Presentación de la Obra del Profesor Santaló

por

José L. Vicente

Deseo agradecer, primero de todo, a esta Universidad, a su Rector y a su Claustro, por haber nombrado Doctor Honoris Causa a un insigne matemático, creo que el primero, al menos en los últimos quince años. Mi agradecimiento también para mi Facultad, Matemáticas, y para su Decano Prof. Real, por haber promovido este nombramiento de manera entusiasta, y por encomendármela agradable tarea de presentar la laudatio de nuestro homenajeado.

Antes de comenzar la presentación, propiamente dicha, de la biografía científica de D. Luis Santaló, permítanseme unas breves reflexiones personales sobre como esta presentación ha sido escrita. Cuando la Facultad de Matemáticas de nuestra Universidad me encargó escribir estas líneas, me encontraba yo en una Universidad del Norte de Alemania. El trabajo que tenía entre manos no me parecía fácil: rastrear la vida y obra científica de un español en la Biblioteca de una Universidad de Nord Rhein-Westfalia. Pues bien, todo estaba allí, y no tuve más que alargar la mano para cogerlo. Y más aún, los compañeros de esta Universidad (ninguno de su campo científico) conocen sus libros y trabajos. He podido discutir personalmente con alguno de ellos sobre ciertos artículos de Geometría Integral escritos por D. Luis, lo que me ha llenado de satisfacción y, por qué no decirlo, de cierto orgullo. Creo que este detalle, aunque sencillo, es revelador de la personalidad científica de nuestro compatriota.

D. Luis Antonio Santaló nació en 1.911 y publicó su primer trabajo en 1.934, en la Revista Matemática Hispano Americana de Madrid. Fué un estudiante de gran brillantez, en la Universidad de Madrid, cuya carrera universitaria en España se vió truncada por la guerra civil. Como tantos otros españoles, emigró a la América Hispana al final de esta guerra, y el consejo amigable de Rey Pastor le llevó a Argentina, donde desarrollaría la mayor parte de su vida científica. Comenzó en Rosario, como investigador principal y Vicedirector del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, para pasar posteriormente a Buenos Aires (1.947), de cuya Universidad ha sido Profesor hasta su jubilación, y ahora lo es emérito. Su primer trabajo en una revista matemática de este país fué publicado en 1.939, inmediatamente después de llegar a él, y se titula Geometría Integral de las figuras ilimitadas arbitrarias. Este no es más que uno de los muchos resultados que D. Luis obtiene en Geometría Integral, de la que hablaremos más adelante, como el campo de trabajo en que su labor se expandió hasta alcanzar altísimas cotas de calidad.

En números, la producción científica de Santaló es como sigue. Ha trabajado en Matemáticas durante 56 años, produciendo 151 artículos científicos, publicados en revistas de todo el mundo, por supuesto de las más prestigiosas, como los "Annals of Mathematics". Ha escrito 18 libros y monografías, uno de ellos con el título Historia de la Aeronáutica, publicado en Buenos Aires en 1.946. Ha pronunciado un gran número de conferencias y lecciones magistrales, de las que 75 han sido publicadas. Aquí hay un aspecto de D. Luis que me interesa resaltar: el que siempre ha tenido una preocupación constante por enseñar, por comunicar sus ideas, por introducir al público científico en los estrechos senderos de la Geometría. Al matemático se unió siempre el maestro, que supo exponer con claridad y sencillez las ideas más intrincadas. Recuerdo una conferencia suya en la Universidad de Santiago de Compostela en 1.978. Su título era Geometría Integral: historia y perspectivas. En ella analizó D. Luis su campo de trabajo, desde la incomparable perspectiva que da la madurez. No creo poder olvidar aquella lección. Quizás si hubiese más personas con la habilidad de D. Luis para comunicar sus ideas, la Ciencia avanzaría más rápidamente.

El Profesor Santaló es Doctor Honoris Causa por cinco Universidades (sin contar ésta), miembro de nueve

Academias de Ciencias, miembro honorario de cuatro Sociedades Científicas (una de las cuales es la Royal Statistical Society de Londres), y ha obtenido un gran número de Premios Científicos por sus trabajos de investigación, entre los cuales quiero destacar, por lo que nos concierne, el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica, que le fué otorgado en 1.983.

Antes de dejar esta visión general del trabajo de Santaló, no quiero silenciar su labor en favor del progreso de la enseñanza de la Matemática, que no es sino un corolario obvio de su saber y de su forma de comunicar las ideas. A través de esta actividad se desarrolló el contacto de D. Luis con los matemáticos sevillanos, y andaluces en general. Conozco a muchas personas que guardan un recuerdo muy grato de su participación en las Terceras Jornadas Andaluzas sobre Didáctica de las Matemáticas, organizadas en Abril de 1.987, en Huelva por la Sociedad Thales. En el caso de Santaló, contrariamente a lo que suele ser la generalidad, sus actividades en el campo de la Didáctica se han desarrollado "además de" su producción matemática, y no "en lugar de".

