QUELQUES NOMBRES DE NIVEN-HARSHAD PARTICULIERS

Rene-Louis Clerc

QUELQUES NOMBRES DE NIVEN-HARSHAD PARTICULIERS

René-Louis Clerc (10/10/2023) ((*))

ABSTRACT

Number theory (discrete iteration)
SOME PARTICULAR NIVEN-HARSHAD NUMBERS.
In recreational mathematics, a Niven's number (or Harshad number or multinumeric number) is a non-zero natural number n which is divisible, in a given base, by the sum S_1 of its digits.
Defined in the 1970s, these numbers have since been regularly studied by several authors ([1], [2], ..., [17], [19]).
In base 10, all numbers from 1 to 10 inclusive are Niven, we then have 12, 18, 20, 21, 24, ..., 2022, 2023, 2024, 2025, ..., 142857, ... ([OE1])
A number is said to be completely Niven (or completely Harshad) if it is Niven in all bases; this is only the case for 1, 2, 4, 6.
Generally speaking, in a base b, all numbers from 1 to b and all powers of b are Niven numbers and no prime number strictly greater than b is Niven.
In base 10, the factorials of all integers less than or equal to 431 are Niven numbers, 432! is the smallest factorial not to be a Niven number.
In any basis, there are an infinity of Niven numbers ([19]), which are of the form n = K*S_1, K being any integer.
On the other hand, for a well-specified K, which will be either a given integer, or a given function of the digits of this n, it will be shown, in most of the cases considered here, that there is only one finite number and especially small (of the order of ten) of these particular Niven numbers which, moreover, are small (at most 13 digits).
We consider here various classes of such Niven numbers (almost exclusively) in base 10, first of all the Niven numbers of the form n = m * S_1, m being any integer but given .
We also study the Niven numbers of the form n = S_1*P, P being the product of the non-zero digits of n; we still call them SP numbers ([SPi], i=1 to 9). We will give some results on SP numbers in any base (from 2 to 12).
We then consider numbers equal to the product of a certain power t >= 0 of the sum S_1 of its digits by a certain power r >= 0 of the sum S_2 squares of its digits. We will talk about Niven numbers of type (t, r).
For t = 0 the possible solutions are not necessarily Niven numbers, but allow us to exhibit some remarkable numbers (in the sense of (18]). We can easily show that there is none greater than 1 for r = 1 or 2, but we can find the solution n = 8365427 for r = 3, n = 285610000 for r = 4, ..., results quite compatible with the remarkable numbers reported in [18]. = 203^3 confirms property 8 ([18]) concerning 203, the only number greater than 1 equal to the sum of the squares of the digits of its cube. A modification of the type (0,1) allows us to exhibit the perfect narcissistic numbers ([OE4]) and our perfect r-narcissistic numbers ([18], [20]).
We also extend the types (t, r) by replacing the sum S_2 by the sum S_p of a certain power (p > 2) of the digits of the number n ; we will treat some cases p = 3 of type 3(t, r) and p = 4 of type 4(t,r).
Finally some extensions to $(S_1)^t$ * P, t = 2, 3, 4 or to numbers not necessarily Niven like factorions and primorions (the primorions being to the primorials what factorions are to factorials) are considered; we determine in particular all the factorions and primorions in bases from 2 to 12.
The maps associated with the various numbers considered here are most often pleasant transformations ([18]) and the corresponding iterations therefore have a finite number of attractors (fixed points and cycles of finite order).

INTRODUCTION

En mathématiques récréatives, un nombre de Niven (ou nombre Harshad ou nombre multinumérique) est un entier naturel n non nul qui est divisible, dans une base donnée, par la

somme S_1 de ses chiffres.
Définis dans les années 1970, ces nombres ont depuis été régulièrement étudiés par plusieurs auteurs ([1], [2], ..., [17], [19]).
En base 10, tous les nombres de 1 à 10 inclus sont de Niven, on a ensuite 12, 18, 20, 21, 24, ..., 2022, 2023, 2024, 2025, ..., 142857, ...([OE1])
Un nombre est dit de Niven complet (ou complètement Harshad) s'il est de Niven dans toutes les bases; c'est le cas uniquement de 1, 2, 4, 6.
De manière générale, dans une base b, tous les nombres de 1 à b et toutes les puissances de b sont des nombres de Niven et aucun nombre premier strictement supérieur à b n'est de Niven.
En base 10, les factorielles de tous les entiers inférieurs ou égaux à 431 sont des nombres de Niven, 432! est la plus petite factorielle à ne pas être un nombre de Niven.
Dans toute base, il y a une infinité de nombres de Niven ([19]), qui sont de la forme $n = K*S_1$, K étant un entier quelconque.
En revanche, pour un K bien spécifié, qui sera soit un entier donné, soit une fonction donnée des chiffres de ce n, on montrera, dans la plupart des cas considérés ici, qu'il n'y a qu'un nombre fini et surtout petit (de l'ordre de la dizaine) de ces nombres de Niven particuliers qui, par ailleurs, sont petits (au plus 13 chiffres).
On envisage ici diverses classes de tels nombres de Niven (presque uniquement) en base 10, tout d'abord les nombres de Niven de la forme $n = m * S_1$, m étant un entier quelconque mais donné.
On étudie aussi, les nombres de Niven de la forme $n = S_1*P$, P étant le produit des chiffres non nuls de n; on les appelle encore les nombres SP ([SPi], i=1 à 9). On donnera quelques résultats sur des nombres SP en base quelconque (de 2 à 12).
On considère ensuite des nombres égaux au produit d'une certaine puissance $t >= 0$ de la somme S_1 de ses chiffres par une certaine puissance $r >= 0$ de la somme S_2 des carrés de ses chiffres. On parlera de nombres de Niven de type (t, r).
Pour t = 0 les solutions éventuelles ne sont pas nécessairement des nombres de Niven, mais permettent d'exhiber quelques nombres remarquables (au sens de (18]). On peut montrer facilement qu'il n'y en a aucune supérieure à 1 pour r = 1 ou 2, mais on peut trouver la solution n = 8365427 pour r = 3, n = 285610000 pour r = 4, ..., résultats tout à fait compatibles avec les nombres remarquables signalés dans [18]. Par exemple $8365427 = 203^3$ confirme la propriété 8 ([18]) concernant 203, seul nombre supérieur à 1 égal à la somme des carrés des chiffres de son cube. Une modification du type (0,1) nous permet d'exhiber les nombres narcissiques parfaits ([OE4]) et nos nombres r-narcissiques parfaits ([18], [20]).
On étend aussi les types (t, r) en remplaçant la somme S_2 par la somme S_p d'une certaine puissance (p > 2) des chiffres du nombre n; on traitera quelques cas p = 3 de type 3(t, r) et p = 4 de type 4(t,r).
Enfin quelques extensions à $(S_1)^t * P$, t = 2, 3, 4 ou à des nombres non nécessairement Niven comme factorions et primorions (les primorions étant aux primorielles ce que sont les factorions aux factorielles) sont envisagées; on détermine en particulier tous les factorions et primorions en base de 2 à 12.
Les applications associées aux divers nombres considérés ici sont le plus souvent des transformations agréables ([18]) et les itérations correspondantes possèdent donc un nombre fini d'attracteurs (points fixes et cycles d'ordre fini).

0 - 1 - NOTATIONS
Etant donné un nombre n à k chiffres (k > 0), on notera:
$n = \sum_{i=1}^{i=k} a_i \, 10^{k-i}$, $a_1 > 0$, $S_p(n) = \sum_{i=1}^{i=k} a_i^p$, $p >= 1$, $P(n) = \prod_{i=1}^{i=k} a_i$,
et pour un couple (t,r) donné, $t >= 0$, $r >= 0$,
$Z_p(n) = (S_1(n))^t*(S_p(n))^r$, $p >= 2$.
Les applications S_p, pour $p >= 1$ et fini, ont été définies dans [18] (où elles étaient notées T_p) comme des transformations agréables, c'est-à-dire des transformations de N dans N partout convergentes et possédant un nombre fini d'attracteurs (points fixes finis et cycles d'ordre fini).
Observons bien que S_p, Z_p et P sont des fonctions des chiffres a_i du nombre n et sont indépendantes de l'ordre de ces chiffres; elles caractérisent donc une famille de nombres constitués des mêmes chiffres (dans un ordre quelconque mais sans jamais un zéro initial). Parmi les entiers n à k chiffres, on appellera n_0 le plus petit et n_m le plus grand ($n_0 = 10^{k-1}$, $n_m = 10^k-1$).

