SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALEXANDER GROTHENDIECK

Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique III : préschémas quotients

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 212, p. 99-118

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__99_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 212

Février 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
III : PRÉSCHEMAS QUOTIENTS

par Alexander GROTHENDIECK

Introduction.

Les problèmes traités dans le présent exposé diffèrent de ceux envisagés dans les deux précédents, en ce qu'on essaye de représenter certains foncteurs covariants, et non plus contravariants, de schémas variables. Le procédé de passage au quotient est cependant essentiel dans beaucoup de questions de construction en géométrie algébrique, y compris celles des exposés I et II ([1], [2]). Ainsi, la question de l'effectivité d'une donnée de descente sur un T-préschéma X, relativement à un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $T \to S$, équivaut à la question de l'existence d'un quotient de X (satisfaisant les propriétés raisonnables examinées plus bas), pour la relation d'équivalence plate dans X définie par la donnée de descente ; les questions soulevées dans [1], A, § 2 c se résoudront sans doute en même temps que les questions posées dans le paragraphe numéro 2 du présent exposé. De même, le schéma de Picard (pour la définition, cf. [2], C, § 3) d'un S-schéma X peut se définir de diverses manières comme quotient de certains autres schémas (de diviseurs positifs, ou d'immersions dans un projectif) par des relations d'équivalence plates, la définition et la construction de ces schémas auxiliaires étant d'ailleurs techniquement plus simple : ce sont en effet des schémas du type $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ et variantes définis dans [2], C, § 2, et dont la construction sera l'objet de l'exposé suivant (sous des hypothèses de projectivité convenables). Combinant donc les résultats du présent exposé et du suivant, on arrive à la construction des schémas de Picard, sous des hypothèses convenables.

Le problème du passage au quotient dans les préschémas offre encore plusieurs questions non résolues. La plus importante est mentionnée dans le paragraphe 8. Elle reste actuellement le seul obstacle à la construction des schémas de modules sur les entiers pour les courbes de genre arbitraire, les variétés abéliennes polarisées, etc. C'est dire que sa solution mérite les efforts des spécialistes des groupes algébriques.

1. Relations d'équivalence, relations d'équivalence effectives.

Soient $\underset{\sim}{C}$ une catégorie, et X un objet de $\underset{\sim}{C}$. Un couple de morphismes

$$p_1 , p_2 : R \rightrightarrows X$$

est dit "couple d'équivalence" dans $\underset{\sim}{C}$, de but X et de source R, si pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, les deux applications correspondantes

$$p_1(T) , p_2(T) : R(T) \rightrightarrows X(T)$$

(où pour tout objet Y de $\underset{\sim}{C}$, on pose $Y(T) = \mathrm{Hom}(T , Y)$) définissent une application

$$R(T) \to X(T) \times X(T)$$

induisant une bijection de $R(T)$ sur le graphe d'une relation d'équivalence dans l'ensemble $X(T)$. On introduit entre les couples d'équivalences de but X une relation d'équivalence évidente, une classe d'équivalence pour cette dernière est appelée une $\underset{\sim}{C}$-relation d'équivalence dans X, ou simplement une relation d'équivalence si aucune confusion n'en résulte.

Si $X \times X$ existe, la donnée d'une relation d'équivalence dans X équivaut à la donnée d'un sous-objet R de $X \times X$, tel que, pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, le sous-ensemble de $(X \times X)(T) = X(T) \times X(T)$ qui correspond à $R(T)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $X(T)$. Désignant par p_1 et p_2 les morphismes de R dans X induits par les projections pr_1 et pr_2, la condition précédente exprime que (p_1 , p_2) est un couple d'équivalence. On peut aussi exprimer diagrammatiquement dans $\underset{\sim}{C}$ (sous réserve de l'existence de $X \times X$ et du produit fibré $(R , p_2) \times_X (R , p_1)$) les axiomes d'une relation d'équivalence au sens ensembliste pour les $R(T)$ dans les $X(T)$, conformément au principe général expliqué dans [2], A, § 1. Nous n'en aurons pas besoin.

