1.82?

Paul Zimmermann
(en commun avec Guillaume Melquiond)

Séminaire Caramel, 28 mai 2010

Constante d'Euler-Mascheroni :

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) \approx 0.577.$$

Soit d_k la longueur du plus petit segment de $\mathbb{R}$ qui contienne au moins k points de $\mathbb{Z}$. On a $d_k = k - 1$.

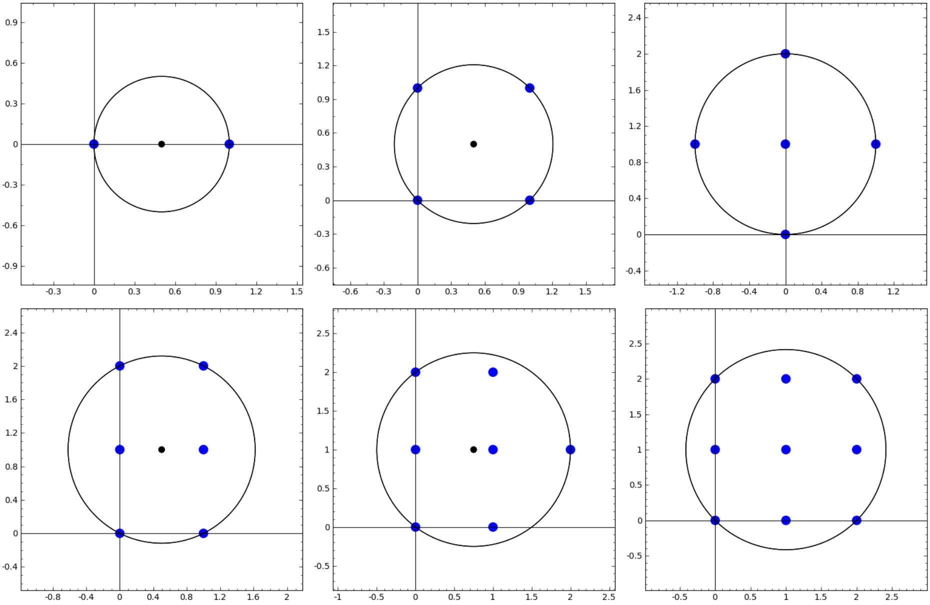
$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{d_k} - \log n \right).$$

La constante δ

Généralisation en deux dimensions :

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\pi r_k^2} - \log n \right)$$

où r_k est le rayon du plus petit disque de $\mathbb{R}^2$ contenant au moins k points de $\mathbb{Z}^2$.


0.9 0.6 0.3 0 -0.3 -0.6 -0.9
-0.3 0 0.3 0.6 0.9 1.2 1.5
1.5 1.2 0.9 0.6 0.3 0 -0.3 -0.6
-0.6 -0.3 0 0.3 0.6 0.9 1.2 1.5
2.4 2 1.6 1.2 0.8 0.4 0 -0.4
-1.2 -0.8 -0.4 0 0.4 0.8 1.2
2.4 2 1.6 1.2 0.8 0.4 0 -0.4
-0.8 -0.4 0 0.4 0.8 1.2 1.6 2
2.5 2 1.5 1 0.5 0 -0.5
-1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5
2.5 2 1.5 1 0.5 0 -0.5
-0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5

Historique

δ introduite par Masser (CRAS, 1980).

Conjecture (Gramain, 1982)

$$\delta = 1.822825...$$

Gramain et Weber (Math. of Comp., 1985) avec 175 heures de calcul sur un 6502 en BASIC :

$$1.811447299 < \delta < 1.897327117.$$

Objectif : calculer la 2e décimale après la virgule...

Borne supérieure

$$r_k < \sqrt{\frac{k-1}{\pi}}.$$

Découle d'un résultat classique de Pólya et Szegö (1976) : si un domaine D du plan d'aire A est compact, alors il existe une translation de D qui contient au moins $\lfloor A \rfloor + 1$ points entiers.

En prenant pour D un disque de rayon $\sqrt{\frac{k-1}{\pi}}$, soit d'aire $k-1$, on a au moins k points par translation.

Bornes inférieures

Pour $k \geq 1$:

$$\frac{\sqrt{\pi(k-1)+4}-2}{\pi} < r_k$$

Pour $k \geq 6$:

$$\frac{\sqrt{\pi(k-6)+2}-\sqrt{2}}{\pi} \leq r_k$$

La deuxième borne est meilleure que la première pour $k \geq 76$.

Existence de la limite

Theorem (Gramain, Masser, 1985)

La suite $\delta_n = \sum_2^n 1/(\pi r_k^2) - \log n$ est croissante et bornée.

En effet, $\delta_{n+1} - \delta_n = 1/(\pi r_{n+1}^2) - \log(1 + 1/n)$. Comme $r_{n+1} < \sqrt{\pi/n}$:

$$\delta_{n+1} - \delta_n > \frac{1}{n} - \log(1 + 1/n) > 0.$$

La borne $r_k > \frac{\sqrt{\pi(k-1)+4}-2}{\pi}$ donne pour $k \geq 38$:

$$\frac{1}{\pi r_k^2} < \frac{1}{k} + \frac{3}{k^{3/2}},$$

ce qui permet de conclure.

Un disque *minimal* D_k est un disque centré en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, contenant au moins k points entiers, et de rayon minimal. Son périmètre est noté Γ_k.

Proposition (Gramain, Weber, 1985)

Pour $k \geq 3$, si Γ_k ne contient pas 3 points entiers, alors Γ_k a un diamètre avec deux points entiers.

On parle alors de *disque exceptionnel* (aucun pour $k \leq 1500$).