0 - 2 - RESULTATS NUMERIQUES
La grande majorité des calculs ont été effectués jusqu'à des nombres à 11 chiffres inclus (toujours au moins 10 chiffres et quelquefois jusqu'à 13 chiffres), ce qui a été suffisant pour démontrer toutes les propriétés de 1 à 19. Pour les 7 conjectures (très probables), il reste à les confirmer pour des nombres à 12 chiffres et plus (maximum 17). On a utilisé des moyens numériques assez standards: du PHP en ligne, le logiciel de calcul PARI/GP et le compilateur Python (et son implémentation PyPy) en ligne sous DOS.
Diverses simulations numériques en ligne sont possibles sur nombres de Niven de type (t, r) et sur la série des itérateurs pour nos divers nombres de Niven particuliers iterS1S2 .

0 - 3 - DEMONSTRATION GENERALE (DG)
L'application sous-jacente à chacun de nos divers nombres de Niven (ou autres) est de la forme: n ---> f(n), f étant une fonction des seuls k chiffres a_i, i = 1 à k, de n.
Il en résulte que tous les nombres possédant les mêmes chiffres (dans n'importe quel ordre, mais sans débuter par un zéro) auront la même image par f (et le même nombre de chiffres).
Un point fixe n > 1 de cette transformation doit être tel que n = f(n) et donc ce n doit vérifier (en base 10)
$n_0 < n < f(n_m)$, $n_0 = 10^{k-1}$, $n_m = 10^k-1$
(inégalités strictes puisque n_0 = n ne donnera au mieux que la solution triviale 1, et n = $f(n_m)$ sera impossible car $f(n_m)$ sera toujours soit strictement supérieur soit strictement inférieur à n_m).
Si l'on montre qu'il existe un k_0 fini tel que pour tout k >= k_0 on ait $10^{k-1} > f(n_m)$, on peut affirmer qu'il n'existe pas de point fixe à plus de (k_0-1) chiffres) et donc qu'il y a un nombre fini de tels points fixes.
Un tel k_0 existera toujours dans nos divers cas étudiés parce qu'une puissance de 10 croit toujours plus vite qu'une puissance de 9 (même multipliée par un facteur k^r, r petit); pour le démontrer et le calculer, on peut considérer la fonction F(k) = $f(n_m)$ - n_0 dans R et vérifier que sa dérivée s'annule toujours pour une certaine valeur positive finie (plus grande que 1) dont l'entier immédiatement supérieur sera notre k_0.
La détermination des solutions pour des n de 1 à (k_0-1) chiffres donne donc tous les points fixes de l'application (et donc tous les nombres de Niven correspondants quand il s'agit de ceux-ci). Même lorsque cette détermination n'est pas complète (ou pas possible), on est assuré d'un nombre fini de points fixes.
De nombreuses propriétés énoncées plus bas seront établies, au moins partiellement, par ce type de démonstration.

1 - LES NOMBRES DE NIVEN CLASSIQUES.
Les nombres de Niven-Harshad classiques sont tous les nombres divisibles par la somme de leurs chiffres dans une base donnée; ils sont faciles à exhiber.
En base 10, les plus petits nombres de Niven sont: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, ...
Ces nombres sont étudiés depuis les années 1970 ([1], [2], [3], [6], [8], [11]) avec en particulier la détermination de tels entiers consécutifs ([5], [6], [7]) ou de la densité de ceux qui sont inférieurs ou égaux à une certaine borne ([15]); plus récemment ([17]), il a été montré qu'en base factorielle, il existe des suites d'au plus 4 nombres de Niven (et donc jamais avec 5 ou plus)...
Si dans toute base on sait ([19]) qu'il existe une infinité de nombres de Niven (soit une infinité d'entiers X divisibles par la somme S_1 des chiffres de X), pour tout K entier positif donné, il n'existe pas toujours de X > 0 tel que X = K * S_1; c'est ce problème que nous allons envisager avec des K qui seront, soit un entier donné, soit surtout une certaine fonction donnée des chiffres de n.

2 - LES NOMBRES DE NIVEN n = m * S_1, m entier donné.
(on note ici l'entier K, qui devient donné, par m).
Les applications associées seront notées f_m: n --> $f_m(n)$ = m * S_1.
Les éventuelles solutions (nombres de Niven) n à r chiffres, pour un m à k chiffres doivent vérifier (cf. DG)

$10^{r-1} <= n <= 9rm$
et il existera toujours un $m_0(r)$ tel que pour m < m_0 il n'y ait pas de solution à r chiffres; pour ces m il pourra y avoir des solutions n à strictement moins de r chiffres, pour les autres m des solutions à r chiffres (au moins) seront possibles.
On peut dire encore que dès que m est suffisamment petit pour que $9rm < 10^{r-1}$ il n'y aura pas de solution à r chiffres et plus; notons r_0 ce plus petit r.
Tous les entiers des attracteurs des f_m correspondants auront strictement moins de r_0 chiffres.
Pour tout m fini, il existe donc toujours un nombre fini de solutions (points fixes de f_m mais aussi cycles) car l'ensemble des entiers à un certain nombre p de chiffres est fini ($10^p - 10^{p-1}$).
Le calcul numérique jusqu'à des nombres à r_0 - 1 chiffres nous fournira donc toutes les solutions possibles.
En se plaçant pour k <= k_0 (ou r <= r_0), si m est un nombre à k chiffres, les éventuelles solutions seront des nombres à k chiffres pour $S_1 = 1$ ou $m = 10^{k-1}$, et des nombres à k+1 ou k+2 chiffres dans les autres cas.
Pour m = 1, sachant que l'on a toujours n > = S_1 (égalité si n possède 1 seul chiffre), seuls les nombres de 1 à 9 seront solutions.
Pour certains m > 1 il n'y a pas de solution n; par exemple dans [0, 200], c'est le cas de m = 62, 63, 65, 75, 84, 95, 161, 173, 195, mais aussi de 716 ou 945 ...
Dans ces cas, l'application associée aura au moins un cycle d'ordre deux.
Comparons m = 61 et m = 62 ou 63: on a $r_0 = 5$ pour les 3 cas, ce qui donne exactement 3 nombres de Niven (points fixes 732, 915 et 1098) pour 61 et au moins le cycle C_2(558, 1116) pour 62, et au moins le cycle C_2(567, 1134) pour 63, avec tous les entiers des attracteurs de strictement moins de 5 chiffres pour ces trois cas.
On a aussi le cycle C_2(1755, 3510) pour m = 195 ($r_0 = 5$), C_2(12888, 19332) pour m = 716 ($r_0 = 6$) et C_2(8505, 17010) pour m = 945 ($r_0 = 6$).
Pour m = 88 ($r_0 = 5$), il vient les seuls nombres de Niven 1056, 1584, 1848, pour m = 2023 ($r_0 = 7$), on obtient les seules solutions 30345, 36414, 42483, 48552, 66759,78897.
Avec m = 1237897 ($r_0 = 10$), on obtient, comme seules solutions: 23520043, 32185322, 33423219, 34661116, 37136910, 39612704, 43326395, 44564292, 45802189, 49515880, 50753777, 51991674, 54467468. Pour m = 12453 ($r_0 = 7$), il y aura la seule solution 224154, et pour m = 4572 ($r_0 = 7$), il n'y aura aucun nombre de Niven (mais au moins le cycle C_2(82296, 123444)).
Les transformations f_m, pour tout m fini, sont donc des transformation agréables [18].

3 - LES NOMBRES DE NIVEN n = S_1 * P (nombres SP).
Il s'agit ici du classique problème SP avec ses deux variantes auxquelles sont associées de nombreux travaux ([SPi], i = 1 à 9).
Le produit P sera construit ici sur les seuls chiffres non nuls de n, qui peut donc avoir 1 ou plusieurs 0 à condition que ce ne soit pas son premier chiffre. Suivant les auteurs on fait comme ici ([OE3]), ou on exclue le chiffre 0 des nombres SP ([OE2]); on pourra alors parler, dans ce second cas, des nombres SP*.
Les nombres divisibles par P sont en nombre infini:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 24,...,115, 120, 128, ..., 1008, 1010, 1011, ...
Les nombres de Niven divisibles par P (c'est-à-dire les nombres divisibles par S_1 et par P) sont aussi en nombre infini.
En revanche les nombres SP sont en nombre fini (propriété 1, plus bas). Toutes les solutions parmi les nombres d'au plus 10 chiffres sont facilement obtenues numériquement: 1, 135, 144, 1088. En particulier il n'y a en pas qui ont entre 5 et 10 chiffres, bornes incluses; on va montrer que les solutions précédentes sont les seules.
Notons SP(n) l'image de l'application qui associe, dans N*, à n le produit S_1 * P des somme et produit de ses chiffres.
Un n (> 1) solution à k chiffres doit être encadré par le plus petit nombre à k chiffres n_0 et par l'image par SP du plus grand nombre n_m à k chiffres:
$10^{k-1} < n < 9^{k+1}k$ (inégalités strictes, car SP(n_0) = 1 pour tout k, et SP(n_m) est toujours différent de n_m, puisqu'il possède au moins un chiffre différent de 9).