Me pregunto si debo seguir enumerando méritos de nuestro Doctor Honoris Causa, pero creo que no. Una razón es que los matemáticos son gente muy austera y modesta, muy poco amigos de candilejas. La otra razón es que, para homenajear a un matemático, no hay más que hablar de su obra. Permítaseme exponer unas cuantas ideas muy simples sobre Geometría Integral, campo en que ha sido el líder indiscutido durante muchos años, como dice Kac.

La Geometría Integral consiste, esencialmente, en el uso de la teoría de la media (o la integración) en el espacio euclídeo, para el estudio de propiedades geométricas de figuras en este espacio (de las que el ejemplo más obvio son los conjuntos convexos). De la mano de la Geometría Integral va la teoría de la Probabilidad Geométrica, que es la aplicación de aquélla a problemas probabilísticos cuyo enunciado es geométrico. Ambas se han desarrollado de manera conjunta, y a veces es difícil distinguirlas. La tradición dice que nacieron con el problema de la aguja de Buffon (1.777), que se formula así. Supongamos dibujado en el plano un haz de rectas paralelas, igualmente separadas una distancia d, y una aguja de longitud $l \leq d$ que se arroja al azar sobre el plano; calcular la probabilidad de que la aguja corte a una de las líneas. Dicho sea entre paréntesis, la solución del problema es $p = 2l/\pi d$. El cómo un problema, aparentemente tan simple, puede dar lugar a un inmenso y fructífero campo de trabajo, se explica sólo por el hecho de que, una vez que se descubren las causas de las cosas, hay siempre un campo abierto ante esta verdad, que consiste esencialmente en ver cómo se aplica a situaciones diferentes, sintetizando hechos aparentemente inconexos.

El principal problema al hablar de Probabilidad Geométrica fué durante mucho tiempo, saber de qué se estaba hablando. Cuando se tira un dado al azar, todo el mundo sabe que hay seis resultados posibles, luego la probabilidad de sacar un 4 es 1/6. pero hay que tener imaginación para darle sentido a hablar de la probabilidad de que la aguja corte a una de las líneas, cuando hay una infinidad de resultados posibles, y otra de resultados favorables. El descubrir el verdadero sentido de este problema llevó más de un siglo y algunos disgustos, como los prueban las paradojas de Bertrand. Una de ellas, la más conocida, fué producida en 1.907 (esto es, 130 años después de Buffon) y hace ver cómo la probabilidad de que una cuerda trazada al azar en un círculo tenga longitud igual al lado del triángulo equilátero inscrito, tiene varios valores, dependiendo de cómo se la calcule.

Para dar sentido a los problemas de probabilidad geométrica juegan tres factores que se relacionan íntimamente: el espacio, el grupo de transformaciones bajo consideración, y la medida, cuya "alma" (como dice Kac) es la probabilidad. La Geometría viene determinada por el espacio y el grupo, como se sabe desde el Programa de Erlangen de Klein. La medida debe verificar la condición de ser invariante por el grupo en cuestión.

Consideremos el caso del plano euclídeo, cuyo grupo es el de los movimientos. La medida invariante por los movimientos es el área. Si designamos por $m(K)$ al área de la figura K, y si $K' \subset K$, $P \in K'$, la probabilidad de que $P \in K'$ es, por definición, $m(K')/m(K)$. Ésta es la situación más sencilla y más intuitiva. La noción de medida se puede extender a otras situaciones más sencillas y más intuitivas. La noción de medida se puede extender a otras situaciones, por el procedimiento de parametrizar los espacios correspondientes por el plano euclídeo y componer con la medida sobre éste. Por ejemplo, si parametrizamos las rectas por las coordenadas polares del pie de la perpendicular desde el origen, tenemos que el conjunto de todas las rectas del plano está en correspondencia biunívoca con una banda en éste. Componiendo con el área, definimos la medida de conjuntos de rectas. Las bandas del plano de anchura fija se pueden parametrizar por las paralelas medias, y éstas como antes. Así tenemos una medida sobre el conjunto de bandas que permite, por ejemplo, resolver el problema de

Buffon antes enunciado. La situación usual es que con estas medidas se prueban multitud de fórmulas integrales que tienen un gran contenido geométrico. A la vez surgen la interpretación probabilística. Santaló es un maestro en este proceso. Lo que sorprende de sus trabajos es la inteligencia que derrocha en ellos, de manera que la utilización geométrica y probabilística que él hace de la medida parece casi cosa de magia.

