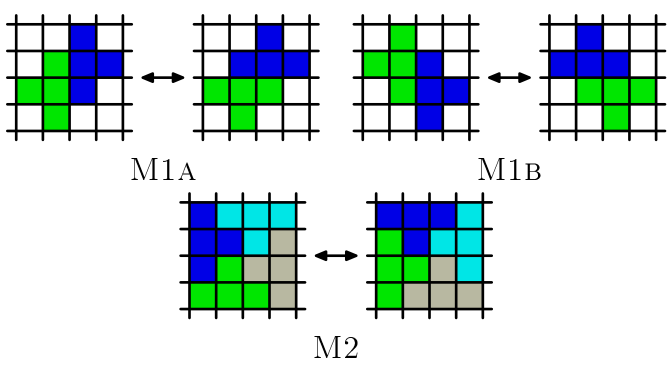
Доказательство гипотезы Пака о системе локальных ходов для замощений прямоугольников фигурами Т-тетромино

Константин Макарычев*
Юрий Макарычев†

Аннотация

В этой работе мы докажем гипотезу Игоря Пака о замощениях односвязной области фигурами тетромино для случая замощений прямоугольника. Проблема была независимо решена в работе Михаила Корна и Игоря Пака [KP].

Гипотеза Пака [Pak]. Любое замощение односвязной области фигурами Т-тетромино можно перевести в любое другое последовательностью локальных ходов следующего вида:



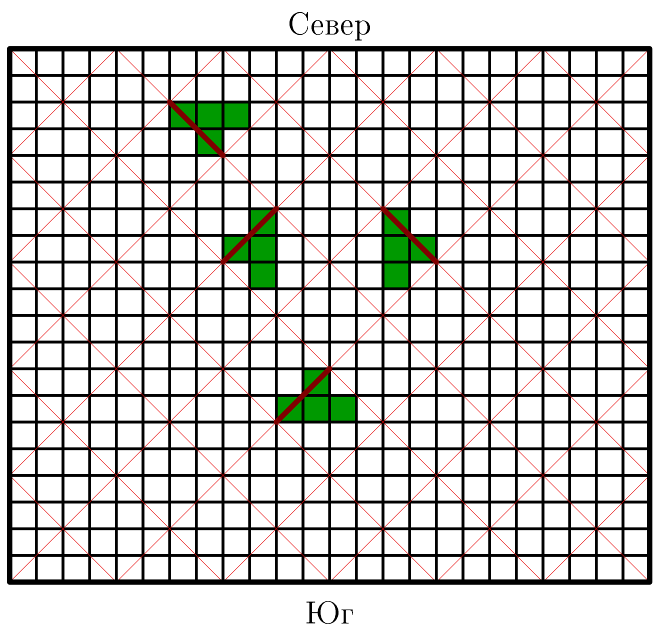
Доказательство состоит из нескольких частей. Сперва мы исследуем произвольные замощения прямоугольника тетромино, затем сведем

*Принстонский университет, kmakaryc@cs.princeton.edu
†Принстонский университет, ymakaryc@cs.princeton.edu

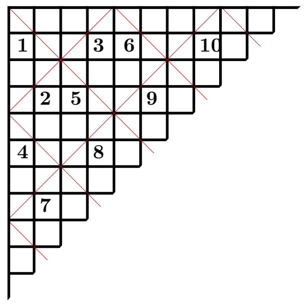
задачу замощения (прямоугольника) к двойственной задаче (six-vertex model). И, наконец, воспользовавшись теоремой [Eloranta] о локальных ходах в six-vertex model, получим требуемый результат.

Для удобства мы будем использовать следующие названия для направлений: *север* (верх), *юг* (низ), *запад* (лево), *восток* (право).

Рассмотрим произвольный прямоугольник $4n \times 4m$ и его произвольное замощение. Проведем в нём диагонали с шагом в 4 клетки (см. рисунок). Таким образом мы разделили прямоугольник на квадраты (наклонённые на 45°). Для краткости будем называть стороны этих квадратов — ребрами. Скажем, что ребро регулярно (в данном замощении), если оно пересекает ровно одно тетромино. На следующем рисунке нарисованы 4 регулярных ребра (красным цветом обозначены ребра, темно-красным — ребра, пересекающие тетромино). Назовем замощение регулярным, если все ребра в этом замощении регулярны. Мы хотим доказать, что все замощения регулярны.