En considérant la fonction $F(k) = 9^{k+1}k - 10^{k-1}$ dans R, on obtient que sa dérivée s'annule pour la valeur réelle positive 84,416. On peut ainsi vérifier que jusqu'à k = 84, on a $10^{k-1} < 9^{k+1}k$, mais qu'à partir de k = 85 (et au-dessus) il vient $10^{k-1} > 9^{k+1}k$. On en conclut qu'il n'existe pas de nombre SP à plus de 84 chiffres; donc il n'existe qu'un nombre fini de nombres SP et ils ont tous au plus 84 chiffres (résultat obtenu par plusieurs auteurs par diverses démonstrations plus ou moins longues [SPi]).
- PROPRIETE 1.
Il n'existe, en base 10, qu'un nombre fini de nombres SP et ils ont tous au plus 84 chiffres.
Il faut donc chercher des solutions éventuelles, de plus de 10 chiffres, dans l'ensemble fini N_{84} des nombres d'au plus 84 chiffres.
Reprenons l'application SP de N* dans N*: n --> S_1 * P
Pour tout n, SP(n) décroit de $9^{k+1}k$ à 1 quand S(n) décroit de 9k à 1.
Pour tout n < n_m, on aura SP(n) < SP(n_m) (les S_1 et P de n étant toujours strictement inférieurs à ceux de n_m); SP(n_m) ayant au plus k+2 chiffres (on montre facilement, au plus k+2 jusqu'à k = 31 et au plus k+1 pour k >= 32), SP(n) aura au plus k+2 chiffres.
Il est facile de vérifier que pour tout k <= 59, on a $9^{k+1}k > 10^k$-1 et donc qu'alors, SP(n_m) > n_m; en revanche, pour tout k >= 60 on a $9^{k+1}k < 10^k$-1 et donc SP(n_m) < n_m.
Il en résulte bien en particulier que n_m ne peut jamais être point fixe.
Pour tout n avec k >= 60, on peut vérifier que SP(n) < n et donc il n'existe pas de nombre SP de 60 chiffres ou plus.
Par ailleurs (toujours pour k >= 60), le nombre de chiffres de $9^{k+1}k$ est inférieur ou égal à k et devient très vite, pour k croissant, strictement inférieur à k.
Pour tout k >= 60, on en déduit facilement donc que pour tout r >= 2 et tout n <= n_m, $(SP)^r(n)$ < SP(n_m) < n_m, tout itéré $(SP)^r(n)$ ayant au plus k chiffres, et d'après le résultat précédent, au plus strictement moins de k chiffres, ce qui entraîne la convergence vers un attracteur d'éléments strictement inférieurs à n_m.
Pour les nombres SP* (chiffre 0 toujours exclu), il a été démontré par D.Wilson (2003) qu'il n'y a pas d'autre solution (que 1, 135, 144); en écrivant $P = 2^a3^b5^c7^d$, et en excluant la divisibilité de P par 10 (qui donnerait un n terminé par 0, soit S_1*P = 0), il lui a suffit de considérer numériquement les deux seuls cas $P = 2^a5^c7^d$ et $P = 3^b5^c7^d$ ce qui lui a permis de conclure qu'il n'y a pas d'autre SP*.
Il reste alors à envisager uniquement des n avec au moins un chiffre 0 (non initial), ce qui conduit à SP(n_m) = 9^k(k - 1) et permet d'obtenir que pour k >= k_0 (= 61) il n'y a pas de nouveau SP avec au moins un 0.
La recherche est dont restreinte (k = 60 ayant été exclu plus haut) à [10^{11}, 10^{60}[pour les seuls n de cet intervalle avec au moins un chiffre nul (non initial).
Pour k assez grand mais < 60, SP(n_m) possède (au moins) k+1 chiffres, mais surtout il possède nécessairement au moins un chiffre différent de 9 et son itéré SP^2(n_m) sera plus petit que n_m, avec strictement moins de k+1 chiffres, l'application SP^2 = SP o SP étant décroissante pour des nombres à plus de 10 chiffres. Tous les n avec k > 10 ont une image par SP^2 d'au plus k chiffres et on aura toujours SP^2(n) < n.
Dès la deuxième itération de SP^2 il y a décroissance jusqu'à des nombres de moins de 10 chiffres puis convergence.
On peut facilement vérifier numériquement que l'itération par SP de tout entier de [1, 10^{10}] est très rapidement et toujours convergente vers l'un des 6 seuls attracteurs suivants, dont les éléments n'ont pas plus de 4 chiffres (ils sont dans l'intervalle de convergence I_{cv} = [1, 10^4[):
4 points fixes: 1, 135, 144, 1088
un cycle d'ordre 2, C_2(3456, 6480)
un cycle d'ordre 3, C_3(72, 126, 108)
Dès que l'itération de l'application SP a une image dans I_{cv} la convergence est réalisée vers l'un des seuls attracteurs précédents.
- PROPRIETE 2.

Il n'existe, en base 10, que 4 nombres SP: 1, 135, 144, 1088. L'itération de l'application associée est partout convergente vers un de ces points fixes ou vers un des cycles C_2(3456, 6480), C_3(72, 126, 108), ce qui fait de l'application SP une transformation agréable.
REMARQUE 1: quelques extensions à $(S_1)^t * P$, $t > 1$.
Le k_0 sera ici de plus en plus grand, mais son existence assurera toujours le caractère fini de l'ensemble des solutions correspondantes.
- Cas $n = (S_1)^2 * P$.
Ici pour $k >= k_0 = 160$, on a $10^{k-1} > 9^{k+2}k^2$, ce qui assure le caractère fini de l'ensemble de tels nombres, qui ont au plus 159 chiffres.
Parmi les nombres à 10 chiffres au plus, on obtient comme solutions:
1, 51840, 62208.
- Cas $n = (S_1)^3 * P$.
Ici pour $k >= k_0 = 241$, on a $10^{k-1} > 9^{k+3}k^3$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de solutions avec au plus 240 chiffres.
Parmi les nombres à 10 chiffres au plus, on obtient comme solutions:
1, 5120.
L'itération associée a aussi des cycles comme C_2(1289945088, 261213880320), C_2(1881169920, 5668704000).
- Cas $n = (S_1)^4 * P$.
Ici pour $k >= k_0 = 325$, on a $10^{k-1} > 9^{k+4}k^4$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de solutions avec au plus 324 chiffres.
Parmi les nombres à 10 chiffres au plus, on obtient la seule solution triviale 1.
L'itération associée a aussi au moins un cycle C_{20}(1371944277043200, ..., 42128574618009600).
- REMARQUE 2: nombres SP en base b quelconque ([19], [SP4], [SP6], [SP7]).
Un nombre SP en base b sera un entier n (base 10) qui, converti en n(b) (base b), est tel que SP(n(b)) = n.
Une solution n à k chiffres, en base b, doit vérifier (b^{k-1} étant le plus petit terme en base b, exprimé en base 10)
$b^{k-1} < n < k*(b-1)^{k+1}$
On peut vérifier que pour tout b, il existe un k_0 au-delà duquel il n'existe pas de solution (la borne inférieure devenant plus grande que la borne supérieure). Par exemple pour b = 7, on aura des solutions uniquement avec au plus 49 chiffres.
Citons aussi la borne supérieure finie du nombre possible de chiffres des solutions, établie dans [SP6] et améliorée dans [SP7], $M_b = 2b(b-1)(b^2-2b)+1$ ($M_2 = 1$, $M_3 = 13$, $M_4 = 49$, ..., $M_7 = 421$, ..., $M_{10} = 1441$, ...); elle croit assez vite mais elle existe toujours, pour tout b.
On peut donc étendre la propriété 1.
- PROPRIETE 1'.
Il n'existe, pour toute base, qu'un nombre fini de nombres SP.
En base 2, 3 et 6 on a la seule solution triviale 1.
Avec des calculs dans l'intervalle $[1,10^{10}]$, on obtient comme solutions pour les autres bases jusqu'à b = 12 (les résultats sont donnés en base b, respectivement en base 10):
1, 12, 3303 (1, 6, 243) en base b = 4;
1, 341 (1, 96) en base 5;
1, 22, 242, 505, 1254, 2343, 116655, 346236, 424644 (1,16,128,250,480,864,21600,62208,73728) en base 7;
1, 660 (1, 432) en base 8;
1, 13, 2086, 281876, 724856, 7487248 (1,12,1536,172032,430080,4014080) en base 9;
1, 253, 419, 2189, 7634, 82974 (1,300,504,2880,10080,120960) en base 11;
1, 128, 173, 353, 40A8 (1,176,231,495,7040) en base 12.
Notons aussi que la plupart des itérations associées ont au moins un cycle, que l'on exprime en base b (respectivement en base 10):
C_2(121, 22) (16, 8), C_2(4, 2) (11, 2) pour b = 3;
C_2(31, 22) (16, 12) pour b = 5;
C_3(50, 41, 32) (30, 25, 20) pour b = 6;