El primer contacto de Santaló con la Geometría Integral se produce en 1.934, cuando marcha a Hamburgo y conecta con Wilhelm Blaschke y su escuela. Desde entonces progresa rápidamente en la investigación dentro de este campo. Avanza con imaginación, como todo buen matemático. Sus primeros pasos consisten en saltar de la Geometría euclídea a la elíptica e hiperbólica, extendiendo a éstas resultados de aquélla, como las fórmulas integrales de Crofton. Posteriormente, Santaló extiende y aplica a múltiples problemas la medida cinemática, introducida por Poincaré, y a la que saca un gran partido. Merece la pena decir lo que es la medida cinemática, siguiendo a D. Luis, para ver cómo se prepara el siguiente paso. La medida cinemática es la medida sobre el grupo M de los movimientos del plano que es invariante por traslaciones a izquierda y a derecha (las traslaciones del grupo M, no del plano). Si un movimiento directo se parametriza por tres números, a saber, las coordenadas (a, b) de la imagen del origen y el ángulo (orientado) φ de la correspondiente isometría vectorial, estas tres coordenadas varían en un subconjunto $\{(a,b,\varphi)\}$ del espacio tridimensional, que es la banda $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,2\pi]$ menos el que tiene como ecuación el determinante de la correspondiente matriz igualado a cero. El elemento de volumen de este espacio $dK = da \wedge db \wedge d\varphi$ produce, por integración, la medida sobre M invariante por traslaciones. Con esta noción de medida cinemática, Santaló construye un gran número de resultados geométricos (por ejemplo, fórmulas integrales de Blaschke y de Poincaré, desigualdades isoperimétricas, y muchos más).

El paso siguiente está ya a la vista, saltando del caso particular al general. Vamos a usar las palabras de D. Luis para describirlo, y ver cómo la siguiente es una generalización de la media cinemática.

Queremos incluir las ideas y resultados anteriores en un contexto general. Para esto necesitamos:

1. Un espacio base M que contenga ciertos objetos geométricos (antes M era el plano euclídeo y los objetos eran puntos, rectas o figuras congruentes).

2. Un grupo de transformaciones G que opere sobre M (antes G era el grupo de movimientos del plano).

Una vez que tengamos el espacio M y el grupo G, el siguiente paso es definir una medida para conjuntos de objetos geométricos que sea invariante por G y luego calcular esa medida para algunos conjuntos específicos, con el fin de obtener algunos resultados de interés geométrico.

Así Santaló desarrolla la Geometría Integral en un espacio en el que actúa un grupo de Lie. Las medidas son fácilmente calculables en los grupos de matrices más frecuentes. Así surge de manera casi milagrosa la Geometría

Integral afín y euclídea, la de los espacios de variedades lineales. La definición de densidades para las geodésicas en espacios riemannianos es otro problema distinto, pues no pueden ser definidas por ser invariantes por un cierto grupo de transformaciones. Sin embargo, es posible encontrar una densidad que sea invariante por cambio coordenadas y por desplazamientos de las geodésicas. Esta idea es utilizada por Santaló en numerosos trabajos.

D. Luis no sólo ha trabajado en problemas de Geometría Integral, sino en diversas otras cuestiones geométricas, como la Geometría Proyectiva, Diferencial clásica, y la Geometría de los cuerpos convexos. Siendo éstos una buena parte del dominio de acción de las probabilidades geométricas, es natural que Santaló haya publicado un número no pequeño de trabajos en este dominio. Referente a la Geometría Proyectiva, todo estudiante de Matemáticas de esta Universidad ha consultado frecuentemente su libro sobre el tema.

Hay no pocos trabajos de D. Luis llenos de ingenio y gracejo matemático. He disfrutado, días atrás, leyendo uno, titulado Geodesics in Gödel-Synge spaces, en el cual se estudian las geodésicas de una de las métricas usadas en Relatividad, a saber

$$ds^2 = dx_1^2 + 2h(x_4)\,dx_1\,dx_2 + g(x_4)\,dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2$$

Como se ve, D. Luis también entiende de Física Matemática.

Termino aquí esta biografía de D. Luis Santaló Sors. Quizás se piense que ha hecho una biografía apasionada, y puede que haya algo de verdad en esto, aunque creo que puedo reclamar para mí la objetividad que da el haber tenido muy escasos contactos con nuestro personaje. Lamento esta escasez de contactos, pues hubiera sido de gran utilidad para mí haberlos tenido más frecuentes, pero me alegro también porque he podido así escribir estas líneas imparcialmente, lo que no hace sino realzar los méritos de nuestro homenajeado

José L. Vicente.