Занумеруем ребра, начиная с северо-западного (верхнего левого) угла, двигаясь с юго-запада на северо-восток:



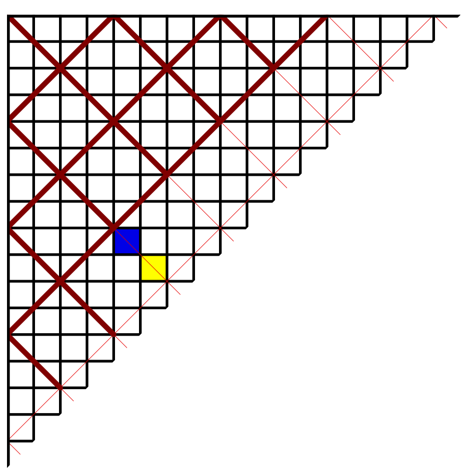
Лемма 1. Пусть P замощение, в котором первые n ребер регулярны, тогда $(n+1)$-ое ребро также регулярно.

Доказательство. Рассмотрим $(n+1)$-ое ребро в замощении P и покажем, что оно регулярно. Для этого предположим противное: $(n+1)$-ое ребро не регулярно, т.е. через две клетки ребра проходят различные тетромино.

Это ребро может быть «вертикальным» — идти с северо-запада на юго-восток или «горизонтальным» идти с юго-запада на северо-восток. Мы рассмотрим эти два случая отдельно.

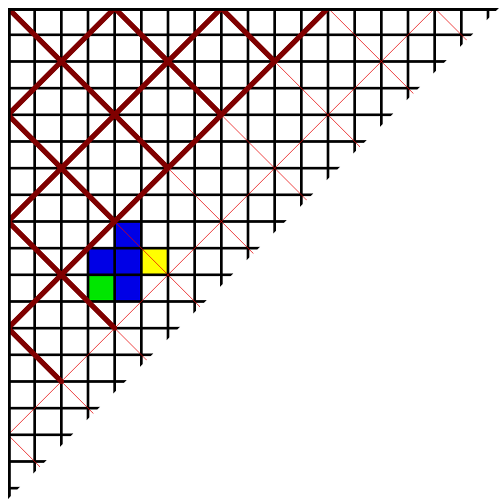
Вертикальное ребро

На следующих рисунках темно-красными жирными линиями выделены первые n ребер (про эти ребра нам известно, что они регулярные), $(n+1)$-ое ребро покрашено в синий и желтые цвета.



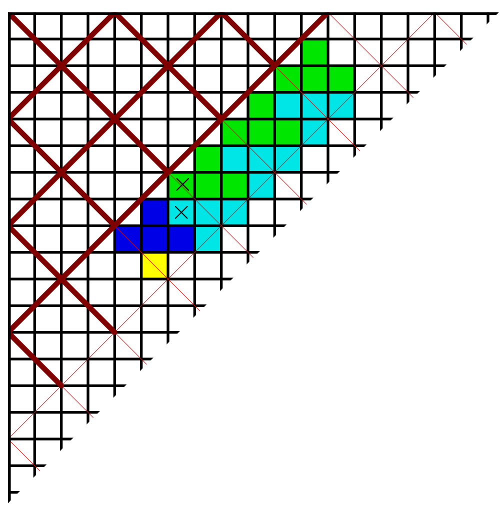
Рассмотрим тетромино, проходящее через синюю клетку (см. рисунок). Оно не пересекает регулярные ребра и не проходит через желтую клетку (вторую клетку ребра). Значит, вообще говоря, возможны следующие варианты:

вариант V1:



В этом случае зелёную клетку не может содержать ни одна фигура тетромино (важно, что на юго-западе от этой клетки регулярное ребро, которое содержит клетки одного и того же тетромино).

