le faisceau différentiel $\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})$ des cochaînes d'Alexander-Spanier de X, à valeurs entières; nous noterons $F^n(X; \mathbf{Z})$ le groupe des applications $X^{n+1} \to \mathbf{Z}$ modulo celles qui sont « de support vide », i.e. localement nulles.

Si A est un sous-espace fermé de X, on a de façon évidente une suite exacte

$$0 \to F^*(X \bmod A; \mathbf{Z}) \to F^*(X; \mathbf{Z}) \to F^*(A; \mathbf{Z}) \to 0$$

en associant à chaque application $X^{n+1} \to \mathbf{Z}$ sa restriction à $A^{n+1}$; il en résulte une suite exacte de cohomologie qu'il est superflu d'écrire; disons simplement que les groupes de cohomologie du noyau $F^*(X \bmod A; \mathbf{Z})$ se notent $H^n(X \bmod A; \mathbf{Z})$.

Supposons maintenant X *paracompact*; on sait qu'alors

$$F^*(X; \mathbf{Z}) = \Gamma(\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z}))$$

(cf. Exemple 3.9.2); on a de même

$$F^*(A; \mathbf{Z}) = \Gamma(\mathscr{F}^*(A; \mathbf{Z})),$$

et comme $\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})$ et $\mathscr{F}^*(A; \mathbf{Z})$ sont fins on a (Exemple 4.7.1)

$$H^n(X; \mathbf{Z}) = H^n(F^*(X; \mathbf{Z})); \ H^n(A; \mathbf{Z}) = H^n(F^*(A; \mathbf{Z})).$$

Or on a un diagramme commutatif de suite exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Gamma(\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})_{X-A}) & \to & \Gamma(\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})) & \to & \Gamma(\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})_A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F^*(X \bmod A; \mathbf{Z}) & \to & F^*(X; \mathbf{Z}) & \to & F^*(A; \mathbf{Z}) & \to & 0
\end{array}$$

comme suit : une section de $\mathcal{F}^*(X; \mathbf{Z})_A$ s'identifie canoniquement à une section de $\mathcal{F}^*(X; \mathbf{Z})$ au-dessus de A, laquelle se prolonge à X, donc définit une application $X^{n+1} \to \mathbf{Z}$ (non biunivoquement : deux telles applications définissent la même section au-dessus de A si et seulement si le support de leur différence ne rencontre pas A); la restriction de cette application à $A^{n+1}$ est alors, par définition, l'image de la section donnée par l'homomorphisme

$$\Gamma(\mathcal{F}^*(X; \mathbf{Z})_A) \to F^*(A; \mathbf{Z});$$

on définirait de façon analogue l'homomorphisme de gauche.

Cela dit, en comparant les suites exactes de cohomologie correspondantes on trouve le résultat suivant :

$$\boxed{H^*(X \bmod A; \mathbf{Z}) = H^*_\Phi(X - A; \mathbf{Z})}$$

où $\Phi$ est formée des parties de X-A qui sont fermées dans X.

Le résultat précédent est non trivial parce que l'homomorphisme

$$\Gamma(\mathcal{F}^*(X; \mathbf{Z})_{X-A}) \to F^*(X \bmod A; \mathbf{Z})$$

n'est pas bijectif; il est clair en effet que l'image de cet homomorphisme est formé des cochaînes d'Alexander-Spanier de X qui sont nulles *au voisinage de* A, et non de celles qui induisent 0 sur A.

### 4. 11. — Relations entre la cohomologie d'un sous-espace et celle de ses voisinages

Soient X un espace topologique et $\mathcal{L}$ un faisceau de base X; nous nous bornerons ici à étudier la cohomologie à supports quelconques.

Étant données deux parties A et B de X, avec $A \supset B$, il résulte du nº 4.9 qu'on a un homomorphisme canonique

$$\mathcal{C}^*(A; \mathcal{L})|B \to \mathcal{C}^*(B; \mathcal{L})$$

d'où, en passant aux sections, un homomorphisme

$$C^*(A; \mathcal{L}) \to C^*(B; \mathcal{L}),$$

ce qui définit des homomorphismes de « restriction »

$$\boxed{H^n(A; \mathcal{L}) \to H^n(B; \mathcal{L}) \qquad \text{pour} \qquad A \supset B.}$$

Il va de soi que les conditions de transivité usuelles sont satisfaites; ceci montre par exemple que la formule

$$U \to H^n(U; \mathcal{L})$$

définit un *préfaisceau* de base X; si $n = 0$ ce n'est autre que $\mathcal{L}$; si $n \geqslant 1$, ce préfaisceau engendre un faisceau *nul*, car dans $C^*(U; \mathcal{L})$ tout cocycle de degré $n \geqslant 1$ est *localement* un cobord.

Énonçons maintenant le principal résultat de ce n° :

**Théorème** 4.11.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\mathcal{L}$ *un faisceau de base* X, *et* A *un sous-espace de* X. *Pour que l'homomorphisme canonique*

$$\lim_{U \supset A} \text{ind. } H^*(U; \mathcal{L}) \to H^*(A; \mathcal{L})$$

*soit bijectif, il suffit que l'une des conditions suivantes soit remplie :*

(*a*) X *est paracompact et* A *est fermé dans* X;

(*b*) X *est métrisable.*

En effet, dans chacun de ces deux cas on a, d'après le Théorème 3.3.1 et ses corollaires, des isomorphismes

$$\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})(A) = \text{lim. ind. } \mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})(U) = \text{lim. ind. } C^*(U; \mathcal{L}),$$

et par conséquent tout revient à prouver que la résolution $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})|A$ du faisceau $\mathcal{L}|A$ permet de calculer les groupes $H^n(A; \mathcal{L})$. Or dans le cas (*a*) les faisceaux $\mathcal{C}^n(X; \mathcal{L})|A$ sont mous (Théorème 3.4.2), et dans le cas (*b*) ils sont même flasques (Corollaire 2 du Théorème 3.3.1), d'où le résultat.

Il va de soi que, lorsque le Théorème ci-dessus est valable, on peut remplacer les voisinages ouverts de A par un système fondamental quelconque de voisinages (ouverts ou non) de A.

## 4. 12. — Cohomologie à valeurs dans une limite inductive

Soient X un espace, $\Phi$ une famille de supports dans X, et

$$\mathcal{L} = \lim_{\lambda} \text{ind. } \mathcal{L}_\lambda$$

une limite inductive de faisceaux sur X. On a des homomorphismes de faisceaux différentiels

$$\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_\lambda) \to \mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})$$

d'où évidemment un homomorphisme

$$(1) \qquad \lim_{\lambda} \text{ind. } \mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}_\lambda) \to \mathcal{C}^*(X; \mathcal{L});$$

or le premier membre de (1) est une résolution de $\mathcal{L}$, comme on le voit aussitôt en se plaçant au point de vue « ponctuel ». Malheureusement on ignore si cette résolution est flasque, et de plus il n'est généralement pas vrai que les sections à support dans $\Phi$ de cette résolution s'identifient aux éléments du complexe

$$\text{lim. ind. } C^*_\Phi(X; \mathcal{L}_\lambda).$$

Si la famille $\Phi$ est paracompactifiante, le premier membre de (1) est toutefois formé de faisceaux $\Phi$-mous, car chaque faisceau $\mathcal{C}^n(X; \mathcal{L}_\lambda)$ est canoniquement un Module sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{C}^0(X; \mathbf{Z})$, qui est flasque; à la limite, le premier membre de (1) est donc aussi un Module sur un faisceau d'anneaux flasque. On peut donc dans ce cas calculer la $\Phi$-cohomologie à valeurs dans $\mathcal{L}$ à l'aide des sections du premier membre de (1).

Si de plus X est localement compact, $\Phi$ étant la famille des compacts de X, la seconde difficulté ne se présente pas non plus en vertu du Théorème 3.10.1. Donc :

***Théorème*** 4.12.1. — *Soit*

$$\mathcal{L} = \lim_{\lambda}.\text{ind. } \mathcal{L}_\lambda$$

*une limite inductive de faisceaux sur un espace* X localement compact; *alors, en cohomologie à* supports compacts, *les homomorphismes canoniques*

$$\lim_{\lambda}.\text{ind. } H^n_c(X; \mathcal{L}_\lambda) \to H^n_c(X; \mathcal{L})$$

*sont bijectifs.*

De même, lorsque X est un *espace de Zariski*, on sait d'après le n° 3.10 que le premier membre de (1) est une résolution *flasque* de $\mathcal{L}$ et de plus que les sections de cette résolution forment un complexe isomorphe à la limite inductive des complexes $C^*(X; \mathcal{L}_\lambda)$; on a donc dans ce cas le même résultat que ci-dessus, à savoir

$$H^*(X; \mathcal{L}) = \lim_{\lambda}.\text{ind. } H^*(X; \mathcal{L}_\lambda).$$

## 4. 13. — Dimension cohomologique

Soient X un espace topologique et $\Phi$ une famille de supports dans X; on dit que X est de *$\Phi$-dimension finie* s'il existe un entier $n$ tel que l'on ait

$$H^i_\Phi(X; \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i > n$$

quel que soit le faisceau $\mathcal{A}$ sur X; le plus petit entier $n$ possédant la propriété précédente s'appelle alors la *$\Phi$-dimension* de X; si $\Phi$ est la famille de tous les fermés, on dit que $n$ est la dimension (ou *dimension cohomologique*) de X.

On dira d'autre part qu'un faisceau $\mathcal{A}$ de base X est *$\Phi$-acyclique* si l'on a $H^i_\Phi(X; \mathcal{A}) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$, ce qui est le cas par exemple si $\mathcal{A}$ est flasque, ou, $\Phi$ étant paracompactifiante, si $\mathcal{A}$ est $\Phi$-mou. Si l'on a une résolution $\mathcal{A}^*$ d'un faisceau $\mathcal{A}$ par des faisceaux $\mathcal{A}^n$ qui sont $\Phi$-acycliques, il est clair (Théorème 4.7.1) que

$$H^i_\Phi(X;\mathcal{A}) = H^i(\Gamma_\Phi(\mathcal{A}^*))$$

pour tout $i$; par suite, si tout faisceau $\mathcal{A}$ de base X admet une résolution $\Phi$-acyclique *de longueur n* (i.e. telle que $\mathcal{A}^i = 0$ pour $i > n$), l'espace X est de $\Phi$-dimension $\leqslant n$. La réciproque est du reste vraie; considérons en effet la résolution canonique $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})$; pour tout $n$ on en déduit une résolution de longueur $n$ de $\mathcal{A}$, à savoir

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X;\mathcal{A}) \to \cdots \to \mathcal{C}^{n-1}(X;\mathcal{A}) \to \mathcal{Z}^n(X;\mathcal{A}) \to 0,$$

et comme on a

$$H^i_\Phi(X;\mathcal{Z}^n(X;\mathcal{A})) = H^{i+n}_\Phi(X;\mathcal{A})$$

pour $i > 0$, il est clair que X est de $\Phi$-dimension $\leqslant n$ si et seulement si $\mathcal{Z}^n(X;\mathcal{A})$ est $\Phi$-acyclique, ce qui prouve évidemment notre assertion.

Dans un espace de $\Phi$-dimension finie, on peut améliorer les théorèmes fondamentaux du n° 4.6. En effet, au lieu d'utiliser la résolution canonique $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})$ pour former des doubles complexes, on peut, si X est de $\Phi$-dimension $n$, utiliser la résolution $\Phi$-acyclique définie par la suite exacte (1); si l'on désigne encore, par abus de notation, cette résolution par $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})$, il est clair — puisque dans tous les cas $\mathcal{A} \to \mathcal{Z}^p(X;\mathcal{A})$ est un foncteur exact en $\mathcal{A}$ — que l'on obtient encore un foncteur *exact* $\mathcal{A} \to \mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})$; de plus, désignant encore par $C^*_\Phi(X;\mathcal{A})$ le complexe des sections à support dans $\Phi$ de $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})$, on voit immédiatement, puisque les faisceaux $\mathcal{Z}^n(X;\mathcal{A})$ sont $\Phi$-acycliques, que le foncteur $\mathcal{A} \to C^*_\Phi(X;\mathcal{A})$ est lui aussi exact. Ceci dit, si l'on a sur X un faisceau différentiel $\mathcal{L}^*$, la première graduation du double complexe $C^*_\Phi(X;\mathcal{L}^*)$ est bornée *inférieurement et supérieurement*, en sorte que les deux suites spectrales de ce double complexe sont toujours « convergentes », même si $\mathcal{L}^*$ n'est pas borné inférieurement. On déduit de là, par exemple, que *si* X est *$\Phi$-dimension finie le Théorème* 4.6.2 *est vrai même si les faisceaux gradués $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ ne sont pas bornés inférieurement.* Ce résultat est essentiel dans la théorie des variétés par exemple, comme nous le montrerons dans le tome II de cet ouvrage.

## 4.14. — Caractère local de la dimension dans les espaces paracompacts

Dans ce n° nous allons examiner le cas d'un espace X *paracompact* en prenant pour $\Phi$ la famille de tous les fermés de X. Pour que X soit de dimension $\leqslant n$, il faut et il suffit que $\mathcal{Z}^n(X;\mathcal{A})$ soit acyclique pour tout faisceau $\mathcal{A}$; or $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})$ est une résolution de $\mathcal{A}$ par des faisceaux *fins*; donc, pour tout ouvert U de X, $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})_U = \mathcal{C}^*(X;\mathcal{A}) \otimes \mathbf{Z}_U$ est une résolution de $\mathcal{A}_U$ par des faisceaux fins, donc acycliques; on en déduit que $\mathcal{Z}^n(X;\mathcal{A})_U$ est acyclique pour tout ouvert U de X, et comme on a pour tout faisceau $\mathscr{F}$ la suite exacte

$$0 \to \Gamma(\mathscr{F}_U) \to \Gamma(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}(X - U) \to H^1(X; \mathscr{F}_U)$$

cela montre que $\mathscr{Z}^n(X; \mathscr{A})$ est *mou* si X est de dimension $\leqslant n$; donc, *un espace paracompact* X *est de dimension* $\leqslant n$ *si et seulement si tout faisceau de base* X *admet une résolution de longueur n par des faisceaux mous.*

On déduit de là que, pour un espace paracompact X, la propriété

$$\dim(X) \leqslant n$$

est de nature *locale*. Supposons en effet que tout point $x \in X$ admette dans X un voisinage $U(x)$ de dimension $\leqslant n$; on peut évidemment supposer $U(x)$ fermé dans X (car la dimension d'un fermé est inférieure à celle de l'espace ambiant en vertu du Corollaire au Théorème 4.9.1); pour tout faisceau $\mathscr{A}$ de base X, $\mathscr{C}^*(X; \mathscr{A})$ induit dans $U(x)$ une résolution de $\mathscr{A}|U(x)$ par des faisceaux fins, et comme $U(x)$ est de dimension $\leqslant n$, et de plus paracompact, les raisonnements précédents montrent que $\mathscr{Z}^n(X; \mathscr{A})$ induit dans $U(x)$ un faisceau mou; donc $\mathscr{Z}^n(X; \mathscr{A})$ est mou (Théorème 3.4.1), et par suite nous avons le résultat annoncé :

***Théorème*** 4.14.1. — *Pour qu'un espace* X *paracompact soit de dimension cohomologique* $\leqslant n$ *il faut et il suffit que tout point de* X *admette un voisinage de dimension cohomologique* $\leqslant n$.

***Remarque*** 4.14.1. — Si l'on a une famille paracompactifiante $\Phi$ dans un espace quelconque X, il est immédiat de voir que la relation

$$\dim_\Phi(X) \leqslant n$$

équivaut à la relation

$$\dim(S) \leqslant n \qquad \text{pour tout } S \in \Phi,$$

de sorte que le Théorème précédent couvre essentiellement le cas d'une famille paracompactifiante quelconque.

Notons enfin le résultat suivant relatif aux espaces métrisables, résultat dont on ignore s'il vaut pour tous les espaces paracompacts :

***Théorème*** 4.14.2. — *Soit* X *un espace* métrisable; *si* X *est de dimension cohomologique* $\leqslant n$, *il en est de même de tout sous-espace de* X.

Soit en effet $\mathscr{L}$ un faisceau sur un sous-espace A de X; il existe (Théorème 2.9.4) un faisceau de base X qui induit dans A le faisceau donné; donc il suffit de prouver que l'on a

$$H^i(A; \mathscr{L}) = 0 \text{ pour } i > n$$

lorsque $\mathscr{L}$ est un faisceau de base X. Or d'après le Théorème 4.11.1 la cohomologie de A est limite inductive des cohomologies des voisinages de A dans X; on peut donc se ramener au cas où A est un sous-espace *ouvert* de X. Comme A est paracompact puisque métrisable, il suffit (Théorème 4.14.1) de montrer que tout $a \in A$ possède dans A un voisinage $V(a)$ de dimension cohomologique $\leqslant n$; ce qui est évident puisque tout $a \in A$ possède dans A un voisinage qui est *fermé dans* X. D'où le Théorème.

## 4.15. — Cas des espaces compacts ou de Zariski

Nous allons démontrer le résultat suivant, dû à A. Grothendieck :

**Théorème** 4.15.1. — *Soit* X *un espace compact* (*resp. de Zariski*). *Pour que* X *soit de dimension cohomologique* $\leqslant n$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$H^i(X; \mathbf{Z}_U) = 0 \qquad \textit{pour tout } i > n$$

*et pour tout ouvert* U *de* X.

Supposons en effet la condition de l'énoncé réalisée; soit $\mathscr{A}$ un faisceau de groupes abéliens sur X.

On sait (Remarque 2.9.2) qu'il existe une famille d'ouverts $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et un homomorphisme *surjectif*

$$\bigoplus_{\iota \in I} \mathbf{Z}_{U_\iota} \to \mathscr{A}.$$

Si la relation

$$H^p(X; \mathscr{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad p > n$$

est établie lorsque la famille est I finie, elle sera vraie aussi dans le cas général en vertu du Théorème 4.12.1.

On peut donc supposer la famille I finie; cela veut dire que $\mathscr{A}$ admet une suite de composition

$$0 = \mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1 \subset \dots \quad \subset \mathscr{A}_m = \mathscr{A}$$

telle que les quotients $\mathscr{A}_i / \mathscr{A}_{i-1}$ soient des images de faisceaux de la forme $\mathbf{Z}_U$. En raisonnant par récurrence sur $m$ et en utilisant la suite exacte de cohomologie, on est donc ramené à démontrer le théorème lorsque l'on a une suite exacte de la forme

$$0 \to \mathscr{L} \to \mathbf{Z}_U \to \mathscr{A} \to 0,$$

et pour cela il suffit évidemment d'établir que

$$H^p(X; \mathscr{L}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad p > n.$$

Or (Remarque 2.9.3) $\mathscr{L}$ admet une suite de composition de longueur finie $m$, dont les quotients successifs sont de la forme $\mathbf{Z}_A$, avec A localement fermé dans X; raisonnant encore une fois par récurrence sur $m$ on est ramené à démontrer que

$$H^p(X; Z_A) = 0 \qquad \text{pour} \qquad p > n$$

lorsque A est de la forme U — V, U et V étant des ouverts tels que $V \subset U$. Mais alors on a la suite exacte.

$$0 \to Z_V \to Z_U \to Z_A \to 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Lorsque X est un *espace de Zariski*, le Théorème est particulièrement important lorsque la *dimension algébrique* de X est finie; on appelle ainsi la borne supérieure des entiers $n$ tels que l'on puisse trouver dans X une suite *strictement croissante*

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$$

d'ensembles *fermés, irréductibles et non vides*. Il est clair (ou du moins il est connu) qu'une variété algébrique de dimension $n$ au sens usuel, est de dimension algébrique $n$ en tant qu'espace de Zariski. Cela dit :

***Théorème*** 4.15.2 (Grothendieck). — *Un espace de Zariski de dimension algébrique $\leqslant n$ est de dimension cohomologique $\leqslant n$.*

On raisonnera par récurrence sur la dimension algébrique $n$ de l'espace X considéré. Si $n = 0$ le Théorème est trivial puisque X est un ensemble fini muni de la topologie discrète. Supposons alors X de dimension $n$; nous désignerons par $X_k (1 \leqslant k \leqslant s)$ les composantes irréductibles de X (i.e. les sous-ensembles fermés irréductibles maximaux de X); celles-ci sont en nombre fini, de dimension algébrique $\leqslant n$, et leur réunion est X tout entier. Soit alors $\mathcal{A}$ un faisceau sur X, et posons $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{X_k}$; comme $X_k$ est fermé on a un homomorphisme canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_k$ pour tout $k$, d'ou l'on déduit immédiatement l'existence d'une suite exacte de faisceaux de la forme

$$0 \to \mathcal{A} \to \bigoplus_k \mathcal{A}_k \to \mathcal{B} \to 0;$$

il est clair que $\mathcal{B}$ est nul en dehors de l'ensemble fermé réunion des

$$X_i \cap X_j \ (i \neq j);$$

or cet ensemble fermé est de dimension algébrique $\leqslant n - 1$; d'après l'hypothèse de récurence on a donc $H^p(X; \mathcal{B}) = 0$ pour $p > n - 1$, et par suite nous sommes ramenés à prouver que $H^p(X; \mathcal{A}_k) = 0$ pour $p > n$ et tout $k$; mais comme $H^p(X; \mathcal{A}_k) = H^p(X_k; \mathcal{A})$ cela veut dire qu'on peut supposer X *irréductible*.

Nous allons montrer dans ce cas que l'hypothèse du Théorème précédent est vérifiée. Soit en effet U un ouvert; la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{X-U} \to 0$$

montre que l'on a pour tout $p$ la suite exacte

$$H^{p-1}(X-U; \mathbf{Z}) \to H^p(X; \mathbf{Z}_U) \to H^p(X; \mathbf{Z});$$

si $p > n$, le premier terme est nul en vertu de l'hypothèse de récurrence et du fait que, X étant irréductible, $X - U$ est de dimension algébrique $\leqslant n-1$; par ailleurs le dernier terme est nul pour $p \geqslant 1$ puisque, X étant irréductible, $\mathbf{Z}$ est un faisceau flasque; ceci achève la démonstration du théorème.

## 4.16. — Effet d'une application continue sur la cohomologie

Considérons une application continue $f: X \to Y$, un faisceau $\mathcal{B}$ de base Y, et son image réciproque $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$. Étant données dans X et Y des familles $\Phi$ et $\Psi$ de supports, telles que la relation

$$T \in \Psi \quad \text{implique} \quad \overset{-1}{f}(T) \in \Phi,$$

nous nous proposons de définir un homomorphisme canonique

$$(1) \qquad f^*: H^*_\Psi(Y; \mathcal{B}) \to H^*_\Phi(X; \mathcal{A}).$$

Pour cela, remarquons tout d'abord que le foncteur $\mathcal{B} \to f^*(\mathcal{B})$ est *exact* (n° 2.11); par conséquent, $f^*(\mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B}))$ est une résolution de $f^*(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$; on a donc un homomorphisme canonique

$$(2) \qquad H^*[\Gamma_\Phi(f^*(\mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B})))] \to H^*_\Phi(X; \mathcal{A}).$$

Mais d'autre part les considérations du n° 1.12 conduisent de façon évidente à un homomorphisme

$$\Gamma_\Psi(\mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B})) \to \Gamma_\Phi[f^*(\mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B}))]$$

donc, en passant à la cohomologie, à un homomorphisme

$$(3) \qquad H^*_\Psi(Y; \mathcal{B}) \to H^*[\Gamma_\Phi(f^*(\mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B})))];$$

en composant (2) et (3) on obtient les homomorphismes cherchés.

Les applications (1) possèdent un certain nombre de propriétés « fonctorielles » que nous nous bornerons à énoncer, en laissant au lecteur le soin d'en reconstituer les démonstrations s'il le juge nécessaire.

Tout d'abord, les homomorphismes (1) sont compatibles avec les homomorphismes de faisceaux.

Ils sont aussi compatibles avec les suites exactes : si l'on a sur Y une suite exacte

$$0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$$

et par conséquent sur X la suite exacte

$$0 \to f^*(\mathcal{B}') \to f^*(\mathcal{B}) \to f^*(\mathcal{B}'') \to 0,$$

alors les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H^n_\Psi(Y;\mathcal{B}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Psi(X;\mathcal{B}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X;f^*(\mathcal{B}'')) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X;f^*(\mathcal{B}')) \end{array}$$

sont commutatifs.

Considérons enfin sur Y une résolution $\mathcal{M}^*$ d'un faisceau $\mathcal{B}$; alors $\mathcal{L}^* = f^*(\mathcal{M}^*)$ est une résolution de $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$; cela dit, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H^n(\Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*)) & \to & H^n_\Psi(Y;\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) & \to & H^n_\Phi(X;\mathcal{A}) \end{array}$$

sont commutatifs.

A titre d'exemple, considérons un espace X, un faisceau $\mathcal{A}$ de base X, et un sous-espace Y de X; on sait que l'image réciproque de $\mathcal{A}$ par l'injection canonique $j : Y \to X$ n'est autre que $\mathcal{A}|Y$; on obtient donc, pour toute famille $\Phi$ de supports dans Y, un homomorphisme canonique

$$H^n_\Phi(X;\mathcal{A}) \to H^n_\Psi(Y;\mathcal{A}|Y)$$

pourvu que $S \in \Phi$ implique $S \cap Y \in \Psi$. Lorsque l'on prend pour $\Psi$ la famille $\Phi \cap Y$ (formés des $S \cap Y$, $S \in \Phi$), on retrouve ainsi les homomorphismes définis au n° 4.9.

Pour obtenir un autre exemple, considérons deux variétés différentiables X et Y, et une application différentiable $f$ de X dans Y; soit $\mathbf{\Omega}^*_X$ (resp. $\mathbf{\Omega}^*_Y$) le faisceau des germes de formes différentielles sur X (resp. Y). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma(\mathbf{\Omega}^*_Y)) & \to & H^*(Y;\mathbf{R}) \\ \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^*(\Gamma(f^*(\mathbf{\Omega}^*_Y))) & \to & H^*(X;\mathbf{R}); \end{array}$$

mais en associant à toute forme différentielle sur Y son image réciproque par $f$ (au sens usuel), on obtient évidemment un homomorphisme

$$f^*(\mathbf{\Omega}^*_Y) \to \mathbf{\Omega}^*_X;$$

d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma(f^*(\mathbf{\Omega}^*_Y))) & \to & H^*(X;\mathbf{R}) \\ \downarrow & & \downarrow id. \\ H^*(\Gamma(\mathbf{\Omega}^*_X)) & \to & H^*(X;\mathbf{R}); \end{array}$$

on obtient ainsi le résultat suivant : *si une forme différentielle fermée* $\varpi$ *sur* Y *représente une classe de cohomologie* $\eta \in H^*(Y;\mathbf{R})$, *alors l'image réciproque de* $\varpi$ *par* $f$ *représente la classe de cohomologie* $f^*(\eta) \in H^*(X;\mathbf{R})$.

**4. 17. — La suite spectrale des espaces fibrés**

Soient E un espace topologique, $\pi$ une application continue de E dans un espace topologique B, et $\mathcal{A}$ un faisceau de base E. On se propose de montrer que la cohomologie de E à valeurs dans $\mathcal{A}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme $E_2$ est la cohomologie de B à valeurs dans un faisceau que nous allons définir.

Pour chaque entier $q \geqslant 0$, attachons à tout ouvert $U \subset B$ le groupe

$$H^q(\overset{-1}{\pi}(U); \mathcal{A});$$

pour $V \subset U$ on a un homomorphisme canonique

$$H^q(\overset{-1}{\pi}(U); \mathcal{A}) \to H^q(\overset{-1}{\pi}(V); \mathcal{A}),$$

et comme les conditions de transitivité évidentes sont vérifiées, on peut considérer le *préfaisceau*

$$U \to H^q(\overset{-1}{\pi}(U); \mathcal{A});$$

celui-ci engendre un *faisceau* de base B, que nous désignerons par la notation

$$\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A}).$$

Cela fait, considérons le faisceau différentiel image directe de $\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})$ par l'application $\pi$ (nº 2.12). Comme l'image directe d'un faisceau flasque est flasque, on peut appliquer à B et au faisceau $\pi(\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})) = \mathcal{L}^*$ le Théorème 4.6.1 : il existe une suite spectrale pour laquelle

$$E_2^{pq} = H^p(B; \mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*))$$

et qui « aboutit » à $H^*(\Gamma(\mathcal{L}^*))$.

Or, par construction de l'image directe, on a

$$\Gamma(\mathcal{L}^*) = \Gamma(\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})) = C^*(E; \mathcal{A}),$$

de sorte que la suite spectrale en question aboutit à la cohomologie de E à valeurs dans $\mathcal{A}$. Par ailleurs, $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)$ est engendré par le préfaisceau

$$\begin{aligned} U \to H^q(\mathcal{L}^*(U)) = H^q[\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})(\overset{-1}{\pi}(U))] \\ = H^q(C^*(\overset{-1}{\pi}(U); \mathcal{A})) = H^q(\overset{-1}{\pi}(U); \mathcal{A}) \end{aligned}$$

de sorte que $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)$ n'est autre que le faisceau $\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})$. Par suite :

***Théorème*** 4.17.1. — *Soient* E *et* B *deux espaces topologiques,* $\pi$ *une application continue de* E *dans* B, *et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* E. *Pour tout entier* $q \geqslant 0$, *soit* $\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})$

*le faisceau de base* B *engendré par le préfaisceau*

$$U \to H^q(\overset{-1}{\pi}(U); \mathcal{A}).$$

*Il existe une suite spectrale telle que*

$$E_2^{pq} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F; \mathcal{A}))$$

*et dont le terme* $E_\infty$ *est le groupe bigradué associé à une filtration convenable du groupe gradué* $H^*(E; \mathcal{A})$.