Palabras del Dr. Luis Antonio Santaló
al recibir la investidura de Doctor Honoris Causa
de la
Universidad de Sevilla

Cumplo emocionado pero con el mayor gusto, con el deber de expresar mi profundo agradecimiento por el alto honor que esta Universidad de Sevilla me ha conferido, al distinguirme con el nombramiento de doctor Honoris Causa de la misma.

Nacido y formado en España, pero trasplantado a América, a las orillas del estuario del Río de la Plata, al llegar a la edad en que son ya pocas las esperanzas y muchos los recuerdos, los sentimientos aparecen tironeados por las improntas de los años de juventud en la patria de origen y de aquellos que les siguieron, ya muchos más que los primero, en la patria americana de mi mujer, de mis hijas y de mis nietos. Son fuerzas contrapuestas que parten tanto de las raíces ancladas en el pasado como de las hincadas en el futuro, fuerzas cada vez más fuertes, generadoras de sentimientos cada vez más hondos. Entre ellos, el agradecimiento ante muestras de afecto y amistad, siempre obligado, se vuelve profundo y muy sentido, al mismo tiempo que en casos como el de hoy se mezcla con el placer de encontrar amigos de muchos años y otros nuevos que habrán de serlo para siempre.

Los que hemos tenido la vida repartida entre este y el otro lado de los mares, viviendo siempre comparando acciones, costumbres, paisajes y escenarios, estamos marcados por el signo de una eterna añoranza, que nos empuja hacia el pasado y nos sensibiliza intensamente ante cualquier situación que suscite recuerdos o evoque historias. Por esto, tanto por el tiempo, en que el mundo se prepara para conmemorar el quinto centenario del descubrimiento de América, como por el lugar, esta luminosa tierra andaluza en que la gesta se planificó e inició, me siento hoy particularmente emocionado. Me siento parte e intérprete de las generaciones que durante estos siglos emigraron hacia aquellas costas, siempre hospitalarias, que como Aissa a su príncipe encantado, supieron darnos "hijos, un poco de tierra, mujer y un mucho de amor", pero que nunca borraron del todo en nuestro trasfondo íntimo, los dejos de la tierra lejana.

Como es costumbre al recibir una alta distinción, como la presente, me voy a permitir exponer algunas consideraciones sobre la ciencia de mi especialidad, la matemática, y las sucesivas desecciones de la misma hasta ubicar el lugar que en ella ocupa el capítulo especial en el que mayormente he trabajado, la llamada geometría integral o estocástica. Ha sido una labor de más de 50 años, los suficientes para haber sido testigo del origen y desarrollo de estas disciplinas, hasta el presente, en que ya se vislumbra su extinción, no por desaparición sin rastro, sino por su disolución dentro de teorías más amplias y unificadoras, prestando a las mismas su esfuerzo y ayuda para seguir marchando, conjuntamente, hacia nuevas formas y nuevas perspectivas.

Este hecho particular es un ejemplo del frenesí con que hoy día avanzan todas las ramas de la ciencia. En pocas décadas vemos nacer, desarrollar y pasar al olvido teorías que rápidamente son sustituídas por otras, que si bien a veces son las mismas con diferente ropaje, siempre dejan una resultante positiva y el universo del conocimiento se expande a una velocidad difícil de seguir, si no es a través de postas sucesivas y relevos incesantes de los equipos creadores.

La cantidad de nuevos conocimientos que se producen actualmente en todas las ramas del saber, sigue un crecimiento exponencial sin precedentes, y la matemática no escapa a esa tendencia general, más bien es uno de sus ejemplos más significativos. Un cálculo aproximado conduce a que si se juntaran todos los trabajos de matemática publicados en el mundo durante el año 1.989, supuestamente originales (comentados en la revista Mathematical Reviews), y se juntaran en volúmenes de 1.000 páginas cada uno, resultaría una colección de 350 volúmenes Este hecho origina graves problemas de información y de almacenamiento, pues resultan insuficientes tanto los espacios como los presupuestos destinados a las hemerotecas. Por otra parte, este mare magnum de publicaciones no es proporcional a su utilidad, pues seguramente que muchas de ellas que podrían ser útiles en otros capítulos de la matemática o en otras ramas del conocimiento, pasan desapercibidas. Es imposible estar enterado de todo lo que a cada uno pudiera interesar; la única esperanza son los modernos ordenadores, que permiten almacenar en muy poco espacio mucha información y permiten, además, identificar y encontrar los datos buscados.

