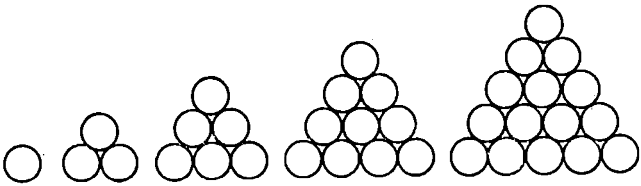
6. kapitola

TROJÚHELNÍKOVÁ ČÍSLA

Mezi kombinačními čísly byla v poslední době studována zejména čísla tvaru $\binom{n}{2}$, která se při $n \geqq 2$ nazývají *čísly trojúhelníkovými*. Název je odvozen z toho, že číslo $\binom{n}{2}$ udává (zhruba řečeno) počet shodných kružnic, jež lze umístit v trojúhelníkovém schematu tak, jak to pro $n = 2,$



Obr. 7.

3, 4, 5, 6 ukazuje obr. 7. Pojem trojúhelníkového čísla se vyskytuje již r. 1762 u E. de Joncourta, ale teprve v posledních desetiletích studovali vlastnosti trojúhelníkových čísel zevrubněji někteří matematikové, a to zvláště autoři polští (A. Mąkowski, A. Schinzel, W. Sierpiński*), K. Zarankiewicz aj.). Ukážeme si zde též něco z této problematiky.

*) W. Sierpiński, vicepresident Polské akademie věd a profesor varšavské university, je dobře znám i u nás. Je čestným doktorem Karlovy university v Praze a zahraničním členem Československé akademie věd.

Nejprve uvedeme tabulku trojúhelníkových čísel pro několik hodnot n.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\binom{n}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

Také obrázek nám přehledně ukáže, jak vzrůstají trojúhelníková čísla, vzrůstá-li číslo n. Je to vidět na obr. 8, kde prvním sedmi hodnotám z naší tabulky odpovídá 7 bodů označených malými kroužky. Vzpomeneme-li na to, co jsme se učili v nauce o funkcích, můžeme v obr. 8 sestrojit i graf funkce

$$y=\frac{1}{2}x(x-1);$$

grafem této funkce je parabola, jejíž část tu naznačuje tečkovaná čára. Nyní však už přistoupíme k příkladům.

Příklad 37. Čísla 6, 66 a 666 jsou trojúhelníková, avšak číslo 6666 není trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Že čísla 6 a 66 jsou trojúhelníková, je nám už známo, neboť je $\binom{4}{2}=6$ a $\binom{12}{2}=66$. Zabývejme se tedy číslem 666 a ptejme se, zda pro některé přirozené číslo n platí $\binom{n}{2}=666$. Tento vztah vede k rovnici

$$n(n-1)=1332,$$

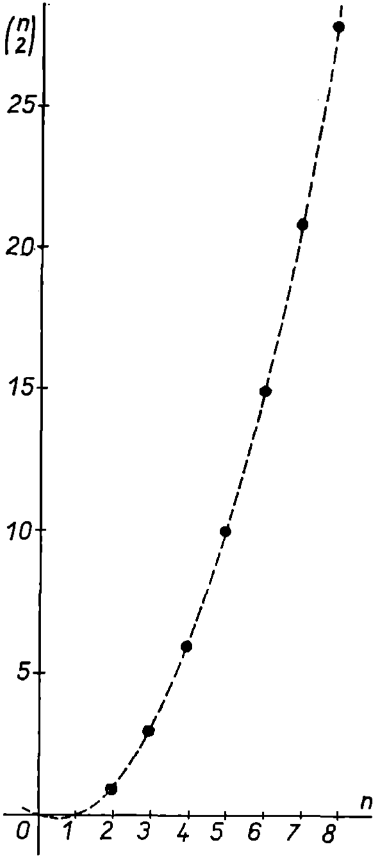
což po malé úpravě dává $n^2-n-1332=0$. Tato kvadratická rovnice má kořeny $n=37$ a $n=-36$, z nichž druhý nevyhovuje požadavkům úlohy.