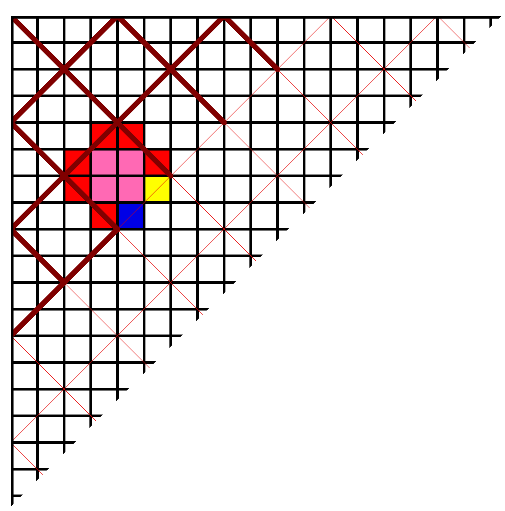
вариант V2:



Если тетромино расположено, как на рисунке выше, посмотрим какие тетромино проходят через клетки, помеченные крестиками. Единственная возможность (учитывая то, что регулярные (жирные) ребра тетромино может пересекать только по двум клеткам) — это тетромино, нарисованные голубым и зелёным цветом. Но зелёное тетромино стоит точно так же, как и синее поэтому, рассматривая тетромино на северо-востоке, мы получаем последовательность голубых и зелёных тетромино. Однако эта последовательность должна пересечь вертикальную или горизонтальную (восточную или северную соответственно) стенку прямоугольника. Значит такое замощение невозможно.

Горизонтальное ребро

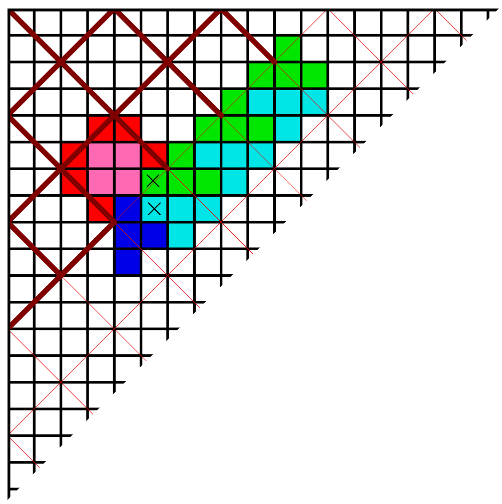
Заметим, что любое тетромино, пересекающее розовый квадрат (см. рисунок), пересекает его по двум клеткам. Действительно, если это тетромино пересекает одно из трёх регулярных ребер красного квадрата, то его две клетки лежат на этом регулярном ребре, а остальные две должны лежать по одну сторону от ребра, т.е. обе лежат в красном квадрате. Т.к. все клетки красного квадрата покрыты каким-нибудь тетромино, а тетромино, проходящие через регулярные ребра, покрывают чётное (0 или 2) число клеток квадрата, то и тетромино, проходящее через четвёртое ребро, должно покрывать чётное число клеток (хотя через четвёртое (нерегулярное) ребро и проходят две тетромино, ясно, что лишь одно из них может пересекать розовый квадрат).



Как и в случае с вертикальным ребром, рассмотрим тетромино проходящую через синюю клетку. Видно, что если оно пересекает розовый квадрат по двум клеткам, то оно содержит и желтую клетку, а значит это ребро регулярно.Таким образом это тетромино не может содержать клеток розового квадрата.