Proposition (Gramain, Weber, 1985)

Si Γ_k contient au moins 3 points entiers, alors il admet un triangle inscrit avec sommets entiers et angles $\leq \pi/2$.

Proposition

r_k^2 est rationnel.

Trivial pour les disques exceptionnels ($r_k = m + 1/2$).
On peut supposer qu'un des trois points entiers du bord est l'origine, soit O.
Comme le triangle a des angles $\leq \pi/2$, on peut prendre les deux autres points B et C dans le premier quadrant.
Le centre du cercle circonscrit au triangle (OBC) est (x, y) avec :

$$x = \frac{y_C|B|^2 - y_B|C|^2}{D}, y = \frac{x_B|C|^2 - x_C|B|^2}{D},$$

et

$$D = 2(x_B y_C - x_C y_B), \quad r^2 = \frac{|B|^2|C|^2|B - C|^2}{D^2}$$

Le calcul de Gramain et Weber

1. Calcul exact de r_k^2 jusque $k = 1401$.
2. Encadrement de r_k pour $1401 \leq k \leq 1.364 \cdot 10^7$
3. Borne supérieure $\sqrt{(k-1)/\pi}$ et borne inférieure de Chaix pour $k > 1.364 \cdot 10^7$:

$$k < \pi r^2 + 30.84274723 r^{2/3}$$

qui donne

$$\frac{1}{\pi r_k^2} < \frac{1}{k} + \frac{21.05893628}{k^{5/3}}$$

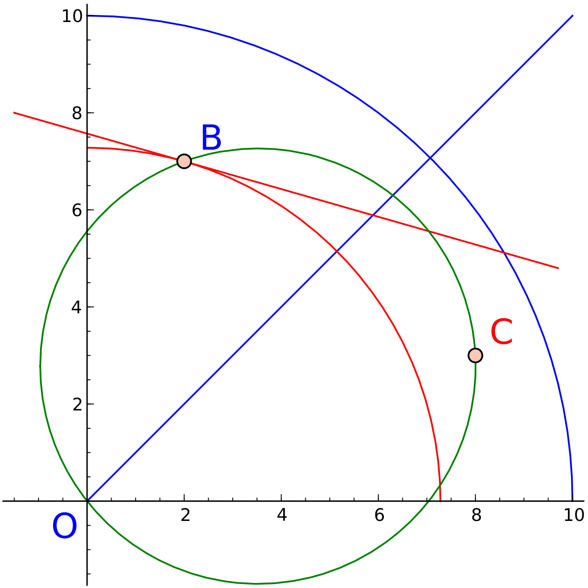
Soit $s_n = \sum_2^n 1/(\pi r_k^2)$.

Lemme

Pour $n \geq 1.364 \cdot 10^7$, *on a*

$$s_n - \log n + \frac{1}{2n} < \delta < s_n - \log(n + \frac{1}{2}) + \frac{31.58840442}{n^{2/3}}$$

Calcul exact de r_k



k	r_k^2
298862	95119.46000432795
298863	95119.46000918466
$\vdots$	$\vdots$
547821	$348725/2$
$\vdots$	$\vdots$
547868	$348725/2$
$\vdots$	$\vdots$
999999	$3920141408851265/12316023458$

Encadrement de r_k : borne inférieure

Méthode de Gramain et Weber : on minore l'aire entre les carrés au bord du disque. Donne une meilleure borne que celles analytiques pour $k \geq 2798$.

Borne de Chaix : meilleure que celle de Gramain et Weber pour $k \geq 13647034$.

Notre méthode : cf prochain transparent.

Borne inférieure pour r_k par bisection et arithmétique d'intervalles

Lemme

Soit une partition de $[0,1]^2$ en rectangles (x,y), où x et y sont des intervalles réels, et r un réel. Si pour tout rectangle (x,y), le nombre de points entiers du disque de rayon r centré en (x,y) est inférieur à k, alors $r < r_k$.

```
n = 0
for u from ceil(x-r) to floor(x+r) do
   s = max(sqrt(r^2 - (u-x)^2))
   n += ceil(y+s) - floor(y-s) + 1
```

Algo : on fait de la bisection sur les coordonnées du centre dans $[0,1]^2$ jusqu'à obtenir une borne inférieure assez fine.

Exemple pour $k = 999999$: $564.174913450156736 9 < r_k$.

Vraie valeur 564.177306337818, borne de Gramain-Weber 563.801436860656 9633.

Borne supérieure pour r_k par bisection

Lemme

Soient x et y deux réels dans $[0, 1]$, et r un réel. Si le nombre de points entiers du disque de rayon r centré en (x, y) est $\geq k$, alors $r_k \leq r$.

Algo : on fait de la bisection sur les coordonnées du centre dans $[0, 1]^2$ jusqu'à obtenir une borne supérieure assez fine.

Exemple pour $k = 999999$:

$$r_k < 564.1819664040237967$$

Vraie valeur 564.177306337818, borne analytique 564.1890193578907429.

Nos résultats (en cours, avec Melquiond)

1. Calcul exact de r_k^2 pour $k < 10^6$ (grâce à Grid5000, en mode *besteffort*) :

$$15.63523662136671 < s_{999999} < 15.63523662136672$$

2. Encadrement de r_k pour $10^6 \leq k < 216771893$:

$$21.0140837 < s_{216771892} < 21.0143684$$

3. Bornes analytiques pour $216771893 \leq k$ (avec lemme) :

$$s_{216771892} - 19.1943562 < \delta < s_{216771892} - 19.1942686$$

D'où :

$$1.8197275 < \delta < 1.8200998.$$