Ce Théorème, dû essentiellement à J. Leray, est le point de départ de la théorie cohomologique des espaces fibrés. On pourrait le compléter en tenant compte, dans B et dans E, de familles de supports; nous laissons au lecteur le soin d'étudier cette généralisation.

***Remarque*** 4.17.1. — La notation $\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})$ est justifiée, en partie tout au moins, par les considérations suivantes. Pour $x \in B$, posons

$$F(x) = \overset{-1}{\pi}(x)$$

— on dira que $F(x)$ est la *fibre* du point $x \in B$ dans E. Cela dit, on a la formule

$$\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})(x) = \lim_{U \ni x}\text{. ind. } H^q(\overset{-1}{\pi}(U); \mathcal{A})$$

d'où évidemment un homomorphisme canonique

$$\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})(x) \to H^q(F(x); \mathcal{A})$$

celui-ci est bijectif lorsque l'on peut appliquer le Théorème 4.11.1 à $F(x)$ et que, de plus, les ensembles $\overset{-1}{\pi}(U)$, U voisinage de $x$ dans B, forment un système fondamental de voisinage de $F(x)$ dans E; c'est le cas par exemple si E et B sont *localement compacts*, l'application $\pi$ étant *propre* (i.e. telle que l'image réciproque d'un compact de B soit un compact de E); en effet soit V un voisinage ouvert de $F(x)$ dans E; lorsque U décrit l'ensemble des voisinages ouverts relativement compacts de $x$, on a $\bigcap \overset{-1}{\pi}(\bar{U}) = F(x)$ et par suite l'intersection des ensembles *compacts* $\overset{-1}{\pi}(\bar{U}) \cap (E - V)$ est vide, ce qui prouve que V contient $\overset{-1}{\pi}(U)$ pour U assez petit; comme de plus le Théorème 4.11.1 s'applique ici puisque $F(x)$ admet dans E un système fondamental de voisinages compacts, notre assertion est démontrée.

On trouvera une étude détaillée de la suite spectrale de ce n° pour les espaces fibrés classiques (i.e. « localement triviaux ») dans la thèse de A. Borel (*Annals of Math.*, *57* (1953), pp. 115-207).

# 5. COHOMOLOGIE DE ČECH

Dans tout ce § le mot *préfaisceau* (resp. faisceau) désigne un préfaisceau (resp. faisceau) de *groupes abéliens*. Si $\mathcal{A}$ est un préfaisceau on supposera toujours que $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$, condition qui est du reste remplie par tous les faisceaux

On se place sur un espace topologique X donné une fois pour toutes.

### 5. 1. — Cochaînes d'un recouvrement

Soient $\mathcal{A}$ un préfaisceau de base X, et $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X; nous ne ferons pour le moment aucune hypothèse sur $\mathfrak{M}$ si $\mathcal{A}$ est un *faisceau*; par contre, si $\mathcal{A}$ est seulement un préfaisceau, nous supposerons $\mathfrak{M}$ *ouvert*.

Soit S un simplexe du nerf de $\mathfrak{M}$, i.e. une partie finie et non vide de I telle que l'ensemble

$$M_S = \bigcap_{i \in S} M_i$$

ne soit pas vide. Attachons à S le groupe abélien

$$\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(M_S)$$

pour $S' \subset S$ on a évidemment $M_{S'} \supset M_S$, d'où un homomorphisme de restriction $\mathcal{A}(S') \to \mathcal{A}(S)$; de cette façon on définit sur le nerf de $\mathfrak{M}$ un *système de coefficients* au sens du Chapitre 1, n° 3.3. On notera

$$C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$$

le complexe des cochaînes du nerf de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans le système de coefficient. qu'on vient de définir.

Soit $s = (i_0, ..., i_p)$ un simplexe singulier de dimension $p$ du nerf de $\mathfrak{M}$; posons

$$\mathrm{M}_s = \mathrm{M}_{i_0 \ldots i_p} = \mathrm{M}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathrm{M}_{i_p};$$

on a alors

$$\mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \prod_{dim\ (s)=p} \mathcal{A}(\mathrm{M}_s),$$

de sorte qu'une cochaîne $\alpha$ de degré $p$ de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est encore (compte tenu de la convention $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$) une famille

$$\alpha = (\alpha_{i_0 \ldots i_p})_{i_0, \ldots, i_p \in \mathrm{I}},$$

avec

$$\alpha_{i_0 \ldots i_p} \in \mathcal{A}(\mathrm{M}_{i_0 \ldots i_p})$$

quels que soient $i_0, ..., i_p$; bien entendu, seuls les systèmes d'indices pour lesquels on obtient un simplexe singulier du nerf de $\mathfrak{M}$ interviennent réellement.

De plus les *opérateurs de face* du complexe de cochaînes simplicial $\mathrm{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ s'obtiennent comme suit : soit une application $f: \Delta_p \to \Delta_q$ et soit une cochaîne $\alpha \in \mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$; alors la cochaîne $\bar{f}(\alpha) \in \mathrm{C}^q(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ est donnée par la formule

$$\bar{f}(\alpha)_{j_0 \ldots j_q} = \text{restriction de } \alpha_{j_{f(0)} \ldots j_{f(p)}} \text{ à } \mathrm{M}_{j_0 \ldots j_q}$$

comme il résulte aussitôt des définitions du Chapitre I, n° 3.3. En particulier l'opérateur cobord de ce complexe est donné en degré $p$ par la relation

$$(d\alpha)_{i_0 \ldots i_{p+1}} = \sum (-1)^k \cdot \alpha_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{p+1}},$$

étant entendu que les sections figurant au second membre doivent être remplacées par leurs *restrictions* à l'ensemble $\mathrm{M}_{i_0 \ldots i_{p+1}}$, sur lequel elles ont simultanément un sens.

Les groupes de cohomologie de $\mathrm{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ se notent

$$\mathrm{H}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}).$$

Si l'on a un homomorphisme $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on en déduit de façon évidente un homomorphisme de complexes simpliciaux $\mathrm{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \mathrm{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{B})$ et par conséquent un homomorphisme

$$f^*: \mathrm{H}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{B}).$$

### 5. 2. — Résolution définie par un recouvrement

Considérons le recouvrement $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de X. Étant donné un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$, nous poserons

$$\mathfrak{M} \cap \mathrm{U} = (\mathrm{M}_i \cap \mathrm{U})_{i \in \mathrm{I}};$$

on obtient ainsi un recouvrement de U, ayant même ensemble d'indices que $\mathfrak{M}$ lui-même, et $\mathfrak{M} \cap U$ est un recouvrement ouvert s'il en est ainsi de $\mathfrak{M}$.

Considérons alors le préfaisceau donné $\mathcal{A}$ et formons, pour tout ouvert U de X, le complexe

$$C^*(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A}) = C^*(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A}|U);$$

il s'obtient en attachant à tout simplexe S du nerf de $\mathfrak{M}$ le groupe abélien $\mathcal{A}(M_S \cap U)$; or pour $V \subset U$ et pour tout S on a un homomorphisme de restriction $\mathcal{A}(M_S \cap U) \to \mathcal{A}(M_S \cap V)$, d'où un homomorphisme du système de coefficients défini par U sur le nerf de $\mathfrak{M}$ dans le système de coefficients défini par V; il en résulte un homomorphisme

$$C^*(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A}) \to C^*(\mathfrak{M} \cap V; \mathcal{A})$$

de complexes simpliciaux, et les conditions usuelles de transitivité sont évidemment vérifiées. Il s'ensuit que, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'application

$$U \to C^n(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$$

définit un *préfaisceau* de base X, que nous noterons $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$; évidemment, $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = (\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))$ est un préfaisceau différentiel de base X; c'est même un préfaisceau à valeurs dans la catégorie des complexes de cochaînes simpliciaux.

Montrons maintenant que, lorsque $\mathcal{A}$ est un *faisceau*, les préfaisceaux $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ sont eux-mêmes des *faisceaux*, et cela quel que soit le recouvrement $\mathfrak{M}$. En effet, pour toute partie M de X, l'application $U \to \mathcal{A}(M \cap U)$ définit évidemment un faisceau de base X, et comme $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ n'est autre que l'application

$$U \to \prod_{\dim(s) = n} \mathcal{A}(M_s \cap U),$$

on est ramené à un *produit direct* de faisceaux (nº 1.10), d'où le résultat.

Il s'ensuit que, si $\mathcal{A}$ est un *faisceau*, on a la formule

$$\boxed{C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))}$$

pour *tout* recouvrement $\mathfrak{M}$ de X.

La formule précédente nous conduit plus généralement à définir, pour toute famille $\Phi$ de supports dans X, le complexe

$$C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})),$$

en supposant bien entendu que $\mathcal{A}$ soit un *faisceau*. C'est évidemment l'ensemble des cochaînes $\alpha$ de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ qui possèdent la propriété suivante : il existe un ensemble $T \in \Phi$ tel que, pour tout simplexe singulier $s$ du nerf de $\mathfrak{M}$, la section $\alpha_s \in \mathcal{A}(M_s)$ soit nulle en dehors de $T \cap M_s$. Il est clair que

$C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ est un complexe de cochaînes simplicial comme $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$; ses groupes de cohomologie seront désignés par la notation

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}).$$

Revenons au faisceau différentiel $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ associé à un faisceau $\mathcal{A}$ et à un recouvrement $\mathfrak{M}$ de X. On a un homomorphisme canonique

$$j: \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$$

obtenu comme suit : à tout $\alpha \in \mathcal{A}(U)$ on associe la 0-cochaîne $j(\alpha)$ de degré 0 de $\mathfrak{M} \cap U$ définie par

$$j(\alpha)_i = \text{restriction de } \alpha \text{ à } M_i \cap U.$$

Il est clair que $d \circ j = 0$.

***Théorème*** 5.2.1. — *Supposons que le recouvrement $\mathfrak{M}$ soit ouvert, ou bien fermé et localement fini. Alors, pour tout faisceau $\mathcal{A}$, la suite de faisceaux et d'homomorphismes*

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \cdots$$

*est exacte*, i.e. $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ *est une résolution de* $\mathcal{A}$.

Le fait que $j$ soit injectif résulte de l'axiome (F1) des faisceaux, et le fait que $\operatorname{Im}(j) = \operatorname{Ker}(d)$ résulte, si $\mathfrak{M}$ est ouvert, de l'axiome (F2), et si $\mathfrak{M}$ est fermé localement fini, du Théorème 1.3.1. Reste à prouver que $\operatorname{Im}(d) = \operatorname{Ker}(d)$ en degré $n \geqslant 1$.

Pour cela considérons en un point $x$ un germe $\bar{\alpha}$ de cochaîne de degré $n$, annulé par $d$; on peut « représenter » $\bar{\alpha}$ par un cocycle $\alpha \in C^n(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$, où U est un voisinage ouvert assez petit de $x$.

Si $\mathfrak{M}$ est ouvert, on peut supposer $U \subset M_i$ pour un indice $i$, d'où évidemment $U \cap M_{ii_0 \dots i_{n-1}} = U \cap M_{i_0 \dots i_{n-1}}$ quels que soient $i_0, \dots, i_{n-1}$; on peut donc définir une cochaîne $\beta \in C^{n-1}(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$ en posant

$$\beta_{i_0 \dots i_{n-1}} = \alpha_{ii_0 \dots i_{n-1}};$$

on aura

$$(d\beta)_{i_0 \dots i_n} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k . \alpha_{ii_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n};$$

or la relation $d\alpha = 0$ montre que l'on a

$$\alpha_{i_0 \dots i_n} - \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k . \alpha_{ii_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n} = 0$$

dans l'ouvert $U \cap M_{ii_0 \dots i_n} = U \cap M_{i_0 \dots i_n}$; on a donc $d\beta = \alpha$, ce qui démontre le théorème dans ce cas.

Si au contraire $\mathfrak{M}$ est fermé et localement fini, on peut évidemment supposer, en prenant U assez petit, que $\mathfrak{M}$ est fini et que $x \in M_i$ pour tout $i$ — il suffit de remplacer $\mathfrak{M}$ par $\mathfrak{M} \cap U$. Comme alors $x$ appartient à tous les ensembles $M_s$ on peut considérer la valeur en $x$ de la section $\alpha_s$, soit $\alpha_s(x) \in \mathcal{A}(x)$; de $d\alpha = 0$ résulte en particulier

$$\sum (-1)^k \cdot \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{n+1}}(x) = 0.$$

Cela dit choisissons arbitrairement un indice $i$, et posons

$$\beta_{i_0 \dots i_{n-1}}(x) = \alpha_{ii_0 \dots i_{n-1}}(x);$$

comme les indices $i$ sont en nombre fini, on peut supposer U assez petit pour que les germes de sections ainsi définis se prolongent en des sections

$$\beta_{i_0 \dots i_{n-1}} \in \mathcal{A}(M_{i_0 \dots i_{n-1}}),$$

d'où une cochaîne $\beta \in C^{n-1}(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$, et il est clair, en vertu du calcul fait dans le cas ouvert, que les sections composant $d\beta$ et $\alpha$ ont même valeur en $x$; puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de telles sections, on peut donc supposer que $(d\beta)_{i_0 \dots i_n} = \alpha_{i_0 \dots i_n}$ dans $M_{i_0 \dots i_n} \cap U$, i.e. que $d\beta = \alpha$, d'où à nouveau le résultat cherché dans ce cas.

Le résultat précédent a les conséquences suivantes. Tout d'abord on en tire évidemment le

***Théorème*** 5.2.2. — *Soit $\mathfrak{M}$ un recouvrement ouvert, ou bien fermé et localement fini, de* X; *pour tout faisceau* A *on a un isomorphisme canonique*

$$H^0(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A}) = H^0(X; \mathcal{A}).$$

On a d'autre part le résultat suivant :

***Théorème*** 5.2.3. — *Soient $\mathfrak{M}$ un recouvrement de* X, *$\mathcal{A}$ un faisceau de base* X, *et $\Phi$ une famille de supports dans* X. *Pour que l'on ait*

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1,$$

*il suffit que l'une des conditions suivantes soient réalisées :*

(*a*) : *le recouvrement $\mathfrak{M}$ est ouvert, la famille $\Phi$ est quelconque, le faisceau $\mathcal{A}$ est flasque;*

(*b*) : *le recouvrement $\mathfrak{M}$ est ouvert, la famille $\Phi$ est paracompactifiante, le faisceau $\mathcal{A}$ est $\Phi$-fin;*

(*c*) : *le recouvrement $\mathfrak{M}$ est fermé et localement fini, la famille $\Phi$ est paracompactifiante, le faisceau $\mathcal{A}$ est $\Phi$-mou.*

Dans le cas (*a*) il suffit (Théorème 3.1.3) de vérifier que les faisceaux $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ sont flasques; or un produit de faisceaux flasques est flasque; il suffit donc de vérifier que, pour M ouvert, le faisceau $U \to \mathcal{A}(M \cap U)$ est flasque, ce qui est clair.

Dans le cas (*b*) on observe que $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ est un Module sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, lequel est $\Phi$-mou par hypothèse; donc $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ est $\Phi$-fin, ce qui implique le résultat.

Dans le cas (*c*) il suffit de montrer que $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ est $\Phi$-mou; or ce faisceau n'est autre que

$$U \to \prod \mathcal{A}(M_s \cap U);$$

comme $M_s$ est *fermé* on a donc

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \prod_{\dim(s)=n} \mathcal{A}_{M_s};$$

or les faisceaux $\mathcal{A}_{M_s}$ sont $\Phi$-mous (Théorème 3.5.5) et d'autre part le produit direct ci-dessus est localement fini; d'ou le résultat (nº 3.5).

Donnons enfin une dernière conséquence du Théorème 5.2.1. Puisque $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ est une résolution de $\mathcal{A}$ moyennant les hypothèses faites sur $\mathfrak{M}$, les résultats du nº 4.7 sont applicables, et par suite *on obtient un homomorphisme canonique*

$$H^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^*_\Phi(X; \mathcal{A})$$

*défini quels que soient le faisceau $\mathcal{A}$, la famille de supports $\Phi$, et le recouvrement $\mathfrak{M}$* (ouvert ou bien fermé et localement fini) de l'espace X. Rappelons que pour obtenir cet homomorphisme on forme le double complexe

$$K = C^*_\Phi(X; \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))$$

et les homomorphismes évidents

$$C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j''} K \xleftarrow{j'} C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A});$$

il en résulte des homomorphismes

$$H^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j''} H^*(K) \xleftarrow{j'} H^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A});$$

on sait, parce que $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ est une résolution de $\mathcal{A}$, que $j''$ est bijectif, d'où, par $j'$, l'homomorphisme cherché.

On a bien entendu un résultat plus précis en calculant la seconde suite spectrale de K : celle-ci est donnée, rappelons-le, par

$$E_2^{pq} = H^p[H^q_\Phi(X; \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))].$$

On peut la calculer complètement lorsque $\mathfrak{M}$ est un recouvrement *fermé locale-*

*ment fini* comme nous allons le voir. On a en effet dans cette hypothèse

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{M};\mathcal{A}) = \bigoplus_{\dim(s)=n} \mathcal{A}_{M_s},$$

et cette somme directe est *localement finie*; supposant pour simplifier que $\Phi$ soit la famille de tous les fermés, on a donc (Théorème 4.4.4)

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{X};\mathcal{C}^n(\mathfrak{M};\mathcal{A})) = \prod_{\dim(s)=n} \mathrm{H}^q(\mathrm{X};\mathcal{A}_{M_s}) = \prod \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_s;\mathcal{A});$$

considérons alors, sur le nerf du recouvrement $\mathfrak{M}$, le *système de coefficients*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{A}) : \mathrm{S} \to \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_s;\mathcal{A}),$$

les opérations de restriction étant définies de façon évidente; il vient

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{X};\mathcal{C}^n(\mathfrak{M};\mathcal{A})) = \mathrm{C}^n(\mathfrak{M};\mathcal{H}^q(\mathcal{A})),$$

et comme cet isomomorphisme est évidemment compatible avec les structures simpliciales envisagées on en conclut que

$$\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathfrak{M};\mathcal{H}^q(\mathcal{A}));$$

autrement dit :

**Théorème** 5.2.4. (Leray). — *Soient $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ un recouvrement fermé localement fini d'un espace* X, *et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X. *Considérons sur le nerf de* $\mathfrak{M}$ *les systèmes de coefficients*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{A}) : \mathrm{S} \to \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_s;\mathcal{A});$$

*alors il existe une suite spectrale pour laquelle*

$$\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathfrak{M};\mathcal{H}^q(\mathcal{A}))$$

*et dont le terme* $\mathrm{E}_\infty$ *est le groupe bigradué associé à une filtration convenable du groupe gradué* $\mathrm{H}^*(\mathrm{X};\mathcal{A})$.

On déduit en particulier de là le résultat suivant :

**Corollaire** [1]. — *Soient $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}_\iota)$ un recouvrement fermé localement fini d'un espace* X, *et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X. *Supposons que l'on ait*

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{M}_{\iota_0\ldots\iota_p};\mathcal{A}) = 0$$

[1] On pourrait évidemment démontrer ce genre de résultat sans utiliser la théorie des suites spectrales; cf. A. Weil, *Sur les théorèmes de de Rham*, Commentarii Math. Helv., (*26* (1952), pp. 119-145). L'article de Weil traite le cas d'un faisceau $\mathcal{A}$ *simple*, mais il est trivial d'étendre la méthode au cas général.

*pour tout $q \geqslant 1$ et quels que soient $i_0, \ldots, i_p$. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})$$

*est bijectif.*

Nous verrons plus loin qu'on a des résultats similaires pour les recouvrements ouverts; mais on ne peut les obtenir par la méthode utilisée ci-dessus.

### 5.3. — Suite spectrale attachée à un recouvrement et à un faisceau différentiel

Soient $\mathfrak{M}$ un recouvrement de X et $\mathcal{L}^* = (\mathcal{L}^n)$ un faisceau différentiel de base X; nous allons étudier le double complexe

$$\mathrm{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*) = \sum \mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^q).$$

Il est clair que sa seconde suite spectrale est donnée par

$$''\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^q(\mathrm{C}(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^p)) = \mathrm{H}^q(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^p)$$

d'où

$$\boxed{''\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathrm{H}^q(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*))}$$

On a d'autre part

$$'\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*));$$

puisque

$$\mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*) = \prod \mathcal{L}^*(\mathrm{M}_s)$$

il vient donc

$$'\mathrm{E}_1^{pq} = \prod_{\dim(s)=p} \mathrm{H}^q(\mathcal{L}(\mathrm{M}_s)).$$

Considérons alors sur le nerf de $\mathfrak{M}$ le *système de coefficients*

$$\boxed{\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*) : \mathrm{S} \to \mathrm{H}^q(\mathcal{L}^*(\mathrm{M}_\mathrm{S}))}$$

avec les opérations de « restriction » évidentes; il vient

$$'\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)),$$

et cette identification transforme visiblement la différentielle $d_1$ de la suite

(1) On aura soin de ne pas confondre, malgré les notations adoptées, le *système de coefficients $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)$ sur le nerf de* $\mathfrak{M}$ avec le *faisceau dérivé $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)$* que nous avons défini au n° 4.1 pour tout faisceau différentiel $\mathcal{L}^*$.

spectrale en la différentielle évidente du complexe $C^*(\mathfrak{M};\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*))$ ; on a donc des isomorphismes canoniques

$$\boxed{{}'E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{M};\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*))}.$$

Supposons maintenant que le recouvrement $\mathfrak{M}$ soit ouvert, ou bien fermé et localement fini; dans la seconde suite spectrale figure alors le terme

$$\boxed{{}''E_2^{p0} = H^p(\Gamma(\mathcal{L}^*))}$$

et l'homomorphisme

$$j''^*: H^p(\Gamma(\mathcal{L}^*)) \to H^p(C^*(\mathfrak{M};\mathcal{L}^*))$$

qui en résulte provient naturellement de l'injection canonique

$$j'': \Gamma(\mathcal{L}^*) \to C^*(\mathfrak{M};\mathcal{L}^*).$$

On notera que la première graduation du double complexe $C^*(\mathfrak{M};\mathcal{L}^*)$ étant positive, la seconde filtration est toujours régulière; par suite $j''^*$ sera bijectif si la seconde suite spectrale dégénère, notamment si les faisceaux $\mathcal{L}^q$ sont flasques (Théorème 5.2.3).

Lorsque l'on doit tenir compte en outre d'une famille $\Phi$ de supports, on a des résultats analogues aux précédents à condition de faire sur $\mathfrak{M}$ et $\Phi$ une hypothèse convenable (à savoir que, pour tout $S \in \Phi$, il existe $S' \in \Phi$ tel que tout ensemble $M_i$ qui rencontre S soit contenu dans S'). On laisse au lecteur le soin d'étudier cette situation en détail, puisque, dans la pratique, on ne s'y intérèsse que rarement.

### 5.4. — Relations entre la cohomologie d'un recouvrement et celle de l'espace

Nous allons maintenant appliquer les résultats du n° précédent au cas où $\mathcal{L}^*$ est une *résolution* d'un faisceau $\mathcal{A}$ donné, et tout particulièrement au cas où $\mathcal{L}^*$ est la *résolution canonique* $\mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

Puisque $\mathcal{L}^*$ est une résolution, on a un homomorphisme canonique $j:\mathcal{A}\to\mathcal{L}^*$ et par conséquent un homomorphisme de complexes

$$j': C^*(\mathfrak{M};\mathcal{A}) \to C^*(\mathfrak{M};\mathcal{L}^*),$$

d'ailleurs injectif (l'image de $C^*(\mathfrak{M};\mathcal{A})$ est formée des éléments de second degré 0 annulés par $d''$). Cet homomorphisme définit des homomorphismes

$$\boxed{j'^*: H^n(\mathfrak{M};\mathcal{A}) \to H^n(C^*(\mathfrak{M};\mathcal{L}^*))}$$

qu'on peut encore retrouver comme suit.

La première suite spectrale contient en effet les termes

$$'E_2^{n0} = H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{H}^0(\mathcal{L}^*));$$

mais puisque $\mathcal{L}^*$ est une résolution de $\mathcal{A}$ on a canoniquement $\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^*) = \mathcal{A}$ et par suite

$$\boxed{'E_2^{n0} = H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})};$$

comme les graduations du double complexe considéré ici sont positives on a des homomorphismes canoniques $'E_2^{n0} \to H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*))$ : on retrouve ainsi les homomorphismes $j'^*$ définis plus haut.

Supposons que $\mathcal{L}^*$ soit la *résolution canonique* de $\mathcal{A}$, et que le recouvrement $\mathfrak{M}$ soit *ouvert;* en vertu du Théorème 5.2.2. la seconde suite spectrale

$$''E_2^{pq} = H^p(H^q(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*))$$

dégénère; par suite, les homomorphismes

$$j''^*: H^n(\Gamma(\mathcal{L}^*)) \to H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*))$$

sont bijectifs; mais par définition on a

$$H^n(\Gamma(\mathcal{L}^*)) = H^n(X; \mathcal{A})$$

d'où des isomorphismes canoniques

$$H^n(X; \mathcal{A}) = H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)).$$

En tenant compte de $j'^*$ on obtient donc des homomorphismes

$$\boxed{H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})},$$

qui sont évidemment *naturels*.

Revenons maintenant à la première suite spectrale. Comme les ensembles $M_s$ sont ouverts, et comme $\mathcal{L}^*$ est la résolution canonique de $\mathcal{A}$, on a, en vertu du Lemme 4.9.1., des isomorphismes

$$H^q(\mathcal{L}^*(M_s)) = H^q(M_s; \mathcal{A}).$$

En conséquence on a le résultat suivant :

**Théorème** 5.4.1. — *Soit $\mathfrak{M}$ un recouvrement ouvert de* X, *et soit $\mathcal{A}$ un faisceau de base* X; *considérons sur le nerf de $\mathfrak{M}$ les systèmes de coefficients*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{A}): S \to H^q(M_S; \mathcal{A})$$

*pour $q = 0, 1, \ldots$ Alors il existe une suite spectrale dont le terme* $E_2$ *est donné par*

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{M}; \mathcal{H}^q(\mathcal{A})),$$

*et dont le terme* $E_\infty$ *est le groupe bigradué associé à une filtration convenable du groupe gradué* $H^*(X; \mathcal{A})$.

**Corollaire.** — *Soient* $\mathfrak{M}$ *un recouvrement ouvert de* X *et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X. *Pour que les homomorphismes canoniques*

$$H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$$

*soient bijectifs, il suffit que pour tout simplexe* S *du nerf de* $\mathfrak{M}$ *on ait*

$$H^q(M_S; \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad q \geqslant 1.$$

Indiquons comment l'on peut calculer explicitement les homomorphismes $H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$; pour cela soient $\xi_{\mathfrak{M}}$ et $\xi_X$ des classes de cohomologie qui se correspondent par cet homomorphisme; représentons-les par des cocycles

$$\zeta_{\mathfrak{M}} \in C^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}); \qquad \zeta_X \in C^n(X; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{L}^n);$$

identifiant ces cocycles à des cocycles du double complexe $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)$, de bidegré $(n, 0)$ et $(0, n)$ respectivement, tout revient à exprimer que ces cocycles ne diffèrent que par un cobord, i.e. à trouver des éléments

$$\lambda^{p,q} \in C^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^q) \qquad (p + q = n - 1)$$

vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathfrak{M}} &= d'\lambda^{n-1,0} \\
0 &= d'\lambda^{n-2,1} + d''\lambda^{n-1,0} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= d'\lambda^{0,n-1} + d''\lambda^{1,n-2} \\
\zeta_X &= \qquad\qquad\quad d''\lambda^{0,n-1}.
\end{aligned}$$

Or, $\xi_{\mathfrak{M}}$ est une famille de sections $\xi_{i_0 \ldots i_n} \in \mathcal{A}(M_{i_0 \ldots i_n})$; d'autre part, $\lambda^{p,q}$ sera une famille de sections

$$\lambda_{i_0 \cdots i_p} \in \mathcal{L}^q(M_{i_0 \cdots i_p}) = C^q(M_{i_0 \cdots i_p}; \mathcal{A});$$

comme la différentielle $d''$, en bidegré $(p, q)$, est induite au facteur $(-1)^p$ près par la différentielle $d$ du faisceau $\mathcal{L}^*$, on voit donc qu'on est ramené à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}
\zeta_{i_0 \cdots i_n} &= \sum (-1)^k . \lambda_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_n}; \\
0 &= \sum (-1)^k . \lambda_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_{n-1}} + (-1)^{n-1} d\lambda_{i_0 \cdots i_{n-1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \lambda_{i_1} - \lambda_{i_0} - d\lambda_{i_0 i_1}; \\
\zeta_X &= \qquad\qquad d\lambda_{i_0}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on doit procéder comme suit: partant d'un $n$-cocycle $\xi_{\mathfrak{M}} = \xi$ de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, on écrit que $\xi$ est le cobord d'une $(n-1)$ — cochaîne $\lambda^{n-1}$ de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^0$; alors la cochaîne $d\lambda^{n-1}$ de $\mathfrak{M}$, à valeurs dans $\mathcal{L}^1$, est un cocycle — c'est donc le cobord d'une $(n-2)$ -cochaîne $\lambda^{n-2}$ de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^1$; de même $d\lambda^{n-2}$ est le cobord d'une $(n-3)$ -cochaîne $\lambda^{n-3}$ de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^{n-2}$; poursuivant la construction ainsi de suite on parvient à une 1-cochaîne $\lambda^1$ de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^{n-2}$ et l'on sait que la 1-cochaîne $d\lambda^1$, à valeurs dans $\mathcal{L}^{n-1}$, est un cocycle — donc le cobord d'une 0-cochaîne $\lambda^0$ à valeurs dans $\mathcal{L}^{n-1}$; alors $d\lambda^0$ est un 0-cocycle de $\mathfrak{M}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^n$, i.e. une *section de* $\mathcal{L}^n$ *au-dessus de* X, qui est de plus annulée par la différentielle $d: \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^{n+1}$ et par suite définit une classe $\xi_X \in H^n(\Gamma(\mathcal{L}^*))$ : c'est l'image de $\xi_{\mathfrak{M}}$ par l'homomorphisme canonique $H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$.