C_2(1155, 606) (432, 300) pour b = 7;
C_2(20, 4) (16, 4), C_2(106, 52) (70, 42) pour b = 8;
C_2(3850, 2563) (2880, 1920), C_3(143, 116,53) (120, 96, 48) pour b = 9;
C_2(181, 73) (210, 80) pour b = 11;
C_9(2230, 70, 41, 18, 60, 30, 9, 69, 576) (3780, 84, 49, 20, 72, 36, 9, 81, 810) pour b = 12.

4 - LES NOMBRES DE NIVEN de type (t, r).
On cherche des nombres n = Z_2(n), avec
$Z_2(n) = (S_1(n))^t*(S_2(n))^r$, t >= 0, r >= 0.
Pour alléger on écrira Z pour Z_2.
4 - 1 - Les cas t = 0.
Ces nombres ne sont plus nécessairement des nombres de Niven mais permettent de trouver des nombres remarquables associés à des transformations agréables ([18]).
Pour r = 1 et 2, il n'y a que la solution triviale 1.
Pour r = 3 et 4, ce cas t = 0 établit une nette connexion avec les nombres remarquables définis dans [18]:
m point fixe de x-->$(S_2(x))^r$ (ici) est équivalent à:
n point fixe de x-->$S_2(x^r)$ (dans [18])
et il vient m = n^r.
Pour r = 3, on a le couple n = 203 et m = 203^3 (= 8365427) (propriété 8 de [18]).
Pour r = 4, on a le couple n = 130 et m = 130^4 (= 285610000) et le couple n = 235, m = 235^4 (= 3049800625), d'où deux nouveaux nombres remarquables au sens de [18].
- PROPRIETE 3.
130 est le plus petit nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 4.
- PROPRIETE 3'.
235 est égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 4.
Pour ce cas (0, 4) on a Z(max) < 10^{k-1} dès que k >= 14 et les solutions ont donc au plus 13 chiffres.
Jusqu'à 10 chiffres inclus on obtient 3 points fixes (non Niven bien sûr), 1, 285610000, 3049800625.
Pour le cas (0, 3), les éventuelles solutions ont au plus 9 chiffres, d'où les seuls points fixes (non Niven), 1, 8365427.
- RELATIONS avec les NOMBRES NARCISSIQUES PARFAITS et R-NARCISSIQUES PARFAITS (§3 de [18], [20]) (nombres non nécessairement Niven)
On considère le type (0, 1), dans lequel on remplace S_2 par les sommes S_p des puissances p > 2 des chiffres de n.
Les solutions (n = S_p(n)) à p chiffres définissent les classiques nombres narcissiques parfaits ou ppdi ou nombres de Armstrong ([OE4]).
Par exemple, les solutions à 3 chiffres du cas p = 3 donnent tous les nombres narcissiques parfaits d'ordre 3: 153,370,371,407.
Les solutions à 4 chiffres pour p = 4 donnent tous les nombres narcissiques parfaits d'ordre 4 : 1634, 8208, 9474.
Les solutions à 5 chiffres pour p = 5 donnent tous les nombres narcissiques parfaits d'ordre 5: 54748, 92727, 93084.
La solution à 6 chiffres pour p = 6 donne le seul nombre narcissique parfait d'ordre 6: 548834.
....
Les solutions à 9 chiffres pour p = 9 donnent tous les nombres narcissiques parfaits d'ordre 9: 146511208, 472335975, 534494836, 912985153 .
...
Observons que certains de ces ppdi sont aussi des nombres de Niven, comme 1 à 9, mais aussi 153, 370, 407, 8208, 9926315, 88593477, 472335975, 534494836, ...
Appliquons maintenant S_p, non pas à n mais à une puissance (>1) de n.
Rappelons qu'un nombre r-narcissique parfait ou rppdi ([18], [20]) est un entier n (> 1) à p chiffres dont la puissance r > 1 (r = 1 correspondant aux classiques ppdi précédents) est telle que la somme des puissances p de tous ses chiffres est égale à ce nombre n.
Alors qu'un ppdi à p chiffres est solution de n = S_p(n), un rppdi à p chiffres est solution de n =

$S_p(n^r)$ pour r > 1 (ce r n'a rien à voir avec celui du type (t, r)).
Un rppdi est encore un point fixe à p chiffres de la transformation S_p^r
n ---> $S_p^r(n) = S_p(n^r)$
On a montré dans [18] que ces transformations S_p^r sont agréables (voir démonstration ou [20]), c'est-à-dire sont partout convergentes et possèdent un nombre fini d'attracteurs et en particulier un nombre fini de points fixes à p chiffres (observons que S_p^r possède un nombre fini de points fixes dont certains ont exactement p chiffres, cf. Remarque 3 plus bas). Il y a donc un nombre fini de rppdi, chacun de ces nombres étant défini par un unique r supérieur à 1; il pourrait cependant théoriquement exister des nombres r-narcissiques pour plusieurs valeurs différentes de r (mais on peut raisonnablement conjecturer qu'il n'en est rien, compte tenu de la croissance des fonctions puissances).
Signalons que le plus grand rppdi qui est aussi un nombre de Niven est 38998 (les plus petits rppdi qui sont aussi Niven étant 7, 8, 9, 180). Les rppdi supérieurs (connus) ne sont pas des nombres de Niven.
A ce propos, nous avons déterminé 4 nouveaux rppdi (cf. les 10 rppdi, plus grands que 1, exhibés dans [18] version 3), dont 749387107 (r = 4) et 167535050 (r = 3), qui sont les plus grands actuels (et les seuls à 9 chiffres) et aussi montré qu'il n'existe pas de rppdi à 8 chiffres. Les deux autres nouveaux sont 726191 et 7491889 avec r = 2 (et non pas r = 3 comme les plus grands à 7 chiffres donnés dans [18] version 3). Sans compter le trivial 1 (pour tout r), on a donc déterminé, pour le moment, 14 rppdi ([18] version 4, [20]), qui sont les seuls à strictement moins de 10 chiffres.
Les nombres r-narcissiques parfaits ou rppdi ([20]) sont l'extension naturelle des nombres narcissiques parfaits ou ppdi ([OE4]), le cas r = 1 des rppdi s'identifiant aux ppdi.
Pour les 14 rppdi calculés (nombres de 1 à 9 chiffres) plus grands que 1, le r (> 1) correspondant est unique; seule la solution triviale 1 est r-narcissique pour tout r. Le plus grand rppdi actuellemnt connu et calculé est 749387107(4).
On notera par exemple 180(6) pour indiquer que 180 est 6-narcissique.
- PROPRIETE 4.
Il existe un nombre fini de nombres r-narcissiqes parfaits.
Les 14 plus petits nombres r-narcissiques parfaits (r >= 2) plus grands que 1 sont:
7(4), 8(3), 9(2),
180(6), 205(2),
38998(2), 45994(2), 89080(2),
726191(2),
5540343(3), 7491889(2), 8690141(3),
167535050(3), 749387107(4).
Dans cette liste seuls 7 et 726191 sont des nombres premiers.
- REMARQUE 3: exemples de points fixes de S_p^r.
On observera que si les transformations S_p^r, p >= 1, r >= 2, ont de nombreux points fixes à strictement plus de p chiffres, elles en ont assez peu d'exactement p chiffres...
S_3^6 a le nombre 6-narcissique 180 mais aussi le point fixe 3172;
S_5^2 a les 3 nombres 2-narcissiques 38998, 45994, 89080 mais aussi les points fixes 128230 et 244353;
S_5^3 n'a pas de nombre 3-narcissique à 5 chiffres, mais les points fixes 137023, 163451, 192412, 233722;
S_3^4 n'a pas de nombre 4-narcissique à 3 chiffres, mais le point fixe 2110;
S_2^4 n'a pas de nombre 4-narcissique à 2 chiffres, mais les points fixes 130 et 225 ...