Cabe preguntarse por las causas de tan ingente producción científica. Una de ellas, evidentemente, es la ley general que rige el crecimiento de las poblaciones, según la cual la producción engendra más producción, como consecuencia de que la pendiente del crecimiento es proporcional al volumen de lo creado. Pero otra causa importante es la aparición generalizada en todos los países, durante la actual segunda mitad del siglo XX, de la investigación científica como profesión. En épocas anteriores, los investigadores ejercían una cierta profesión, que les proporcionaba el sustento y con la cual cumplían con la sociedad, y "además", si se sentían motivados por su vocación, se dedicaban a la investigación, como tarea complementaria, no obligatoria y no remunerada. Por esto, los investigadores científicos eran considerados personas que se sacrificaban para el bien común y que por ello eran merecedores del mayor agradecimiento y admiración.

Actualmente, prácticamente desde la segunda gran guerra mundial (1.939-45), la cosa ha cambiado, pues la mayoría de los investigadores realizan sus tareas en ejercicio de una profesión asalariada, es decir, como una obligación libremente elegida y adecuadamente remunerada. Esto hace que la investigación científica haya pasado a ser, como decía Ortega y Gasset, "una dimensión de la vida humana ante la cual no tienen sentido aspavientos ni de pasmo en el público ni de presuntuosidad en el actor" y, por otra parte, explica el crecimiento desorbitado de la producción científica, en particular de la matemática, lo que hace difícil la caracterización del tema específico en que cada uno trabaja, por la frondosidad de las ramas de esa ciencia y su crecimiento incesante e irregular, de manera imbricada y entrelazada.

Vamos a hacer un poco de historia para ver como la idea general de lo que llamamos matemática, se ha ido diferenciando y creciendo por sucesivas divisiones y por el nacimiento en ellas de nuevas ramas con complicadas interconexiones.

Cuando el hombre empezó a sentir la necesidad o la curiosidad de conocer su entorno y entender el mundo en que vivía, surgieron dos actividades fundamentales: contar y medir. Con el contar nacieron los números y las operaciones con ellos: fué el cálculo. Con el medir se fueron perfilando las formas y las figuras: fué la geometría. Ambas actividades constituyeron la rama del conocimiento que se llamó matemática. Desde un principio se vió que la matemática podía ser útil para actuar, como una herramienta que había que manejar, y también para conocer, como una manera de estructurar y ordenar el pensamiento y ayudar a la creatividad. Lo primero dió lugar a la llamada matemática aplicada y lo segundo a la matemática pura, dos aspectos cuyos límites no fueron nunca, y lo han sido cada vez menos, demasiado precisos, pero que se han mantenido a través de los siglos.

Platón (-428, -347) en su República, distingue claramente ambos aspectos. Para él hay el cálculo, que recomienda prescribir para quienes habrán de desempeñar las funciones más importantes de la ciudad, "para que se eleven por la inteligencia pura a la contemplación de la naturaleza de los números y así facilitar al alma los medios de elevarse desde la esfera de la generación hasta la verdad y la esencia" y el cálculo "de los comerciantes y traficantes, que lo cultivan con vistas a las compras y las ventas" (525, d). Análoga diferencia hace respecto de la geometría "que debe conducir el alma a contemplar la esencia y tener por objeto el conocimiento", en vez de "manejar objetos materiales y razonar con vistas a la práctica de cuadrar, desarrollar y añadir" (527, b).

Quedaban así bien definidas una matemática pura para filósofos y entendidos, cuyo mundo es el de las ideas, y otra matemática práctica o aplicada, para las necesidades inherentes al mundo real. Sin embargo, esta diferencia entre matemática pura y matemática aplicada, no ha sido nunca tan clara como lo suponía Platón. Menos de un siglo después de la República, aparece Eratostenes (-284, -192) que usa la matemática para medir el radio de la Tierra y también Arquímedes (-287, -212) que al mismo tiempo que realiza finas especulaciones de la más pura matemática (método de exhausión) aplica las mismas a problemas concretos de estática e hidroestática. En ambas creaciones, como en las posteriores de Claudio Ptolomeo (90, 168) en su trigonometría y el sistema del mundo, es difícil decidir qué partes corresponden a la matemática pura y cuáles a la aplicada.

La primera obra sistemática de geometría pura fueron los Elementos de Euclides (siglo -III) cuya pureza se refiere tanto a sus elementos constituyentes (puntos, rectas, planos) que son simples y perfectos, obtenidos por idealización de formas visuales discernibles por los sentidos, como a la construcción axiomática, que sirvió de modelo para toda la matemática posterior, y también a las nociones comunes con las que se introduce la congruencia de figuras a través de los movimientos del plano. Modificando esas distintas componentes de las cuales parte la construcción de Euclides, aparecieron con el tiempo muchas otras geometrías posibles.