Nous avons étudié plus haut le double complexe

$$K = C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))$$

dans le cas où $\mathfrak{M}$ est ouvert, et nous en avons déduit des homomorphismes canoniques $H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$.

Prenons plus généralement une famille $\Phi$ de supports, et un recouvrement $\mathfrak{M}$ ouvert, ou bien fermé et localement fini, et formons le double complexe

$$K = C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}));$$

on a encore des homomorphismes

$$H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \xleftarrow{j''} H^n(K) \xleftarrow{j'} H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}),$$

lesquels proviennent des deux suites spectrales de K; celles-ci sont évidemment données par

$$''E_2^{pq} = H^p(H^q_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})))$$
$$'E_1^{pq} = H^q(C^p_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))).$$

Or comme $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$ est une résolution flasque de $\mathcal{A}$, on voit que

$$''E_2^{pq} = 0 \qquad \text{pour} \qquad q \neq 0$$

pourvu que l'on puisse appliquer le Théorème 5.2.3., i.e. si $\mathfrak{M}$ est ouvert et $\Phi$ quelconque, ou bien si $\mathfrak{M}$ est fermé localement fini et $\Phi$ paracompactifiante. Dans ce cas, $j''$ est donc bijectif, et on obtient à nouveau des homomorphismes canoniques

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{A}).$$

On remarquera que, si $\mathfrak{M}$ est fermé localement fini, la méthode précédente ne permet de définir ces homomorphismes que si la famille $\Phi$ est paracompactifiante, alors que nous avons obtenu au n° 5.2. des homomorphismes analogues sans faire d'hypothèse sur $\Phi$. Nous verrons au n° suivant que, dans tous les cas où les deux méthodes s'appliquent simultanément, les homomorphismes auxquels elles conduisent sont *identiques*.

Lorsque $\mathfrak{M}$ est fermé localement fini, et lorsque $\Phi$ est la famille de tous les fermés de X, la méthode du présent n° conduit aussi plus généralement à une suite spectrale similaire (et, comme nous le verrons, identique) à celle du Théorème 5.2.4., pourvu que l'espace de base X soit *paracompact*. Considérant en effet le double complexe

$$\mathrm{K} = \mathrm{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}))$$

tout revient à calculer les termes $'\mathrm{E}_2^{pq}$ de sa première suite spectrale. On a vu que

$$'\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})));$$

posant pour simplifier

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}),$$

on a

$$\mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{A}^*) = \prod_{\dim(s) = p} \mathcal{A}^*(\mathrm{M}_s);$$

donc

$$'\mathrm{E}_1^{pq} = \prod_{\dim(s) = p} \mathrm{H}^q(\mathcal{A}^*(\mathrm{M}_s));$$

mais comme X est paracompact et $\mathrm{M}_s$ *fermé* donc paracompact, $\mathcal{A}^*$ induit dans M une résolution de $\mathcal{A}_s | \mathrm{M}_s$ par des faisceaux mous, de sorte qu'il vient

$$'\mathrm{E}_1^{pq} = \prod_{\dim(s) = p} \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_s; \mathcal{A}) = \mathrm{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{H}^q(\mathcal{A}))$$

et finalement

$$'\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{H}^q(\mathcal{A}))$$

comme annoncé.

## 5.5. — Propriétés de compatibilité

Nous avons donné aux n° 5.2 et 5.4 deux méthodes pour définir, dans certaines hypothèses, des homomorphismes

$$\mathrm{H}_\Phi^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \mathrm{H}_\Phi^n(\mathrm{X}; \mathcal{A});$$

nous allons montrer dans ce n° que les deux procédés conduisent aux mêmes homomorphismes.

Soient $\mathcal{A}$ un faisceau de base X, $\mathcal{L}^*$ la résolution canonique de $\mathcal{A}$, $\Phi$ une famille de supports, et $\mathfrak{M}$ un recouvrement de X; les homomorphismes considérés se déduisent de la considération des deux doubles complexes

$$\mathrm{C}_\Phi^*(\mathrm{X}; \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}_\Phi^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*).$$

Or considérons le faisceau bigradué

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*) = (\mathcal{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^q)),$$

muni de sa graduation et de sa différentielle « totales » — la composante de degré $n$ de ce faisceau différentiel est donc

$$\sum_{p+q=n} \mathcal{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^q).$$

On a des homomorphismes de faisceaux différentiels

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \xrightarrow{j'} \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*) \xleftarrow{j''} \mathcal{L}^*;$$

si donc ces trois faisceaux sont des *résolutions* de $\mathcal{A}$ on obtiendra, en vertu du Théorème 4.7.2., un diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n[\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))] \arrow[r, "j'^*"] \arrow[dr] & \mathrm{H}^n[\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*))] \arrow[d] & \mathrm{H}^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \arrow[l, "j''^*"'] \arrow[dl] \\
& \mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}), &
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \arrow[r, "j'^*"] \arrow[dr] & \mathrm{H}^n(\mathrm{C}^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)) \arrow[d] & \mathrm{H}^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \arrow[l, "j''^*"'] \arrow[dl] \\
& \mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}); &
\end{tikzcd}$$

il est clair qu'alors le résultat que nous avons en vue sera démontré, puisque nous savons que, lorsque $\mathcal{L}^*$ est la résolution canonique de $\mathcal{A}$, l'homomorphisme $\mathrm{H}^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to \mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ figurant dans ce diagramme est l'identité (cf. Exemple 4.8.1.).

Or par hypothèse $\mathcal{L}^*$ est une résolution de $\mathcal{A}$; il en est de même, si $\mathfrak{M}$ est ouvert ou bien fermé localement fini, de $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ ; reste donc à montrer que, lorsque $\mathfrak{M}$ est ouvert ou bien fermé localement fini, le faisceau différentiel $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)$ est lui aussi une résolution de $\mathcal{A}$, ou encore que $\mathcal{L}^* \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)$ induit un isomorphisme des faisceaux dérivés de $\mathcal{L}^*$ sur ceux de $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)$. Pour cela considérons en chaque point $x$ le double complexe « ponctuel » $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\mathcal{L}^*)(x)$ des germes de sections en $x$ du faisceau différentiel $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)$ ; puisque $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^p)$ est une résolution de $\mathcal{L}^p$ pour tout $p$, on voit que

$$\mathrm{H}^q[\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^p)(x)] = 0 \quad \text{pour} \quad q \geqslant 1,$$

en sorte que l'on obtient pour le double complexe en question une suite spectrale dégénérée; étant donné que

$$\mathrm{H}^{\bullet}[\mathcal{C}^{*}(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^{p})(x)] = \mathcal{L}^{p}(x),$$

le résultat annoncé est démontré.

On remarquera d'autre part que les raisonnements précédents montrent que, pour définir les homomorphismes $\mathrm{H}^{n}_{\Phi}(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to \mathrm{H}^{n}_{\Phi}(\mathrm{X};\mathcal{A})$, on peut utiliser, au lieu de la résolution *canonique* de $\mathcal{A}$, *toute* résolution conduisant à la cohomologie de X à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Dans le même ordre d'idées, on peut se poser la question suivante. Supposons X paracompact et soit $\mathfrak{M}$ un recouvrement fermé et localement fini de X; prenant pour $\Phi$ la famille de tous les fermés de X, on peut alors appliquer à la fois les méthodes des nos 5.2 et 5.4; on obtient dans les deux cas des suites spectrales qui commencent par les groupes

$$\mathrm{E}_{2}^{pq} = \mathrm{H}^{p}(\mathfrak{M};\ \mathcal{H}^{p}(\mathcal{A}))$$

et aboutissent à la cohomologie de X à valeurs dans $\mathcal{A}$; ces suites spectrales sont-elles « isomorphes »?
Pour le démontrer nous allons considérer, à côté des doubles complexes

$$\mathrm{K}' = \mathrm{C}^{*}(\mathrm{X};\ \mathcal{C}^{*}(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}))\ ; \qquad \mathrm{K}'' = \mathrm{C}^{*}(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^{*}(\mathrm{X};\ \mathcal{A}))$$

utilisés pour construire les deux suites spectrales en question, le triple complexe

$$\mathrm{K} = \mathrm{C}^{*}[\mathrm{X};\ \mathcal{C}^{*}(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^{*}(\mathrm{X};\ \mathcal{A}))]$$

et les homomorphismes évidents

$$\mathrm{K}' \xrightarrow{\theta'} \mathrm{K} \xleftarrow{\theta''} \mathrm{K}''$$

(on applique un terme de bidegré $(p, q)$ de $\mathrm{K}'$ sur le terme analogue de tridegré $(p, q, 0)$ de K et un terme de bidegré $(q, r)$ de $\mathrm{K}''$ sur le terme analogue de tridegré $(0, q, r)$ de K). En filtrant K à l'aide de son second degré il est clair que $\theta'$ et $\theta''$ sont compatibles avec les filtrations utilisées pour construire les suites spectrales de $\mathrm{K}'$ et $\mathrm{K}''$, de sorte qu'on obtient pour tout $s$ des homomorphismes

$$\theta'^{*}\colon \mathrm{E}_{s}^{pq}(\mathrm{K}') \to \mathrm{E}_{s}^{pq}(\mathrm{K})$$
$$\theta''^{*}\colon \mathrm{E}_{s}^{pq}(\mathrm{K}'') \to \mathrm{E}_{s}^{pq}(\mathrm{K}).$$

Le problème posé sera résolu si l'on montre que ces homomorphismes sont *bijectifs*; il suffit d'ailleurs de le faire pour $s = 2$.

Or désignons par $d'$, $d''$ et $d'''$ les trois différentielles partielles de K; il est clair que

$$\mathrm{E}_{1}^{pq}(\mathrm{K}) = \mathrm{H}^{q}\{\mathrm{C}^{*}[\mathrm{X};\ \mathcal{C}^{p}(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^{*}(\mathrm{X};\ \mathcal{A}))]\},$$

la cohomologie figurant dans cette formule étant calculée à l'aide de $d' + d''$; introduisant les faisceaux différentiels

$$^p\mathcal{L}^* = \mathcal{C}^p(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))$$

on a donc à calculer la cohomologie de degré total $q$ du double complexe $C^*(X; {}^p\mathcal{L}^*)$; mais comme le faisceau

$$^p\mathcal{L}^* = \prod_{\dim(s)=p} \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})_{M_s}$$

est *fin* les calculs du nº 4.5 montrent que les homomorphismes canoniques

$$\Gamma({}^p\mathcal{L}^*) = C^p(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})) \rightarrow C^*(X; {}^p\mathcal{L}^*) = K$$

induisent des *isomomorphismes*

$$E_1^{pq}(K) = H^q(\Gamma({}^p\mathcal{L}^*)) = H^q[C^p(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))];$$

d'après le nº 5.3 appliqué au cas de la résolution canonique on trouve donc

$$E_1^{pq}(K) = C^p(M; \mathcal{H}^q(\mathcal{A}))$$

où $\mathcal{H}^q(\mathcal{A})$ est le système de coefficients $S \rightarrow H^q(M_s; \mathcal{A})$ sur le nerf de $\mathfrak{M}$; par suite il vient

$$E_2^{pq}(K) = H^p(\mathfrak{M}; \mathcal{H}^q(\mathcal{A})),$$

ce qui achève la démonstration.

### 5.6. — Exemple d'applications: cohomologie d'une réunion (1)

Soit X un espace réunion de deux sous-espaces $M_0$ et $M_1$; nous les supposerons tous les deux ouverts, ou bien tous les deux fermés. On supposera aussi, pour éviter des trivialités, que $M_0$, $M_1$ et

$$M_{01} = M_0 \cap M_1$$

sont *non vides*. Donnons-nous un faisceau $\mathcal{A}$ de base X.

Considérons le recouvrement $\mathfrak{M}$ de X formé par $M_0$ et $M_1$; son nerf est le schéma simplicial $\Delta_1$. Pour calculer la cohomologie de X à valeurs dans $\mathcal{A}$ on a donc une suite spectrale dans laquelle

$$E_2^{pq} = H^p(\Delta_1; \mathcal{H}^q);$$

(1) La lecture de ce nº est inutile pour la compréhension des nºˢ suivants. Le résultat qu'il contient généralise un théorème classique de Vietoris.

le système de coefficients $\mathcal{H}^q$ se calcule visiblement comme suit : si $s = (i_0, ..., i_p)$ est un simplexe singulier de dimension $p$ de $\Delta_1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^q(s) &= \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_0; \mathcal{A}) \quad \text{si} \quad s = (0, \ldots, 0)\\
\mathcal{H}^q(s) &= \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_1; \mathcal{A}) \quad \text{si} \quad s = (1, \ldots, 1)\\
\mathcal{H}^q(s) &= \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_{01}; \mathcal{A}) \text{ dans tous les autres cas.}
\end{aligned}$$

Dans le cas où les $\mathrm{M}_i$ sont ouverts, cela résulte du Théorème 5.4.1., et dans le cas où ils sont fermés cela résulte de la fin du n° 5.2 (on notera qu'aucune hypothèse de paracompacité n'est nécessaire).

Comme le schéma simplicial $\Delta_1$ est de dimension 1, il est clair que l'on a

$$\mathrm{E}_2^{pq} = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \geqslant 2 \qquad \text{et} \qquad q \geqslant 0.$$

Donc les différentielles $d_r$ de la suite spectrale sont nulles pour tout $r \geqslant 2$, en sorte qu'il vient des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{E}_\infty^{pq} = \mathrm{E}_2^{pq};$$

comme de plus $\mathrm{E}_2^{pq} = 0$ pour $p \geqslant 2$, on en déduit que *l'on a pour tout n une suite exacte*

$$\boxed{0 \to \mathrm{E}_2^{0,n} \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \mathrm{E}_2^{1,n-1} \to 0}.$$

Il nous reste à calculer explicitement les termes $\mathrm{E}_2^{0,n}$ et $\mathrm{E}_2^{1,n-1}$.

On a

$$\mathrm{E}_2^{0,n} = \mathrm{H}^0(\Delta^1; \mathcal{H}^n);$$

ce groupe est donc formé des 0-cocycles de $\Delta_1$ à valeurs dans le système de coefficients $\mathcal{H}^n$; or on a

$$\mathrm{C}^0(\Delta_1; \mathcal{H}^n) = \mathrm{H}^n(\mathrm{M}_0; \mathcal{A}) \times \mathrm{H}^n(\mathrm{M}_1; \mathcal{A})$$

et pour une cochaîne $\alpha = (\alpha_i)_{i=0,1}$ de degré 0, $d\alpha$ est l'élément de

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{M}_1; \mathcal{A}),$$

différence entre les « restrictions » de $\alpha_0$ et $\alpha_1$ à $\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{M}_1$; on en conclut que

| |
|---|
| $\mathrm{E}_2^{0,n}$ est le sous-groupe de $\mathrm{H}^n(\mathrm{M}_0; \mathcal{A}) \times \mathrm{H}^n(\mathrm{M}_1; \mathcal{A})$ formé des couples $(\alpha_0, \alpha_1)$ qui induisent la même classe de cohomologie dans $\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{M}_1$. |

Calculons maintenant $\mathrm{E}_2^{1,n-1} = \mathrm{H}^1(\Delta_1; \mathcal{H}^{n-1})$; on peut le calculer à l'aide de cochaînes *alternées* de degré 1 de $\Delta_1$; une telle cochaîne est nécessairement un cocycle, et s'identifie à un élément de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{M}_1; \mathcal{A})$; c'est un cobord si et seulement si elle est différence de deux classes induites par des classes de cohomologie de $M_0$ et $M_1$. Autrement dit

| |
|---|
| $E_2^{1,n-1}$ est le quotient de $H^{n-1}(M_0 \cap M_1; \mathcal{A})$ par le sous-groupe formé des classes de cohomologie qui sont différence de deux classes induites par des classes de cohomologie de $M_0$ et $M_1$. |

On laisse au lecteur le soin d'expliciter les homomorphismes figurant dans la suite exacte écrite plus haut, et de retrouver celle-ci par des procédés élémentaires (i.e. indépendants de toute suite spectrale).

### 5.7. — Passage à un recouvrement plus fin

Soient $\mathfrak{M} = (M_i)_{i\in I}$ et $\mathfrak{N} = (N_j)_{j\in J}$ deux recouvrements de X; si $\mathfrak{N}$ est plus fin que $\mathfrak{M}$, nous appellerons *application simpliciale de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$* toute application $\theta : J \to I$ telle que l'on ait

$$N_j \subset M_{\theta(j)}$$

pour tout indice $j$. Une telle application définit une application simpliciale du nerf de $\mathfrak{N}$ dans celui de $\mathfrak{M}$, la réciproque étant fausse en général.

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ et $\theta$ étant donnés, considérons un préfaisceau $\mathcal{A}$ de base X; nous supposerons $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ouverts si $\mathcal{A}$ n'est pas un faisceau. On a alors un homomorphisme de complexes simpliciaux

$$\theta^*: C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$$

pour toute famille $\Phi$ de supports dans X. Pour définir cet homomorphisme il suffit d'associer à toute cochaîne $\alpha$ de degré $n$ de $\mathfrak{M}$ la cochaîne $\theta^*(\alpha)$ donnée par

$$\theta^*(\alpha)_{j_0\ldots j_n} = \text{restriction de } \alpha_{\theta(j_0)\ldots\theta(j_n)} \text{ à l'ensemble } N_{j_0\ldots j_n} \subset M_{\theta(j_0)\ldots\theta(j_n)}.$$

En fait il est clair qu'on a même un homomorphisme de *préfaisceaux*

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{N}; \mathcal{A}),$$

compatible avec les « structures simpliciales » évidentes de ceux-ci.

**Théorème** 5.7.1. — *Soient $\theta_0$ et $\theta_1$ deux applications simpliciales de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$; les homomorphismes $\theta_0^*$ et $\theta_1^*$ sont simplicialement homotopes.*

Nous utiliserons pour cela les résultats du chapitre I, n° 3.7. Considérons donc le complexe $I^* = C^*(\Delta_1; \mathbf{Z})$ des cochaînes singulières entières du schéma simplicial $\Delta_1$; nous devons construire un homomorphisme

$$\text{(1)} \qquad I^* \times C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$$

qui, composé avec les homomorphismes canoniques

$$j_0, j_1 \colon C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \to I^* \times C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}), \tag{2}$$

redonne $\theta_0^*$ et $\theta_1^*$. Pour cela formons le recouvrement

$$\overline{\mathfrak{N}} = (N_{\iota, j})$$

où $\iota$ décrit $\Delta_1$, où J décrit $j$, et où $N_{\iota, j} = N_j$ quels que soient $\iota$ et $j$; les recouvrements $\mathfrak{N}$ et $\overline{\mathfrak{N}}$ sont équivalents, mais non identiques, et le nerf de $\overline{\mathfrak{N}}$ est évidemment le produit cartésien de $\Delta_1$ par le nerf de $\mathfrak{N}$. On a de plus un isomorphisme canonique

$$I^* \times C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) = C^*_\Phi(\overline{\mathfrak{N}}; \mathcal{A}) \tag{3}$$

comme suit : prenons des cochaînes $\lambda \in C^p(\Delta_1; \mathbf{Z})$ et $\nu \in C^q_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$; étant donnés des simplexes singuliers $s$ et $t$ de dimension $p$ de $\Delta_1$ et du nerf de $\mathfrak{N}$, on a évidemment

$$N_{s, t} = N_t\,;$$

cela dit, l'homomorphisme (3) devra transformer l'élément $\lambda \times \nu$ de degré $p$ du premier membre en la cochaîne $\lambda \times \nu \in C^p_\Phi(\overline{\mathfrak{N}}; \mathcal{A})$ donnée par

$$(\lambda \times \nu)_{s, t} = \lambda(s) . \nu_t. \tag{4}$$

Cela dit, il est immédiat de vérifier que, moyennant l'identification (3), les homomorphismes (2) sont définis par des applications simpliciales de $\mathfrak{N}$ dans $\overline{\mathfrak{N}}$ — à savoir, évidemment, les applications

$$\varphi_0 \colon j \to (0, j) \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 \colon j \to (1, j).$$

Or, considérons les deux applications simpliciales $\theta_0$ et $\theta_1$ de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$; elles définissent une application simpliciale $\theta$ du recouvrement $\overline{\mathfrak{N}}$ dans $\mathfrak{M}$, à savoir $(\iota, j) \to \theta_\iota(j)$ et donc un homomorphisme

$$\theta^* \colon C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\overline{\mathfrak{N}}; \mathcal{A})\,;$$

il est trivial de vérifier que

$$\varphi_\iota^* \circ \theta^* = (\theta \circ \varphi_\iota)^* = \theta_\iota^*\,;$$

par conséquent, moyennant l'identification (3), l'homomorphisme $\theta^*$ joue le rôle de l'homomorphisme (1) cherché, ce qui démontre le théorème.

On peut expliciter l'opérateur d'homotopie qui résulte des calculs du chapitre I, n° 3.7; c'est celui qui transforme la cochaîne $\alpha$ de degré $n$ de $\mathfrak{M}$ en la cochaîne $D\alpha$ de degré $n-1$ de $\mathfrak{N}$ donnée par la formule

$$(D\alpha)_{j_0 \ldots j_{n-1}} = \sum (-1)^k . \alpha_{\theta_0(j_0) \ldots \theta_0(j_k)\theta_1(j_k) \ldots \theta_1(j_{n-1})},$$

étant entendu qu'on remplace les sections figurant au second membre par leurs restrictions à $N_{j_0 \ldots j_n}$.

On notera d'autre part que dans les raisonnements précédents on peut remplacer $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ par $\mathfrak{M} \cap U$ et $\mathfrak{N} \cap U$, où U est un ouvert quelconque; le Théorème s'applique donc non seulement aux complexes de cochaînes mais aussi aux *préfaisceaux* correspondants $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ et $\mathcal{C}^*(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$.

Le Théorème précédent montre que, pour toute famille $\Phi$ de support dans X, on peut définir des homomorphismes *canoniques*

$$\boxed{H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \rightarrow H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})},$$

et si l'on a un troisième recouvrement $\mathfrak{P}$ plus fin que $\mathfrak{N}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \arrow[dl] \\ & H^n_\Phi(\mathfrak{P}; \mathcal{A}) & \end{tikzcd}$$

sera évidemment commutatif.

*Si $\mathcal{A}$ est un faisceau et si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont ouverts ou fermés localement finis* (on ne suppose d'ailleurs pas que les deux recouvrements soient du même type), *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \arrow[dl] \\ & H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) & \end{tikzcd}$$

*est commutatif;* cela résulte du Théorème 4.7.2. concernant les homomorphismes de résolutions.

Enfin, si deux recouvrements $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont *équivalents* on a des isomorphismes canoniques

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$$

il suffit de choisir des applications simpliciales $\varphi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ et $\psi : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$; d'après le Théorème 5.7.1., les applications $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ définissent nécessairement les applications identiques en cohomologie, d'où le résultat.

En particulier, *si le recouvrement $\mathfrak{M}$ est trivial* (i.e. si $M_i = X$ pour un indice $i$) *on a* $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 1$ *et pour tout* $\mathcal{A}$, car $\mathfrak{M}$ est alors équivalent au recouvrement formé du seul ensemble X, recouvrement dont la cohomologie se calcule facilement. ..

## 5.8. — Cohomologie de Čech

Les résultats du n° précédent suggèrent l'utilité de passer à la limite inductive sur les groupes $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$, ou même sur les complexes $C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ ; nous allons montrer comment l'on doit procéder pour y parvenir.

Considérons l'*ensemble* $\mathfrak{R}(X)$ des recouvrements *ouverts* de X de la forme

$$\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X} \qquad \text{avec} \qquad x \in U_x \text{ pour tout } x.$$

On peut le munir d'une *relation d'ordre* en écrivant

$$\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V} \text{ si et seulement si } U_x \subset V_x \text{ pour tout } x.$$

Si $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$, on a une application simpliciale *canonique* de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{V}$, à savoir $x \to x$, d'où un homomorphisme *canonique*

$$C^*_\Phi(\mathfrak{V}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$$

de complexes de cochaînes simpliciaux, pour toute famille $\Phi$ de supports dans X. Cet homomorphisme définit bien entendu les homomorphismes

$$H^n_\Phi(\mathfrak{V}; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$$

du n° précédent.

Nous poserons, ce qui est évidemment légitime,

$$\boxed{\check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A}) = \underset{\mathfrak{R}(X)}{\text{lim. ind.}}\ C^*_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})}\ ;$$

on définit ainsi le complexe des *cochaînes de Čech de* X *à support dans* $\Phi$ *et à valeurs dans le préfaisceau* $\mathcal{A}$ ; c'est manifestement un *complexe de cochaînes simplicial*. Les groupes

$$\boxed{\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^n(\check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A})) = \underset{\mathfrak{R}(X)}{\text{lim. ind.}}\ H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})}$$

sont les *groupes de cohomologie de Čech* de X à support dans $\Phi$ et à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Soit $\mathfrak{M}$ un recouvrement *ouvert* quelconque de X (ou même, si $\mathcal{A}$ est un faisceau, un recouvrement moins fin qu'un recouvrement ouvert) ; on a alors des homomorphismes canoniques

$$\boxed{H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})}$$

comme suit : choisissons un recouvrement $\mathfrak{U} \in \mathfrak{R}(X)$ plus fin que $\mathfrak{M}$, et composons les homomorphismes canoniques

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \qquad \text{et} \qquad H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \to \check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A});$$

on obtient alors un homomorphisme de la forme cherchée; reste à voir qu'il est indépendant du choix de $\mathfrak{U}$; or remplaçons $\mathfrak{U}$ par un recouvrement $\mathfrak{V} \in \mathfrak{R}(X)$ plus fin que $\mathfrak{M}$; il existe un $\mathfrak{W} \in \mathfrak{R}(X)$ qui vérifie $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V}$; le résultat cherché résulte alors de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \arrow[dr] & H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^n_\Phi(\mathfrak{V}; \mathcal{A}) \arrow[dl] \\
& H^n_\Phi(\mathfrak{W}; \mathcal{A}). &
\end{tikzcd}$$

On a évidemment les résultats suivants (où l'on ne considère, si $\mathcal{A}$ est un préfaisceau, que des recouvrements ouverts, et, si $\mathcal{A}$ est un faisceau, que des recouvrements moins fins que des recouvrements ouverts) :

*a) : si* $\mathfrak{N}$ *est plus fin que* $\mathfrak{M}$ *le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \arrow[dl] \\
& \check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

*est commutatif;*

*b) pour qu'un élément de* $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ *s'annule dans* $\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})$ *il faut et il suffit qu'il s'annule dans* $H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$, *où* $\mathfrak{N}$ *est recouvrement plus fin que* $\mathfrak{M}$ *convenablement choisi;*

*c) la réunion dans* $\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})$ *des images des divers groupes* $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ *est* $\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})$ *tout entier.*

On peut donc dire qu'en un certain sens le groupe $\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})$ est la « limite inductive » des groupes $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ lorsque $\mathfrak{M}$ décrit « l'ensemble» — qui n'en est pas un — de « tous » les recouvrements ouverts de X. Bien entendu, on peut, pour calculer les groupes de Čech, se borner à considérer un *système fondamental* de recouvrements ouverts de X; par exemple, si X est quasi-compact, on peut se borner à passer à la limite sur les groupes de cohomologie des recouvrements ouverts *finis* de X.