Kořen $n=37$ vyhovuje naší úloze.

Konečně zbývá úvaha o čísle 6666. Zde docházíme ke kvadratické rovnici

$$n^2 - n - 13332 = 0,$$

která má diskriminant $D = 53329$. Podle tabulek se můžeme přesvědčit, že neexistuje žádné přirozené číslo r, aby bylo $r^2 = 53329$. Tento výsledek znamená, že uvažované kvadratické rovnici nevyhovuje žádné přirozené číslo n, jinými slovy, že číslo 6666 není trojúhelníkové.



Obr. 8.

Příklad, který jsme probrali, nám znovu ukazuje, jak důležitý je matematický důkaz nějakého tvrzení. Z případů čísel 6, 66 a 666 bychom totiž mohli dojít k ukvapené domněnce, že v desítkové soustavě každé číslo psané šestkami, je trojúhelníkové. Toto tvrzení je ovšem nesprávné. V dalším příkladě se setkáme s obdobným tvrzením o trojúhelníkových číslech, psaných číslicemi 2 a 1; tam však se obdobná domněnka ukáže správnou.

Příklad 38. V posloupnosti

$$21, 2211, 222111, 22221111, \ldots$$

je každý člen číslo trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Čísla v naší posloupnosti jsou psána číslicemi 2 a 1, přičemž v každém členu se nejprve napíše několikrát číslice 2 a pak se doplní ve stejném počtu číslice 1. Člen n-tý můžeme tedy schematicky vyjádřit ve tvaru

$$a_n = \underbrace{222\ldots2}_{n\text{-krát}}\ \underbrace{111\ldots1}_{n\text{-krát}},$$

což v jiném tvaru dává

$$a_n = (2.10^{2n-1} + 2.10^{2n-2} + \ldots + 2.10^{n+1} + 2.10^n) +$$
$$+ (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).$$

Z mnohočlenu v první závorce vytkneme 2.10^n a v takto získaném výrazu provedeme další úpravu, jež vede k výsledku

$$a_n = (2.10^n + 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).$$

Podle známého vzorce pro částečný součet geometrické posloupnosti dostáváme další úpravu

$$a_n = \frac{1}{9}(2.10^n + 1)(10^n - 1).$$

Nyní jsme člen a_n vyjádřili ve tvaru, který nám umožní vyšetřovat, zda je toto číslo trojúhelníkové. Ptejme se, zda se a_n dá vyjádřit ve tvaru $\binom{x}{2}$. To vede k rovnici

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{9}(2.10^n + 1)\ (10^n - 1),$$

která po odstranění zlomků a malé úpravě dává

$$9x^2 - 9x - 2.(2.10^n + 1)\ (10^n - 1) = 0.$$

Její diskriminant je $D = 9^2 + 8.9.(2.10^n + 1)(10^n - 1)$, což po úpravě dává

$$D=9(16.10^{2n}-8.10^n+1)=3^2.(4.10^n-1)^2.$$

Pro kořeny kvadratické rovnice tedy nacházíme

$$x=\frac{1}{3}(2.10^n+1), \quad \text{resp. } x=\frac{2}{3}(1-10^n).$$

Druhý kořen můžeme hned zamítnout, neboť pro každé přirozené číslo n je to číslo záporné. Pohlédneme-li na kořen první, mohlo by se zdát, že ani ten nebude vyhovovat naší úloze, neboť je tu jmenovatel 3. Číslo 2.10^n+1 je však podle známého znaku dělitelnosti dělitelné třemi (pro každé přirozené číslo n) a proto první kořen je číslo přirozené. Je to výsledek, který vyhovuje naší úloze a je tím dokázáno, že v uvedené posloupnosti jsou všechny členy čísla trojúhelníková.

V dalším příkladu bude dáno přirozené číslo, které budeme vyjadřovat jako součet několika čísel trojúhelníkových. Tato otázka má vždycky smysl, neboť číslo 1 je trojúhelníkové a lze tedy libovolné přirozené číslo n triviálním způsobem vyjádřit jako součet n trojúhelníkových čísel. Nás ovšem budou zajímat vyjádření, jež nejsou zcela triviální.