4 - 2 - Les cas t = 1.
- Cas du type (1, 1).
On cherche donc des solutions pour n = Z, avec Z = S_1*S_2.
Puisque Z(max) = 9k*(k*9^2)=9^3*k^2, on peut montrer que
pour k >=6, $9^3*k^2 < 10^3*k^2 < 10^{k-1}$(plus petit nombre à k chiffres), soit $k^2 < 10^{k-4}$ et donc il n'existe pas de solution à 6 chiffres ou plus.
Le calcul numérique donne facilement les 7 seules solutions.
- PROPRIETE 5.

Il n'existe que 7 nombres de Niven de type (1,1): 1, 133, 315, 803, 1148, 1547, 2196.
L'application n --> S_1*S_2 possède aussi le cycle C_3(225, 297, 2412)...Notons que, aussi bien les points fixes que les points de ce cycle ont au plus 4 chiffres.
- Cas du type (1, 2).
On cherche des solutions pour n = Z avec Z = S_1*$(S_2)^2$.
Etant donné qu'ici Z(max) = 9^5k^3, on peut montrer que ce Z(max) est strictement inférieur au plus petit nombre à k chiffres 10^{k-1} dès que k >= 9, puisqu'alors $k^3 < 10^{k-6}$.
Le calcul numérique donne facilement les 7 seules solutions.
- PROPRIETE 6.
Il n'existe que 7 nombres de Niven de type (1,2): 1, 2023, 2400, 52215, 615627, 938600, 1648656.
Mise à part la solution triviale 1, le nombre de l'année est le plus petit.
- PROPRIETE 7.
2023 est le plus petit nombre de Niven de type (1, 2) plus grand que 1.
2023 est donc le plus petit nombre plus grand que 1, qui est égal au produit de la somme de ses chiffres par le carré de la somme de ses chiffres au carré: 2023 = (2+0+2+3)*(2^2+0+2^2+3^2)^2=7*17*17.
L'application n --> S_1*$(S_2)^2$ possède aussi les cycles C_4(152352, 83232, 145800, 202248), C_4(159048, 944163, 682587, 2108304)...Notons ici que tous les points fixes et points de cycles ont au plus 7 chiffres.
- Cas du type (1,3)
On cherche des solutions pour n = Z avec Z = S_1*$(S_2)^3$.
Ici Z(max) = 9k*$(k*9\text{^}2)^3$ = 9^7*k^4.
Pour tout k >= 14, on a Z(max) < 10^{k-1} et donc il n'existe pas de solution à 14 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique (jusqu'à 11 chiffres inclus) donne 6 solutions:
- CONJECTURE 1.
(à confirmer pour des nombres à 12 et 13 chiffres)
Il n'existe que 6 nombres de Niven de type (1,3): 1, 17332133, 72511713, 135446255, 1257946375, 1693802496.
L'application n --> S_1*$(S_2)^3$ possède aussi le cycle C_{11}(522964224, 246924000, 104487111, 89314623, 383328000, 108531333, 55306341, 47832147, 323960832, 362797056, 1086190605)...
- Cas du type (1,4)
Ici, pour tout k >= 16, on a Z(max) = 9^9*k^5 < 10^{k-1} et donc pas de solution à 16 chiffres et plus.
Le calcul possiblement effectué ici jusqu'à 13 chiffres donne 5 solutions.
- CONJECTURE 2.
(à confirmer pour des nombres à 14 et 15 chiffres)
Il n'existe que 5 nombres de Niven de type (1, 4): 1, 656063829504, 704791342944, 756184080384, 2055399609375 (les 2^e, 3^e et 4^e ont le même S_1 = 54).
L'application associée n --> S_1*$(S_2)^4$ possède aussi un cycle C_2(2515189098303, 947980260864).
- Cas du type (2, 2)
Ici Z(max) = 9^6*k^4.
Pour tout k >= 13, on a Z(max) < 10^{k-1} et donc il n'existe pas de solution à 13 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul (jusqu'à 10 chiffres inclus) donne 5 solutions.
- CONJECTURE 3.
(à confirmer pour des nombres à 11 et 12 chiffres)
Il n'existe que 5 nombres de Niven de type (2,2): 1, 3920400, 29430625, 59351616, 68558400.
L'application n --> $(S_1)_2)$*$(S_2)^2$ possède aussi le cycle C_7(121550625, 10673289, 77158656, 164480625, 50808384, 75898944, 457275456)...
4 - 3 - Cas r = 0
- Cas du type (1,0)
On montre facilement qu'il ne peut exister de solution à plus d'un chiffre (dès 2 chiffres l'équation 10*a+b=a+b ne peut avoir de solution et de même pour les cas à strictement plus de 2 chiffres, n est toujours supérieur à S_1).

Les seules solutions de type (1, 0) sont trivialement: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Cas du type (2, 0)
On obtient les solutions non nulles 1 et 81 ; pour 81, la somme des chiffres donne 9 et le carré 81.
A rapprocher de la propriété 13 de [18]: 9 est le seul entier (strictement plus grand que 1) égal à la somme des chiffres de son carré.
En notant C: n --> n^2,
on a $S_1(C(9)) = 9$ et $C(S_1(81)) = 81$; 9 est le seul point fixe (> 1) de S_1 o C .
Le point fixe 81 de C o S_1 est-il le seul nombre de Niven de type(2,0) plus grand que 1?
S'il existait un autre tel nombre m (différent de 1 et 81) de type Niven (2,0), il existerait un nombre A (différent de 9) tel que $S_1(A^2)=A$ ce qui est impossible d'après la propriété 13 ([18]). Les seules solutions de type (2, 0) sont donc 1 et 81.
- PROPRIETE 8.
Le seul nombre de Niven type (2,0) plus grand que 1 est 81.
L'application n --> $(S_1)^2$) possède aussi le cycle C_2(169, 256)...
- Cas du type (3,0)
Ici $Z(max) = 9^3 * k^3$.
Pour tout k >= 7, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 7 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
On obtient exactement 6 solutions.
- PROPRIETE 9.
Il n'existe que 6 nombres de Niven de type (3, 0): 1, 512, 4913, 5832, 17576, 19683.
L'application n --> $(S_1)^3$) possède aussi le cycle C_2(6859, 21952)...
- Cas du type (4,0)
Ici $Z(max) = 9^4 * k^4$.
Pour tout k >= 9, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 9 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
On obtient exactement 6 solutions.
- PROPRIETE 10.
Il n'existe que 6 nombres de Niven de type (4, 0): 1, 2401, 234256, 390625, 614656, 1679616.
L'application n --> $(S_1)^4$) possède aussi le cycle C_2(104976, 531441)...
- Cas du type (5,0)
Ici $Z(max) = 9^5 * k^5$.
Pour tout k >= 10, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 10 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
On obtient exactement 5 tels nombres (5, 0):
- PROPRIETE 11.
Il n'existe que 5 nombres de Niven de type (5, 0): 1, 17210368, 52521875, 60466176, 205962976.
L'application n --> $(S_1)^5$) possède aussi le cycle C_2(6436343, 20511149)...
- Cas du type (6, 0)
Ici $Z(max) = 9^6 * k^6$.
Pour tout k >= 14, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 14 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique jusqu'à 11 chiffres inclus donne deux solutions.
- CONJECTURE 4.
(à confirmer pour des nombres à 12 et 13 chiffres)
Il n'existe que 5 nombres de Niven de type (6, 0): 1, 34012224, 8303765625, 24794911296, 68719476736.
- Le cas (6, 1) possède les points fixes 7934371614720, 69378406612992, et le cycle C_2(66870753361920, 24946877381391).
- REMARQUE 4.
Comme 10^{k-1} croit plus vite, avec k, que $9^a * k^b$ (pour des a, b finis et petits) on trouvera toujours un k_0 tel que pour k >= k_0, il n'existe pas de solution à k chiffres ou plus.
Cette propriété se trouvera encore valable pour le cas suivant du type 3(t, r).