Notons aussi, dans un autre ordre d'idées, le résultat suivant, qui nous sera utile plus loin :

***Théorème*** 5.8.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille de supports dans* X, *et supposons que tout* $S \in \Phi$ *possède un voisinage dans* $\Phi$ . *Alors le foncteur* $\mathcal{A} \to \check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A})$ *transforme toute suite exacte de* préfaisceaux *en une suite exacte de complexes.*

Soit en effet une suite exacte de préfaisceaux

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0;$$

pour tout ouvert U, la suite correspondante

$$0 \to \mathcal{A}'(\mathrm{U}) \to \mathcal{A}(\mathrm{U}) \to \mathcal{A}''(\mathrm{U}) \to 0$$

est par définition exacte; donc, pour tout recouvrement *ouvert* $\mathfrak{U}$ on aura une suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}') \to \mathrm{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \to \mathrm{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}'') \to 0$$

d'où à la limite la suite exacte

$$0 \to \check{\mathrm{C}}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \to \check{\mathrm{C}}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \check{\mathrm{C}}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \to 0;$$

si l'on se borne aux cochaînes à supports dans $\Phi$, il est clair que cette suite reste exacte à gauche; tout revient donc à montrer que les homomorphismes

$$\check{\mathrm{C}}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \check{\mathrm{C}}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'')$$

sont surjectifs.

Or prenons un élément $\alpha''$ du second membre, représenté dans un recouvrement $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_x)_{x \in \mathrm{X}}$ par une cochaîne $\beta''$ de support $\mathrm{S} \in \Phi$ ; prenons un voisinage $\mathrm{T} \in \Phi$ de S.

Nous pouvons, au besoin en remplaçant $\mathfrak{U}$ par un recouvrement $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{U}$, supposer réalisée la condition

(*a*): *on a* $\mathrm{U}_x \subset \mathrm{T}$ *pour tout* $x \in \mathrm{S}$.

D'autre part, tout point $x \in \mathrm{X} - \mathrm{S}$ possède un voisinage ouvert $\mathrm{V}_x$ tel que, pour tout simplexe singulier $s$ du nerf de $\mathfrak{U}$, de dimension $p$, $\beta''_s$ induise 0 dans $\mathrm{U}_s \cap \mathrm{V}_x$; en modifiant à nouveau $\mathfrak{U}$ on peut supposer $\mathrm{V}_x = \mathrm{U}_x$; or si $s = (x_0, ..., x_p)$ on a $\mathrm{U}_s \subset \mathrm{U}_{x_k}$ pour tout $k$; il s'ensuit qu'on peut supposer réalisée la condition.

*b*): *si* $s = (x_0, ..., x_p)$ *n'a pas tous ses sommets dans* S *on a* $\beta''_s = 0$.

Ceci dit il existe pour tout $s$ un élément $\beta_s$ de $\mathcal{A}(\mathrm{U}_s)$ qui s'applique sur $\beta''_s$ par l'homomorphisme donné $\mathcal{A} \to \mathcal{A}''$; on peut de plus supposer $\beta_s = 0$ si $\alpha_s = 0$, i.e., d'après (*b*), si les sommets de $s$ ne sont pas tous dans S; d'après (*a*) il est clair qu'on définit ainsi une cochaîne $\beta \in \mathrm{C}^p(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ *à support dans* $\Phi$, représentant $\beta''$, d'où le Théorème.

Il résulte du théorème précédent que l'on a une *suite exacte de cohomologie de Čech* pour toute suite exacte de *pré*faisceaux et toute famille $\Phi$ vérifiant la condition de l'énoncé. Nous verrons plus loin que si la famille $\Phi$ est *paracompactifiante* on a aussi une suite exacte de cohomologie de Čech pour toute suite exacte de *faisceaux*.

### 5. 9. — La suite spectrale associée à la cohomologie de Čech

Soient X un espace topologique et $\mathcal{A}$ un *faisceau* de base X. Étant donnés des recouvrements ouverts $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{B}$, si $\mathfrak{B}$ est plus fin que $\mathfrak{U}$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^n(\mathfrak{B}; \mathcal{A}) \arrow[dl] \\ & H^n(X; \mathcal{A}). & \end{tikzcd}$$

Prenant en particulier des recouvrements de $\mathfrak{R}(X)$ et passant à la limite inductive on en déduit des homomorphismes canoniques

$$\boxed{\check{H}^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})};$$

nous allons les déduire d'une suite spectrale.

Soit $\mathcal{L}^* = \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$ la résolution canonique de $\mathcal{A}$, et formons le double complexe

$$\check{C}^*(X; \mathcal{L}^*) = \sum \check{C}^p(X; \mathcal{L}^q).$$

On a des homomorphismes canoniques

$$\check{C}^*(X; \mathcal{A}) \xleftarrow{\iota'} \check{C}^*(X; \mathcal{L}^*) \xleftarrow{\iota''} \Gamma(\mathcal{L}^*).$$

Les suites spectrales s'obtiennent d'autre part comme suit. On a évidemment

$$''E_2^{pq} = H^p(\check{H}^q(X; \mathcal{L}^*)) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 1$$

en vertu du Théorème 5.2.3. D'autre part

$$'E_1^{pq} = H^q(\check{C}^p(X; \mathcal{L}^*));$$

or le foncteur $\mathcal{F} \to \check{C}^p(X; \mathcal{F})$ est exact sur la catégorie des *préfaisceaux;* il s'ensuit qu'en introduisant sur X les *pré*faisceaux

$$\mathcal{H}^q : U \to H^q(\mathcal{L}^*(U)) = H^q(U; \mathcal{A})$$

il vient

$$'E_1^{pq} = \check{C}^p(X; \mathcal{H}^q), \qquad 'E_2^{pq} = \check{H}^p(X; \mathcal{H}^q).$$

On obtient donc le résultat suivant :

***Théorème*** 5.9.1. — *Soient* X *un espace topologique et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X. *Considérons les préfaisceaux*

$$\mathcal{H}^q(X; \mathcal{A}) : \quad U \to H^q(U; \mathcal{A});$$

*il existe alors une suite spectrale dont le terme* $E_2$ *est*

$$E_2^{pq} = \check{H}^p(X; \mathcal{H}^q(X; \mathcal{A})),$$

*et dont le terme* $E_\infty$ *est le groupe bigradué associé à une filtration convenable du groupe gradué* $H^*(X; \mathcal{A})$.

On notera que l'on a $\mathcal{H}^0(X; \mathcal{A}) = \mathcal{A}$ et par suite

$$''E_2^{p0} = \check{H}^p(X; \mathcal{A});$$

on retrouve ainsi, évidemment, les homomorphismes définis plus haut.

**Corollaire.** — *Soient* X *un espace topologique et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X. *Les homomorphismes canoniques*

$$\check{H}^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$$

*sont bijectifs pour* $n = 0$ *ou* $1$, *et injectif pour* $n = 2$.

L'assertion concernant $n = 0$ est triviale; d'après la théorie des suites spectrales, les deux autres assertions seront établies si l'on montre que

$$\check{H}^0(X; \mathcal{H}^1(X; \mathcal{A})) = 0;$$

or *le faisceau engendré par* $\mathcal{H}^q(X; \mathcal{A})$ *est nul pour* $q \geqslant 1$ (puisque, localement, tout cocycle de $\mathcal{L}^*$ est un cobord). Tout revient donc à prouver le

**Lemme :** *Si un préfaisceau* $\mathcal{F}$ *engendre le faisceau nul, on a*

$$\check{H}^0(X; \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{et même} \qquad \check{C}^0(X; \mathcal{F}) = 0.$$

En effet considérons une cochaîne $\alpha \in \check{C}^0(X; \mathcal{F})$; dans un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$ elle sera représentée par une famille $(\alpha_x)$, avec $\alpha_x \in \mathcal{F}(U_x)$; mais comme $\mathcal{F}$ engendre 0, chaque point $x$ a un voisinage ouvert $V_x \subset U_x$ dans lequel $\alpha_x$ induit 0; d'où, en remplaçant $\mathfrak{U}$ par $\mathfrak{B} = (V_x)$, le résultat cherché.

*Tous* les résultats précédents s'étendent au cas d'une famille $\Phi$ de supports vérifiant la condition énoncée au Théorème 5.8.1. (tout $S \in \Phi$ possède un voisinage dans $\Phi$); il n'y a absolument rien à changer aux raisonnements : il suffit d'affecter d'un indice $\Phi$ tous les groupes de cohomologie envisagés.

Le Théorème 5.9.1. a d'autre part la conséquence que voici, particulièrement utile en Géométrie algébrique :

**Théorème** 5.9.2.[1] — *Soient* X *un espace topologique et* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X. *Supposons que l'on puisse recouvrir* X *par une famille* $\mathbf{U}$ *d'ensembles ouverts possédant les propriétés suivantes* :

*a*) : *Si* $\mathbf{U}$ *contient* $U'$ *et* $U''$, *elle contient* $U' \cap U''$;

*b*) : $\mathbf{U}$ *contient des ouverts arbitrairement petits*;

*c*) : *on a*

$$\check{H}^q(U; \mathcal{A}) = 0$$

*pour tout* $q \geqslant 1$ *et tout* $U \in \mathbf{U}$.

(1) Ce résultat est dû à Henri Cartan.

*Dans ces conditions les homomorphismes* $\check{H}^q(X; \mathcal{A}) \to H^q(X; \mathcal{A})$ *sont bijectifs.*

Nous allons démontrer, par récurence sur $n$, que les homomorphismes $\check{H}^n(U, \mathcal{A}) \to H^n(U; \mathcal{A})$ sont bijectifs pour tout $U \in \mathbf{U}$; cela impliquera le théorème; en effet, d'après les hypothèses (*a*) et (*b*) on peut, pour calculer les groupes $\check{C}^*(X; \mathcal{H}^q)$, utiliser des recouvrements $(U_x)_{x \in X}$ tels que l'on ait toujours $U_{x_0 \ldots x_n} \in \mathbf{U}$; d'après (*c*) on aura donc, moyennant la propriété annoncée, les relations $\check{C}^*(X; \mathcal{H}^q) = 0$ pour $q \geqslant 1$, et le Théorème résultera alors du Théorème 5.9.1., puisque la suite spectrale qui y figure sera dégénérée.

Supposons donc prouvé que l'on a

$$H^q(U; \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < q < n \qquad \text{et pour} \qquad U \in \mathbf{U};$$

il s'ensuit que $\check{C}^*(X; \mathcal{H}^q) = 0$ pour $0 < q < n$; autrement dit, la suite spectrale du Théorème 5.9.1. vérifie

$$E_2^{pq} = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < q < n \qquad \text{et} \qquad p \geqslant 0.$$

De là et de la théorie des suites spectrales résulte que l'homomorphisme canonique

$$E_2^{n0} = \check{H}^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$$

est bijectif. Maintenant, appliquons ce résultat en remplaçant X par un $U \in \mathbf{U}$, $\mathcal{A}$ par le faisceau induit dans U, et $\mathbf{U}$ par la famille formée des $U' \in \mathbf{U}$ contenus dans U; on en déduit que l'homomorphisme $\check{H}^n(U; \mathcal{A}) \to H^n(U; \mathcal{A})$ est bijectif, ce qui achève la démonstration.

## 5. 10. — Le théorème d'isomorphisme

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce § :

**Théorème** 5.10.1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\mathcal{A}$ *un faisceau de base* X, *et* $\Phi$ *une famille* paracompactifiante *dans* X. *Les homomorphismes canoniques*

$$\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{A})$$

*sont bijectifs.*

Ce résultat, d'après le Théorème 5.9.1, sera une conséquence du résultat suivant :

**Théorème** 5.10.2. — *Soient* X *un espace topologique,* $\Phi$ *une famille* paracompactifiante *dans* X, *et* $\mathcal{A}$ *un préfaisceau de base* X. *On a*

$$\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad n \geqslant 0$$

*si le faisceau engendré par* $\mathcal{A}$ *est nul.*

Nous allons d'abord montrer que toute classe de cohomologie $\xi \in \check{H}^*_\Phi(X; \mathcal{A})$ est représentée par un cocycle d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ *localement fini* convenable; puis que toute *cochaîne* de ce recouvrement devient nulle si on remplace celui-ci par un recouvrement plus fin convenablement choisi; cela démontrera le théorème (on observera que nous ne démontrerons pas que $\check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A}) = 0$).

Considérons donc $\xi$. Il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ tel que $\xi$ soit représenté par un cocycle $\alpha$ de $\mathfrak{U}$ de support $S \in \Phi$. Prenons un voisinage $S' \in \Phi$ de $S$; on peut évidemment supposer que les $U_i$ rencontrant $S$ sont contenus dans $S'$; soit $I_0$ l'ensemble des $i$ tels que $U_i$ rencontre $S$.

Comme le support de $\alpha$ est $S$, chaque $x \in X - S$ possède un voisinage $V(x)$ tel que $\alpha_s$ induise $0$ dans $U_s \cap V(x)$ pour tout simplexe $s$ de $\mathfrak{U}$; en remplaçant $\mathfrak{U}$ par un recouvrement plus fin on peut supposer chaque $U_i (i \notin I_0)$ contenu dans l'un de ces $V(x)$; par suite on peut supposer $\alpha_s = 0$ dès que les sommets de $s$ ne sont pas tous dans $I_0$. Il est clair qu'alors $\xi$ est déjà représentée par un cocycle (de support $S$) du recouvrement formé des $U_i$, $i \in I_0$, et de l'ouvert $X - S$; autrement dit *on peut supposer qu'il existe un indice* $o \in I$ *tel que l'on ait* $U_o = X - S$, *et* $U_i \subset S'$ *pour* $i \neq o$.

Or comme $S'$ est *paracompact* il existe un recouvrement ouvert localement fini plus fin que $\mathfrak{U} \cap S'$; on peut supposer que l'un des ensembles de ce nouveau recouvrement est $S' - S$ et que les autres sont contenus dans des $U_i$, $i \neq o$ et que par suite ils sont ouverts dans $X$. Donc *on peut de plus supposer* $\mathfrak{U}$ *localement fini*, et un raisonnement analogue montre de même *qu'on peut supposer l'existence d'un recouvrement ouvert* $(V_i)_{i \in I}$ *avec* $\overline{V_i} \subset U_i$ *pour tout* $i \in I$. Ceci termine la première partie de la démonstration.

Considérons un recouvrement ouvert *localement fini* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ et supposons qu'il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ avec $\overline{V_i} \subset U_i$; nous allons démontrer (sans faire d'hypothèse sur $X$, et la famille $\Phi$ n'intervenant plus) que toute cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ induit $0$ dans un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$ bien choisi. En effet, prenons pour chaque $x$ un voisinage ouvert $W_x$ ne rencontrant qu'un nombre fini d'ensembles $U_i$. On peut évidemment supposer remplies les conditions suivantes:

*a*) : *la relation* $x \in U_i$ *implique* $W_x \subset U_i$;
*b*) : *la relation* $x \in V_i$ *implique* $W_x \subset V_i$;
*c*) : *on a* $x \in U_i$ *dès que* $W_x$ *rencontre* $V_i$.

D'autre part, puisque le préfaisceau $\mathcal{A}$ engendre le faisceau nul, tout point $x \in U_s$ admet un voisinage dans lequel $\alpha_s$ induit $0$; ce voisinage peut être choisi indépendant de $s$ puisque $\mathfrak{U}$ est localement fini, et par suite on peut encore imposer la condition

*d*) : *la relation* $x \in U_s$ *implique* $\alpha_s = 0$ *dans* $W_x$.

Cela fait choisissons une application simpliciale $\varphi$ du recouvrement $\mathfrak{W} = (W_x)$

dans le recouvrement $\mathfrak{B} = (V_i)$; on peut aussi la considérer comme une application simpliciale de $\mathfrak{W}$ dans $\mathfrak{U}$; nous allons montrer que $\varphi^*(\alpha) = 0$.

Soit en effet $(x_0, \ldots, x_n)$ un simplexe singulier du nerf de $\mathfrak{W}$; posant $i_k = \varphi(x_k)$, il est clair que $\varphi^*(\alpha)_{x_0 \ldots x_n}$ est la restriction de $\alpha_{i_0 \ldots i_n}$ à l'ensemble

$$W_{x_0} \cap \ldots \cap W_{x_n};$$

or celui étant non vide, $W_{x_0}$ rencontre les $W_{x_k}$, *a fortiori* les $V_{i_k}$, de sorte que d'après la condition (*c*) on a $x_0 \in U_{i_0 \ldots i_n}$; d'après la condition (*a*) on a donc $W_{x_0} \subset U_{i_0 \ldots i_n}$; mais alors $\alpha_{i_0 \ldots i_n}$ induit 0 dans $W_{x_0}$ d'après la condition (*d*); *a fortiori* $\alpha_{i_0 \ldots i_n}$ induit 0 dans $W_{x_0 \ldots x_n}$, ce qui achève la démonstration.

**Corollaire.** — *Soient $\mathcal{A}$ un préfaisceau de base* X *et* $\Phi$ *une famille paracompactifiante dans* X. *Les homomorphismes canoniques*

$$\check{H}^p_\Phi(X; \mathcal{A}) \to \check{H}^p_\Phi(X; \tilde{\mathcal{A}})$$

*sont bijectifs* (on note $\tilde{\mathcal{A}}$ le faisceau engendré par $\mathcal{A}$).

On a en effet de façon évidente des suites exactes de préfaisceaux

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{A} \to \mathcal{I} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{I} \to \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{Q} \to 0.$$

d'où (Théorème 5.8.1.) des suites exactes en cohomologie de Čech; or les préfaisceaux $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ engendrent 0; le résultat cherché résulte alors aussitôt du Théorème précédent.

***Exemple*** 5.10.1. — Prenons pour $\mathcal{A}$ le préfaisceau $U \to A$, où A est un groupe abélien fixe; on voit que la cohomologie de Čech à valeurs dans le *faisceau* simple de base X et de fibre A se calcule à l'aide de cochaînes à valeurs dans le *préfaisceau* en question — autrement dit se réduit aux groupes de Čech classiques $\check{H}^n_\Phi(X; A)$.

***Remarque*** 5.10.1. — On peut donner du Théorème d'isomorphisme une démonstration assez différente de la précédente.

Considérons la famille des faisceaux différentiels $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ où $\mathfrak{U}$ parcourt l'ensemble $\mathfrak{R}(X)$; il est clair que l'on peut définir le faisceau différentiel

$$\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A}) = \varinjlim_{\mathfrak{R}(X)} \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A});$$

puisqu'on a une limite inductive de résolutions de $\mathcal{A}$, on trouve ainsi une *résolution* de $\mathcal{A}$.

Observons maintenant que, pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, $\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}; \mathbf{Z})$ est un faisceau d'anneaux, et $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ un $\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}; \mathbf{Z})$ — Module : pour le voir il suffit de définir le produit d'une cochaîne $\zeta \in C^0(\mathfrak{U}; \mathbf{Z})$ et d'une cochaîne $\alpha \in C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ à l'aide de la formule

$$(\zeta\alpha)_{i_0\dots i_n} = \zeta_{i_0}\alpha_{i_0\dots i_n},$$

et de procéder de même localement.

Passant à la limite on voit donc que $\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A})$ est un Module sur le faisceau d'anneaux $\check{\mathcal{C}}^0(X; \mathbf{Z})$ ; or il est immédiat de constater que $\check{\mathcal{C}}^0(X; \mathbf{Z}) = \mathcal{C}^0(X; \mathbf{Z})$ donc que $\check{\mathcal{C}}^0(X; \mathbf{Z})$ est flasque, et en particulier $\Phi$ — mou pour toute famille paracompactifiante $\Phi$ dans X. On voit donc que, si l'on a une famille paracompactifiante $\Phi$, $\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A})$ est une résolution de $\mathcal{A}$ par des faisceaux $\Phi$ — fins, et par suite que l'on a un isomorphisme canonique

$$H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^n[\Gamma_\Phi(\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A}))].$$

Si X est *compact* et si $\Phi$ est la famille de tous les fermés de X, on a de plus, en vertu du Théorème 3.10.1 :

$$\Gamma_\Phi(\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A})) = \text{lim. ind. } \Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})) = \text{lim. ind. } C^*_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) = \check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A}),$$

d'ou le théorème d'isomorphisme dans ce cas.

Dans le cas d'une famille paracompactifiante $\Phi$ quelconque, le raisonnement précédent est encore valable (quoique le Théorème 3.10.1 ne s'applique plus), comme on le voit directement (on laisse au lecteur le soin de faire la démonstration à titre d'exercice). On obtient ainsi une autre démonstration du théorème d'isomorphisme.

On notera que la formule

$$\Gamma(\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A})) = \check{C}^*(X; \mathcal{A})$$

est encore valable si X est un *espace de Zariski*, puisqu'alors le Théorème 3.10.1. s'applique. Par conséquent, le groupe gradué $\check{H}^*(X; \mathcal{A})$ est dans ce cas l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme $E_2$ est donné par

$$E_2^{pq} = H^p[H^q(X; \check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A}))] = \underset{\mathfrak{R}(X)}{\text{lim. ind.}}\ H^p[H^q(X; \mathcal{C}(\mathfrak{U}; \mathcal{A}))]$$

en vertu du Théorème 4.12.1. pour les espaces de Zariski. Il ne semble malheureusement pas possible de calculer plus explicitement cette suite spectrale, même si l'on remplace l'ensemble $\mathfrak{R}(X)$ par la famille des recouvrements ouverts *finis* de X (ce qui est évidemment permis en vertu des considérations du n° 5.7.).

## 5. 11. — Suite exacte en cohomologie de Čech

Soit $\Phi$ une famille paracompactifiante dans X, et considérons une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0;$$

désignons par $\mathcal{A}''_0$ le *préfaisceau* image de $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}''_0(\mathrm{U}) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}(\mathrm{U}) \to \mathcal{A}''(\mathrm{U}));$$

en combinant le Théorème 5.8.1. — qui donne une suite exacte de cohomologie reliant $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}''_0$ — avec le Corollaire ci-dessus on trouve une suite exacte de cohomologie

$$\ldots \to \check{\mathrm{H}}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \to \check{\mathrm{H}}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \check{\mathrm{H}}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} \check{\mathrm{H}}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \to \ldots$$

Nous allons montrer que, moyennant les isomorphismes du Théorème précédent, *cette suite exacte s'identifie à la suite exacte*

$$\ldots \to \mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \to \mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \mathrm{H}^n_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{n+1}_\Phi(\mathrm{X}: \mathcal{A}') \to \ldots$$

dont l'existence a été établie en § 4.

Considérons en effet les résolutions canoniques des faisceaux donnés; la seconde suite exacte précédente résulte de la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{C}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \to \mathrm{C}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \mathrm{C}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \to 0,$$

et l'on sait que

$$0 \to \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}') \to \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') \to 0$$

est même une suite exacte de *pré*faisceaux (Théorème 4.3.1.); par suite, en vertu du Théorème 5.8.1., on aura un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}')) & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})) & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}'')) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathrm{C}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') & \to & \mathrm{C}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) & \to & \mathrm{C}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}'') & \to & 0;
\end{array}$$

or les homomorphismes verticaux induisent des isomorphismes en cohomologie; donc la suite exacte de cohomologie du § 4 s'identifie à la suite exacte de cohomologie reliant les doubles complexes considérés.

Mais d'autre part, en appelant $\mathcal{A}''_0$ le pré-faisceau image de $\mathcal{A}$, on a aussi le diagramme commutatif suivant de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}') & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}) & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}''_0) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}')) & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})) & \to & \check{\mathrm{C}}^*_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}'')) & \to & 0;
\end{array}$$

donc la suite exacte de cohomologie reliant les doubles complexes s'identifie à la suite exacte en cohomologie de Čech, ce qui démontre évidemment notre assertion.

Il est facile de calculer l'opérateur $\delta$ en cohomologie de Čech. Prenons une classe de cohomologie $\xi'' \in \check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X}; \mathcal{A}'')$; en vertu du Corollaire du Théorème 5.10.2. on peut représenter $\xi''$, dans un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ convenablement choisi, par un cocycle $\alpha'' \in C^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}'')$, et le Théorème 5.8.1. montre qu'on peut supposer que $\alpha''$ est l'image, par $\mathcal{A} \to \mathcal{A}''$, d'une cochaîne $\alpha \in C^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$; la cochaîne $d\alpha \in C^{n+1}_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ est alors nécessairement à valeurs dans $\mathcal{A}'$, donc définit un élément de $H^{n+1}_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}')$, dont l'image dans $\check{H}^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}')$ est précisément $\delta\xi''$.

Par exemple considérons une section $\xi'' \in \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') = \check{H}^0_\Phi(X; \mathcal{A}'')$ et cherchons $\delta\xi''$; pour cela nous prenons un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ tel que, dans chaque $U_i$, $\xi''$ se relève en une section $\xi_i \in \mathcal{A}(U_i)$ — ce qui est possible même sans aucune hypothèse de paracompacité; on définit ainsi une 0-cochaîne $\xi = (\xi_i)$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$; si tout $S \in \Phi$ possède un voisinage dans $\Phi$ (ce qui est le cas des familles paracompactifiantes, ou de la famille de tous les fermés) on peut visiblement supposer $\xi$ à support dans $\Phi$.

Cela dit formons le cocycle $d\xi$; on a

$$(d\xi)_{ij} = \xi_j - \xi_i \qquad \text{dans} \qquad U_{ij}$$

et bien entendu $d\xi$ est en fait un cocycle à valeurs dans $\mathcal{A}'$; la classe de cohomologie de X à valeurs dans $\mathcal{A}'$ et à support dans $\Phi$ qu'il définit est $\delta\xi''$. Pour que celle-ci soit nulle, il faut et il suffit qu'en remplaçant au besoin $\mathfrak{U}$ par un recouvrement plus fin, on puisse trouver une 0-cochaîne $\xi'$ à valeurs dans $\mathcal{A}'$, et à support dans $\Phi$, telle que $d\xi = d\xi'$; mais alors en remplaçant $(\xi_i)$ par $(\xi_i - \xi'_i)$ cela signifie qu'on peut supposer

$$\xi_i = \xi_j \qquad \text{dans} \qquad U_{ij},$$

autrement dit que la section donnée $\xi''$ de $\mathcal{A}''$ se relève *globalement* en une section de $\mathcal{A}$ à support dans $\Phi$. Bien entendu, ce résultat est purement et simplement l'exactitude de la suite

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') \to \check{H}^1_\Phi(X; \mathcal{A}').$$

***Exemple*** 5.11.1. — Nous allons expliciter, en cohomologie de Čech, la suite exacte attachée à un sous-espace fermé F de X et à son complémentaire X — F (nº 4.10); nous supposerons pour simplifier que X est paracompact et que $\Phi$ est la famille de tous les fermés, de sorte qu'on aura à faire intervenir la cohomologie de X — F à supports dans la famille $\Phi$ des parties de X — F qui sont *fermées dans* X.

Nous devons écrire la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{A}_{X-F} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_F \to 0,$$

et calculer à l'aide des espaces X — F, X et F les groupes de cohomologie de Čech correspondant.

Soit $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$ un recouvrement de X; si $s$ est un simplexe singulier du nerf de $\mathfrak{U}$, on a canoniquement

$$\mathcal{A}_F(U_s) = \mathcal{A}(U_s \cap F)$$

puisque F est *fermé* dans X. Il s'ensuit aussitôt que l'on a un isomorphisme canonique

$$C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}_F) = C^*(\mathfrak{U} \cap F; \mathcal{A}),$$

valable d'ailleurs pour tout recouvrement ouvert de X. Or on peut se limiter aux recouvrements pour lesquels on a $U_x \subset X - F$ si $x \in X - F$ (car ils forment un système fondamental dans l'ensemble ordonné $\mathfrak{R}(X)$ des recouvrements de la forme considérée), et il est clair que pour un tel recouvrement, $\mathfrak{U} \cap F$ est canoniquement équivalent au recouvrement $(U_x \cap F)_{x \in F}$ de F; passant à la limite inductive on en conclut qu'on a un isomorphisme canonique

$$\boxed{\check{C}^*(X; \mathcal{A}_F) = \check{C}^*(F; \mathcal{A})}.$$

On remarquera que ce résultat est valable sans hypothèse de paracompacité; autrement dit, on a le résultat suivant :

***Théorème*** 5.11.1. — *Soit* F *un sous-espace fermé d'un espace* X; *pour tout faisceau* $\mathcal{A}$ *de base* X *on a des isomorphismes canoniques*

$$\check{H}^n(X; \mathcal{A}_F) = \check{H}^n(F; \mathcal{A})$$

*en cohomologie de Čech.*

On rapprochera ce résultat du Théorème 4.9.2.

Nous allons maintenant interpréter les groupes $\check{H}^n(X; \mathcal{A}_{X-F})$, qui sont isomorphes aux groupes $\check{H}^n_\Phi(X - F; \mathcal{A})$ lorsque X est paracompact — ceci en vertu du Théorème 5.10.1. d'une part, et du Théorème 4.10.1. d'autre part — comme groupes de cohomologie « relatifs ».