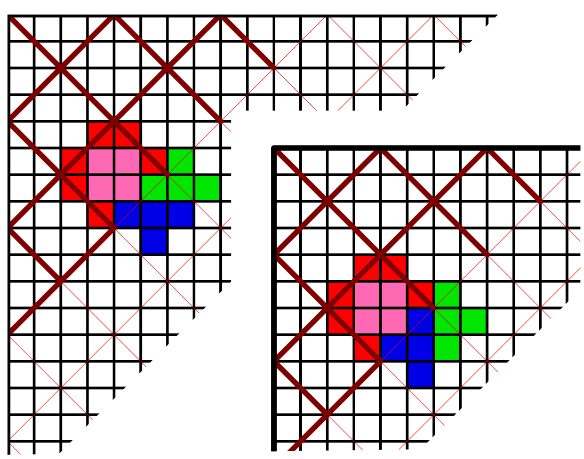
Рассмотрим оставшиеся варианты расположения этого тетромино (их два):

вариант H1:



Если синее тетромино расположено как на рисунке, то мы получаем случай аналогичный V2. Рассматривая тетромино проходящие через клетки, обозначенные крестиками, мы видим, что продолжение замощения на северо-восток определяется однозначно (как на рисунке). Однако такое продолжение должно пересечь северную или восточную границу.

вариант H2:



Если тетромино расположено, как на этом рисунке, то мы сделаем изображенную здесь замену (ход) и придем к случаю Н1. (Т.е. мы изменим наше замощение и по пункту Н1 увидим, что оно невозможно).

Таким образом, мы показали, что $(n+1)$-ое ребро регулярное.

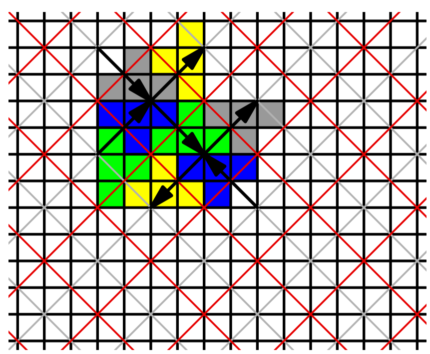
Ч.т.д.

Применяя лемму 1, по индукции, мы получаем:

Теорема 1. Любое замощение прямоугольника $4n \times 4m$ фигурами тетромино — регулярно.

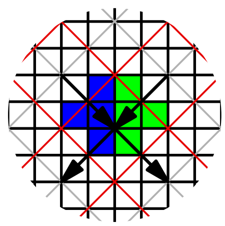
Замечание: из этой теоремы легко следует теорема [Walkup], что фигурами тетромино можно замостить только прямоугольники вида $4n \times 4m$. Действительно, предположим, что прямоугольник $k \times l$ (k или l не делится на 4) можно замостить тетромино. Повторяя это замощение несколько раз, мы можем замостить прямоугольник $4k \times 4l$. К этому замощению мы уже можем применить теорему 1. Т.е. это замощение регулярно. Теперь если мы рассмотрим изначальное замощение, оно будет так же регулярно, но из-за «граничного» эффекта это невозможно — в северо-восточном углу ребром будет отрезана область, которую невозможно замостить.

Теперь посмотрим как покрываются квадраты, ограниченные ребрами. Как мы уже знаем, каждому ребру квадрата соответствует одно тетромино. Оно может лежать в одном из двух смежных квадратов. Мы будем говорить, что оно направлено из квадрата, не содержащего это тетромино, в квадрат, его содержащий. Таким образом каждому замощению соответствует расстановка стрелок на ребрах «двойственной» решётки (она на рисунке нарисована серым цветом) с вершинами в центрах квадратов. Причем в каждую вершину направлено ровно две стрелки.

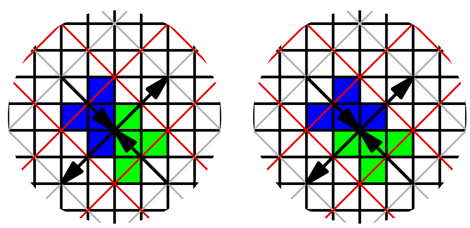


Наоборот, легко видеть, что каждой расстановке стрелок (при которой в каждую вершину двойственной решётки смотрят ровно две стрелки) соответствует какое-то замощение тетромино. Это достаточно проверить локально: нужно показать, что любой комбинации входящих стрелок в центр квадрата соответствует какое-то замощение самого квадрата. Причем всего различных вариантов вхождения стрелок два (с точностью до вращения):

1. Соседние стрелки смотрят во внутрь:



2. Диаметрально противоположные стрелки смотрят во внутрь. Этому варианту соответствуют два замощения (которые переводятся друг в друга преобразованиями M1A и M1B):



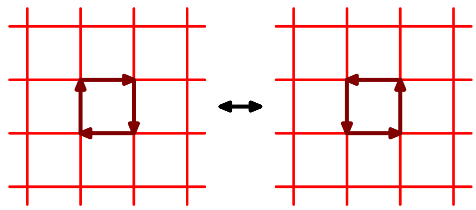
2a 2b

Чтобы задача расстановки стрелок стала эквивалентной задаче замощения фигурами тетромино, отождествим замощения отличающиеся только на преобразования M1A и M1B. Таким образом образом мы свели задачу замощения к следующей задаче:

Задача «Six-vertex model». Дана решётка, на ее ребрах нужно расставить стрелки так, чтобы в каждую вершину входило ровно две.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2 [Eloranta]. Пусть дана решётка в односвязной области. Тогда любую расстановку стрелок можно перевести в любую другую с помощью последовательности локальных ходов, обращающих стрелки цикла вокруг одной клетки.

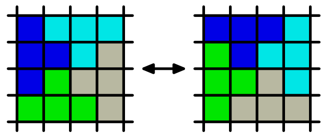


Доказательство. Введем функцию высоты $h(x)$ на клетках решётки. При переходе от одной клетки к другой h будет увеличиваться на 1, если мы пересекаем стрелку идущую слева направо (относительно хода нашего движения), и уменьшаться на 1 в противном случае. Эта функция определена корректно, т.к. если мы пройдем по замкнутому циклу число стрелок, выходящих из цикла, будет равно числу стрелок, входящих в цикл (это следует из того, что в каждую вершину входит ровно две стрелки и выходит столько же, значит верен закон сохранения: в каждый цикл «втекает» столько же стрелок сколько и «вытекает»). На границе положим $h(x)$ равной 0.

Рассмотрим произвольную расстановку стрелок. Приведем её локальными ходами к одному из локальных минимумов (одна расстановка стрелок меньше или равна другой, если функция высоты первой меньше или равна функции высоты второй в каждой клетке). Покажем, что функция высоты полученной раскраски не содержит локальных максимумов. Действительно, если клетка клетка s — локальный максимум, то её должен был бы обходить цикл (т.к. во всех направлениях $h(x)$ убывает), обратив направление этого цикла мы уменьшим значение $h(s)$ на 2 и не изменим значения в других точках. Итак, на границе $h(x)$ равна 0, а внутри области $h(x)$ не имеет локальных максимумов, значит внутри $h(x)$ строго отрицательна. Отсюда, следует, что на границе все стрелки обращены по часовой стрелке. Аналогично, внутри стрелки также образуют концентрические циклы. Таким образом мы показали, что все расстановки стрелок, являющиеся локальными минимумами, одинаковые.

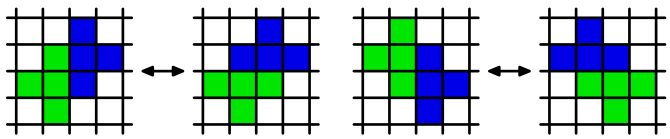
Ч.т.д.

Теперь перейдем от двойственной модели к модели замощения фигурами тетромино. Легко видеть, что обращению цикла соответствует следующий локальный ход:



M2

Таким образом этот ход и два хода, по которым мы отождествили замощения:



M1а M1в

образуют систему локальных ходов для замощения прямоугольника фигурами тетромино.

Итак, гипотеза Пака доказана в частном случае для прямоугольников.

Список литературы

[Eloranta] Kari Eloranta, Diamond Ice, Jour. of Stat. Phys., 1999

[KP] Michael Korn, Igor Pak, Tilings of rectangles with T-tetrominoes, http://www-math.mit.edu/~pak/ttet11.pdf

[Pak] Igor Pak, Tile Invariants: New Horizons, 2001

[Walkup] D. W. Walkup, Covering a rectangle with T-tetrominoes, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 886-988