Modificando los postulados nacieron las geometrías no euclidianas primero (principios del siglo XIX) y luego un sinnúmero de otras geometrías que aparecían con sólo sustituir los postulados por otros, obra que culminó en 1.899 con los Fundamentos de la Geometría de David Hilbert (1.852-1.925), obra que puede considerarse terminal de la geometría al estilo de Euclides. Respecto de las "nociones comunes", sustituyendo el grupo de los movimientos por otros grupos, nacieron otras muchas geometrías que fueron ordenadas por Felix Klein (1.849-1.925) en su famoso Programa de Erlangen (1.872).

También cabía extender la geometría sustituyendo los elementos básicos de Euclides (contenidos en sus definiciones: punto, recta, plano), pensados como modelos de intuiciones espaciales, por formas más complejas. Así Descartes (1.596-1.650) y Fermat (1.601-1.665) al identificar los "puntos" con pares de números reales y las "rectas" con ecuaciones lineales entre los mismos, crearon la geometría en coordenadas.

Sin perder el modelo geométrico de la Naturaleza, se puede pensar en un cambio y extensión de la geometría suponiendo una intuición distinta de la clásica. Si nuestros ojos fueran telescopios o microscopios electrónicos, nuestra intuición del mundo exterior sería muy diferente e igualmente diferente hubiera sido la geometría edificada sobre ella. Las simplificaciones introducidas por una intuición adecuada a los sentidos del hombre, hicieron que durante siglos se estudiaran únicamente curvas muy regulares, formadas por arcos con tangente contínua. Tan sólo en el siglo pasado se conocieron curvas sin tangente en ningún punto (Weierstrass, 1815-1897) o curvas que llenan un área (Peano, 1858-1932), que se consideraron por mucho tiempo ejemplos patológicos, no englobados como elementos importantes de una geometría. Desde la cuarta década del siglo actual, sin embargo, este tipo de entes geométricos han empezado a estudiarse de manera sistemática y a buscarles aplicaciones en distintas partes de la ciencia. Nacieron así lo que Mandelbrot ha llamado fractales, por ser conjuntos cuya dimensión, convenientemente definida por Hausdorff y Besicovich, es un número fraccionario. Estos nuevos entes se han podido representar gráficamente y estudiar con cierto detalle gracias a las posibilidades brindadas por las modernas computadoras electrónicas, habiendo aparecido muchas aplicaciones en diferentes problemas de la física de los sólidos y de la biología.

Todas esas generalizaciones y expansiones de la geometría, han provenido de sucesivas modificaciones de las bases sobre las que se edificó la geometría griega, simbolizada por Euclides. Pero la matemática tiene otro modo de crecimiento, que surge al trazar puentes entre partes separadas de la misma, creando híbridos, que a veces resultan de interés en sí mismos y otros para cada una de las partes involucradas. Un ejemplo típico es el de las probabilidades geométricas, resultado del cruce entre geometría y probabilidad, dos campos bien diferenciados hasta mediados del siglo XVIII.

La idea de probabilidad, si bien está implícita en cualquier juego de azar y por tanto se remonta por los menos al siglo X de la guerra de Troya, en la cual según Sofocles los sitiadores se entretenían jugando a los dados, no fueron sin embargo consideradas por los matemáticos hasta 1.654, en una correspondencia entre Fermat y Pascal (1.623-1.662) acerca de una aparente paradoja surgida también de un particular juego de dados. Es decir, la teoría de las probabilidades nació de un problema de juego, actividad siempre censurada desde el punto de vista moral, y es posible que este origen "no santo", a pesar del padrinazgo aristocrático de Fermat y Pascal, fuera la causa de que por más de dos siglos, el cálculo de probabilidades quedara excluído de los claustros académicos.

Sin embargo ese cálculo fué progresando, sobre todo gracias a la obra póstuma de Jacobo Bernoulli (1.654-1.705), titulada Ars Conjectandi, aparecida en 1.713, y cuando ya había alcanzado un alto grado de desarrollo, en 1.777 apareció el curioso opúsculo Essai D'Arithmétique Morale de George Louis Leclerc (1.707-1.788), conde de Buffon, autor de una famosa Historia Natural de 36 volúmenes, en uno de los cuales y con un suplemento especial, apareció dicho ensayo.