Introduisons pour cela les *préfaisceaux* suivants :

$$\mathcal{B}_{X-F}(U) = \begin{cases} \mathcal{A}(U) & \text{si } U \subset X - F \\ 0 & \text{si } U \cap F \text{ non vide;} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_F(U) = \begin{cases} \mathcal{A}(U) & \text{si } U \cap F \text{ non vide} \\ 0 & \text{si } U \subset X - F, \end{cases}$$

les opérations de restriction étant définies à l'aide de celles de $\mathcal{A}$. On a un homomorphisme canonique de préfaisceaux

$$\mathcal{B}_{X-F} \rightarrow \mathcal{A}_{X-F},$$

d'ailleurs injectif, et il est clair, moyennant cet homomorphisme, que $\mathcal{B}_{X-F}$

engendre le faisceau $\mathcal{A}_{X-F}$; si X est paracompact, on a donc canoniquement

$$\check{H}^n(X;\ \mathcal{A}_{X-F}) = \check{H}^n(X; \mathcal{B}_{X-F}).$$

Or considérons le complexe

$$\check{C}^*(X; \mathcal{B}_{X-F}) = \underset{\mathfrak{R}(X)}{\text{lim. ind.}}\ C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{B}_{X-F});$$

il est clair que $C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{B}_{X-F})$ est un sous-complexe de $C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$, formé des cochaînes $\alpha$ telles que l'on ait

$$\alpha_s = 0 \text{ si } U_s \text{ rencontre } F;$$

autrement dit, désignons par $X_{\mathfrak{U}}$ le schéma simplicial obtenu en munissant X de la structure de nerf de $\mathfrak{U}$ (rappelons que l'on considère des recouvrements de $\mathfrak{R}(X)$), et $F_{\mathfrak{U}}$ le sous-schéma simplicial de $X_{\mathfrak{U}}$ défini comme suit : $(x_0, \ldots, x_n)$ est un simplexe de $F_{\mathfrak{U}}$ si et seulement si $U_{x_0 \ldots x_n}$ rencontre F (ce qui exige que les $x_k$ soient dans F lorsque l'on suppose $U_x \subset X - F$ pour tout $x \in X - F$); alors $C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{B}_{X-F})$ *est formé des cochaînes du schéma simplicial* $X_{\mathfrak{U}}$ *à valeurs dans le système de coefficients induit par* $\mathcal{A}$, *qui sont nulles sur les simplexes de* $F_{\mathfrak{U}}$; pour cette raison il est naturel de désigner $C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{B}_{X-F})$ par la notation

$$C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}};\ \mathcal{A}),$$

et à la limite de désigner le complexe $\check{C}^*(X; \mathcal{B}_{X-F})$ par la notation

$$\check{C}^*(X \bmod F;\ \mathcal{A}).$$

On obtient alors des isomorphismes canoniques

$$\boxed{\check{H}^n_\Phi(X - F;\ \mathcal{A}) = \check{H}^n(X \bmod F;\ \mathcal{A})},$$

où $\Phi$, rappelons-le, est formée des parties de $X - F$ qui sont fermées dans X.

Bien entendu, les définitions précédentes valent même si $\mathcal{A}$ est un *préfaisceau.* Par exemple prenons un groupe abélien fixe A et appliquons ce qui précède au préfaisceau $U \to A$; pour tout recouvrement $\mathfrak{U} \in \mathfrak{R}(X)$, le complexe $C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}}; A)$ est alors formé des cochaînes (à valeurs dans le groupe fixe A) du schéma simplicial $X_{\mathfrak{U}}$ qui sont nulles sur le schéma simplicial $F_{\mathfrak{U}}$ — la notation $C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}}; A)$ est donc en accord avec celle du Chapitre I, n° 3.2; autrement dit on a

$$C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}};\ \mathcal{A}) = \mathrm{Hom}[C_*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}}), A]$$

avec les notations du Chapitre I, n° 3.2. Par suite, *si* X *est paracompact, et si* $\mathcal{A}$ *est le faisceau simple de base* X *et de fibre* A, *on a des isomorphismes canoniques*

$$\boxed{\check{H}^n_\Phi(X - F;\ \mathcal{A}) = \check{H}^n(X \bmod F;\ A)}.$$

Les groupes figurant au second membre sont parfois appelés, dans la littérature, les *groupes de Lefschetz* de X modulo F; ils sont connus depuis longtemps, leur définition ne reposant évidemment pas sur la théorie des faisceaux.
On voit donc que, *si* X *est paracompact*, on a une suite exacte de cohomologie de la forme

$$\ldots \to \check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X};\, \mathrm{A}) \to \check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{F};\, \mathrm{A}) \to \check{\mathrm{H}}^{n+1}(\mathrm{X} \bmod \mathrm{F};\, \mathrm{A}) \to \check{\mathrm{H}}^{n+1}(\mathrm{X};\mathrm{A}) \to \ldots$$

pour tout sous-espace fermé F de X et tout groupe abélien A, suite exacte qui s'identifie bien entendu à la suite exacte du nº 4.10.

## 5. 12. — Cohomologie de Čech et théorie de la dimension

Soit X un espace *paracompact*; pour établir que X est de dimension cohomologique $\leqslant n$ (cf. nº 4.13 et 4.14) il suffit d'établir que l'on a

$$\check{\mathrm{H}}^i(\mathrm{X};\, \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i > n$$

quel que soit le faisceau $\mathcal{A}$ sur X. Pour cela, il *suffit* de construire des recouvrements ouverts arbitrairement fins de X tels que l'on ait

$$\mathrm{H}^i(\mathfrak{M};\, \mathcal{A}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i > n.$$

Or pour calculer les groupes $\mathrm{H}^i(\mathfrak{M};\mathcal{A})$ on peut remplacer le complexe $\mathrm{C}^*(\mathfrak{M};\mathcal{A})$ par le sous-complexe formé des cochaînes *alternées* (Chapitre I, nº 3.8); mais si une cochaîne

$$\alpha = (\alpha_{i_0 \ldots i_p})$$

est alternée, on a $\alpha_{i_0 \ldots i_p} = 0$ dès que les indices $i_0, \ldots, i_p$ ne sont pas deux à deux distincts. Supposons alors le recouvrement $\mathfrak{M}$ *de dimension* $\leqslant n$ : cela signifie que l'on a

$$\mathrm{M}_{i_0 \ldots i_p} = \emptyset$$

dès que $p > n$ et que les indices $i_0, \ldots, i_p$ sont distincts (*i.e.* que le nerf de $\mathfrak{M}$ est de dimension $n$ comme schéma simplicial); toute cochaîne alternée de degré $p > n$ sera alors nulle, et l'on aura *a fortiori* $\mathrm{H}^i(\mathfrak{M};\, \mathcal{A}) = 0$ pour $i > n$.

Par conséquent, *pour que la dimension cohomologique de* X *soit* $\leqslant n$ *il suffit que* X *admette des recouvrements ouverts arbitrairement fins de dimension* $\leqslant n$; il suffit même, d'après le Théorème 4.14.1., que cette propriété soit vérifiée « localement ».

Or il est classique — quoique non trivial — que cette propriété est vérifiée par tout sous-espace compact de $\mathbf{R}^n$; on en déduit que tout sous-espace compact de $\mathbf{R}^n$ est de dimension $\leqslant n$; comme $\mathbf{R}^n$ est localement compact et paracompact, on en déduit que l'espace $\mathbf{R}^n$ lui-même est de dimension $\leqslant n$ (Théorème 4.14.1.) ; comme $\mathbf{R}^n$ est métrisable, il s'ensuit que tout sous-espace de $\mathbf{R}^n$ (fermé ou non) est de dimension $\leqslant n$ (Théorème 4.14.2.) ; appliquant à nouveau le Théorème 4.14.1. on obtient en définitive le résultat suivant :

**Théorème** 5.13.1. — *Pour qu'un espace paracompact* X *soit de dimension cohomologique* $\leqslant n$, *il suffit que tout point de* X *admette un voisinage homéomorphe à un sous-espace de* $\mathbf{R}^n$.

# 6. PRODUIT CARTÉSIEN ET CUP-PRODUIT

## 6. 1. — Produit cartésien de deux classes de cohomologie

Soient X et Y deux espaces topologiques, $\mathcal{L}^*$ un faisceau différentiel de base X, et $\mathcal{M}^*$ un faisceau différentiel de base Y; nous supposerons pour fixer les idées que l'anneau de base est $\mathbf{Z}$, mais l'on pourrait étendre ce qui va suivre au cas où $\mathcal{L}^*$ est composé de modules à droite sur un anneau de base quelconque A et $\mathcal{M}^*$ de A-modules à gauche.

La donnée de $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ permet de construire sur l'espace produit $X \times Y$ un faisceau de doubles complexes

$$\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*$$

que nous appellerons le *produit tensoriel total* des faisceaux différentiels donnés, et qui est défini comme suit : on pose

$$(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*)^{pq} = \mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q,$$

et les différentielles

$$\begin{aligned} d'&: \mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q \to \mathcal{L}^{p+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q \\ d''&: \mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q \to \mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^{q+1}, \end{aligned}$$

sont induites de façon évidente par les différentielles de $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$. Dans le cas — de loin le plus important — où les graduations de $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ sont positives, nous regarderons aussi $\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*$ comme un faisceau différentiel sur $X \times Y$, en posant

$$(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*)^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q$$

et en définissant la différentielle $d$ par la relation

$$d = d' + d''.$$

Le complexe des sections de $\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*$ s'obtient alors en munissant le double complexe

$$\Gamma(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*) = \oplus\, \Gamma(\mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q)$$

de sa graduation et de sa différentielle totales, puisque, pour des raisons de finitude, on a évidemment

$$\Gamma((\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*)^n) = \bigoplus_{p+q=n} \Gamma(\mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q).$$

Dans le cas général où les graduations ne sont pas bornées inférieurement nous conviendrons de définir $\Gamma(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*)$, et plus généralement $\Gamma_\Theta(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*)$ pour toute famille $\Theta$ de supports dans $X \times Y$, par la formule précédente, affectée bien entendu de l'indice $\Theta$.

Soient $\Phi$ et $\Psi$ des familles de supports dans X et Y, et $\Theta = \Phi \times \Psi$ la famille produit (formée, rappelons-le, des parties fermées de $X \times Y$ qui sont contenues dans un ensemble de la forme $S \times T$, avec $S \in \Phi$ et $T \in \Psi$); étant donnés des faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur X et Y, on a défini au nº 2.10 un homomorphisme canonique

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \otimes \Gamma_\Psi(\mathcal{B}) \;\to\; \Gamma_\Theta(\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B});$$

il en résulte évidemment, quels que soient les faisceaux différentiels $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ sur X et Y, un *homomorphisme de doubles complexes*

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*) \otimes \Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*) \;\to\; \Gamma_\Theta(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*)$$

et par conséquent des homomorphismes canoniques

$$(1) \qquad \boxed{H^p(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \otimes H^q(\Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*)) \;\to\; H^{p+q}(\Gamma_\Theta(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^*))}\,.$$

Nous allons déduire de là l'existence, quels que soient les faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur X et Y, d'homomorphismes canoniques

$$(2) \qquad \boxed{H^p_\Phi(X; \mathcal{A}) \otimes H^q_\Psi(Y; \mathcal{B}) \;\to\; H^{p+q}_\Theta(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})}\,.$$

Rappelons tout d'abord que, d'une manière générale, on a la formule

$$\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{A}(x) \otimes \mathcal{B}(y);$$

si donc on désigne par

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}), \qquad \mathcal{B}^* = \mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B}),$$

les résolutions canoniques des faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on aura quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$ un isomorphisme de complexes

$$\mathcal{A}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}^*(x, y) = \mathcal{A}^*(x) \otimes \mathcal{B}^*(y),$$

évidemment compatible avec les homomorphismes canoniques

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}^*, \qquad \mathcal{B} \to \mathcal{B}^*, \qquad \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B} \to \mathcal{A}^* \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}^*.$$

Or (Remarque 4.3.1.) les complexes de la forme $\mathcal{A}^*(x)$ sont homotopiquement triviaux; il suit de là que $\mathcal{A}^* \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}^*$ *est une résolution de* $\mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}$ et par suite (n° 4.7) que l'on a des homomorphismes canoniques

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{H}^{p+q}(\Gamma_\Theta(\mathcal{A}^* \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}^*)) \to \mathrm{H}^{p+q}_\Theta(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}; \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B});$$

en les composant avec les homomorphismes évidents

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{H}^p(\Gamma_\Phi(\mathcal{A}^*)) \otimes \mathrm{H}^q(\Gamma_\Psi(\mathcal{B}^*)) \to \mathrm{H}^{p+q}(\Gamma_\Theta(\mathcal{A}^* \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}^*))$$

on obtient, par définition, les homomorphismes (2).

Étant données des classes de cohomologie

$$\xi \in \mathrm{H}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{A}), \qquad \eta \in \mathrm{H}^q_\Psi(\mathrm{Y}; \mathcal{B}),$$

la classe

$$\xi \times \eta \in \mathrm{H}^{p+q}_\Theta(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}; \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B})$$

déduite de $\xi \otimes \eta$ par (2) s'appelle le *produit cartésien* de $\xi$ et de $\eta$; nous verrons plus loin que cette opération possède des propriétés semblables à celles du produit cartésien étudié au chapitre I, § 3, et du reste s'y rattache directement.

On notera que, d'après le Théorème 4.7.2. et l'Exemple 4.8.1., il suffit, pour construire les homomorphismes (3), d'exhiber un homomorphisme de faisceaux différentiels

$$\text{(5)} \qquad \boxed{\mathcal{C}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{C}^*(\mathrm{Y}; \mathcal{B}) \to \mathcal{C}^*(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}; \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B})};$$

c'est ce que nous allons faire maintenant.

Soient $f$ une section de $\mathcal{C}^p(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ au-dessus d'un ouvert U de X, et $g$ une section de $\mathcal{C}^*(\mathrm{Y}; \mathcal{B})$ au-dessus d'un ouvert V de Y En vertu de la *Remarque* 4 3.2. on peut représenter $f$ par une fonction

$$f(x_0, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p),$$

définie dans un ensemble de la forme

$$x_0 \in \mathrm{U}; \qquad x_1 \in \mathrm{U}(x_0); \ldots; \qquad x_p \in \mathrm{U}(x_0, \ldots, x_{p-1}),$$

et nulle pour $x_1 = x_0$; on peut de même représenter $g$ par une fonction

$$g(y_0, \ldots, y_q) \in \mathcal{B}(y_q),$$

définie dans un ensemble de la forme

$$y_0 \in \mathrm{V}; \qquad y_1 \in \mathrm{V}(y_0); \ldots; \qquad y_q \in \mathrm{V}(y_0, \ldots, y_{q-1}),$$

et nulle pour $y_1 = y_0$. Considérons alors des points « génériques »

$$z_0 = (x_0, y_0), \quad \ldots, \qquad z_{p+q} = (x_{p+q}, y_{p+q})$$

de l'espace produit $Z = X \times Y$; nous définirons une fonction

$$h(z_0, \ldots, z_{p+q}) \in \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}(z_{p+q}) = \mathcal{A}(x_{p+q}) \otimes \mathcal{B}(y_{p+q})$$

par la formule

$$(6) \qquad h(z_0, \ldots, z_{p+q}) = f(x_0, \ldots, x_p)(x_{p+q}) \otimes g(y_p, \ldots, y_{p+q});$$

bien entendu, comme dans la *Remarque* 4.3.2, l'expression $f(x_0, \ldots, x_p)(x_{p+q})$ désigne la valeur au point $x_{p+q}$ d'une section continue de $\mathcal{A}$ qui, en $x_p$, vaut $f(x_0, \ldots, x_p)$; elle n'a donc de sens que dans un ensemble de la forme

$$x_0 \in U, \qquad x_1 \in U(x_0), \ \ldots, x_p \in U(x_0, \ldots, x_{p-1}), \qquad x_{p+q} \in U(x_0, \ldots, x_p),$$

en sorte qu'évidemment (6) est définie dans un ensemble de la forme

$$z_0 \in W = U \times V; \qquad z_1 \in W(z_0); \ \ldots; \qquad z_{p+q} \in W(z_0, \ldots, z_{p+q-1});$$

il est de plus clair que (6) est nul pour $z_1 = z_0$. Par conséquent, la fonction $h$ représente une section du faisceau

$$\mathcal{C}^{p+q}(X \times Y;\ \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}) \text{ au-dessus de } U \times V.$$

On vérifie trivialement que la *section* représentée par la fonction $h$ ne dépend que des *sections* représentées par les fonctions $f$ et $g$, et non du choix de $f$, $g$, $h$; de cette façon on obtient des applications *bilinéaires*

$$\mathcal{A}^p(U) \times \mathcal{B}^q(V) \ \rightarrow\ (\mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B})^{p+q}(U \times V),$$

lesquelles sont visiblement compatibles avec les opérations de restriction. Il s'ensuit immédiatement des homomorphismes de faisceaux

$$\mathcal{A}^p \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}^q \ \rightarrow\ (\mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B})^{p+q},$$

et par conséquent un homomorphisme (5). Le fait que cet homomorphisme soit compatible avec les différentielles résulte des formules explicites de la *Remarque* 4.3.2. et de calculs triviaux.

Pour calculer le produit cartésien de deux classes de cohomologie $\xi$ et $\eta$, on peut donc procéder comme suit : on représente $\xi$ et $\eta$ par des cocycles $f \in C^p_\Phi(X; \mathcal{A})$ et $g \in C^q_\Psi(Y; \mathcal{B})$; on forme la cochaîne $f \times g \in C^{p+q}_\Theta(X \times Y;\ \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B})$ donnée par la formule (6); cela dit, $f \times g$ est un cocycle dont la classe de cohomologie est le produit cartésien cherché.

Ces considérations montrent que, pour définir le produit cartésien en théorie des faisceaux, il suffit de connaître la *définition* des groupes de cohomologie; il est en principe superflu de faire usage des « théorèmes fondamentaux » du § 4.

**6.2. — Calcul du produit cartésien à l'aide de résolutions**

Le théorème suivant est fondamental :

***Théorème*** 6.2.1. — *Soient* X, Y *et* $Z = X \times Y$ *trois espaces*, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *trois faisceaux de base* X, Y et Z, *et* $\Phi$, $\Psi$ *et* $\Theta = \Phi \times \Psi$ *trois familles de supports dans* X, Y *et* Z. *Supposons données des résolutions* $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{M}^*$ *et* $\mathcal{N}^*$ *de* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$, *ainsi qu'un homomorphisme*

$$v\colon \mathcal{L}^* \widehat{\otimes} \mathcal{M}^* \to \mathcal{N}^*$$

*de faisceaux différentiels, compatible avec un homomorphisme*

$$u\colon \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \to \mathcal{C}.$$

*On a alors un diagramme* commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \otimes H^*(\Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*)) & \to & H^*(\Gamma_\Theta(\mathcal{N}^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*_\Phi(X;\, \mathcal{A}) \otimes H^*_\Psi(Y;\, \mathcal{B}) & \to & H^*_\Theta(Z;\, \mathcal{C}). \end{array}$$

(Les lignes verticales sont déduites des homomorphismes canoniques

$$H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L})) \to H^*_\Phi(X; \mathcal{A}), \text{ etc...};$$

la première ligne horizontale est déduite de $v$; la seconde s'obtient en composant le produit cartésien avec l'homomorphisme

$$H^*_\Theta(Z;\, \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \to H^*_\Theta(Z;\, \mathcal{C})$$

défini par $u$).

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons comme au n° précédent des notations condensées : $\mathcal{A}^*$ sera le faisceau différentiel $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$, $\mathcal{L}^{**}$ sera le faisceau de doubles complexes $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}^*)$, etc... Rappelons d'autre part que l'homomorphisme canonique

$$H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^*_\Phi(X;\, \mathcal{A})$$

se déduit du diagramme

$$\mathcal{A}^* \xrightarrow{j''_{\mathcal{A}}} \mathcal{L}^{**} \xleftarrow{j'_{\mathcal{A}}} \mathcal{L}^*:$$

en appliquant le foncteur $H^*(\Gamma_\Phi(...))$, $j'_{\mathcal{A}}$ devient bijectif, d'où l'homomorphisme cherché.

Cela dit formons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^* \widehat{\otimes} \mathcal{M}^* \arrow[rr, "v"] \arrow[d, "j'_{\mathcal{A}} \widehat{\otimes} j'_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr] & & \mathcal{N}^* \arrow[d, "j'_{\mathcal{C}}"] \\
\mathcal{L}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{M}^{**} \arrow[r, "p"] & (\mathcal{L}^* \widehat{\otimes} \mathcal{M}^*)^* \arrow[r, "v^*"] & \mathcal{N}^{**} \\
\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^* \arrow[r, "p"] \arrow[u, "j''_{\mathcal{A}} \widehat{\otimes} j''_{\mathcal{B}}"] & (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^* \arrow[r, "u^*"] \arrow[u] & \mathcal{C}^*; \arrow[u, "j''_{\mathcal{C}}"']
\end{tikzcd}$$

les homomorphisme figurant dans ce diagramme ont déjà été définis, à l'exception des suivants : $v^*$ est l'homomorphisme

$$\mathcal{C}^*(Z; \mathcal{L}^* \hat{\otimes} \mathcal{M}^*) \rightarrow \mathcal{C}^*(Z; \mathcal{N}^*)$$

qui résulte de $v$; $u^*$ se définit de façon analogue; enfin, les homomorphismes notés $p$ sont ceux qu'on a définis au nº précédent et qui conduisent au produit cartésien.

Le diagramme précédent est *commutatif;* cela tient évidemment à ce que l'homomorphisme

$$p\colon \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}^*(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})$$

est naturel (i.e. compatible avec les homomorphismes de faisceaux) et, de plus, est compatible avec les « augmentations » canoniques des faisceaux différentiels en cause. Par ailleurs les homomorphismes figurant dans le diagramme précédent sont compatibles avec les graduation et différentielle totales de tous les complexes multiples considérés.

Cela dit, « il est clair » que le Théorème 6.2.1. s'obtient en appliquant au diagramme précédent le foncteur $H^*(\Gamma_\Theta(...))$.

***Exemple* 6.2.1.** — Soient X et Y deux *variétés différentiables*, $\omega$ et $\varpi$ des formes différentielles sur X et Y, de degrés $p$ et $q$. On en déduit une forme différentielle $\theta = \omega \times \varpi$ sur $X \times Y$, de degré $p+q$, comme suit : si $(x_i)$ est un système de coordonnées valable dans un ouvert U de X, si $(y_j)$ est un système de coordonnées valable dans un ouvert V de Y, et si l'on a des relations

$$\omega = \sum f_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \qquad \text{dans U}$$
$$\varpi = \sum g_{j_1 \ldots j_q}(y)\, dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_q} \qquad \text{dans V,}$$

on pose

$$\omega \times \varpi = \sum f_{i_1 \ldots i_p}(x) g_{j_1 \ldots j_q}(y)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_q}$$

dans $U \times V$ (bien entendu, il est possible de définir $\omega \times \varpi$ sans avoir recours à des systèmes de coordonnées). Désignons alors d'une manière générale par $\Omega_X^*$ le faisceau différentiel des germes de formes différentielles de X; la définition précédente conduit de façon évidente à un homomorphisme

$$\Omega_X^* \hat{\otimes} \Omega_Y^* \rightarrow \Omega_{X\times Y}^*;$$

on obtient donc le résultat suivant : *si des classes de cohomologie réelle* $\xi \in H^p(X; \mathbf{R})$ *et* $\eta \in H^q(Y; \mathbf{R})$ *sont représentées par des formes différentielles fermées* $\omega$ *et* $\varpi$, *alors la classe de cohomologie*

$$\xi \times \eta \in H^{p+q}(X \times Y; \mathbf{R})$$

*est représentée par la forme différentielle* $\omega \times \varpi$.

### 6.3. — Produit cartésien en cohomologie de Čech

Considérons un espace X, un faisceau $\mathcal{A}$ sur X, et un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X, que nous supposerons soit ouvert, soit fermé et localement fini. Nous avons vu qu'alors le faisceau différentiel $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ est une résolution de $\mathcal{A}$ (Théorème 5.2.1.).

Prenons maintenant un espace Y, un faisceau $\mathcal{B}$ sur Y, et un recouvrement $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ de Y, que nous supposerons de même nature que $\mathfrak{U}$. Le recouvrement

$$\mathfrak{U} \times \mathfrak{V} = (U_i \times V_j)_{i \in I,\, j \in J}$$

de $X \times Y$ est alors ouvert (si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont ouverts) ou bien fermé et localement fini (si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ le sont). Nous allons définir un homomorphisme canonique

$$(7) \qquad \boxed{\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{C}^*(\mathfrak{V}; \mathcal{B}) \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}; \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B})}\,.$$

Pour cela choisissons une fois pour toutes, en théorie des complexes de cochaînes simpliciaux, une transformation naturelle

$$T\colon X^* \otimes Y^* \to X^* \times Y^*$$

(cf. chapitre 1, n° 3.10) induisant l'identité en degré 0 et admettant une inverse à une homotopie près.

Étant donnés des ouverts U de X et V de Y, on déduit de là un homomorphisme de complexes

$$(8) \quad T\colon C^*(\mathfrak{U} \cap U; \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V} \cap V; \mathcal{B}) \to C^*(\mathfrak{U} \cap U; \mathcal{A}) \times \mathcal{C}^*(\mathfrak{V} \cap V; \mathcal{B}),$$

évidemment compatible avec les opérations de restriction définies au n° 5.2.

Or on a d'autre part un homomorphisme naturel [1].

$$(9) \quad C^*(\mathfrak{U} \cap U; \mathcal{A}) \times C^*(\mathfrak{V} \cap V; \mathcal{B}) \to C^*[(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}) \cap (U \times V); \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}]$$

obtenu comme suit (on donne la définition pour $U = X$, $V = Y$, le cas géné-

(1) Il arrive parfois que l'homomorphisme

$$C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \times C^*(\mathfrak{V}; \mathcal{B}) \to C^*(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}; \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B})$$

soit *bijectif* (la cohomologie de $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ se calcule alors à l'aide du complexe $C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V}; \mathcal{B})$ i.e. par les formules de Künneth). Il en est évidemment ainsi si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont *finis* et si, pour tout simplexe S de $\mathfrak{U}$ et tout simplexe T de $\mathfrak{V}$, l'homomorphisme canonique $\mathcal{A}(U_S) \otimes \mathcal{B}(V_T) \to \mathcal{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{B}(U_S \times V_T)$ est *bijectif*. Cette situation se rencontre en Géométrie Algébrique (X et Y sont des variétés algébriques, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les faisceaux de germes de fonctions régulières sur X et Y, et $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont des recouvrements de X et Y par des ouverts affines).

ral s'en déduisant trivialement) : si $\alpha = (\alpha_s)$ et $\beta = (\beta_t)$ sont des cochaînes de même degré $n$ de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, l'homomorphisme (9) transforme la cochaîne $\alpha \times \beta$ de degré $n$ du premier membre de (9) en la cochaîne de degré $n$ du second membre donnée par l'application

$$(s, t) \rightarrow \alpha(s) \otimes \beta(t) \in \mathcal{A}(U_s) \otimes \mathcal{B}(V_t);$$

bien entendu on identifie $\alpha(s) \otimes \beta(t)$ à la section correspondante de $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ au-dessus de $U_s \times V_t$.

En composant (8) et (9) on trouve des homomorphismes

$$C^*(\mathfrak{U} \cap U;\ \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V} \cap V;\ \mathcal{B}) \rightarrow C^*[(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}) \cap (U \times V);\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}]$$

d'où un homomorphisme correspondant de faisceaux différentiels — c'est par définition l'homomorphisme (7) qu'il s'agissait de construire.

Bien entendu, l'homomorphisme

$$(10) \qquad C^*(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V};\ \mathcal{B}) \rightarrow C^*(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V};\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$$

qui se déduit de (7) s'obtient en composant les homomorphismes (8) et (9), par construction même de (7). Pour l'expliciter il suffit donc d'expliciter une transformation T, par exemple celle qu'on obtient en transposant la formule contenue dans la *Remarque* 3.9.1. du chapitre I; le résultat obtenu est visiblement le suivant : *soient des cochaînes* $\alpha \in C^p(\mathfrak{U};\ \mathcal{A})$ *et* $\beta \in C^q(\mathfrak{V};\ \mathcal{B})$; *l'image de* $\alpha \otimes \beta$ *par l'homomorphisme* (10) *est la cochaîne*

$$\gamma \in C^{p+q}(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V};\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$$

*définie par*

$$(11) \qquad \gamma(i_0 j_0) \ldots (i_{p+q}\, j_{p+q}) = \alpha_{i_0 \ldots i_p} \otimes \beta_{j_p \ldots j_{p+q}},$$

où l'on convient bien entendu de remplacer le second membre — qui est une section de $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ au-dessus de $U_{i_0 \ldots i_p} \times V_{j_p \ldots j_{p+q}}$ — par sa restriction à $U_{i_0 \ldots i_{p+q}} \times V_{j_0 \ldots j_{p+q}}$.

Appliquons maintenant le Théorème 6.2.1.; nous trouvons le résultat suivant :

**Théorème** 6. 3.1. — *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques,* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *des faisceaux de base* X *et* Y, $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$ *des recouvrements de* X *et* Y; *on suppose* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$ *ouverts, ou bien* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$ *fermés localement finis. Soient* $\xi \in H^p(X;\ \mathcal{A})$ *et* $\eta \in H^q(Y;\ \mathcal{B})$ *des classes de cohomologie représentées dans les recouvrements* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$ *par des cocycles* $\alpha \in C^p(\mathfrak{U};\ \mathcal{A})$ *et* $\beta \in C^q(\mathfrak{V};\ \mathcal{B})$; *alors la classe de cohomologie*

$$\xi \times \eta \in H^{p+q}(X \times Y;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$$

*est représentée par le cocycle* $\gamma \in C^{p+q}(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V};\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ *donné par la formule* (11).