Příklad 39. Vyjádřete číslo 80 jako součet co nejmenšího počtu trojúhelníkových čísel.

Řešení. S trochou početní námahy (a s využitím tabulky na str. 61) najdeme, že platí $80 = 10 + 15 + 55$, přičemž všechny tři sčítance jsou čísla trojúhelníková. Dané číslo lze tedy vyjádřit jako součet tří trojúhelníkových čísel. Je možno najít vyjádření s menším počtem sčítanců? Několik pokusů nám ukáže, že 80 nelze vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel. Nemůžeme se ovšem spokojit jen nezdarem nahodilých pokusů, a proto toto tvrzení dokážeme. Důkaz spočívá jen v systematickém probrání všech možností.

Dejme tomu, že platí $80 = a + b$, kde a, b jsou vhodná trojúhelníková čísla. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $a \leqq b$. Pak máme odhad

$$a+a \leqq a+b=80,$$

čili $2a \leqq 80$. Pro a tedy vychází $a \leqq 40$. Nyní vyhledáme tabulku na str. 61 a zjistíme, že pro a přicházejí v úvahu hodnoty*) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36. Pro druhé trojúhelníkové číslo b máme vztah $b = 80 - a$, což pro nalezených osm hodnot dává po řadě výsledky 79, 77, 74, 70, 65, 59, 52 a 44. Žádné z těchto čísel však není trojúhelníkové, jak nám ukáže opět naše tabulka. Nebyl tedy správný náš předpoklad, že číslo 80 lze vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel.

Tím jsme však s řešením již hotovi; číslo 80 není trojúhelníkové, nelze je vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel a vztah $80 = 10 + 15 + 55$ ukazuje, že je lze vyjádřit jako součet tří trojúhelníkových čísel. To je tedy skutečně vyjádření s nejmenším počtem sčítanců.

V předcházejícím příkladě jsme nezkoumali otázku, zda vyjádření čísla 80 součtem tří trojúhelníkových čísel je jednoznačné (nehledíme-li na pořadí sčítanců) nebo zda existuje více takových vyjádření. Tomu se věnujeme v další úvaze.

Příklad 40. Vyšetřete, kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 80 jako součet tří trojúhelníkových čísel.

*) Zde se trochu opíráme o názor. Není snad předem jasné, zda pro některá velká čísla n, jež v naší tabulce nejsou uvedena, neplatí znovu $\binom{n}{2} \leqq 40$. Tato možnost je však vyloučena a můžeme to i dokázat. Tvrzení je jistě známé čtenářům, kteří znají průběh tečkované paraboly z obr. 8, nebo je můžeme odvodit snadnou úvahou o nerovnostech.

Řešení. Pišme $80 = a + b + c$, kde a, b, c značí vhodná trojúhelníková čísla. Jejich označení je v naší moci, takže můžeme mezi nimi předpokládat vztah $a \leqq b \leqq c$. Odtud plyne $3a \leqq 80$, čili

$$a \leqq 26\frac{2}{3}.$$

Podle tabulky uvedené na str. 61 přicházejí pro trojúhelníkové číslo a tyto možnosti: 1, 3, 6, 10, 15 a 21. Probereme každou z nich zvlášť.

Pro $a = 1$ se naše původní rovnice převede na tvar $79 = b + c$. Protože je $b \leqq c$, plyne odtud $2b \leqq 79$ čili $b \leqq 39{,}5$. Pro b tedy přicházejí v úvahu možnosti 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36, jimž odpovídají tato čísla c: 78, 76, 73, 69, 64, 58, 51 a 43. Jedině číslo 78 je trojúhelníkové a našli jsme tedy jedno z možných vyjádření, totiž $80 = 1 + 1 + 78$.

Pro $a = 3$ dostáváme rovnici $77 = b + c$, což vede k nerovnosti $2b \leqq 77$ a dále k odhadu $3 \leqq b \leqq 38{,}5$. Pro b máme tedy možnosti 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36, jimž odpovídají čísla $c = 74, 71, 67, 62, 56, 49$ a 41. Žádné z těchto čísel c není trojúhelníkové, takže jsme v tomto případě nenašli žádné vyjádření čísla 80.