5 - LES NOMBRES DE NIVEN de type 3(t, r).
La somme des carrés des chiffres est remplaçée ici par la somme des cubes.
On cherche des nombres n = Z_3(n), avec
$Z_3(n) = (S_1(n))^t*(S_3(n))^r$.
Pour alléger, on écrira Z pour Z_3.
- Cas (1, 1)
Ici $Z(max) = 9^4*k^2$.
Pour tout k >= 7, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 7 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique (jusqu'à 6 chiffres inclus) nous donne toutes les solutions (qui ont de 1 à 5 chiffres), d'où:
- PROPRIETE 12.
Il n'existe que 6 nombres de Niven de type 3(1, 1), n = S_1*S_3: 1, 1215, 3700, 11680, 13608, 87949.
L'application n --> S_1*S_3 possède aussi les cycles C_2(11772, 12528), C_5(14476, 15136, 5920, 13792, 24376)...,C_4(...,19440) ...
Tous les entiers des attracteurs sont ici dans l'intervalle [1, 10^5[.
- Cas (1, 2)
Ici $Z(max) = 9^7*k^3$.
Pour tout k >= 11, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 11 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique (jusqu'à 10 chiffres inclus) nous donne toutes les seules solutions (qui ont de 1 à 9 chiffres), d'où:
- PROPRIETE 13.
Il n'existe que 9 nombres de Niven de type 3(1, 2), n = $S_1*(S_3)$^2: 1, 4147200, 12743163, 21147075, 39143552, 52921472, 156754936, 205889445, 233935967.
L'application n --> $S_1*(S_3)$^2 possède aussi les cycles C_{16}(34433424, 3213675,..., 81649296, 275653125), C_{73}(4182112, 6726475, ..., 291799075, 443060401)..., C_6(..., 186721605), C_{15}(..., 348821200) ...
Tous les entiers des attracteurs sont ici dans l'intervalle [1, 10^9[.
- Cas (2, 1)
Ici $Z(max) = 9^5*k^3$.
Pour tout k >= 9, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 9 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique nous donne toutes les seules solutions (qui ont de 1 à 6 chiffres), d'où:
- PROPRIETE 14.
Il n'existe que 5 nombres de Niven de type 3(2, 1), n = $(S_1)^2*S_3$: 1, 32144, 37000, 111616, 382360.
L'application n --> $(S_1)^2*S_3$ possède aussi les cycles C_{12}(496449, 2418336,,..., 723897, 2542752), C_{24}(70144, 120832,, ..., 2099296, 3311611)..., C_{10}(..., 2072576) ...
Tous les entiers des attracteurs sont ici dans l'intervalle [1, 10^7[.
- Cas (3, 1)
Ici $Z(max) = 9^6*k^4$.
Pour tout k >= 13, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 13 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique nous donne 6 solutions (qui ont de 1 à 8 chiffres), d'où:
- PROPRIETE 15.
Il n'existe que 6 nombres de Niven de type 3(3, 1), n = $(S_1)^3*S_3$: 1, 370000, 18600435, 73063296, 91539072, 93961315.
L'application n --> $(S_1)^3*S_3$ possède aussi les cycles C_2(69704064, 76142592), C_4(25113088, 26035072, 11359375, 54160912), C_{11}(48708864, 202570875,..., 88179840, 243577125), C_{14}(54148057, 48501136, ...198370768, 315652267) ..., C_{12}(..., 125056000) ...
Tous les entiers des attracteurs sont ici dans l'intervalle [1, 10^9[.
- Cas (4, 1)
Ici $Z(max) = 9^7*k^5$.

Pour tout k >= 15, on a Z(max) < 10^{k-1} et donc il n'existe pas de solution à 15 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique, jusqu'à 11 chiffres inclus, nous donne 2 solutions.
- CONJECTURE 5.
(à confirmer pour des nombres de 12 à 14 chiffres)
Il n'existe que 2 nombres de Niven de type 3(4, 1), n = $(S_1)^4*S_3$: 1, 3700000.
L'application n --> $(S_1)^4*S_3$ possède aussi les cycles C_{28}(17958454272, 19744096032, ..., 7737879375, 49385532735), C_{17}(14506246144, 1542434503, ..., 16699730944, 35284834528) ... C_{10}(..., 39248132279) ...
Tous les entiers des attracteurs sont ici dans l'intervalle [1, 10^{11}[.
- Cas (5, 1)
Ici Z(max) = 9^8*k^6.
Pour tout k >= 18, on a Z(max) < 10^{k-1} et donc il n'existe pas de solution à 18 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique, jusqu'à 11 chiffres inclus, nous donne 3 solutions (de 1 à 9 chiffres).
- CONJECTURE 6.
(à confirmer pour des nombres de 12 à 17 chiffres)
Il n'existe que 3 nombres de Niven de type 3(5, 1), n = $(S_1)^5*S_3$: 1, 37000000, 340122240.
L'application n --> $(S_1)^{5*}S_3$ possède aussi les cycles C_9(1038631284288, 1101996057600, ..., 878841855936, 7116627050496), C_{29}(1080539858944, 3650722201600, ..., 6868086187609, 8261190298105) ..., C_{16}(..., 7701460967995), C_4(..., 1223215623936) ...
Tous les entiers des attracteurs sont ici dans l'intervalle [1, 10^{13}[.
-Cas (1, 3)
Ici Z(max) = $9^{10}*k^4$.
Pour tout k >= 17, on a Z(max) < 10^{k-1} et donc il n'existe pas de solution à 17 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul possiblement effectué ici jusqu'à 13 chiffres inclus, nous donne 4 solutions.
- CONJECTURE 7.
(à confirmer pour des nombres de 14 à 16 chiffres)
Il n'existe que 4 nombres de Niven de type 3(1, 3), n = $S_1*(S_3)^3$: 1, 15438304000, 1186101958912, 1306237268992.
L'application n --> $S_1*(S_3)^3$ possède aussi les cycles C_5(585947043801, 845776620432, 385800341904, 393954884145, 1665528463557) et C_{13}(2237587918848, 3635200622592, ..., 2257861981599, 4740579566784) ...
- Le cas (2,2) ne donne que la solution triviale 1, mais possède des cycles C_4, C_{11}, C_{17}, C_{19} (les plus grands éléments ayant 11 chiffres)...
- Le cas (3, 2) donne deux points fixes: 1, 26081171200 et des cycles C_5, C_{14}, C_{16} (les plus grands éléments ayant 13 chiffres)...

6 - LES NOMBRES DE NIVEN de type 4(t, r).
La somme des cubes des chiffres est remplaçée ici par la somme des puissances quatre.
On cherche des nombres n = Z_4(n), avec
$Z_4(n) = (S_1(n))^t*(S_4(n))^r$.
Pour alléger, on écrira Z pour Z_4.
- Cas (1, 1)
Ici Z(max) = 9^5*k^2.
Pour tout k >= 8, on a Z(max) < 10^{k-1} et donc il n'existe pas de solution à 8 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique nous donne toutes les solutions.
- PROPRIETE 16.
Il n'existe que 3 nombres de Niven de type 4(1,1), n = S_1*S_4: 1, 182380, 444992.
L'application n --> S_1*S_4 possède aussi les cycles C_{11}(215703, 56232, ..., 96228, 323595), C_{18}(514440, 25092, ..., 29988, 767880) ...

Tous les entiers des attracteurs sont ici dans l'intervalle [1, 10^6[.
- Cas (1, 2)
Ici $Z(max) = 9^9*k^3$.
Pour tout k >=13, on a $Z(max) < 10^{k-1}$ et donc il n'existe pas de solution à 13 chiffres ou plus, ce qui assure un nombre fini de solutions.
Le calcul numérique nous donne deux solutions à 10 chiffres et une à 11.
- PROPRIETE 17.
Il n'existe que 4 nombres de Niven de type 4(1,2), $n = S_1*(S_4)^2$: 1, 5873656512, 7253758561, 29961747275.
L'application n --> $S_1*(S_4)^2$ possède aussi les cycles C_{24}(4664374245, 2043635445, ..., 7989996384, 106555744800) et C_9(8613912600, 6414087744, ..., 9693644805, 23877546336) ...C_9(..., 27148288536) ...
Tous les éléments des attracteurs appartiennent à l'intervalle [1, 10^{12}[.

7 - FACTORIONS ET PRIMORIONS

On envisage ici comme fonction sur les a_i des sommes de factorielles ou de primorielles ([FACT2]), les nombres obtenus n'étant plus nécessairement des nombres de Niven.