On notera que si les recouvrements $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont de la forme $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$ et $\mathfrak{V} = (V_y)_{y \in Y}$, avec $x \in U_x$ et $y \in V_y$, alors le recouvrement produit $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$

est de la forme $(W_z)_{z \in X \times Y}$ avec $z \in W_z$. Comme les homomorphismes (10) commutent à l'opération consistant à passer à des recouvrements plus fins, on déduit de là, par passage à la limite, un homomorphisme canonique

$$\check{C}^*(X; \mathcal{A}) \otimes \check{C}^*(Y; \mathcal{B}) \to \check{C}^*(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}), \tag{12}$$

et par conséquent des homomorphismes

$$\boxed{\check{H}^p(X; \mathcal{A}) \otimes \check{H}^q(Y; \mathcal{B}) \to \check{H}^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})}$$

en cohomologie de Čech. Le Théorème 6.3.1. prouve évidemment que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(X; \mathcal{A}) \otimes \check{H}^q(Y; \mathcal{B}) & \to & \check{H}^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X; \mathcal{A}) \otimes H^q(Y; \mathcal{B}) & \to & H^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \end{array}$$

est commutatif, ce qui permet de calculer le produit cartésien en cohomologie de Čech dans tous les cas où celle-ci est isomorphe à la cohomologie $H^*$ — par exemple si X, Y et $X \times Y$ sont paracompacts. (On notera à ce propos qu'un produit d'espaces paracompacts *n'est pas* nécessairement paracompact). On voit que dans ce cas le produit cartésien défini au nº 6.1 se réduit essentiellement au produit cartésien défini au chapitre 1, § 3. Nous allons voir qu'il en est de même *dans tous les cas.*

## 6.4. — Résolutions simpliciales

Soit X un espace topologique; nous appellerons *faisceau de complexes de cochaînes simpliciaux* sur X tout faisceau gradué $\mathcal{L}^* = (\mathcal{L}^n)_{n \geqslant 0}$ muni de la structure définie par la donnée, pour toute application $f : \Delta_p \to \Delta_q$, d'un homomorphisme de faisceaux

$$\bar{f} : \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^q,$$

de telle sorte que $\bar{f}$ dépende « multiplicativement » de $f$ comme on l'a expliqué au chapitre 1, § 3. Pour tout ouvert U, $\mathcal{L}^*(U)$ est alors un complexe de cochaînes simplicial, et l'on peut munir $\mathcal{L}^*$ d'une structure de faisceau différentiel; pour toute famille $\Phi$ de supports dans X, $\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)$ est aussi un complexe de cochaînes simplicial.

Par exemple, pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X et pour tout faisceau $\mathcal{A}$ de base X, $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ est un faisceau de complexes de cochaînes simpliciaux.

On définirait la notion de *faisceau de complexes de cochaînes semi-simpliciaux* en se limitant, dans la définition précédente, aux applications $f$ qui sont croissantes (au sens large).

Soient X et Y deux espaces, $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ deux faisceaux de complexes de cochaînes simpliciaux sur X et Y; nous allons en déduire, sur l'espace $X \times Y$, un faisceau de complexes de cochaînes simpliciaux $\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*$; pour cela on pose

$$(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*)^n = \mathcal{L}^n \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^n,$$

et, pour toute application $f : \Delta_p \to \Delta_q$, on définit

$$\bar{f}: \mathcal{L}^p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^p \to \mathcal{L}^q \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^q$$

comme étant le produit tensoriel des homomorphismes similaires relatifs à $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$. On obtient évidemment de cette façon, quels que soient les ouverts U et V de X et Y, un homomorphisme canonique

$$(13) \qquad \mathcal{L}^*(U) \times \mathcal{M}^*(V) \to \mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*(U \times V)$$

de complexes simpliciaux. De même, quelles que soient les familles de supports $\Phi$ dans X, $\Psi$ dans Y, et $\Theta = \Phi \times \Psi$ dans $X \times Y$, on a un homomorphisme canonique

$$(14) \qquad \Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*) \times \Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*) \to \Gamma_\Theta(\mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*).$$

En particulier, quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$, on a un homomorphisme

$$\mathcal{L}^*(x) \times \mathcal{M}^*(y) \to \mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*(x, y)$$

qui du reste est *bijectif* en vertu de la formule générale

$$\mathcal{A}(x) \otimes \mathcal{B}(y) = \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}(x, y).$$

D'après le chapitre 1, Théorème 3.10.1., on voit donc que *les complexes*

$$\mathcal{L}^*(x) \otimes \mathcal{M}^*(y) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*(x, y)$$

*sont homotopiquement équivalents*, en particulier ont des groupes de cohomologie canoniquement isomorphes.

Reprenons les homomorphismes (13) et choisissons une fois pour toutes, en théorie des complexes de cochaînes simpliciaux, une transformation naturelle

$$(15) \qquad T : X^* \otimes Y^* \to X^* \times Y^*$$

induisant l'identité en degré 0 (chapitre 1, n° 3.10). En composant (13) avec l'homomorphisme

$$\mathcal{L}^*(U) \otimes \mathcal{M}^*(V) \to \mathcal{L}^*(U) \times \mathcal{M}^*(V)$$

qui résulte de là, on trouve des homomorphismes

$$\mathcal{L}^*(U) \otimes \mathcal{M}^*(V) \to \mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*(U \times V)$$

compatibles avec les opérations de restriction, d'où un homomorphisme

$$(16) \qquad T: \mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}^* \to \mathcal{L}^* \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{M}^*$$

de faisceaux différentiels, se réduisant à l'identité en degré o. Il est clair que l'homomorphisme

$$(17) \qquad \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \otimes \Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*) \rightarrow \Gamma_\Theta(\mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathcal{M}^*)$$

qui résulte de (16) s'obtient en composant l'homomorphisme (14) (défini sans utiliser T) avec l'homomorphisme

$$\mathrm{T}\colon \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \otimes \Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*) \rightarrow \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \times \Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*)$$

de la théorie simpliciale du chapitre I.

Tout ce qui précède s'applique bien entendu sans changement aux faisceaux de complexes de cochaînes semi-simpliciaux.

Nous allons maintenant montrer comment les considérations qui précèdent permettent, *dans tous les cas*, de lier la notion de produit cartésien définie au n° 6.1 à celle de produit cartésien définie au chapitre I, § 3. Pour cela, on va construire « canoniquement », pour tout espace X et tout faisceau $\mathcal{A}$ de base X, une *résolution flasque* $\mathscr{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ *de* $\mathcal{A}$ *possédant une structure semi-simpliciale;* nous l'appellerons la *résolution simpliciale canonique de* $\mathcal{A}$; nous construirons ensuite des homomorphismes

$$\mathscr{F}^*(\mathrm{X};\, \mathcal{A}) \widehat{\times} \mathscr{F}^*(\mathrm{Y};\, \mathcal{B}) \rightarrow \mathscr{F}^*(\mathrm{X} \times \mathrm{Y};\, \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$$

qui, composés avec les homomorphismes

$$\mathrm{T}\colon \mathscr{F}^*(\mathrm{X};\, \mathcal{A}) \widehat{\otimes} \mathscr{F}^*(\mathrm{Y};\, \mathcal{B}) \rightarrow \mathscr{F}^*(\mathrm{X};\, \mathcal{A}) \widehat{\times} \mathscr{F}^*(\mathrm{Y};\, \mathcal{B}),$$

conduiront au produit cartésien par application du théorème 6.2.1.

a) *Construction de* $\mathscr{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})$.

Nous poserons

$$\mathscr{F}^0(\mathrm{X};\, \mathcal{A}) = \mathscr{C}^0(\mathrm{X};\, \mathcal{A}),$$
$$\mathscr{F}^n(\mathrm{X};\, \mathcal{A}) = \mathscr{C}^0(\mathrm{X};\, \mathscr{F}^{n-1}(\mathrm{X};\, \mathcal{A}));$$

$\mathscr{F}^n$ s'obtient donc en itérant $n+1$ fois le foncteur $\mathscr{C}^0$, et il est clair qu'on obtient ainsi des faisceaux *flasques*, ainsi qu'une injection canonique

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathscr{F}^0(\mathrm{X};\, \mathcal{A}).$$

On notera que, le foncteur $\mathscr{C}^0$ étant *exact*, il en est de même du foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \mathscr{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})$.

b) *Sections de* $\mathscr{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})$.

Soit $\alpha$ une section de $\mathscr{F}^n(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ au-dessus d'un ouvert U; posant pour simplifier $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}^n(\mathrm{X}; \mathcal{A})$, $\alpha$ se représente biunivoquement par une application

$$x_0 \rightarrow \alpha(x_0) \in \mathscr{F}^{n-1}(x_0)$$

définie dans U. Comme $\alpha(x_0)$ est un germe de section non nécessairement continue de $\mathscr{F}^{n-2}$ en $x_0$, on peut trouver un ouvert $\mathrm{U}(x_0)$ et une fonction

$$x_1 \rightarrow \alpha(x_0, x_1) \in \mathscr{F}^{n-2}(x_1)$$

définie dans $U(x_0)$ et représentant $\alpha(x_0)$. Le germe $\alpha(x_0, x_1)$ à son tour se représente par une fonction

$$x_2 \to \alpha(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{F}^{n-2}(x_2)$$

définie dans un ouvert $U(x_0, x_1)$ contenant $x_1$.
En itérant ces constructions, on voit que $\alpha$ peut se représenter par une fonction

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}(x_n)$$

définie dans une partie de $X^{n+1}$ de la forme

$$x_0 \in U, \ x_1 \in U(x_0), \ \ldots, \ x_n \in U(x_0, \ \ldots, \ x_{n-1}),$$

où d'une manière générale $U(x_0, \ldots, x_i)$ désigne un ouvert dépendant uniquement de $x_0, \ldots, x_i$, et contenant $x_i$.

Il est clair réciproquement que toute fonction de ce type définit sans ambiguïté une section de $\mathcal{F}^n$ au-dessus de U.

Considérons de plus deux fonctions

$$\alpha(x_0, \ \ldots, \ x_n), \qquad \beta(x_0, \ \ldots, \ x_n)$$

définies respectivement pour

$$\begin{array}{ll} x_0 \in U, & x_1 \in U(x_0), \ \ldots \\ x_0 \in V, & x_1 \in V(x_0), \ \ldots, \end{array}$$

donc définissant des sections $\alpha$ et $\beta$ de $\mathcal{F}^n$ dans U et V. Pour que ces sections coïncident dans $U \cap V = W$, il faut et il suffit que la relation

$$\alpha(x_0, \ \ldots, \ x_n) = \beta(x_0, \ \ldots, \ x_n)$$

soit vérifiée dans un ensemble de la forme

$$x_0 \in W, \ x_1 \in W(x_0), \ \ldots, \ x_n \in W(x_0, \ \ldots, \ x_{n-1});$$

cette assertion est évidente pour $n = 0$, et se démontre à partir de là par récurrence sur $n$.

Il suit évidemment de là que, pour représenter les sections de $\mathcal{F}^n$ dans U, on pourrait se borner à considérer des fonctions $\alpha(x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}(x_n)$ définies dans $U^{n+1}$ tout entier — auquel cas ces fonctions forment de façon évidente un groupe abélien. Le groupe des sections de $\mathcal{F}^n$ dans U est alors le quotient du groupe formé par les fonctions considérées par le sous-groupe des fonctions $\alpha$ qui sont « localement nulles », i.e. vérifient

$$\alpha(x_0, \ \ldots, \ x_n) = 0$$

dans un ensemble de la forme

$$x_0 \in U, \ x_1 \in U(x_0), \ \ldots, \ x_n \in U(x_0, \ \ldots, \ x_{n-1}).$$

On remarquera — c'est une différence notable avec les cochaînes d'Alexander-Spanier définies, pour un faisceau simple, dans l'*Exemple* 2.4.2. — qu'un ensemble de la forme précédente n'est pas en général un voisinage de la diagonale dans $U^{n+1}$; par exemple, pour $n = 1$, on trouve dans $U^2$ les ensembles qui sont coupés par chaque verticale $x =$ Cte suivant un voisinage de $x$.
La construction précédente met en évidence l'injection canonique $\mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^{n+1}$; considérons en effet une section $\alpha$ de $\mathcal{F}^n$, représentée par la fonction $\alpha(x_0, \ldots, x_n)$; considérant $\alpha$ comme section de $\mathcal{F}^{n+1}$, soit $\alpha(x_0, \ldots, x_{n+1})$ la fonction qui représente $\alpha$; nous devons exprimer que pour tout $x$, la fonction

$$(x_0, \ldots, x_n) \to \alpha(x, x_0, \ldots, x_n)$$

définit le germe de section $\tilde{\alpha}(x) \in \mathcal{F}^n(x)$; or il en est ainsi par hypothèse de la fonction $\alpha(x_0, \ldots, x_n)$; par conséquent nous avons la relation

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

ce qui résoud le problème posé.

c) *Structure semi-simpliciale* (¹) *de* $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$.

Pour définir sur le faisceau gradué $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^n)$ une structure semi-simpliciale, il est nécessaire et suffisant de munir les groupes gradués $\mathcal{F}^*(U)$ d'une structure de ce type, et ce de façon compatible avec les opérateurs de restriction.

Soient donc $\alpha$ une section de $\mathcal{F}^p$ dans un ouvert U, et $f$ une application croissante de $\Delta_p$ dans $\Delta_q$; nous devons définir la section $\beta = \bar{f}(\alpha)$ de $\mathcal{F}^q$ dans U. Pour cela, on représentera $\alpha$ par une fonction $\alpha(x_0, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p)$ définie dans $U^{p+1}$, et $\beta$ par l'une quelconque des fonctions définies par la formule suivante :

$$\beta(x_0, \ldots, x_q) = \alpha(x_{f(0)}, \ldots, x_{f(p)})(x_q); \tag{18}$$

nous utilisons ici une convention d'écriture analogue à celle dont on a déjà fait usage dans la *Remarque* 4.3.2. : étant donné un élément $u \in \mathcal{A}(x)$, on note $u(y)$ toute fonction

$$y \to u(y) \in \mathcal{A}(y)$$

qui est *continue au point* $x$ *et se réduit à* $u$ *pour* $y = x$. En dépit de l'ambiguïté que comporte la relation (18), il est clair que la *section* $\beta$ de $\mathcal{F}^q$ au-dessus de U qui est définie par le premier membre de (18) ne dépend que de la *section* $\alpha$ de $\mathcal{F}^p$ dont on est parti.
On laisse au lecteur le soin de vérifier en détail les axiomes des structures semi-simpliciales, et de comprendre pourquoi il n'est pas possible de définir sur $\mathcal{F}^*$ une structure simpliciale « complète ». Il est bien entendu essentiel de tenir compte de la relation suivante : étant donné $u \in \mathcal{A}(x)$, on a

$$u(y)(z) = u(z)$$

dans un ensemble de la forme $y \in U(x)$, $z \in U(y)$.

(¹) Le lecteur désireux d'éviter les calculs explicites qui vont suivre se rapportera à *l'Appendice*.

Nous pouvons maintenant expliciter l'opérateur différentiel $d$ de $\mathcal{F}^*$ : il transforme une section représentée par la fonction $\alpha(x_0, ..., x_n)$ en la section représentée par la fonction (ou plus correctement, par l'une quelconque des fonctions que représente la formule suivante) :

$$(19) \qquad d\alpha(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i . \alpha(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} . \alpha(x_0, \ldots, x_n)(x_{n+1}).$$

Il résulte de là que *la résolution canonique* $\mathcal{C}^*(\mathrm{X};\mathcal{A})$ *se plonge canoniquement dans le faisceau différentiel* $\mathcal{F}^*(\mathrm{X};\mathcal{A})$, en vertu des formules explicites contenues dans la *Remarque* 4.3.2.

d) *Faisceaux dérivés de* $\mathcal{F}^*(\mathrm{X};\mathcal{A})$.

Nous allons enfin démontrer que $\mathcal{F}^*(\mathrm{X};\mathcal{A})$ *est une résolution de* $\mathcal{A}$.

Considérons un élément $\alpha \in \mathcal{F}^n(x)$, $x$ donné, annulé par $d$; il faut prouver que $\alpha \in \mathcal{A}(x)$ si $n = 0$, et que $\alpha \in d(\mathcal{F}^{n-1}(x))$ si $n \geqslant 1$.

Supposons d'abord $n = 0$; $\alpha$ se représente, dans un voisinage U de $x$, par une fonction $\bar{\alpha}(x_0) \in \mathcal{A}(x_0)$ ; la relation $d\alpha = 0$ signifie que la fonction $\bar{\alpha}(x_1)—\bar{\alpha}(x_0)(x_1)$ définit l'élément 0 de $\mathcal{F}^1(x)$, i.e. — en supposant U assez petit — qu'elle est localement nulle, autrement dit qu'on a

$$\bar{\alpha}(x_1) = \bar{\alpha}(x_0)(x_1)$$

dans un ensemble de la forme $x_0 \in \mathrm{U}$, $x_1 \in \mathrm{U}(x_0)$. En particulier, en faisant $x_0 = x$ il vient

$$\bar{\alpha}(x_1) = \bar{\alpha}(x)(x_1) \qquad \text{pour} \qquad x_1 \in \mathrm{U}(x);$$

mais cela signifie que la fonction $\bar{\alpha}(x_1)$ est une section *continue* de $\mathcal{A}$ égale à $\alpha$ en $x$; par conséquent, $\alpha \in \mathcal{A}(x)$ comme annoncé.

Supposons maintenant $n \geqslant 1$, et représentons $\alpha$, dans un voisinage U de $x$, par une fonction $\alpha(x_0, ..., x_n) \in \mathcal{A}(x_n)$. Comme $d\alpha = 0$ on peut supposer, si U est assez petit, que la fonction (19) est localement nulle dans U, i.e. est nulle pour $x_0 \in \mathrm{U}$, $x_1 \in \mathrm{U}(x_0), ..., x_{n+1} \in \mathrm{U}(x_0, ..., x_n)$.

Mettant en évidence dans (19) le terme pour lequel $i = 0$, il vient ($x_0 = x$) la relation

$$\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{i+1} . \alpha(x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) \\ + (-1)^n . \alpha(x, x_1, \ldots, x_n)(x_{n+1})$$

pour

$$x_1 \in \mathrm{U}(x),\ x_2 \in \mathrm{U}(x, x_1),\ \ldots,\ x_{n+1} \in \mathrm{U}(x, x_1, \ldots, x_n);$$

considérons alors la fonction

$$\beta(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \alpha(x, x_0, \ldots, x_{n-1})$$

et posons

$$V = U(x),\ V(x_0) = U(x, x_0), \ldots;$$

il vient

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i . \beta(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) + (-1)^n . \beta(x_0, \ldots, x_{n-1})(x_n),$$

relation valable pourvu que $x_0 \in V$, $x_1 \in V(x_0)$, ...; si donc on désigne par $\beta$ le germe de section de $\mathcal{F}^{n-1}(X; \mathcal{A})$ défini au point $x$ par la fonction $\beta(x_0, \ldots, x_{n-1})$, on a $\alpha = d\beta$, ce qui démontre, comme annoncé, que $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ est une résolution de $\mathcal{A}$.

Nous appellerons $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ la *résolution simpliciale canonique* de $\mathcal{A}$; étant donnée une famille $\Phi$ de supports dans X, on posera

$$F^*_\Phi(X; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}));$$

on définit ainsi un *complexe de cochaînes semi-simplicial*, et il est clair que nous avons les résultats suivants :

(I) : *l'injection canonique* $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ *induit des* isomorphismes

$$H^p_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^p(F^*_\Phi(X; \mathcal{A}));$$

(II) : *étant donnée une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0,$$

*la suite correspondante*

$$0 \to F^*_\Phi(X; \mathcal{A}') \to F^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \to F^*_\Phi(X; \mathcal{A}'') \to 0$$

*est exacte et conduit, modulo* (I), *à la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte donnée.*

Tout cela montre qu'au § 4 nous aurions pu *définir* les groupes $H^*_\Phi(X; \mathcal{A})$ en utilisant la résolution simpliciale $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ au lieu de la résolution $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$.

e) *Homomorphismes canoniques*

$$\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \widehat{\times} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \to \mathcal{F}^*(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}). \tag{20}$$

Pour les définir il suffit de construire, pour tout ouvert U de X et tout ouvert V de Y, un homomorphisme canonique

$$F^*(U; \mathcal{A}) \times F^*(V; \mathcal{B}) \to F^*(U \times V; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}).$$

Pour cela considérons des fonctions $\alpha \in F^n(U; \mathcal{A})$ et $\beta \in F^p(V; \mathcal{B})$; nous définirons l'homomorphisme cherché par la condition d'appliquer l'élément $\alpha \otimes \beta$ de $F^n(U; \mathcal{A}) \otimes F^p(V; \mathcal{B})$ sur l'élément de $F^n(U \times V; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ représenté par la fonction

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) \otimes \beta(y_0, \ldots, y_n)$$

On laisse au lecteur le soin de justifier cette définition.

f) *Construction du produit cartésien.*

Puisque les faisceaux $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ ont des structures semi-simpliciales, les considérations du début de ce n° conduisent à des homomorphismes canoniques

$$\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \tag{21}$$

(lesquels, à la différence des homomorphismes (20), reposent sur le Théorème 3.10.1. du Chapitre XXI, et sont de plus des équivalences au point de vue homotopique). En les composant avec (20), on trouve des homomorphismes naturels

$$\boxed{\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{F}^*(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})},$$

et par suite des homomorphismes de complexes

$$F^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \otimes F^*_\Psi(Y; \mathcal{B}) \rightarrow F^*_\Theta(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B});$$

en passant à la cohomologie, les homomorphismes

$$H^p_\Phi(X; \mathcal{A}) \otimes H^q_\Psi(Y; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}_\Theta(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})$$

qu'on en déduit coïncident, d'après le Théorème 6.2.1., avec le produit cartésien.

Il va de soi que ces résultats conduisent à une construction explicite du produit cartésien : si une classe de cohomologie $\xi$ de degré $p$ de X est représentée par une fonction $\alpha(x_0, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p)$, et si une classe de cohomologie $\eta$ de degré $q$ de Y est représentée par une fonction $\beta(y_0, \ldots, y_q) \in \mathcal{B}(y_q)$, alors $\xi \times \eta$ est représentée par la fonction

$$\gamma((x_0, y_0), \ldots, (x_{p+q}, y_{p+q})) = \alpha(x_0, \ldots, x_p)(x_{p+q}) \otimes \beta(y_p, \ldots, y_{p+q}).$$

En se restreignant aux résolutions canoniques on retrouve, comme il était facile de le prévoir, la formule (6) du n° 6.1.

On voit en conclusion que, comme nous l'avions annoncé, la notion de produit cartésien en théorie des faisceaux se rattache directement à celle que nous avons développée au chapitre I, § 3, ce que nous avions déjà constaté pour les espaces paracompacts en utilisant la théorie de Čech.

### 6.5. — Propriétés formelles du produit cartésien

Il est à peu près évident en raison de ce qui précède que les propriétés établies au chapitre I, Théorème 3.11.1., doivent être encore valables en théorie des faisceaux; c'est ce que nous allons démontrer.

a) *L'application* $(\xi, \eta) \rightarrow \xi \times \eta$ *se réduit en degré* 0 *à l'application canonique*

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \times \Gamma_\Psi(\mathcal{B}) \rightarrow \Gamma_\Theta(\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}).$$

Cette propriété est triviale.

b) *Le produit cartésien est compatible avec les homomorphismes de faisceaux.*

Cette propriété aussi est triviale.

c) *L'application* $(\xi, \eta) \to \xi \times \eta$ *est bilinéaire.*

Cette propriété encore est triviale.

d) *Le produit cartésien est associatif.*

Il suffit pour le voir d'observer qu'étant donnés des espaces X, Y, Z et des faisceaux $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sur ces espaces, le diagramme suivant est « homotopiquement commutatif » — et même rigoureusement commutatif si l'on choisit, en théorie simpliciale, la transformation naturelle $X^* \otimes Y^* \to X^* \times Y^*$ conformément à la formule explicite du chapitre I, *Remarque* 3.9.1 :

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^*) \widehat{\otimes} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^* \widehat{\otimes} \mathcal{C}^* & \longleftarrow & \mathcal{A}^* \widehat{\otimes} (\mathcal{B}^* \widehat{\otimes} \mathcal{C}^*) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^* \widehat{\otimes} \mathcal{C}^* & & & & \mathcal{A}^* \widehat{\otimes} (\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{C})^* \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
((\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \widehat{\otimes} \mathcal{C})^* & \longrightarrow & (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{C})^* & \longleftarrow & (\mathcal{A} \widehat{\otimes} (\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{C}))^*,
\end{array}$$

on désigne d'une façon générale par $\mathcal{A}^*$ la résolution canonique de $\mathcal{A}$ — ou bien la résolution simpliciale canonique.

On notera que la démonstration précédente repose sur l'existence d'homomorphismes $\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^* \to (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$, i.e. en définitive sur les formules explicites du nº 6.1 ou du nº 6.4; on peut donner une démonstration beaucoup plus « fonctorielle », en utilisant la théorie des faisceaux injectifs développée au § suivant. On laisse au lecteur le soin d'approfondir ce point à titre d'exercice.

e) *Le produit cartésien est anticommutatif.*

Autrement dit, étant données des classes de cohomologie $\xi$ et $\eta$ de X et Y, l'image de $\xi \times \eta$ par l'isomorphisme canonique de la cohomologie de $X \times Y$ sur celle de $Y \times X$ est égale à $(-1)^{pq} \eta \times \xi$, $p$ et $q$ désignant les degrés de $\xi$ et $\eta$. La démonstration la plus simple s'obtient en théorie simpliciale; $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignant les faisceaux envisagés sur X et Y, et en négligeant les familles de supports considérées, on forme le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
F^*(X; \mathcal{A}) \otimes F^*(Y; \mathcal{B}) & \to & F^*(X; \mathcal{A}) \times F^*(Y; \mathcal{B}) & \to & F^*(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
F^*(X; \mathcal{B}) \otimes F^*(X; \mathcal{A}) & \to & F^*(Y; \mathcal{B}) \times F^*(X; \mathcal{A}) & \to & F^*(Y \times X; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B});
\end{array}$$

nous avons vu (chapitre I, partie (b) de la démonstration du Théorème 3.11.1) que dans ce diagramme le carré de gauche est commutatif à une homotopie près; le carré de droite est d'autre part commutatif comme on le vérifie immédiatement sur les formules; d'où le résultat immédiatement.

f) *Comptabilité du produit cartésien avec les suites exactes.*

Considérons sur l'espace X une suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{u} \mathcal{A} \xrightarrow{v} \mathcal{A}'' \to 0$$

et sur X×Y un faisceau $\mathcal{B}$ tel que la suite correspondante

$$0 \to \mathcal{A}' \widehat{\otimes} \mathcal{B} \xrightarrow{u \widehat{\otimes} 1} \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \xrightarrow{v \widehat{\otimes} 1} \mathcal{A}'' \widehat{\otimes} \mathcal{B} \to 0$$

soit encore exacte; on a alors des suites exactes de cohomologie sur X et sur X×Y : on va démontrer que, quelles que soient les classes de cohomologie

$$\xi'' \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}''), \qquad \eta \in \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathcal{B})$$

on a la relation

$$\boxed{\delta(\xi'' \times \eta) = (\delta\xi'') \times \eta}.$$

Pour cela représentons $\xi''$ par un cocycle $s'' \in \mathrm{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}'')$ et $\eta$ par un cocycle $t \in \mathrm{F}^*(\mathrm{Y}; \mathcal{B})$; il existe une cochaîne $s \in \mathrm{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ telle que $s'' = v(s)$; alors le cocycle $ds \in \mathrm{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}')$ représente $\delta\xi''$.

Si donc nous désignons d'une manière générale l'application

$$\mathrm{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A}) \otimes \mathrm{F}^*(\mathrm{Y}; \mathcal{B}) \to \mathrm{F}^*(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}),$$

qui conduit au produit cartésien, par $s \otimes t \to s \times t$ (ce qui est un abus de notation...), on voit que $\delta(\xi'' \times \eta)$ est représentée par le cocycle $d(s \times t)$ et que $(\delta\xi'') \times \eta$ est représentée par le cocycle $(ds) \times t$; il nous reste donc à établir la formule

$$d(s \times t) = (ds) \times t;$$

mais celle-ci est triviale, puisque, l'application $s \otimes t \to s \times t$ étant un homomorphisme de complexes, on a nécessairement

$$d(s \times t) = (ds) \times t + (-1)^p s \times dt$$

pour $s \in \mathrm{F}^p(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ et $t \in \mathrm{F}^q(\mathrm{Y}; \mathcal{B})$; d'où le résultat annoncé.