Pro $a = 6$ dostáváme rovnici $74 = b + c$, což dává $2b \leqq 74$, čili $6 \leqq b \leqq 37$. Trojúhelníkovým číslům $b = 6$, 10, 15, 21, 28 a 36 odpovídají čísla $c = 68, 64, 59, 53, 46$ a 38. Ani zde nevyšlo žádné číslo trojúhelníkové.

Pro $a = 10$ máme $70 = b + c$, čili $2b \leqq 70$ a dále $10 \leqq b \leqq 35$. Číslům $b = 10$, 15, 21 a 28 odpovídají $c = 60, 55, 49$ a 42, z nichž jen číslo 55 je trojúhelníkové. Tím jsme našli vyjádření $80 = 10 + 15 + 55$, které je nám známo již z předcházejícího příkladu.

Pro $a = 15$ vychází rovnice $65 = b + c$, což vede k nerovnosti $2b \leqq 65$ a dále $15 \leqq b \leqq 32{,}5$. Číslům $b = 15$, 21 a 28 odpovídají $c = 50$, 44 a 37, z nichž žádné není trojúhelníkové.

Konečně pro $a = 21$ máme $59 = b + c$, čili $2b \leqq 59$, což dává odhad $21 \leqq b \leqq 29{,}5$. Číslům $b = 21$ a 28 odpovídají $c = 38$ a 31, takže ani zde nevychází žádné vyjádření čísla 80.

Odpověď. Nehledíme-li na pořadí sčítanců, lze číslo 80 vyjádřit dvěma způsoby, totiž $80 = 1 + 1 + 78$ a $80 = 10 + 15 + 55$. Kdybychom přihlíželi k pořadí sčítanců, měli bychom celkem devět možností.

V dalším příkladě se budeme zabývat vzorcem

$$a_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}.$$

Snadný výpočet ukazuje, že $a_1 = 1$. Také pro $n = 2$ a $n = 3$ máme jednoduché výsledky:

$$a_2 = \frac{9+12\sqrt{2}+8-(9-12\sqrt{2}+8)}{4\sqrt{2}} = 6,$$

$$a_3 = \frac{(27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2}) - (27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = 35.$$

Už tyto tři případy ukazují, že čísla a_n jsou přirozená (ačkoliv jejich vyjádření zlomkem a odmocninou je dosti složité). Toto podezření je celkem správné a plyne z binomické věty; v příkladě 41 si o číslech a_n dokážeme ještě více.

Příklad 41. Pro každé přirozené číslo n je číslo a_n^2 trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Budeme se zabývat rovnicí

$$\binom{x}{2} = a_n^2,$$

která přejde na tvar

$$x^2-x-2a_n^2=0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je číslo $D = 1 + 8a_n^2$. Budeme se nyní zabývat úpravou čísla D; zřejmě chceme ukázat, že číslo D je druhou mocninou některého přirozeného čísla. Platí

$$D=1+8\,.\frac{(3+2\sqrt{2})^{2n}-2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^{2n}}{32}.$$

Zkrátíme osmi, uvedeme na společného jmenovatele a dostáváme

$$D=\frac{4+(3+2\sqrt{2})^{2n}-2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^{2n}}{4}.$$

Místo čísla 4 můžeme do čitatele psát součin $4(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n$, jak nás přesvědčí výpočet. V čitateli zlomku máme už výraz $-2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n$, takže po sloučení dostáváme

$$D=\frac{(3+2\sqrt{2})^{2n}+2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^{2n}}{4}.$$