Chaque fois qu'on a un couple de morphismes (p_1 , p_2) de même source R et de même but X, on peut définir le conoyau du couple comme l'objet Y de $\underset{\sim}{C}$ qui représente le foncteur covariant en Z :

$$\mathrm{Hom}_{p_1 , p_2}(X , Z) ,$$

ensemble des morphismes u de X dans Z tels que $up_1 = up_2$. Si Y existe, il est déterminé à un isomorphisme unique près. On le notera $Y/(p_1 , p_2)$ ou, par abus de notation, Y/R, cette dernière notation étant surtout employée lorsque

(p_1 , p_2) est un couple d'équivalence : il est d'usage alors d'identifier dans les notations la relation d'équivalence définie par le couple, et R . Noter que si on considère Y comme un quotient de X , il ne dépend en effet que de la relation d'équivalence définie par le couple (p_1 , p_2) .

Partons maintenant d'un morphisme

$$f : X \to Y$$

qui permet donc de considérer X comme un "objet au-dessus de Y " , et supposons que le produit fibré

$$\underset{\sim}{R}(f) = X \times_Y X$$

existe. Soient p_1 et p_2 ses deux projections. Alors (p_1 , p_2) est un couple d'équivalence, dit associé au morphisme f . Il définit donc une relation d'équivalence, dite associée à f .

On dit qu'un couple de morphismes (p_1 , p_2) de but X , de même source R , est un couple d'équivalence effectif, si

(i) le conoyau $X/(p_1 , p_2) = Y$ existe

(ii) le produit fibré $X \times_Y X$ existe

(iii) le morphisme $R \to X \times_Y X$ de composantes p_1 et p_2 est un isomorphisme.

Alors le couple (p_1 , p_2) est bien un couple d'équivalence. On dit aussi que la relation d'équivalence qu'il définit est une relation d'équivalence effective.

On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est un épimorphisme effectif si

(i) le produit fibré $X \times_Y X = R$ existe ;

(ii) le quotient $X/(p_1 , p_2)$ existe, où p_1 et p_2 sont les deux projections de R dans X ;

(iii) le morphisme $X/(p_1 , p_2) \to Y$ induit par f est un isomorphisme.

Alors f est bien un épimorphisme, et même un épimorphisme strict (cf. [1], *A*, § 2. 3) , la réciproque étant vraie si le produit fibré $X \times_Y X$ existe. On dit aussi que l'objet quotient de X défini par l'épimorphisme f est un quotient effectif de X .

Les définitions précédentes impliquent la "correspondance galoisienne" suivante :

PROPOSITION 1.1. - Il y a correspondance biunivoque, respectant les ordres naturels, entre l'ensemble des relations d'équivalence effectives R dans X, et l'ensemble des quotients effectifs Y de X, à R correspondant le quotient effectif X/R, et à Y correspondant la relation d'équivalence effective définie par la projection canonique $X \to Y$, (qui est définie par le produit fibré $X \times_Y X$ muni de ses deux projections).

Dans les très bonnes catégories (ensembles, faisceaux d'ensembles, etc.) tout quotient est effectif, et toute relation d'équivalence est effective. Il n'en est plus de même dans les catégories telles que la catégorie des préschémas au-dessus d'un préschéma S donné, même lorsque S est le spectre d'un corps, et même en se bornant aux schémas finis sur S. Les questions d'effectivité, et même (dans le cas de préschémas non finis sur S) les questions d'existence de quotients, s'avèrent le plus souvent délicates.