### 6.6. — Définition et propriétés du cup-produit

Soient X un espace topologique, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de base X, $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à droite, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche; nous allons définir des applications

$$\mathrm{H}^p_\Phi(\mathrm{X}; \mathcal{L}) \times \mathrm{H}^q_\Psi(\mathrm{X}; \mathcal{M}) \to \mathrm{H}^{p+q}_\Theta(\mathrm{X}; \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}),$$

en désignant par $\Phi$ et $\Psi$ deux familles de supports dans X, et par $\Theta$ la famille intersection

$$\Theta = \Phi \cap \Psi.$$

Considérons pour cela les résolutions canoniques $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})$ et $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{M})$ ; la première est formée de $\mathcal{A}$-Modules à droite, la seconde de $\mathcal{A}$-Modules à gauche, et les différentielles sont compatibles avec ces structures de $\mathcal{A}$-Modules ; on peut donc former le faisceau différentiel $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X; \mathcal{M})$. Comme la *Remarque* 4.3.2. montre que les résolutions considérées sont homotopiquement triviales en tant que $\mathcal{A}$-Modules (i.e. les $\mathcal{A}(x)$-modules différentiels $\mathcal{L}^*(x)$ et $\mathcal{M}^*(x)$ sont homotopiquement triviaux pour tout $x \in X$), il est clair que le produit tensoriel considéré est une résolution de $\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}$. On a donc des homomorphismes canoniques

$$H^{p+q}[\Gamma_\Theta(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X; \mathcal{M}))] \to H_\Theta^{p+q}(X; \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M})$$

Mais on a par ailleurs un homomorphisme de complexes

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{C}_*(X; \mathcal{L})) \underset{\mathcal{A}(X)}{\otimes} \Gamma_\Psi(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{M})) \to \Gamma_\Theta(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X; \mathcal{M}))$$

et par suite des homomorphismes

$$H_\Phi^p(X; \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}(X)}{\otimes} H_\Psi^q(X; \mathcal{M}) \to H^{p+q}[\Gamma_\Theta(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X; \mathcal{M}))];$$

en composant les résultats obtenus il vient finalement des homomorphismes canoniques

$$(22) \qquad \boxed{H_\Phi^p(X; \mathcal{L}) \underset{H^\bullet(X; \mathcal{A})}{\otimes} H_\Psi^q(X; \mathcal{M}) \to H_\Theta^{p+q}(X; \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M})}$$

qui conduisent aux applications cherchées.

Étant données des classes $\xi \in H_\Phi^p(X; \mathcal{L})$ et $\eta \in H_\Psi^q(X; \mathcal{M})$, l'image

$$\xi \underset{\mathcal{A}}{\cup} \eta \in H_\Theta^{p+q}(X; \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M})$$

de $\xi \otimes \eta$ par l'application (22) s'appelle le *cup-produit* sur $\mathcal{A}$ de $\xi$ et $\eta$.

La théorie que nous avons exposée en détail pour le produit cartésien s'applique presque mot pour mot au cup-produit ; nous nous bornerons donc à des indications sommaires, laissant au lecteur le soin de vérifier complètement nos assertions.

Tout d'abord, on peut aussi définir directement les homomorphismes (22) en utilisant un homomorphisme de résolutions

$$\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X; \mathcal{M}) \to \mathcal{C}^*(X; \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M});$$

étant données des « cochaînes » $\alpha(x_0, \ldots, x_p) \in \mathcal{L}(x_p)$ et $\beta(x_0, \ldots, x_q) \in \mathcal{M}(x_q)$, l'homomorphisme précédent transforme $\alpha \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \beta$ en la cochaîne

$$\alpha(x_0, \ldots, x_p)\,(x_{p+q}) \otimes \beta(x_p, \ldots, x_{p+q}).$$

On a d'autre part un analogue du Théorème 6.2.1 :

**Théorème** 6.6.1. — *Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à droite, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche, et $\mathcal{P}$ un* **Z**-*Module. Supposons donnés une résolution $\mathcal{L}^*$ du $\mathcal{A}$-Module à droite $\mathcal{L}$, une résolution $\mathcal{M}^*$ du $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathcal{M}$, une résolution $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}$, et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^* \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}^* & \xrightarrow{v} & \mathcal{P}^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M} & \xrightarrow{u} & \mathcal{P}; \end{array}$$

*alors on a un diagramme commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \otimes H^*(\Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*)) & \rightarrow & H^*(\Gamma_\Theta(\mathcal{P}^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*_\Phi(X;\mathcal{L}) \otimes H^*_\Psi(X;\mathcal{M}) & \longrightarrow & H^*_\Theta(X;\mathcal{P}) \end{array}$$

(Dans ce diagramme la flèche horizontale supérieure se déduit de $v$; la flèche horizontale inférieure s'obtient en composant le cup-produit sur $\mathcal{A}$ avec l'homomorphisme $u^*$; les flèches verticales se déduisent du fait que $\mathcal{L}^*$, ... sont des résolutions de $\mathcal{L}$, ...; enfin les deux produits tensoriels sont relatifs à l'anneau de base $H^0(X;\mathcal{A})$).

Ce théorème implique en particulier les conséquences suivantes :

*a*) Sur une variété différentiable X, soient $\omega$ et $\varpi$ des formes différentielles fermées définissant des classes de cohomologie $\xi$, $\eta \in H^*(X;\mathbf{R})$; alors $\omega\wedge\varpi$ définit la classe de cohomologie $\xi \underset{\mathbf{R}}{\smile} \eta$.

*b*) Le cup-produit peut se définir à l'aide de résolutions simpliciales; avec les notations du début de ce n° on a en effet des homomorphismes canoniques

$$\mathcal{F}^*(X;\mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{F}^*(X;\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}^*(X;\mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\times} \mathcal{F}^*(X;\mathcal{M})$$

et

$$\mathcal{F}^*(X;\mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\times} \mathcal{F}^*(X;\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}^*(X;\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M});$$

le premier résulte du chapitre 1, § 3, le second s'obtient en itérant les homomorphismes évidents

$$\mathcal{C}^0(X;\mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^0(X;\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X;\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}).$$

Bien entendu, étant donnés sur X des faisceaux $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{M}^*$ de complexes de cochaînes semi-simpliciaux, on définit leur *produit cartésien* en posant $(\mathcal{L}^* \times \mathcal{M}^*)^n = \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M}^n$ et en définissant de façon évidente les opérateurs de face.

c) De même, on peut procéder en *théorie de Čech*. Soient $\mathfrak{U} = (U_i)$ et $\mathfrak{V} = (V_j)$

des recouvrements de X, tous deux ouverts ou bien tous deux fermés et localement fini; on notera

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$$

le recouvrement formé des ensembles $U_i \cap V_j$. On a tout d'abord d'après le chapitre I, § 3, des homomorphismes

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{U};\mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(\mathfrak{V};\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{U};\mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\times} \mathcal{C}^*(\mathfrak{V};\mathcal{M});$$

on a d'autre part directement des homomorphismes

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{U};\mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\times} \mathcal{C}^*(\mathfrak{V};\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{W};\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M})$$

définis comme suit : si l'on a des cochaînes $\alpha_{i_0 \ldots i_n}$ et $\beta_{j_0 \ldots j_n}$ de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ à valeurs dans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, l'homomorphisme cherché transforme $\alpha \underset{\mathcal{A}}{\times} \beta$ en la cochaîne $\gamma$ de $\mathfrak{W}$ à valeurs dans $\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}$ donnée par la formule

$$\gamma_{(i_0 j_0) \cdots (i_n j_n)}(x) = \alpha_{i_0 \cdots i_n}(x) \otimes \beta_{j_0 \cdots j_n}(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in U_{i_0 \cdots i_n} \cap V_{j_0 \cdots j_n};$$

bien entendu, pour obtenir un homomorphisme de *faisceaux* il faut appliquer cette formule *localement*. Cela fait il vient des homomorphismes canoniques

$$\boxed{H^p_\Phi(\mathfrak{U};\mathcal{L}) \underset{H^0(X;\mathcal{A})}{\otimes} H^q_\Psi(\mathfrak{V};\mathcal{M}) \to H^{p+q}_{\Phi\cap\Psi}(\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V};\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M})}$$

et ceux-ci, moyennant les homomorphismes canoniques de la cohomologie d'un recouvrement dans celle de l'espace, se transforment en les cup-produits sur $\mathcal{A}$.

A la limite, on obtient des *cup-produits en cohomologie de Čech*

$$\boxed{\check{H}^p_\Phi(X;\mathcal{L}) \underset{H^0(X;\mathcal{A})}{\otimes} \check{H}^q_\Psi(X;\mathcal{M}) \to \check{H}^{p+q}_{\Phi\cap\Psi}(X;\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M})}$$

qui, eux aussi, sont compatibles avec les cup-produits définis au début de ce n°. Enfin, les propriétés énoncées au n° 6.5 pour le produit cartésien, sont valables, moyennant des modifications évidentes, pour les cup-produits (l'associativité et l'anti-commutativité ne valant que sur un faisceau d'anneaux *commutatifs*) : le cup-produit est bilinéaire, associatif, anti-commutatif, et compatible avec les suites exactes de cohomologie. A titre d'application, on voit que *si* $\mathcal{A}$ *est un faisceau d'anneaux commutatifs sur* X, *alors* $H^*_\Phi(X;\mathcal{A})$, *muni du cup-produit, est une algèbre graduée associative, anticommutative sur l'anneau* $H^0(X;\mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A})$; c'est *l'anneau de cohomologie* (à supports dans $\Phi$) de X à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Lorsque le faisceau $\mathcal{A}$ est simple, donc s'identifie à un anneau de base fixe A, le cup-produit se déduit du produit cartésien par *l'application diagonale* $x \to (x,x)$ de X dans $X \times X$; celle-ci induit en effet des homomorphismes

$$H^{p+q}_{\Phi \times \Psi}(X \times X;\, \mathcal{L} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}) \to H^{p+q}_{\Phi \cap \Psi}(X;\, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M});$$

en les composant avec les produits cartésiens, on obtient les cup-produits. Cela provient évidemment du fait que, d'une manière générale, l'image réciproque de $\mathcal{L} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}$ par l'application diagonale est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$. On pourrait donc dans ce cas déduire les propriétés du cup-produit de celles du produit cartésien.

On pourrait du reste de cette façon obtenir aussi les cup-produits sur un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ arbitraire. En effet, soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à droite et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche; désignant simplement par $\otimes$ le produit tensoriel sur l'anneau des entiers rationnels, on a un homomorphisme canonique

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M};$$

en composant avec le cup-produit relatif à l'anneau $\mathbf{Z}$ on trouve donc des applications

$$H^p_\Phi(X;\, \mathcal{L}) \times H^q_\Psi(X;\, \mathcal{M}) \to H^{p+q}_{\Phi \cap \Psi}(X;\, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M});$$

il est immédiat de vérifier qu'elles sont bilinéaires sur l'anneau de base $H^0(X;\mathcal{A})$ donc définissent des homomorphismes

$$H^p_\Phi(X;\, \mathcal{L}) \otimes_{H^0(X;\mathcal{A})} H^q_\Psi(X;\, \mathcal{M}) \to H^{p+q}_{\Phi \cap \Psi}(X;\, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M});$$

ce sont les cup-produits relatifs à $\mathcal{A}$.

# 7. FONCTEURS DÉRIVÉS EN THÉORIE DES FAISCEAUX

### 7.1. — Faisceaux injectifs

Soient X un espace, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur X, et $\mathfrak{I}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche. On dit que $\mathfrak{I}$ est *injectif* si le foncteur

$$\mathcal{L} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathfrak{I}),$$

défini sur la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules à gauche, est *exact*.

***Théorème*** 7.1.1. — *Tout $\mathcal{A}$-Module peut être plongé dans un $\mathcal{A}$-Module injectif.*

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche; pour chaque $x \in \mathrm{X}$, choisissons un plongement du $\mathcal{A}(x)$-module $\mathcal{L}(x)$ dans un $\mathcal{A}(x)$-module injectif $\mathrm{I}(x)$; enfin, construisons un $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathfrak{I}$ en posant, pour tout ouvert U,

$$\mathfrak{I}(\mathrm{U}) = \prod_{x \in \mathrm{U}} \mathrm{I}(x) \tag{1}$$

et en définissant de façon évidente les opérations de restriction et la structure de $\mathcal{A}$-Module de $\mathfrak{I}$. Il est clair que $\mathcal{L}$ se plonge dans $\mathfrak{I}$; nous allons établir que $\mathfrak{I}$ est injectif.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche; nous allons montrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathfrak{I}) = \prod_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(x)}(\mathcal{M}(x), \mathrm{I}(x)); \tag{2}$$

cela établira évidemment notre assertion.

Remarquons d'abord que pour tout $x$, on a un homomorphisme canonique

$$v(x)\colon \mathfrak{I}(x) \to \mathrm{I}(x)$$

de $\mathcal{A}(x$-modules : il suffit pour cela d'associer à toute section de $\mathfrak{I}$ définie au voisinage de $x$ sa « valeur » en $x$, élément de $\mathrm{I}(x)$.

Par conséquent, tout homomorphisme $f : \mathcal{M} \to \mathfrak{I}$ définit une famille d'homomorphismes

$$\bar{f}(x) = v(x) \circ f(x) : \mathcal{M}(x) \to \mathrm{I}(x);$$

d'où un homomorphisme du premier membre de (2) dans le second. Cet homomorphisme est injectif : il est clair en effet que $f$ transforme une section $s \in \mathcal{M}(\mathrm{U})$ en la section de $\mathfrak{I}$ représentée par l'élément $(\bar{f}(x)(s(x)))_{x \in \mathrm{U}}$ de $\mathfrak{I}(\mathrm{U})$. Cet homomorphisme est de plus surjectif; donnons-nous en effet des $\mathcal{A}(x)$-homomorphismes $g(x) : \mathcal{M}(x) \to \mathrm{I}(x)$, et attachons à chaque section $s \in \mathcal{M}(\mathrm{U})$ la section $f(s) \in \mathfrak{I}(\mathrm{U})$ représentée par la famille $(g(x)(s(x)))_{x \in \mathrm{U}}$; on trouve évidemment un homomorphisme $f : \mathcal{M} \to \mathfrak{I}$ tel que $g(x) = \bar{f}(x)$ pour tout $x$. D'où le Théorème.

Le Théorème analogue relatif aux A-Modules *projectifs* n'est pas exact.

Le Théorème 7.1.1. permet évidemment d'appliquer les méthodes du chapitre 1 dans la mesure où elles reposent uniquement sur l'existence d'objets injectifs. On obtient par exemple les résultats suivants, qu'il est superflu de démontrer ici puisqu'ils sont valables pour toute catégorie abélienne possédant « suffisamment » d'objets injectifs :

a) *Tout $\mathcal{A}$-Module admet des résolutions injectives.*

b) *Etant donnés des $\mathcal{A}$-Modules $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, une résolution $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{L}$, et une résolution injective $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$, il existe un homomorphisme de $\mathcal{L}^*$ dans $\mathcal{M}^*$ compatible avec un homomorphisme $\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{M}$ donné; de plus le « prolongement » de $f$ est unique à une homotopie près.*

c) *Toute suite exacte de $\mathcal{A}$-Modules peut être « prolongée » en une suite exacte de résolutions injectives des $\mathcal{A}$-Modules qui la composent.*

Notons enfin qu'un $\mathcal{A}$-Module injectif $\mathfrak{I}$ est nécessairement un faisceau *flasque;* il suffit pour le voir d'écrire, pour tout ouvert U de X, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}_{\mathrm{U}} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathrm{X}-\mathrm{U}} \to 0$$

(Théorème 2.9.3); il vient alors la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\mathrm{X}-\mathrm{U}}, \mathfrak{I}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathfrak{I}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\mathrm{U}}, \mathfrak{I}) \to 0,$$

d'où notre assertion.

## 7.2. — Dérivés d'un foncteur covariant exact à gauche

Soit T un foncteur covariant défini sur la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules à gauche, à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathfrak{K}$, et exact à gauche. Choisissons une fois pour toutes une résolution injective $\mathfrak{J}^*(\mathcal{L})$ pour tout $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathcal{L}$, et posons

$$\begin{aligned} T^n(\mathcal{L}) &= H^n[T(\mathfrak{J}^*(\mathcal{L}))] \\ &= \operatorname{Ker}[T(\mathfrak{J}^n(\mathcal{L})) \xrightarrow{d} T(\mathfrak{J}^{n+1}(\mathcal{L}))]/\operatorname{Im}[T(\mathfrak{J}^{n-1}(\mathcal{L})) \xrightarrow{d} T(\mathfrak{J}^n(\mathcal{L}))]. \end{aligned}$$

On a alors les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{L} \to T^n(\mathcal{L})$ *est un foncteur covariant à valeurs dans* $\mathfrak{K}$.

En effet, tout homomorphisme $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ est induit par un homomorphisme $f^* : \mathfrak{J}^*(\mathcal{L}) \to \mathfrak{J}^*(\mathcal{M})$, unique à une homotopie près; appliquant le foncteur $H^n(T(\ldots))$ on obtient un homomorphisme

$$T^n(f) : T^n(\mathcal{L}) \to T^n(\mathcal{M})$$

bien déterminé, et vérifiant évidemment les conditions requises pour définir un foncteur.

b) *Le foncteur* $T^0$ *est isomorphe au foncteur* T.

En effet, comme T est exact à gauche, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathfrak{J}^0(\mathcal{L}) \to \mathfrak{J}^1(\mathcal{L})$$

conduit à la suite exacte

$$0 \to T(\mathcal{L}) \to T(\mathfrak{J}^0(\mathcal{L})) \to T(\mathfrak{J}^1(\mathcal{L})),$$

d'où le résultat.

c) *A toute suite exacte*

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$$

*est associée une suite exacte*

$$0 \to T(\mathcal{L}') \to T(\mathcal{L}) \to T(\mathcal{L}'') \xrightarrow{\delta} T^1(\mathcal{L}') \to \ldots.$$

Comme les foncteurs $T^n$ sont, à des isomorphismes près, indépendants de l'application $\mathcal{L} \to \mathfrak{J}^*(\mathcal{L})$ choisie, on peut se ramener au cas où l'on a une suite *exacte*

$$0 \to \mathfrak{J}^*(\mathcal{L}') \to \mathfrak{J}^*(\mathcal{L}) \to \mathfrak{J}^*(\mathcal{L}'') \to 0$$

compatible avec la suite donnée. Comme le premier terme est injectif la suite exacte en question est décomposée, et par conséquent la suite correspondante

$$0 \to T(\mathfrak{J}^*(\mathcal{L}')) \to T(\mathfrak{J}^*(\mathcal{L})) \to T(\mathfrak{J}^*(\mathcal{L}'')) \to 0$$

est exacte; d'où les homomorphismes $\delta$.

d) *On a* $T^n(\mathcal{L}) = 0$ *pour* $n \geqslant 1$ *si* $\mathcal{L}$ *est injectif.*

En effet, la résolution $\mathfrak{J}^*(\mathcal{L})$ est alors homotopiquement triviale, donc aussi le complexe $T(\mathfrak{J}^*(\mathcal{L}))$.

***Exemple*** 7.2.1. —Prenons le foncteur

$$T(\mathcal{L}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{L});$$

alors les foncteurs dérivés sont canoniquement isomorphes aux foncteurs $\mathcal{L} \to H^n_\Phi(X;\mathcal{L})$ : cela tient à ce que $\mathcal{J}^*(\mathcal{L})$ est une résolution flasque de $\mathcal{L}$, et aux théorèmes 4.7.1., 4.7.2. et 4.7.3.

***Exemple*** 7.2.2. — Choisissons un $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathcal{L}$ et considérons le foncteur

$$\mathcal{M} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M});$$

les foncteurs dérivés (à valeurs dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens de base X, ou des $\mathcal{A}$-Modules si $\mathcal{A}$ est commutatif) se désignent par la notation

$$\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

***Exemple*** 7.2.3. — Les notations étant comme dans l'exemple précédent, on peut considérer le foncteur

$$\mathcal{M} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M});$$

les foncteurs dérivés (à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens) se notent

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

On laisse au lecteur le soin de traduire les propriétés (a), ..., (d) dans les deux exemples qu'on vient d'exposer.

En particulier, si l'on prend $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ il vient

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M});$$

par suite on a la formule

$$H^n(X; \mathcal{M}) = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

pour tout $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathcal{M}$.

## 7.3. — La suite spectrale des Ext

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

***Lemme*** 7.3.1. — *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ deux $\mathcal{A}$-Modules à gauche. Pour tout ouvert* U *de* X *on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|U}(\mathcal{L}|U, \mathcal{M}|U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_U, \mathcal{M}).$$

Tout homomorphisme $\mathcal{L}_U \to \mathcal{M}$ définit évidemment un homomorphisme $\mathcal{L}|U \to \mathcal{M}|U$ qui le détermine entièrement puisque $\mathcal{L}_U(x) = 0$ pour $x \notin U$.

Soit d'autre part un homomorphisme $f : \mathcal{L}|U \to \mathcal{M}|U$; définissons une application $\bar{f}$ de l'espace étalé $\mathcal{L}_U$ dans l'espace étalé $\mathcal{M}$ en lui imposant de coïncider avec $f$ au-dessus de U, et d'être nulle au-dessus de X-U; tout revient à montrer que $\bar{f}$ est *continue*. Or soit une section $s \in \mathcal{L}_U(V)$, V ouvert dans X; puisque la restriction de $s$ à $U \cap V$ est une section de $\mathcal{L}|U$ on voit que $\bar{f} \circ s$ est continue dans $U \cap V$; mais $s$ est nulle dans $U - U \cap V$, donc dans un *ouvert* W vérifiant

$$U = W \cup (U \cap V);$$

il en est de même de $\bar{f} \circ s$, d'où la continuité de $\bar{f} \circ s$ dans V tout entier.

**Lemme** 7.3.2. — *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{J}$ deux $\mathcal{A}$-Modules à gauche; si $\mathcal{J}$ est injectif, le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{J})$ est flasque.*

Une section de ce faisceau dans un ouvert U est en effet un homomorphisme $\mathcal{L}|U \to \mathcal{J}|U$, i.e., d'après le Lemme précédent, un homomorphisme $\mathcal{L}_U \to \mathcal{J}$; comme $\mathcal{J}$ est injectif et comme $\mathcal{L}_U$ est un sous-$\mathcal{A}$-Module de $\mathcal{L}$, cet homomorphisme est induit par un homomorphisme $\mathcal{L} \to \mathcal{J}$, d'où le Lemme.

**Théorème** 7.3.3. — *Soient X un espace topologique, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de base X, et $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ deux $\mathcal{A}$-Modules à gauche. Il existe une suite spectrale pour laquelle*

$$E_2^{pq} = H^p(X; \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}))$$

*et dont le terme $E_\infty$ est le groupe bigradué associé à une filtration convenable du groupe gradué* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

Prenons une résolution injective $\mathcal{J}^*(\mathcal{M})$ et formons le double complexe

$$K = C^*[X; \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*(\mathcal{M}))].$$

On a pour ce double complexe

$${}'E_1^{pq} = H^q[C^p(X; \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*(\mathcal{M})))] = C^p[X; \mathcal{H}^q(\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*(\mathcal{M})))]$$

puisque le foncteur $C^p(X; \ldots)$ est exact. Il vient donc

$${}'E_1^{pq} = C^p(X; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{L}, \mathcal{M}))$$

et par conséquent

$${}'E_2^{pq} = H^p(X; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{L}, \mathcal{M})).$$

Par ailleurs

$${}''E_1^{pq} = H^q[C^*(X; \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^p(\mathcal{M})))] = H^q(X; \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^p(\mathcal{M})));$$

en vertu du Lemme 7.3.2. cette suite spectrale est dégénérée, de sorte que

$$H^n(K) = {}''E_2^{n0} = H^n(\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*(\mathcal{M}))) = \mathrm{Ext}^n(\mathcal{L}, \mathcal{M}),$$

ce qui termine la démonstration.

**Corollaire.** — *On a une suite exacte*

$$0 \to H^1(X; \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}; \mathcal{M})) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \to H^0(X; \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})) \\ \to H^2(X; \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

Cela résulte du Théorème 4.5.1. du chapitre I.

### 7.4. — Utilisation d'une résolution localement libre

Considérons le faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur l'espace de base X; pour tout entier $n \geqslant 1$ on notera $\mathcal{A}^n$ le produit direct de $n$ faisceaux identiques à $\mathcal{A}$; on peut considérer $\mathcal{A}^n$ comme un $\mathcal{A}$-Module à gauche ou à droite. Nous dirons qu'un $\mathcal{A}$-Module $\mathcal{L}$ est *localement libre* si, pour tout ouvert $U \subset X$ assez petit, $\mathcal{L}|U$ est isomorphe comme $(\mathcal{A}|U)$-Module à un produit $\mathcal{A}^n|U$ (l'entier $n$ pouvant dépendre de U). Enfin, nous dirons qu'un $\mathcal{A}$-Module $\mathcal{L}$ est *finitiste* s'il existe une résolution *homologique*

$$\ldots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L} \to 0$$

de $\mathcal{L}$ par des $\mathcal{A}$-Modules localement libres (une telle résolution sera appelée une *résolution finitiste* de $\mathcal{L}$), et on dira que $\mathcal{L}$ est *localement finitiste* si, pour tout ouvert $U \subset X$ suffisamment petit, le $(\mathcal{A}|U)$-Module $\mathcal{L}|U$ est finitiste.

Par exemple, les « faisceaux algébriques cohérents » considérés par J. P. SERRE (*Annals of Math.*, 61 (1955), pp. 197-278) sont localement finitistes; il en est de même des « faisceaux analytiques cohérents » de la théorie de Cartan-Oka.

Notons d'abord le résultat suivant :

**Lemme** 7.4.1. — *Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche localement libre; pour tout $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathcal{M}$, on a*

$$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}; \mathcal{M}) = 0 \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 1.$$

Il suffit pour cela de montrer que le foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ est *exact*; or, le problème étant de nature locale, on peut supposer $\mathcal{L} = \mathcal{A}^p$, auquel cas on obtient le foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^p$, d'où le lemme.

On notera que le lemme précédent, combiné avec le Théorème 7.3.3, conduit à des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = H^q(X; \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}))$$

toutes les fois que $\mathcal{L}$ est localement libre.

**Théorème** 7.4.1. — *Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche finitiste, $\mathcal{L}_*$ une résolution finitiste de $\mathcal{L}$, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-Module à gauche quelconque; on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \mathcal{H}^n(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M})).$$

Soit en effet $\mathcal{M}^*$ une résolution injective de $\mathcal{M}$ et considérons le faisceau de doubles complexes

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}^*)$$

dont les composantes sont les faisceaux

$$\mathcal{K}^{pq} = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_p, \mathcal{M}^q).$$

Nous plaçant dans la catégorie abélienne des faisceaux de groupes abéliens sur X, nous allons calculer la première suite spectrale de $\mathcal{K}$. On a évidemment

$$'\mathcal{E}_1^{pq} = \mathcal{H}^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_p, \mathcal{M}^*)) = \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_p, \mathcal{M}),$$

de sorte que d'après le Lemme 7.4.1. cette suite spectrale est dégénérée; comme évidemment

$$'\mathcal{E}_2^{n0} = \mathcal{H}^n(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M})),$$

il nous reste à établir qu'on a par ailleurs des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{K}) = \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M});$$

pour cela on utilise la seconde suite spectrale de $\mathcal{K}$; on a

$$''\mathcal{E}_1^{pq} = \mathcal{H}^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}^p));$$

comme $\mathcal{M}^p$ est injectif et comme $\mathcal{L}_*$ est une résolution homologique de $\mathcal{L}$, il reste

$$''\mathcal{E}_1^{pq} = 0 \ (q \geqslant 1); \qquad ''\mathcal{E}_1^{p0} = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}^p),$$

d'où immédiatement le résultat cherché.

**Corollaire.** — *Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-Module localement finitiste et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-Module quelconque; pour tout $x \in$ X, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})(x) = \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}(x)}(\mathcal{L}(x), \mathcal{M}(x)).$$

Tout d'abord, en s'induisant dans un ouvert suffisamment petit, on peut se ramener au cas où le $\mathcal{A}$-Module $\mathcal{L}$ est finitiste. Dans ces conditions, en conservant les notations du Théorème précédent, il est clair que les groupes ponctuels du faisceau $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ sont les groupes de cohomologie des complexes

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M})(x);$$

mais comme $\mathcal{L}_*$ est composé de faisceaux localement libres, ces complexes sont canoniquement isomorphes aux complexes

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}(x)}(\mathcal{L}_*(x), \mathcal{M}(x)),$$

et comme $\mathcal{L}_*(x)$ est une résolution libre du $\mathcal{A}(x)$-module $\mathcal{L}(x)$, le résultat cherché s'ensuit.

On peut démontrer le Corollaire précédent dans des hypothèses assez différentes (notamment en supposant que $\mathcal{L}$ est un Module « cohérent » sur un faisceau « cohérent » d'anneaux noethériens; cf. A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'Algèbre Homologique*, article à paraître au *Tohoku Math. Journal*).

# APPENDICE

## RÉSOLUTIONS SIMPLICIALES STANDARD

### 1. — Cinq règles de calcul fonctoriel

Étant données des catégories $\mathfrak{K}'$ et $\mathfrak{K}''$, on a défini au chapitre I, § I, la notion de *foncteur covariant* $F : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$; et étant donnés deux foncteurs covariants $F, G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$, on a défini la notion d'*homomorphisme de foncteurs* $\theta : F \to G$. On a défini aussi le *composé* de deux foncteurs $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ et $G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$, qui est un foncteur $G \circ F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}''$; et étant donnés trois foncteurs covariants $F, G, H : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$ et deux homomorphismes de foncteurs $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$, on définit leur *composé* $\psi \circ \varphi : F \to H$ par la formule

$$\psi \circ \varphi(X) = \psi(X) \circ \varphi(X),$$

valable pour tout $X \in \mathfrak{K}'$.

