C. R. Acad. Sc., t. 256, p. 1198-1201. Séance du 4 février 1963. Groupe 1

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Catégories doubles et catégories structurées.*
Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Jean Leray.

Définition des catégories structurées; cas plus particulier des catégories doubles, lesquelles admettent pour catégorie quotient une catégorie de quatuors. 1

1. CATÉGORIES DOUBLES :

Définition. — Nous appellerons *catégorie double* une classe $\mathcal{C}$ munie de deux lois de composition, notées . et $\perp$, vérifiant les conditions :

1. ($\mathcal{C}$, .) est une catégorie, notée $\mathcal{C}^{\cdot}$; les unités à droite et à gauche de $f \in \mathcal{C}^{\cdot}$ seront notées $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ respectivement, la classe des unités, $\mathcal{C}^{\cdot}_0$;

2. ($\mathcal{C}$, $\perp$) est une catégorie, notée $\mathcal{C}^{\perp}$; les unités de $f \in \mathcal{C}^{\perp}$ seront notées $\alpha^{\perp}(f)$ et $\beta^{\perp}(f)$, la classe des unités, $C^{\perp}_0$;

3. Les applications α et β (resp. $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$) sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$);

4. Axiome de permutabilité : Si les composés $k.h$, $g.f$, $k \perp g$ et $h \perp f$ sont définis, on a

$$(k.h) \perp (g.f) = (k \perp g).(h \perp f).$$ 2

Soit $\mathcal{C}$ une classe munie de deux lois de composition . et $\perp$ vérifiant les axiomes 1 et 2; considérons les axiomes suivants :

3'. $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $C^{\perp}_0$) est stable relativement à $\perp$ (resp. à .);

4'. Si les composés $k.h$, $g.f$, $k \perp g$ et $h \perp f$ sont définis, alors $(k.h) \perp (g.f)$ et $(k \perp g).(h \perp f)$ sont définis et égaux.

5. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\alpha(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha(f)); \qquad \beta(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\beta(f));$$
$$\alpha(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\alpha(f)). \qquad \alpha^{\perp}(\beta(f)) = \beta(\alpha^{\perp}(f)).$$ 3

PROPOSITION. — *Pour que* ($\mathcal{C}$, ., $\perp$) *soit une catégorie double, il faut et il suffit que les conditions* 1, 2, 3', 4', 5 *soient vérifiées. Dans ce cas,* $\mathcal{C}_0$ (*resp.* $\mathcal{C}^{\cdot}_0$) *est une sous-catégorie de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ (*resp.* $\mathcal{C}^{\perp}$). 4

Une *sous-catégorie double* d'une catégorie double $\mathcal{C}$ est une sous-classe $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ qui est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et de $\mathcal{C}^{\perp}$; alors C' est une catégorie 5
double pour les lois de compositions induites par . et $\perp$.

Définition. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie double; on appelle *idéal à gauche* 6
(resp. *à droite*) de $\mathcal{C}^{\perp}$ une sous-catégorie $I^{\perp}$ de $\mathcal{C}^{\perp}$ telle qu'on ait $\mathcal{C}.I^{\perp} = I^{\perp}$ (resp. $I^{\perp}.\mathcal{C} = I^{\perp}$), où $\mathcal{C}.I^{\perp}$ (resp. $I^{\perp}.\mathcal{C}$) est la classe des composés $f.g$ (resp. $g.f$), $g \in I^{\perp}$ et $f \in \mathcal{C}$. On définit de même un idéal de $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Proposition. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie double; un idéal $\mathrm{I}^{\perp}$ à gauche de $\mathcal{C}^{\perp}$ est une espèce de structures* (¹) *au-dessus de $\mathcal{C}^{\cdot}$ pour la loi de composition : $(f, g) \to f.g$ si, et seulement si, $f.g$ est défini, où $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathrm{I}^{\perp}$. La caté-*
1 *gorie $\mathcal{E}(\mathrm{I}^{\perp})$ des hypermorphismes* (¹) *correspondante est une catégorie double pour les lois de composition :*

$$(f', g').(f, g) = (f'.f, g)$$

si, et seulement si, $g' = f.g$ et

$$(f', g') \perp (f, g) = (f' \perp f, g' \perp g)$$

si, et seulement si, $f' \perp f$ et $g' \perp g$ sont définis.

2. Catégories doubles de quatuors. — Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux catégories ayant même classe d'unités Δ. Soit $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ la classe des quadruplets : (g_2, g_1, f_1, f_2), où $f_i \in \mathcal{C}_i$, $g_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$, tels que :

$$\alpha(f_1) = \alpha(f_2); \qquad \alpha(g_1) = \beta(f_2); \qquad \beta(f_1) = \alpha(g_2); \qquad \beta(g_1) = \beta(g_2).$$

Sur $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, on définit les deux lois de composition :

Multiplication *longitudinale* :

$$(g'_2, g'_1, f'_1, f'_2) \boxed{\,|\,} (g_2, g_1, f_1, f_2) = (g'_2, g'_1 g_1, f'_1 f_1, f_2)$$

si, et seulement si, $f'_2 = g_2$;

Multiplication *latérale* :

$$(g'_2, g'_1, f'_1, f'_2) \boxminus (g_2, g_1, f_1, f_2) = (g'_2 g_2, g'_1, f_1, f'_2 f_2)$$

si, et seulement si, $f'_1 = g_1$.

Proposition. — $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ *est une catégorie double pour les multiplications longitudinale et latérale.*

Supposons $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$; rappelons (¹) qu'un *quatuor* de $\mathcal{C}$ est un élément $(g_2, g_1, f_1, f_2) \in \square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ tel que $g_1 f_2 = g_2 f_1$.