7 - 1 - FACTORIONS.

On appelle factorion ([FACT1], [FACT3]) un nombre qui est égal à la somme des factorielles de ses chiffres.
On cherche donc (en base 10) des nombres n tels que $n = \sum_{i=1}^{i=k} a_i!$.
Un factorion n à k chiffres doit vérifier (cf. DG):
$10^{k-1} < n < k*9!$,
et si l'on compare 10^{k-1} et k*9! on observe que pour k >= 8, 10^{k-1} est strictement plus grand que k*9! qui n'a alors que 7 chiffres. Donc il ne peut exister de factorion à plus de 7 chiffres. Le calcul numérique donne facilement les 4 seules solutions et on peut donc affirmer:
- PROPRIETE 18.
En base 10, il existe exactement 4 factorions: 1, 2, 145, 40585.
Observons que seuls 1 et 2 sont aussi de Niven.
L'application n --> $\sum_{i=1}^{i=k} a_i!$ possède aussi les cycles C_2(871, 45361), C_2(872, 45362) et C_3(169, 363601,1454).
Tous les éléments des attracteurs appartiennent à l'intervalle de convergence [1, 10^7[.
Cette application est donc une transformation agréable ([18]).
- REMARQUE 5: factorions en base b quelconque
Un factorion n à k chiffres, en base b, doit vérifier (b^{k-1} étant le plus petit terme en base b, exprimé en base 10)
$b^{k-1} < n < k*(b-1)!$
Les factorions sont donc en nombre fini dans toute base et une analyse de l'inégalité précédente convertie en base b permet de tous les trouver.
Pour b < 11, on montre encore (a fortiori) que les factorions n'ont pas plus de 7 chiffres, pour b = 11 et 12, ils n'ont pas plus de 9 chiffres; les éventuels cycles ont dans chaque cas des éléments avec au plus 7, respectivement 9 chiffres.
Le calcul numérique jusqu'à 10^9 les donnera donc tous.
Tous les factorions en base b (de 2 à 12) exprimés dans leur base (respectivement en base 10) sont:
1, 10 (1, 2) en base b = 2;
1, 2 (1, 2)en base b = 3;
1, 2, 13 (1, 2, 7) en base b = 4;
1, 2, 144 (1, 2, 49) en base b = 5;
1, 2, 41, 42 (1, 2, 25, 26) en base b = 6;
1, 2 (1, 2) en base b = 7;
1, 2 (1, 2) en base b = 8;
1, 2, 62558 (1, 2, 41282) en base b = 9;
1, 2, 145, 40585 en base b = 10;
1, 2, 24, 44, 28453 (1, 2, 26, 48, 40472) en base b = 11;

1, 2 (1, 2) en base b = 12.
Pour les factorions à au moins 2 chiffres, seul 48 est aussi de Niven.
Certaines applications associées possèdent quelques cycles écrits en base b (respectivement 10), comme:
C_2(12, 3) (6, 3) en base b = 4;
C_6(2343, 53, 240, 36, 2055, 465) (864, 38, 126, 27, 726, 243) en base b = 7;
C_2(12051, 175) (5161, 125), C_4(1320, 12, 3, 6) (720, 11, 3, 6) en base b = 8;
C_{15}(132556, ..., 308, ..., 883) (80646, ..., 251, ..., 723) en base b = 9;
7 - 2 - PRIMORIONS.
Par analogie avec le factorion, nous appellerons primorion un nombre égal à la somme des primorielles de ses chiffres; la primorielle ([FACT2]) n# d'un entier n est le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à celui-ci (11# = 2.3.5.7.11 = 2310). Par convention on prend 0# = 1# = 1 et pour les autres chiffres on a donc 2# = 2, 3# = 4# = 6, 5# = 6# = 30, 7# = 8# = 9# = 210.
On cherche des nombres n tels que $n = \sum_{i=1}^{i=k} a_i\#$.
On trouve facilement 3 solutions: 1, 2, 36.
On peut montrer que ce sont les seules. Un primorion n à k chiffres doit vérifier:
$10^{k-1} < n < 210k$ et si l'on compare 10^{k-1} et 210k on note que pour k >= 4, 10^{k-1} est strictement plus grand que 210k qui n'a alors que 3 chiffres. Donc il ne peut exister de primorion à plus de 3 chiffres, ni d'éléments de cycle à plus de 3 chiffres.
- PROPRIETE 19.
En base 10, il existe exactement 3 primorions: 1, 2, 36.
Observons que ces 3 primorions sont aussi des nombres de Niven.
L'application $n \rightarrow \sum_{i=1}^{i=k} a_i\#$ possède aussi le cycle C_5(4, 6, 30, 7, 210).
Tous les éléments des attracteurs appartiennent à l'intervalle de convergence $[1, 10^3[$.
Cette application est donc aussi une transformation agréable ([18]).
Les nombres 1 et 2, à la fois factorions et primorions étant triviaux, on peut considérer qu'il existe 2 factorions (145 et 40585) et 1 seul primorion (36) bien spécifiques. Observons que notre primorion 36 (= 3# + 6#) est aussi un nombre de Niven en base factorielle (Fiven number [17]), puisque 36 = 0*1! + 0*2! + 2*3! + 1*4!.
- REMARQUE 6: primorions en base b quelconque
Un primorion n à k chiffres, en base b < 11, doit vérifier (pour b >= 11 la borne supérieure sera 210k)
$b^{k-1} < n < k*(b-1)\#$.
Les primorions sont donc en nombre fini dans toute base et une analyse de l'inégalité précédente convertie en base b permet de tous les trouver.
La borne supérieure étant toujours 210k, il ne peut exister, pour toute base, de primorion à plus de 3 chiffres.
Tous les primorions en base b (de 2 à 12) exprimés dans leur base (respectivement en base 10) sont:
1, 10 (1, 2) en base b = 2;
1, 2 (1, 2)en base b = 3;
1, 2, 13 (1, 2, 7) en base b = 4;
1, 2 (1, 2)en base b = 5;
1, 2, 51, 52 (1, 2, 31, 32) en base b = 6;
1, 2 (1, 2) en base b = 7;
1, 2 (1, 2) en base b = 8;
1, 2, 66 (1, 2, 60) en base b = 9;
1, 2, 36 en base b = 10;
1, 2, 55 (1, 2, 60) en base b = 11;
1, 2 (1, 2) en base b = 12.
Pour les primorions à 2 chiffres, seuls 36 et 60 sont aussi des nombres de Niven.
Certaines applications associées possèdent quelques cycles, écrits en base b (respectivement 10), comme:
C_2(12, 3) (6, 3) en base b = 4;
C_2(43, 15) (31, 12) en base b = 7;
C_8(322, 12, 3, 6, 36, 44, 14, 7) (210, 10, 3, 6, 30, 36, 12, 7) en base b = 8;

C_3(253, 42, 8) (210, 38, 8), C_2(518, 287) (422, 241) en base b = 9;
C_3(353, 39, 187) (421, 42, 216) en base b = 11;
C_2(181, 158) (241, 212) en base b = 12;
On observe quelques nettes similitudes entre b-factorions et b-primorions essentiellement dues au fait que, 0# = 1# = 1!, 2# = 2!, 3# = 3!.

CONCLUSION

A côté de l'ensemble infini des nombres n divisibles par la somme de leurs chiffres S_1, les classiques nombres de Niven (ou nombres Harshad), qui s'écrivent donc n = K*S_1, K étant un entier quelconque, on considère des classes de nombres de Niven particuliers qui s'écrivent de la même manière mais avec un K qui est, soit un entier donné, soit une fonction donnée des chiffres de ce n. Dans la plupart des cas on reste en base 10, sauf pour le problème SP que l'on décrit pour les bases de 2 à 12.
On montre que ces divers ensembles d'entiers sont finis et ont un petit nombre de représentants que l'on explicite, complètement dans la plupart des cas traités.
Toutes les applications associées à ces divers nombres de Niven particuliers, ainsi qu'aux extensions de nombres non nécessairement de Niven (cas t = 0 avec les classiques ppdi ([OE4]) et nos rppdi ([18], [20]), factorions et primorions) sont des transformations agréables ([18]): leurs itérations correspondantes convergent toujours (dans un intervalle de convergence fini) et possèdent un nombre fini d'attracteurs et, en particulier, un nombre fini de points fixes. On montre que nos divers nombres de Niven particuliers sont, pour chaque type, en nombre fini, avec un nombre de représentants petit, de l'ordre de la dizaine (pour les cas abordés ici), et ont au plus 13 chiffres.
Au passage, on détermine quelques nombres remarquables (au sens de [18]) comme par exemple, le nombre date de l'année 2023 (propriété 7) ou le nombre 130 (propriété 3); on exhibe aussi, en modifiant le type (0, 1), les classiques ppdi mais aussi les 14 rppdi plus grands que 1 actuellement déterminés ([18]).
On termine par une propriété concernant les factorions et une autre concernant des nombres que nous appelons des primorions et qui sont aux primorielles ce que sont les factorions aux factorielles; dans les deux cas on explicite tous leurs représentants (en nombre fini et petit, 4 factorions et 3 primorions), ainsi que les attracteurs (leurs points fixes et un seul cycle dans chaque cas) des transformations (agréables) qui leurs sont associées. On détermine enfin tous les factorions et primorions en base de 2 à 12.