Buffon era un naturalista, con Linneo el más importante del siglo XVIII, y entre los seres vivientes consideraba que debía estudiar al hombre, no solamente en su anatomía y fisiología, sino también en su espíritu, con sus esperanzas, sus miedos, y sus pasiones. Una de las pasiones más generalizadas, según Buffon, era la de los juegos de azar y por esto se propone analizarlos con la idea de ver su influencia en el comportamiento del hombre con sigo mismo y con la sociedad. Es así como es conducido a dar un valor "moral" a los números, sobre todo a la cantidad de dinero, pues "quien tiene el doble de fortuna que otro no forzosamente es el doble de feliz". Analiza luego algunos juegos de azar y observa que "el análisis ha sido el único instrumento que hasta la fecha se ha utilizado en la ciencia de las probabilidades, como si la geometría no fuera indicada para esos fines, cuando en realidad basta un poco de atención para observar que la ventaja del análisis sobre la geometría es tan solo accidental y que el azar es tan propio del análisis como de la geometría". Después añade "para poner a la geometría en posesión de sus derechos sobre la ciencia del azar, bastará inventar juegos que se basen en la extensión y sus relaciones". Como ejemplo, expone el caso de una aguja que se lanza al azar sobre un plano en el que se han dibujado rectas paralelas equidistantes, cuya distancia entre ellas sea superior a la longitud de la aguja, con el convenio de que el jugador gana si la aguja no corta a ninguna paralela y pierden el caso contrario. Para calcular el premio que recibirá el jugador en el caso de ganar, hace falta calcular la probabilidad de que la aguja no corte a ninguna paralela. Suponiendo que la apuesta sea igual a la unidad, para que el juego sea equitativo, el premio deberá ser igual a la inversa de dicha probabilidad. Esto es lo que calcula Buffon, con lo que se considera que dió origen a la teoría de las probabilidades geométricas. Como vemos, se trata de un problema para cuya solución no es posible "contar" los casos favorables y los posibles, como ocurre en los juegos de azar discretos, como los basados en dados o monedas, sino que se deben "medir" dichos casos. La diferencia entre contar y medir es precisamente lo que distingue la aritmética de la geometría.

Resulta así que las probabilidades geométricas, lo mismo que las probabilidades en general, se originaron en un juego de azar, con lo que se confirma una frase de Leibniz en una carta a Montmort en 1.715, en la que dice "los hombres nunca son tan ingeniosos como la invención de juegos: el espíritu se encuentra en ellos a sus anchas". Notemos, además, que la consideración conjunta de ideas geométricas y probabilistas dió origen a resultados interesantes. Por ejemplo, utilizando el mismo resultado de la aguja de Buffon, realizando la experiencia prácticamente y usando que la frecuencia tiende a la probabilidad, se tiene un método para hallar experimentalmente la longitud de la aguja y también el número "pí" razón de la circunferencia al diámetro. Tal es el origen del llamado método de Montecarlo para obtener resultados por el azar.

Una generalización del problema de la aguja de Buffon no se hizo esperar. Laplace (1.749-1.827) en su Teoría Analítica de las Probabilidades (1.812), considera el plano dividido en rectángulos congruentes por dos haces de rectas paralelas y calcula la probabilidad de que una aguja arrojada al azar sobre el plano no corte a ninguna de esas rectas (problema de la aguja de Laplace). Si en vez de una aguja se lanza sobre el plano una curva cualquiera de longitud finita, se puede calcular el valor medio del número de puntos de intersección de la curva con el reticulado de rectángulos.

Cuando se tiene una teoría basada en la simbiosis de otras dos, el crecimiento puede ser conjunto o por separado según cada componente. En el caso que estamos considerando, el crecimiento por el lado de la geometría dió lugar a la llamada geometría integral, y el crecimiento por el lado de las probabilidades, a la geometría estocástica, dos ramas con las mismas raíces y muchas analogías, pero también con diferentes propósitos y formas de presentación.

Los problemas de la aguja de Buffon o de Laplace, motivan el problema de medir conjuntos de rectas del plano. Desde siempre se habían medido conjuntos de puntos (longitud de curvas o áreas de dominio) pero no se había considerado la medida de conjuntos de rectas. La necesidad surgió de las probabilidades geométricas y al principio aparecieron ciertas paradojas, como la clásica de J. Bertrand (Cálculo de Probabilidades, 1.889) citada en muchos textos clásicos de probabilidades. El inglés M. W. Croftone (1.826-1.915) fué el primero en darse cuenta de que ello era debido a "ciertas imprecisiones del instrumento utilizado y que los conceptos básicos, como los de cualquier tema nuevo, debían ser revisados paciente y repetidamente, probándolos y corrigiéndolos a la luz de experiencias y comparaciones para purgarlos de cualquier error". Definió entonces una densidad para medir conjuntos de rectas y encontró el hecho curioso de que la medida de las rectas que cortan a un conjunto convexo es igual a la longitud de su contorno. Es decir, así como la medida de los puntos de un dominio convexo es igual a su área, la medida de las rectas que lo cortan (siempre en el plano) es igual a su perímetro, curiosa dualidad que luego ha sido extendida a casos muy generales por Ambartzumian (Combinatorial Integral Geometry, 1.982).