Čitatele můžeme upravovat podle vzorce $u^2+2uv+v^2=(u+v)^2$, přičemž $u=(3+2\sqrt{2})^n$, $v=(3-2\sqrt{2})^n$. Vychází

$$D=\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}\right)^2.$$

Vraťme se k výchozí kvadratické rovnici. Její kořeny jsou

$$x=\frac{1+\sqrt{D}}{2},\quad \text{resp. } x=\frac{1-\sqrt{D}}{2}.$$

Druhou možnost hned zamítneme, neboť vede k zápornému číslu. Úpravou prvního vzorce dostáváme

$$x=\frac{2+(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{4}.$$

Tento výsledek se dá ještě zjednodušit, použijeme-li vyjádření

$$3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2, \quad 3-2\sqrt{2}=(-1+\sqrt{2})^2.$$

Číslo 2 lze napsat jako $2(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})$ nebo též $2(1+\sqrt{2})^n(-1+\sqrt{2})^n$. Pro číslo x tedy vychází vyjádření

$$x=\frac{(1+\sqrt{2})^{2n}+2(1+\sqrt{2})^n(-1+\sqrt{2})^n+(-1+\sqrt{2})^{2n}}{4}$$

čili

$$x=\left(\frac{(1+\sqrt{2})^n+(-1+\sqrt{2})^n}{2}\right)^2.$$

Musíme se ještě přesvědčit o tom, že toto číslo x je přirozené. K tomuto vyšetřování nám poslouží binomická věta, podle níž platí

$$(1+\sqrt{2})^n=\binom{n}{0}.1^n+\binom{n}{1}.1^{n-1}.\sqrt{2}+\binom{n}{2}.1^{n-2}.2+\ldots+$$
$$+\binom{n}{n}.(\sqrt{2})^n,$$

$$(-1+\sqrt{2})^n=\binom{n}{0}.(-1)^n+\binom{n}{1}(-1)^{n-1}.\sqrt{2}+\binom{n}{2}(-1)^{n-2}.2+$$
$$+\ldots+\binom{n}{n}.(\sqrt{2})^n.$$

Je-li n číslo sudé, pak sečtením obou výrazů na pravých stranách se zruší všechny členy tvaru $m\sqrt{2}$ (m celé) a součet je tedy celé číslo. Dokonce vidíme, že je to číslo sudé, takže po dělení dvěma vyjde rovněž číslo celé.

Umocníme-li ještě na druhou, vychází číslo x, jež je tedy přirozené.

Je-li n číslo liché, pak naopak zůstávají všechny sčítance tvaru $m\sqrt{2}$ a ostatní členy se zruší. Můžeme vytknout číslo $\sqrt{2}$ a koeficient, který tak dostáváme, je sudý. Dělíme dvěma a dostáváme zase číslo tvaru $m\sqrt{2}$. Zbývá umocnit na druhou a výsledek $2m^2$ je opět číslo přirozené. Rozbor ukázal, že x je vždycky přirozené číslo. Ponecháváme čtenáři, aby si rozmyslel, že je $x > 1$ pro každé přirozené číslo n. Příklad je tím rozřešen.

Co plyne z probraného příkladu? Protože čísel a_n je nekonečně mnoho*), můžeme vyslovit toto tvrzení: Existuje nekonečně mnoho trojúhelníkových čísel, z nichž každé je rovno druhé mocnině některého přirozeného čísla.

Úlohy

24. Rozhodněte, zda v posloupnosti 55, 5050, 500500, 50005000, ... jsou všechny členy čísla trojúhelníková.

25. Vyjádřete číslo 60 jako součin dvou trojúhelníkových čísel.

26. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel, která nemůžeme vyjádřit jako součin několika čísel trojúhelníkových.

27. Najděte příklad přirozeného čísla, které můžeme alespoň dvěma různými způsoby vyjádřit jako součin několika čísel trojúhelníkových větších než 1.

28. Jsou dána dvě přirozená čísla $m < n$. Potom platí $a_m < a_n$ (viz vzorec na str. 67). Dokažte.

*) Otázce, že různým číslům n odpovídají různá čísla a_n, je věnována též úloha 28 na této stránce.

29. Rozhodněte, zda rovnice

$$\binom{x}{2}+\binom{y}{2}=\binom{z}{2}$$

má konečně nebo nekonečně mnoho řešení v přirozených číslech x, y, z.