Considérons maintenant deux foncteurs $F, G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$ et un homomorphisme $\theta : F \to G$. Si l'on a deux autres foncteurs covariants $U : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M}''$ et $V : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{K}'$, on déduit de là un nouvel homomorphisme de foncteurs

$$U * \theta * V : U \circ F \circ V \to U \circ G \circ V,$$

donné par la formule

$$U * \theta * V(X) = U(\theta(V(X))), \quad X \in \mathfrak{M}'.$$

Si U (resp. V) est le foncteur identique, on écrira simplement $\theta * V$ (resp. $U * \theta$). Il existe entre l'opération $*$ que nous venons de définir et les deux lois de composition définies plus haut des relations simples; on peut les concentrer en cinq *règles de calcul* que nous nous bornerons à énoncer, attendu que les démonstrations en sont triviales :

(I) $$(U \circ V) * \theta = U * (V * \theta);$$

cette formule est valable lorsque l'on a des foncteurs $F, G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$, un homomorphisme $\theta : F \to G$, et des foncteurs $V : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M}'$ et $U : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}''$;

(II) $$\theta * (U \circ V) = (\theta * U) * V;$$

cette formule est valable, comme la précédente, pourvu qu'elle ait un sens;

(III) $$(U * \theta) * V = U * (\theta * V) = U * \theta * V;$$

cette formule est valable dès que son dernier terme est défini;

(IV) $$U * (\theta' \circ \theta'') * V = (U * \theta' * V) \circ (U * \theta'' * V);$$

cette formule est valable lorsque l'on a des foncteurs $F, G, H : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$, des homomorphismes $\theta' : G \to H$ et $\theta'' : F \to G$, et des foncteurs

$$U : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M}'' \text{ et } V : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{M}';$$

(V) $$(\psi * G) \circ (U * \varphi) = (V * \varphi) \circ (\psi * F);$$

cette formule est valable lorsque l'on a des foncteurs

$$F, G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}'' \text{ et } U, V : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M},$$

ainsi que des homomorphismes

$$\varphi : F \to G \text{ et } \psi : U \to V.$$

**2. — Objets semi-simpliciaux**

Nous désignerons par $\Delta$ la catégorie suivante : ses objets sont les « simplexes types » $\Delta_n (n = 0, 1, \ldots)$ du chapitre 1, § 3, et Hom $(\Delta_p, \Delta_q)$ est l'ensemble des applications croissantes (au sens large) de $\Delta_p$ dans $\Delta_q$ — étant entendu que la composition des homomorphismes dans $\Delta$ est définie comme s'il s'agissait d'applications, ce qui est d'ailleurs le cas.

Étant donnée une catégorie quelconque $\mathfrak{K}$, un *objet semi-simplicial* dans $\mathfrak{K}$ sera par définition un foncteur covariant

$$F^* : \Delta \to \mathfrak{K};$$

on posera $F^n = F(\Delta_n) \in \mathfrak{K}$ et on écrira le plus souvent $F^*$ sous la forme $(F^n)_{n \geqslant 0}$. Noter que cette définition est orientée vers la cohomologie; le point de vue dual s'obtiendrait en remplaçant $\mathfrak{K}$ par la catégorie duale.

Soit $n$ un entier $\geqslant 0$; dans l'ensemble Hom $(\Delta_n, \Delta_{n+1})$ figurent les applications [1]

$$d_n^i : \Delta_n \to \Delta_{n+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n + 1)$$

qui définissent dans $\Delta_{n+1}$ les simplexes singuliers de la forme $(0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n + 1)$; de même, dans l'ensemble Hom $(\Delta_{n+1}, \Delta_n)$ figurent les applications

$$s_n^i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

qui définissent les simplexes singuliers $(0, \ldots, i-1, i, i, i+1, \ldots, n)$ de $\Delta_n$. Il est trivial de vérifier que tout homomorphisme $\Delta_p \to \Delta_q$ dans la catégorie $\Delta$

---

(1) On a $d_n^i = F_{n+1}^i$ avec les notations de Chapitre 1, n° 3.5 (p. 46).

est composé d'homomorphismes de la forme précédente; on peut aussi montrer que toute relation entre homomorphismes dans la catégorie $\Delta$ peut se déduire formellement des relations que voici :

$$\begin{array}{lll}
(a) : d^j_{n+1} \circ d^i_n = d^i_{n+1} \circ d^{j-1}_n & & (i < j) \\
(b) : s^j_n \circ s^i_{n+1} = s^i_n \circ s^{j+1}_{n+1} & & (i \leqslant j) \\
(c) : s^j_{n+1} \circ d^i_{n+1} = d^i_n \circ s^{j-1}_n & & (i < j) \\
(d) : s^i_n \circ d^i_n = s^i_n \circ d^{i+1}_n = \text{identité} & & \\
(e) : s^j_{n+1} \circ d^i_{n+1} = d^{i-1}_n \circ s^j_n & & (j+1 < i)
\end{array}$$

Il s'ensuit que, pour définir dans une catégorie $\mathfrak{K}$ un objet semi-simplicial $F^*$, il est nécessaire et suffisant de se donner d'une part des objets $F^n$ de $\mathfrak{K}$, et d'autre part des homomorphismes

$$\begin{array}{ll}
F^*(d^i_n) : F^n \to F^{n+1} & (0 \leqslant i \leqslant n+1) \\
F^*(s^i_n) : F^{n+1} \to F^n & (0 \leqslant i \leqslant n)
\end{array}$$

satisfaisant aux relations ci-dessus; ce sont les *opérateurs de face et de dégénérescence* de $F^*$. Dans la pratique, et sauf danger de confusion, nous écrirons toujours $d^i_n$ et $s^i_n$ au lieu de $F^*(d^i_n)$ et $F^*(s^i_n)$.

**3. — La construction fondamentale**

Soient $\mathfrak{K}$ une catégorie et $\mathrm{CS}^*_+(\mathfrak{K})$ la catégorie des objets semi-simpliciaux dans $\mathfrak{K}$; on se propose dans ce n° de construire des foncteurs covariants

$$F^* : \mathfrak{K} \to \mathrm{CS}^*_+(\mathfrak{K}).$$

Pour cela il faut construire des foncteurs $F^n : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} (n \geqslant 0)$ et des homomorphismes $d^i_n : F^n \to F^{n+1}$, $s^i_n : F^{n+1} \to F^n$ vérifiant les relations (*a*) à (*e*) du n° 2.

Nous procéderons comme suit. Partant d'un foncteur covariant

$$C : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K},$$

nous définirons tout d'abord des foncteurs $C^n : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ en posant

$$C^0 = \text{identité}, \qquad C^{n+1} = C \circ C^n,$$

et nous poserons

$$F^n = C^{n+1} \qquad (n \geqslant 0).$$

Supposons maintenant donnés deux homomorphismes de foncteurs

$$k : C^0 \to C^1, \qquad p : C^2 \to C^1;$$

alors nous définirons

$$\begin{array}{lllll}
d^i_n : F^n & = C^{n+1} & \to & C^{n+2} = F^{n+1} \\
s^i_n : F^{n+1} & = C^{n+2} & \to & C^{n+1} = F^n
\end{array}$$

par les formules suivantes :

$$\boxed{d^i_n = C^i * k * C^{n-i+1}; \quad s^i_n = C^i * p * C^{n-i}}.$$

Il va de soi que les relations (*a*) à (*e*) ne sauraient être satisfaites que si l'on impose des conditions supplémentaires à $k$ et $p$; cependant *la relation* (*a*) — qui suffit, lorsque $\mathfrak{K}$ est une catégorie abélienne et F additif, à définir la différentielle du foncteur $F^* = (F^n)_{n \geqslant 0}$ — *est toujours vérifiée*; en effet elle s'écrit, en posant $j = i + r + 1$ avec $r \geqslant 0$, sous la forme

$$(C^{i+r+1} * k * C^{n-i-r+1}) \circ (C^i * k * C^{n-i+1}) = (C^i * k * C^{n-i+2}) \circ (C^{i+r} * k * C^{n-i-r+1})$$

la règle de calcul (IV) du nº 1 ramène à la relation

$$(C^{r+1} * k) \circ (k * C^r) = (k * C^{r+1}) \circ (C^r * k),$$

qui résulte alors de la règle de calcul (V) du nº 2.

Pour établir les relations (*b*) à (*e*), il suffit d'imposer à $k$ et $p$ de vérifier les conditions que voici :

$$\begin{aligned} &(A) : p \circ (C * k) = p \circ (k * C) = \text{identité} \\ &(B) : p \circ (C * p) = p \circ (p * C). \end{aligned}$$

Vérifions à titre d'exemple la relation (*b*); en posant $j = i + r$, $r \geqslant 0$, elle s'écrit

$$(C^{i+r} * p * C^{n-i-r}) \circ (C^i * p * C^{n-i+1}) = (C^i * p * C^{n-i}) \circ (C^{i+r+1} * p * C^{n-i-r});$$

la règle de calcul (IV) permet de simplifier à gauche par $C^i$ et à droite par $C^{n-i-r}$, de sorte qu'on est ramené à la relation

$$(C^r * p) \circ (p * C^{r+1}) = (p * C^r) \circ (C^{r+1} * p);$$

si $r = 0$, cette relation se réduit à l'hypothèse (B), et si $r \geqslant 1$ elle se déduit aussitôt de la règle de calcul (V).

On laisse au lecteur le soin d'établir les autres relations.

## 4. — Application aux faisceaux

La construction du nº 3 s'applique comme suit en théorie des faisceaux : on prend pour $\mathfrak{K}$ la catégorie des *faisceaux d'ensembles sur un espace donné* X et pour C le foncteur

$$C(\mathcal{A}) = \mathscr{C}^0(X; \mathcal{A}),$$

qui associe à chaque faisceau $\mathcal{A}$ de base X le faisceau des sections non nécessairement continues de $\mathcal{A}$. Avec les notations du chapitre II, § 6, on a donc

$$F^n(\mathcal{A}) = \mathscr{F}^n(X; \mathcal{A}).$$

Pour construire les homomorphismes de foncteurs $k$ et $p$, on doit attacher *canoniquement*, *i.e.* fonctoriellement, à tout faisceau $\mathcal{A}$ de base X des homomorphismes de faisceaux

$$\begin{aligned} &k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \to \mathscr{C}^0(X; \mathcal{A}) \\ &p(\mathcal{A}) : \mathscr{C}^0(X; \mathscr{C}^0(X, \mathcal{A})) \to \mathscr{C}^0(X; \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Nous prendrons évidemment pour $k(\mathcal{A})$ l'injection canonique. Pour définir $p(\mathcal{A})$ il suffit d'attacher « naturellement », à toute section continue de

$$\mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}))$$

au-dessus d'un ouvert U de X, une section continue de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ au-dessus de U; autrement dit, il suffit d'attacher à toute section non nécessairement continue de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ au-dessus de U, soit $x \to s(x)$, une section non nécessairement continue de $\mathcal{A}$ au-dessus de U, soit $x \to \bar{s}(x)$; or pour tout $x \in U$, l'élément $s(x)$ de la fibre de $x$ dans $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ est un germe de section non nécessairement continue de $\mathcal{A}$ au point $x$, donc peut se présenter par une application

$$x_1 \to s(x, x_1) \in \mathcal{A}(x_1)$$

définie pour $x_1$ assez voisin de $x$; nous poserons alors

$$\bar{s}(x) = s(x, x),$$

*valeur* au point $x$ du germe de section $s(x)$ de $\mathcal{A}$.

On doit maintenant vérifier les relations (A) et (B) du n° précédent, et tout d'abord la relation

$$\text{(A)} \qquad p \circ (C * k) = p \circ (k * C) = \text{identité},$$

qui s'écrit plus explicitement sous la forme

$$p(\mathcal{A}) \circ C(k(\mathcal{A})) = p(\mathcal{A}) \circ k(C(\mathcal{A})) = \text{identité}$$

pour tout faisceau $\mathcal{A}$ de base X. Puisque les deux premiers membres de cette relation sont des homomorphismes de faisceaux

$$C(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) = C(\mathcal{A}),$$

tout revient à examiner leur effet sur les sections de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$. Soit donc $s$ une section continue de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ au-dessus d'un ouvert U, représentée par une section non nécessairement continue $\bar{s}$ de $\mathcal{A}$ au-dessus de U. L'image de $s$ par l'homomorphisme $k(C(\mathcal{A}))$ est la section continue de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; A))$ déduite de $s$ par l'injection canonique

$$\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}));$$

cette image est représentée par une section non nécessairement continue de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$, à savoir $s$ (qui est en fait continue); il s'ensuit que l'image de $s$ par $p(\mathcal{A}) \circ k(C(A))$ est représentée par la section non nécessairement continue de $\mathcal{A}$ obtenue en attanchant à tout $x \in U$ la *valeur* en $x$ du germe $s(x)$ de section de $\mathcal{A}$, valeur qui n'est autre que $\bar{s}(x)$; par suite l'image de $s$ par $p(\mathcal{A}) \circ k(C(\mathcal{A}))$ est $s$, ce qui prouve que $p \circ (k * \mathcal{C})$ est l'identité. Considérons maintenant $p \circ (\mathcal{C} * k)$. On doit calculer tout d'abord la section X de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}))$ qui se déduit de $s$ par l'homomorphisme $C(k(\mathcal{A}))$, lequel s'obtient en appliquant le foncteur C à l'homomorphisme de faisceaux

$$k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}).$$

En notant $k_x(\mathcal{A})$ l'application de la fibre de $x$ dans $\mathcal{A}$ dans la fibre de $x$ dans $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ induite par $k(\mathcal{A})$, on en déduit que, la section continue $s$ de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ étant représentée par la section non nécessairement continue $\bar{s}$ de $\mathcal{A}$, l'image de $s$ par $C(k(A))$ sera représentée par la section non nécessairement continue

$$x \to k_x(\mathcal{A})(\bar{s}(x))$$

de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$. Si maintenant l'on applique $p(\mathcal{A})$ au résultat obtenu on trouvera la section non nécessairement continue de A donnée par

$$x \to h_x(\mathcal{A})[k_x(\mathcal{A})(\bar{s}(x))],$$

où

$$h_x(\mathcal{A}) : \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})(x) \to \mathcal{A}(x)$$

est l'application qui, à tout germe de section (continue ou non) de $\mathcal{A}$ en $x$, associe sa valeur en $x$. Pour achever la démonstration de (A) il reste donc à prouver que l'on a

$$(*) \qquad h_x(\mathcal{A}) \circ k_x(\mathcal{A}) = \text{identité},$$

autrement dit que si l'on représente un élément $s$ de $\mathcal{A}(x)$ par un germe de section continue de $\mathcal{A}$ en $x$, la valeur en $x$ de ce germe est $s$ — ce qui est trivial.

Établissons maintenant l'identité

$$(\text{B}) \qquad p \circ (C * p) = p \circ (p * C);$$

il s'agit cette fois d'homomorphismes de foncteurs $C^3 \to C$, donc, pour tout faisceau $\mathcal{A}$, d'homomorphismes de faisceaux

$$\mathcal{F}^2(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^0(X; \mathcal{A}),$$

et on doit examiner leur effet sur une section continue $s$ de $\mathcal{F}^2(X; \mathcal{A})$ au-dessus d'un ouvert U, *i.e.* sur une section non nécessairement continue $\bar{s}$ de

$$\mathcal{F}^1(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}))$$

au-dessus de U, le résultat devant être une section non nécessairement continue de $\mathcal{A}$ au-dessus de U.

Pour chaque $x_0 \in U$, $\bar{s}(x_0)$ est un germe de section non nécessairement continue de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ au point $x_0$; on peut donc le représenter par une section non nécessairement continue

$$x_1 \to \bar{s}(x_0, x_1) \in \mathcal{C}^0(X, \mathcal{A})(x_1)$$

de $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ définie dans un voisinage de $x_0$, ou même si l'on veut dans U tout entier. L'élément $\bar{s}(x_0, x_1)$ est à son tour un germe de section non nécessairement continue de $\mathcal{A}$ au point $x_1$, donc se représente par une application

$$x_2 \to \bar{s}(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{A}(x_2)$$

définie au voisinage de $x_1$, ou même si l'on veut dans U tout entier.
Calculons maintenant l'effet de $p \circ (C * p)$, *i.e.* de l'homomorphisme de faisceaux $p(\mathcal{A}) \circ C[p(\mathcal{A})]$, sur la section $s$. Posons, pour simplifier les notations,

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) = C(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}^1 = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})) = C^2(\mathcal{A}),$$

et ainsi de suite. Pour chaque $x \in X$, l'homomorphisme de faisceaux

$$p(\mathcal{A}) : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{A}^0$$

induit une application

$$p_x(\mathcal{A}) : \mathcal{A}^1(x) \to \mathcal{A}^0(x)$$

des fibres correspondantes; comme $C(p(\mathcal{A}))$ est l'homomorphisme de faisceaux $C(\mathcal{A}^1) \to C(\mathcal{A}^0)$ obtenu en appliquant le foncteur C à $p(\mathcal{A})$, il est clair que la section de $C(\mathcal{A}^0) = \mathcal{A}^1$ déduite de $s$ par $C(p(\mathcal{A}))$ sera représentée par la section non nécessairement continue

$$x \to p_x(\mathcal{A})(\bar{s}(x))$$

de $\mathcal{A}^0$; or l'élément $\bar{s}(x)$ de $\mathcal{A}^1(x)$ est représenté dans $\mathcal{A}$ par la fonction $\bar{s}(x,x_1,x_2)$ des variables $x_1$, $x_2 \in U$; par construction de $p$ on déduit de là que $p_x(\mathcal{A})\ (\bar{s}(x))$ est le germe de section non nécessairement continue de $\mathcal{A}$ au point $x$ qui est représenté par la fonction $x_1 \to \bar{s}(x,x_1,x_1)$; si maintenant l'on applique $p$ au résultat trouvé, on voit que l'effet de $p \circ (C * p)$ sur $s$ n'est autre que la section non nécessairement continue

$$x \to \bar{s}(x,x,x)$$

de $\mathcal{A}$ au-dessus de U.
Examinons enfin l'effet de $p \circ (p{*}C)$ sur $s$, *i.e.* l'image de la section $s$ par l'homomorphisme de faisceaux $p(\mathcal{A}) \circ p(C(\mathcal{A}))$. On doit d'abord calculer l'image de $s$ par $p(C(\mathcal{A})]$, *i.e.* appliquer $p$ à $s$ considérée comme section continue du faisceau $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; C(\mathcal{A})))$, ce qui donne évidemment la section non nécessairement continue de $C(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^0$ représentée par l'application $x \to \bar{s}(x,x) \in \mathcal{A}^0(x)$; ceci fait, on doit encore appliquer $p(\mathcal{A})$ au résultat; mais comme $\bar{s}(x,x)$ est le germe défini au point $x$ par la section non nécessairement continue

$$x_2 \to \bar{s}(x,x,x_2)$$

de $\mathcal{A}$, il est clair qu'on trouve la section non nécessairement continue

$$x \to \bar{s}(x,x,x)$$

de $\mathcal{A}$ au-dessus de U; comparant avec le résultat obtenu pour $p \circ (C * p)$ on voit que l'identité (B) est établie.
Les identités (A) et (B) étant vérifiées, la méthode développée au n° précédent

s'applique, et conduit à une *structure semi-simpliciale sur le foncteur*

$$\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) = (\mathcal{F}^n(X; \mathcal{A}))_{n \geqslant 0};$$

on laisse au lecteur le soin de vérifier qu'elle coïncide bien avec celle qu'on a définie explicitement au chapitre II, § 6; ce point n'a du reste aucune espèce d'influence sur la définition des produits donnée au chapitre II, § 6.

Il serait utile d'améliorer les démonstrations de (A) et (B) que nous avons exposées ci-dessus, démonstrations dont l'obscurité n'est que trop évidente. La situation serait entièrement trivialisée si l'on pouvait démontrer à priori la conjecture suivante : pour tout entier $n \geqslant 0$, *il existe un seul homomorphisme de foncteurs* $\mathcal{F}^n(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^0(X; \mathcal{A})$; on peut même, ce n'est pas moins facile, conjecturer que *les seuls homomorphismes de foncteurs* $\mathcal{F}^p(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^q(X; \mathcal{A})$ *sont ceux qui se déduisent des applications croissantes* $\Delta_p \to \Delta_q$ *et de la structure semi-simpliciale du foncteur*

$$\mathcal{A} \to \mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}).$$

## 5. Résolutions semi-simpliciales

Aussi longtemps qu'on se place sur la catégorie des faisceaux d'*ensembles* de base X, la question de savoir si $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ est une *résolution* de $\mathcal{A}$ ne se pose pas; mais nous devons maintenant expliquer pourquoi il en est bien ainsi lorsqu'on se place sur la catégorie des faisceaux de *groupes abéliens* de base X.

Reprenons pour cela les hypothèses du n° 3 : on a un foncteur covariant

$$C : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K},$$

où $\mathfrak{K}$ est une catégorie quelconque, et des homomorphismes de foncteurs

$$k : C^0 \to C^1, \qquad p : C^2 \to C^1$$

vérifiant les conditions (A) et (B); nous n'aurons du reste besoin dans ce qui suit que de l'homomorphisme $k$, l'homomorphisme $p$ ne jouant aucun rôle dans les calculs qu'on va développer.

Considérons maintenant un foncteur covariant

$$T : \mathfrak{K} \to \mathfrak{A}$$

à valeurs dans une catégorie *abélienne* $\mathfrak{A}$; posant comme au n° 3

$$F^0 = C, \ldots, F^{n+1} = C \circ F^n, \ldots$$

le foncteur gradué $F^* = (F^n)_{n \geqslant 0}$ est muni comme on l'a vu d'opérateurs

$$d_n^i = C^i * k * C^{n-i+1};$$

posant

$$T^n = T \circ F^n, \quad T^* = (T^n)_{n \geqslant 0},$$

on a donc de même des opérateurs de face $T * d_n^i$ sur le foncteur gradué $T^*$, et comme $\mathfrak{A}$ est une catégorie *abélienne* on peut définir une *différentielle*

$$d_n : \mathrm{T}^n \to \mathrm{T}^{n+1}$$

par la formule

$$d_n = \sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i \mathrm{T} * d_n^i;$$

cela dit, nous nous proposons de démontrer tout d'abord le résultat suivant : *supposons qu'il existe un homomorphisme de foncteurs*

$$h : \mathrm{T} \circ \mathrm{C} \to \mathrm{T}$$

*vérifiant*

$$h \circ (\mathrm{T} * k) = \text{identité};$$

*alors pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{K}$ *la suite d'objets et d'homomorphismes*

$$0 \to \mathrm{T}(\mathrm{X}) \xrightarrow{\mathrm{T}*k} \mathrm{T}^0(\mathrm{X}) \xrightarrow{d_0} \mathrm{T}^1(\mathrm{X}) \xrightarrow{d_1} \mathrm{T}^2(\mathrm{X}) \to \ldots$$

*est exacte dans la catégorie* $\mathfrak{A}$.

Puisque $\mathrm{T} * k$ admet un inverse à gauche il est clair que $\mathrm{T} * k$ est injectif. Posons maintenant $\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}$ et $d_{-1} = \mathrm{T}*k$; pour établir le résultat annoncé il suffira évidemment de construire des homomorphismes de foncteurs

$$h_n : \mathrm{T}^{n+1} \to \mathrm{T}^n \quad (n \geqslant -1)$$

vérifiant les relations

$$h_n \circ d_n + d_{n-1} \circ h_{n-1} = \text{identité}$$

pour $n \geqslant 0$. Nous allons vérifier que la formule

$$h_n = h * \mathrm{C}^{n+1}$$

convient. Le premier membre de la relation à établir s'écrit en effet

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i h_n \circ (\mathrm{T} * d_n^i) + \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (\mathrm{T} * d_{n-1}^i) \circ h_{n-1}$$
$$= h_n \circ (\mathrm{T} * d_n^0) + \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \left[(\mathrm{T} * d_{n-1}^i) \circ h_{n-1} - h_n \circ (\mathrm{T} * d_n^{i+1})\right]$$

et par conséquent il suffira d'établir les relations

$$h_n \circ (\mathrm{T} * d_n^0) = \text{identité} \qquad (n \geqslant 0)$$
$$(\mathrm{T} * d_{n-1}^i) \circ h_{n-1} = h_n \circ (\mathrm{T} * d_n^{i+1}) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Or on a

$$h_n \circ (\mathrm{T} * d_n^0) = (h * \mathrm{C}^{n+1}) \circ (\mathrm{T} * k * \mathrm{C}^{n+1}) = [h \circ (\mathrm{T} * k)] * \mathrm{C}^{n+1},$$

d'où la première relation. Quant à la seconde elle s'écrit

$$[\mathrm{T} * (\mathrm{C}^i * k * \mathrm{C}^{n-i})] \circ (h * \mathrm{C}^n) = (h * \mathrm{C}^{n+1}) \circ [\mathrm{T} * (\mathrm{C}^{i+1} * k * \mathrm{C}^{n-i})],$$

et se ramène, moyennant les règles (I) à (IV) du n° 1, à

$$(\mathrm{T}^{i-1} * k) \circ (h * \mathrm{C}^i) = (h * \mathrm{C}^{i+1}) \circ (\mathrm{T}^i * k),$$

relation qui résulte aussitôt de la règle (V) du n° 1.

Revenons maintenant à la théorie des faisceaux, en prenant pour $\mathfrak{K}$ la catégorie des faisceaux de *groupes abéliens* sur un espace X, pour C le foncteur

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(\mathrm{X}; \mathcal{A}),$$

et pour $k$ l'homomorphisme canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ déjà utilisé au n° précédent; pour montrer que $\mathcal{F}^*(\mathrm{X}; \mathcal{A})$ est une *résolution* de $\mathcal{A}$ il suffira évidemment d'appliquer le résultat que nous venons d'établir en prenant pour T n'importe quel foncteur de la forme

$$\mathrm{T}_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}(x),$$

à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Tout revient donc à construire pour chaque $x \in \mathrm{X}$ un homomorphisme de foncteurs

$$h_x : \mathrm{T}_x \circ \mathrm{C} \to \mathrm{T}_x$$

vérifiant $h_x \circ [\mathrm{T}_x * k] = \text{identité}$; or $\mathrm{T}_x * k$ n'est autre que l'injection évidente

$$k_x(\mathcal{A}) : \mathcal{A}(x) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{X}; \mathcal{A})(x),$$

déjà utilisée au n° précédent; il suffit alors, en vertu de la relation (*) établie au n° précédent, de définir $h_x$ par la condition d'induire l'application

$$h_x(\mathcal{A}) : \mathcal{C}^0(\mathrm{X}; \mathcal{A})(x) \to \mathcal{A}(x)$$

du n° précédent, pour obtenir un homomorphisme $h_x$ vérifiant la condition requise.

Les méthodes précédentes ne s'appliquent pas seulement en théorie des faisceaux; elles permettent par exemple de retrouver les *complexes standard* de la théorie des algèbres associatives (H. Cartan-S. Eilenberg, *Homological Algebra*, pp. 174-175). Pour cela on part d'une algèbre A sur un anneau commutatif Λ, on prend pour $\mathfrak{K}$ la catégorie des A-bimodules, et pour C le foncteur

$$\mathrm{C(X)} = \mathrm{A} \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{S};$$

on se place au point de vue homologique (ce qui revient à « renverser le sens des flèches » dans les constructions précédentes), de sorte qu'ici

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{A} \underset{\Lambda}{\otimes} \dots \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{A} \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{X}$$

avec $n+1$ facteurs égaux à A. Les homomorphismes $k$ et $p$, *i.e.*

$$k(\mathrm{X}) : \mathrm{A} \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \quad p(\mathrm{X}) : \mathrm{A} \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{X} \to \mathrm{A} \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{A} \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{X},$$

se définissent à l'aide des applications $a \otimes x \to ax$ et $a \otimes x \to a \otimes 1 \otimes x$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'opérateur bord du complexe $F_*(X)$ est bien donné par la formule habituelle. Enfin, pour montrer que $F_*(X)$ est une résolution de X, on applique la méthode que nous avons développée plus haut, en prenant pour $\mathfrak{A}$ la catégorie des A-modules, pour T le foncteur identique $X \to X$ de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{A}$, et pour $h$ l'homomorphisme défini par la formule

$$h(X) : x \to 1 \otimes x.$$

Rappelons que la théorie homologique des algèbres associatives comprend en particulier celle des foncteurs Ext et Tor, l'homologie des groupes, et l'homologie des algèbres de Lie, théories qui sont par conséquent susceptibles d'être exposées à l'aide des *méthodes simpliciales.* Comme celles-ci s'appliquent aussi à la cohomologie — de Čech ou de Grothendieck — à valeurs dans un faisceau, ainsi qu'à tout ce qui se rattache à l'homologie singulière, et à la théorie de l'homotopie, il semble juste de les considérer comme l'un des instruments les plus importants dont on dispose actuellement en Topologie.

# INDEX DES NOTATIONS

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE I. — ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

## Chapitre II. — THÉORIE DES FAISCEAUX