Corollaire. — *La classe $\square\mathcal{C}$ des quatuors de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie double de $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.*

Théorème. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie double; alors $\mathcal{C}^{\cdot}$ admet pour catégorie*
2 *quotient* (¹) *la catégorie longitudinale $\boxed{\,|\,}(\mathcal{C}^{\cdot}_0, \mathcal{C}^{\perp}_0)$, où $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_0$) est munie de sa structure de sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. $\mathcal{C}^{\cdot}$).*

3. Foncteurs vers une catégorie double. — Soient Γ une catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie double; soit $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \Gamma)$ la classe des foncteurs de Γ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Proposition. — $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \Gamma)$ *est une catégorie pour la loi de composition $(\Phi', \Phi) \to \Phi' \perp \Phi$, où $(\Phi' \perp \Phi)(f) = \Phi'(f) \perp \Phi(f)$ si, et seulement si, $\Phi'(f) \perp \Phi(f)$ est défini pour tout $f \in \mathcal{C}$.*

Définition. — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ deux catégories doubles; on appelle *foncteur double* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ une application Φ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}_1$ telle que Φ soit un foncteur de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}_1^{\cdot}$ et un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}_1^{\perp}$. La classe des foncteurs doubles de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ sera notée $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C})$.

Proposition. — *$\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$ et* 1¶
de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$; munie des deux lois de composition induites, $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C})$ est une catégorie double.

Proposition. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories; la catégorie longitudinale $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ des transformations naturelles* (²) *entre foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ s'identifie à la catégorie $\mathcal{F}(\boxed{}\mathcal{C}', \mathcal{C})$, en identifiant la transformation naturelle $(\varphi', \tau, \varphi)$ au foncteur Φ tel que*

$$\Phi(f) = (\varphi'(f), \tau(\beta(f)), \tau(\alpha(f)), \varphi(f))$$

pour tout $f \in \mathcal{C}$.

Par suite, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double, un foncteur Φ d'une
catégorie Γ vers $C^{\cdot}$ peut être considéré comme une transformation natu- 2
relle généralisée de $\alpha^{\perp}\Phi$ vers $\beta^{\perp}\Phi$. Nous verrons une autre généralisation des transformations naturelles (catégorie double des quintettes) dans une publication suivante.

4. Catégories structurées. Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes, contenant avec X toutes ses parties, avec X et X′ le produit $X \times X'$; soit $\mathcal{M}$ la catégorie de toutes les applications de X vers Y, où $X \in \mathcal{M}_0$ et $Y \in \mathcal{M}_0$.
Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{K}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes (¹), $\mathcal{S}$ contenant le 3
groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{K}$; soit $\mathcal{K}_0$ la classe des unités de $\mathcal{K}$: on identifie $h \in \mathcal{K}$ avec $(\beta^{\mathcal{K}}(h), p(h), \alpha^{\mathcal{K}}(h))$.

Définition. — On appelle *catégorie structurée dans $\mathcal{K}$* un couple $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$, 4
où $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une structure de catégorie sur $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_0$, $s \in \mathcal{K}_0$ et $p(s) = \mathcal{C}$, vérifiant les conditions suivantes :

1° Il existe $s_0 \in \mathcal{K}_0$ tel que :

$$p(s_0) = \mathcal{C}_0^{\cdot}, \qquad (s, i_{\mathcal{C}_0^{\cdot}}, s_0) \in \mathcal{K}, \qquad (s_0, \alpha, s) \in \mathcal{K} \qquad \text{et} \qquad (s_0, \beta, s) \in \mathcal{K},$$

où $i_{\mathcal{C}_0^{\cdot}}$ est l'injection canonique de $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$, α et β, les applications source et but dans $\mathcal{C}^{\cdot}$.

2° Il existe un produit $s \times s$ dans $\mathcal{K}$, tel que $p(s \times s) = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$; si K est la sous-classe de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ formée des couples composables, il existe $s' \in \mathcal{K}_0$ tel que

$$p(s') = K \qquad \text{et} \qquad (s \times s, i_K, s') \in \mathcal{K}.$$

3° κ désignant l'application $(g, f) \to g.f$ de K dans $\mathcal{C}$, la relation $(s \times s, i_K, s') \in \mathcal{K}$ entraîne $(s, \kappa, s') \in \mathcal{K}$. 5+

Exemple. — Une catégorie structurée dans $\tilde{\mathcal{T}}$, où $\tilde{\mathcal{T}}$ est la catégorie des topologies, est une catégorie topologique (³).

Théorème. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\bullet}, \mathcal{C}^{\perp})$ *soit une catégorie double, il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}^{\bullet}, \mathcal{C}^{\perp})$ *soit une catégorie structurée dans la catégorie* $\mathcal{F}$ *des foncteurs d'une catégorie vers une autre; dans ce cas,* $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\bullet})$ *est aussi une catégorie structurée dans* $\mathcal{F}$ (la structure sur $\mathcal{C}^{\bullet}$ est $\mathcal{C}^{\perp}$).

(*) Séance du 28 janvier 1963.

(1) *Espèces de structures locales; élargissements de catégories*, Séminaire Top. et Géo. Diff. (Ehresmann), III, Paris, 1961; *Jahres. Deutsch. Math. Ver.*, 60, 1957, p. 49.

(2) *Catégorie des foncteurs types*. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 20, 1960, p. 194.

(3) *Catégories topologiques et catégories différentiables*, Coll. Géo. Diff. Glo., Bruxelles, C.B.R.M., 1959, p. 137.

163.439. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.