-DEMONSTRATION: S_k^r sont des transformations agréables pour tout couple d'entiers (k, r).
Tout nombre à p chiffres étant strictement inférieur à 10^p, il vient
$S_k^r(m) <= rp9^k$
Pour tout couple (k, r) d'entiers strictement positifs et finis, il existe un majorant M = $r9^k$ tel que pour tout entier m à p chiffres on ait la majoration
$S_k^r(m) <= pM$.
Par conséquent, dès que le nombre pM a strictement moins de p chiffres, la transformation S_k^r ne peut pas posséder de point fixe à p ou plus de p chiffres (puisque l'on ne peut pas assurer $S_k^r(f) = f$); elle ne peut pas non plus alors posséder de cycle avec des éléments à p ou plus de p chiffres (l'itération par S_k^r ne permettrait pas de retrouver un élément de strictement plus de p chiffres).
Ceci est assuré dès que p vérifie l'inégalité $10^{p-1}/p > M$ et il existe manifestement toujours un plus petit p ayant cette propriété pour tout couple (k, r).
On notera p* = p*(k, r) le plus petit p tel que $10^{p-1}/p > M$.
La fonction $10^{p-1}/p$ étant croissante, pour tout p > = p*, on a toujours p M < 10^{p-1} et l'itération par S_k^r d'un nombre à de tels p chiffres fournit toujours un nombre avec au plus p-1 chiffres (chaque itération fait perdre au moins un chiffre au transformé).
Observons que pour tout k et tout r strictement positifs, on aura toujours p* >= 3.
Il en résulte que tous les attracteurs de S_k^r sont nécessairement constitués de nombres contenus dans l'intervalle fini [0, 10^{p^*-1}[, puisque ce p* est encore le plus petit p tel que le majorant p M soit

strictement inférieur à 10^{p-1} (soit encore, possède au plus (p-1) chiffres).
Les transformations S_k^r sont partout convergentes dans N vers un nombre fini d'attracteurs et sont donc toutes des transformations agréables, l'intervalle de convergence étant [0, 10^{p^*-1}[; tout nombre qu'il contient a tous ses itérés dedans et tout nombre extérieur y aboutit après un nombre fini d'itérations.
Il en résulte qu'il suffit de chercher la convergence de tous les entiers strictement inférieurs à 10^{p^*-1} pour déterminer tous les attracteurs de S_k^r.
Le caractère agréable de ces transformations S_k^r implique, en particulier, que nos rppdi sont en nombre fini.

(*) Professeur honoraire Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Webmaster du site SAYRAC .

REFERENCES
[1] M. D. Miller, On Generalized Fibonacci Numbers, Amer. Math. Monthly 78, 1108–1109, 1971.
[FACT1] George D.Poole, Integers and the Sum of the Factorials of Their Digits, Mathematics Magazine, vol.44, p. 278-279, 1971.
[2] Aviezri S. Fraenkel, Systems of Numeration, Amer. Math. Monthly 92, 105–114, 1985.
[FACT2] H. Dubner, Factorial and primorial primes, J. Recreational Math., 19(3), 197-203, 1987.
[3] Curtis N. Cooper and Robert E. Kennedy, Chebyshev's Inequality and Natural Density, Amer.Math. Monthly 96, 118–124, 1989.
[4] I. Vardi, Niven numbers, §2.3 in Computational Recreations in Mathematics, Addison-Wesley, pp. 19 and 28–31, 1991.
[5] C. Cooper and R. E. Kennedy, On consecutive Niven numbers, The Fibonacci Quarterly, 31.2, 146–151, 1993.
[6] H. G. Grundmann, Des séquences de numéros consécutifs Niven, Fibonacci Quarterly 32, 174-175, 1994.
[7] Cheryl Winter, Base b Digital Sums and b-Niven Numbers, Master's thesis, Central Missouri State University, 1994.
[FACT3] Clifford A. Pickover, Keys to Infinity, John Wiley & Sons, chap. 22, The Loneliness of the Factorions, 1995.
[8] B. Wilson, Construction of small consecutive Niven numbers, The Fibonacci Quarterly, 34.3, 240–243, 1996.
[9] T. Cai, On 2-Niven numbers and 3-Niven numbers, The Fibonacci Quarterly, 34.2, 118–120, 1996.
[10] Sandro Boscaro, Nivenmorphic entiers, Journal de mathématiques de loisirs 28, 3, 201-205, 1996 - 1997.
[11] B. Wilson, Construction of 2*n consecutive n-Niven numbers, The Fibonacci Quarterly, 35.2, 122–128, 1997.
[SP1] S. Parameswaran, Numbers and their digits - a structural pattern, Note 81.24, The Mathematical Gazette, 81(491), 263-263 1997.
[SP2] A. Beardon, S.P numbers, The Mathematical Gazette, 83(496), 25-32, 1999.
[SP3] K. McLean, There are only three S.P numbers!, The Mathematical Gazette, 83(496), 32-38, 1999.
[SP4] E. Bussmann, S.P numbers in bases other than 10, The Mathematical Gazette,

85(503), 245-248, 2001.
[12] Jean-Marie De Koninck et Nicolas Doyon, Sur le nombre de numéros Niven jusqu'à x, Volume trimestriel fibonacci 41,5, 431-440, 2003.
[13] Jean-Marie De Koninck, Nicolas Doyon et I. Katai, Sur la fonction de comptage pour les numéros Niven, Arithmetica Acta 106, 265-275, 2003.
[14] J. M. De Koninck, N. Doyon, Large and small gaps between consecutive Niven numbers, Journal of Integer Sequences, Vol. 6, article 03.2.5, 2003.
[15] A. Ray and C. Cooper, On the natural density of the k-Zeckendorf Niven numbers, J. Inst. Math. Comput.Sci. Math. Ser., 19.1, 83–98 2006.
[16] H. G. Grundman, Consecutive Zeckendorf-Niven and lazy-Fibonacci-Niven numbers, The Fibonacci Quarterly, 45.3 272–276, 2008.
[SP5] T. Sanders, Développements récents sur les chiffres SP, révisé 2008.
[SP6] H. A. Shah Ali, The number of S·P numbers is finite, Math. Gaz. 92, pp. 64–65, 2008.
[SP7] Paul M. Kominers and Scott D. Kominers, Improved bounds on the sizes of S.P numbers, (https://arxiv.org/pdf/0806.3585v2.pdf), 2008.
[SP8] A. Beardon, Recent Developments on S.P. Numbers, NRICH, University of Cambridge, 1998-2011.
[SP9] A. Beardon, Sums and Products of Digits and SP Numbers, NRICH, University of Cambridge, 1998, révisé 2015.
[17] Paul Dalenberg and Tom Edgar, Consecutive Factorial Base Niven Numbers, Fibonacci Quart. 56, no. 2, 163–166, 2018.
[18] R.L.Clerc, Les transformations agréables et une nouvelle classe de nombres narcissiques parfaits, p.1-17, (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03619147), 2022.
[19] Joshua Harrington, Matthew Litman, and Tony W. H. Wong, Every Arithmetic Progression Contains Infinitely Many b-Niven Numbers, (https://arxiv.org/pdf/2303.06534v1.pdf), 2023.
[20] R.L.Clerc, The perfect r-narcissistic numbers, p.1-2, (https://hal.science/hal-04229895), 2023.
[OE1] Nombres de Niven-Harshad, OEIS A005349 .
[OE2] Liste nombres SP (sans chiffre 0), OEIS A038369 .
[OE3] Liste nombres SP (chiffre 0 possible), OEIS A066282 .
[OE4] Liste ppdi, OEIS A005188 .