Crofton obtuvo sus resultados de manera intuitiva, pero llegó a interesantes fórmulas referentes a conjuntos convexos, de puro interés geométrico, que aparecían como ejemplificación de problemas probabilistas. La justificación rigurosa del proceder de Crofton fué dada más tarde por E. Cartan (1.869-1.951) en 1.896 y H. Lebesgue (1.875-1.941) en 1.912.

En la década de los años 30 del presente siglo, W. Blaschke (1.885-1.962) y su escuela de Hamburgo, retomaron los resultados de Crofton-Cartan Lebesgue para generalizarlos a más dimensiones y sistematizarlos como nuevo capítulo de la geometría, que se tituló geometría integral. Los resultados fueron de puro interés geométrico y la idea primitiva de probabilidad que les había dado origen prácticamente desapareció. En cambio las ideas derivadas de la teoría de grupos, como las del Programa de Erlangen, pasaron a ser explotadas en la nueva geometría, naciendo así la geometría integral afín, proyectiva, no euclidiana, etc. La teoría de grupos de Lie pasó a ser fundamental para la definición de densidades invariantes para estas geometrías. Se vinculó también la teoría con el clásico Análisis Armónico y la medida en grupos.

La rama probabilista de la teoría primitiva de las probabilidades geométricas tardó más en desarrollarse, lo que tuvo lugar en la década de los años 60, principalmente por obra de R.E. Miles que la enriqueció con la incorporación de los procesos estocásticos, dando lugar a la luego llamada Geometría Estocástica, cuya obra básica es actualmente la Stochastic Geometry de D. Stoyan, W.S. Kendall y J. Mecke (1.987). Un capítulo interesante de esta geometría es el de los mosaicos aleatorios, terreno en el que se mezclan la ciencia y el arte, desde los mosaicos de la Alhambra de Granada a los cuadros de Escher, pasando por los grupos cristalográficos.

Al principio hemos mencionado los dos aspectos, puro y aplicado, de la matemática. En los casos de la Geometría Integral y de la Estocástica, los dos aspectos presentan por separado su interés. Son teorías en general elaboradas por matemáticos puros, con vistas únicamente a problemas del mundo de las ideas, sin otra guía que la belleza de los mismos y el interés por entender y ordenar sus alcances. Luego han surgido las aplicaciones, que han originado la llamada Estereología, que es una técnica útil en distintas ramas del conocimiento, como la metalurgia, mineralogía, botánica, anatomía,... "se trata de un conjunto de métodos para la exploración del espacio tridimensional a partir del conocimiento de secciones bidimensionales o proyecciones sobre planos". Sus bases teóricas son la geometría integral y estocástica y sus técnicas las relacionadas con la microscopía. Uno de los principales creadores es el español L. M. Cruz Orive, de la universidad de Berna.

La estereología es una primera aproximación, muy simplificada, del problema general de la tomografía computerizada, cuyas raíces pertenecen también a la geometría integral en el sentido más duro de Helgason y Gelfand, el cual fué iniciado por el matemático Radon en 1.917, llevado a la práctica por el físico A.M. Cormack (1.963) e industrializado por el ingeniero G.N. Hounsfield (1.972), recibiendo por ello estos dos últimos el premio Nobel de

Medicina en 1979. Es un claro ejemplo de la unidad de la ciencia pues por el esfuerzo conjunto de un matemático, un físico y un ingeniero, aún separados en el tiempo y en el espacio, cada uno trabajando en su campo, se consiguió un resultado trascendental en la medicina.

Esta dualidad, pura y aplicada, o filosofía y herramienta, de la matemática, que convierte a la misma en un entretejido de caminos y puentes entre el mundo de las ideas y el de nuestro entorno real, es precisamente lo que le da universalidad y permanencia, por su amplio espectro de gustos y variedad de formas. Quizás sea por ello, que la matemática es al mismo tiempo la ciencia más conservadora y la más creativa y cambiante, que conserva frescas y vivas sus raíces más remotas, en renovada armonía con los brotes más recientes y revolucionarios. Hemos intentado ponerlo de manifiesto en un ejemplo simple y muy limitado, pero seguramente que una evolución análoga puede encontrarse en muchos otros capítulos de esa ciencia.

Luis Antonio Santaló.