2. Exemple : préschémas finis sur S.

Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des préschémas finis sur S, supposé localement noethérien. Elle est équivalente à la catégorie opposée de la catégorie des faisceaux cohérents d'algèbres commutatives sur S, ou encore, si S est affine d'anneau A, à la catégorie opposée de la catégorie des A-algèbres finies sur A (i. e. qui sont des modules de type fini sur A). On en conclut tout de suite que dans $\underset{\sim}{C}$ les limites projectives finies et les limites inductives finies existent. C'est bien connu (sans aucune hypothèse de finitude...) pour les premières. Ainsi le produit fibré de préschémas X, Y sur S correspond au produit tensoriel $B \otimes_A C$ des algèbres correspondantes, le noyau de deux morphismes $X \rightrightarrows Y$, défini par deux homomorphismes de A-algèbres $u, v : C \rightrightarrows B$, correspond au quotient de B par l'idéal engendré par les $u(c) - v(c)$, etc. Pour les limites inductives finies, il suffit de considérer d'une part les sommes finies, qui correspondent au produit ordinaire de A-algèbres, et d'autre part les conoyaux de couples de morphismes $X \rightrightarrows Y$, qui correspondent en effet, (comme on constate aussitôt) au sous-anneau de C ensemble des éléments où les homomorphismes $u, v : C \rightrightarrows B$ coïncident (ce dernier est fini sur A grâce à l'hypothèse noethérienne). Notons d'ailleurs qu'on peut montrer, utilisant l'hypothèse noethérienne, que les limites inductives finies, et en particulier les quotients, ainsi construits dans la catégorie $\underset{\sim}{C}$ des préschémas finis sur S, sont en réalité des quotients dans la catégorie de tous les préschémas.

Comme nous avons dit dans [1], il y a dans $\underset{\sim}{C}$ des épimorphismes non effectifs (ou stricts, cela revient au même puisque les produits fibrés existent). J'ignore si les relations d'équivalence sont toujours effectives, lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse de platitude. Je n'ai obtenu, dans cette direction, que des résultats très partiels, positifs, indispensables pour la démonstration du théorème fondamental en théorie formelle des modules (cf. [2], B, th. 1). Signalons qu'il est facile dans le problème posé de se ramener au cas où S est le spectre d'un anneau A artinien local, de corps résiduel algébriquement clos. Mais même si A est un corps, la réponse n'est pas connue.

On peut aussi considérer le cas d'un préschéma X sur S qui n'est plus supposé fini sur S, mais en considérant une relation d'équivalence R dans X telle que $p_1 : R \to X$ soit un morphisme fini. On dit alors que R est une relation d'équivalence finie. Supposant pour simplifier S et X affines (donc R affine, de sorte que la situation est ramenée à une situation de pure algèbre commutative), on ignore même dans ce cas s'il existe un quotient $X/R = Y$ et si le morphisme canonique $X \to Y$ est fini. (Le cas le plus simple est celui où on suppose que S est le spectre d'un corps k, et où X est le spectre de $k[t]$, i. e. la droite affine). Bien entendu, si les deux problèmes précédents se résolvent par l'affirmative, on peut conclure dans la situation présente que R est effective. Notons que le problème de l'existence d'un quotient Y et de la finitude de $f : X \to Y$ se pose dans exactement les mêmes termes si, au lieu d'un graphe d'équivalence dans X, on a seulement un prégraphe d'équivalence dans X, au sens du paragraphe 4.

La question du passage au quotient par une relation d'équivalence finie plus ou moins arbitraire se pose dans la construction des préschémas par "recollement" de préschémas donnés X_i suivant certains sous-préschémas fermés ; la loi du recollement s'exprime précisément par une relation d'équivalence finie dans le préschéma somme X des X_i. Il faut s'attendre aussi que la solution des problèmes posés ici et de diverses variantes, sera une condition préliminaire à la mise au point d'une technique générale de constructions non projectives, dans la direction inaugurée dans [2].

Le seul fait général positif connu du rédacteur est le suivant :

PROPOSITION 2.1. - Soient S un préschéma localement noethérien, s un point de S, et Ω une extension algébriquement close de $k(s)$. Considérons le "foncteur-fibre" correspondant F , associant à tout S-schéma X fini sur S , l'ensemble des points de X/S à valeurs dans Ω . Ce foncteur (trivialement exact à gauche) est exact à droite, i. e. commute aux limites inductives finies, et en particulier aux conoyaux de couples de morphismes.

En utilisant ce résultat pour tous les "points géométriques" de S , on en déduit que la catégorie C' "quotient" de C , obtenue en raisonnant "modulo morphismes surjectifs radiciels" (i. e. obtenue en adjoignant formellement des inverses pour les morphismes en question), est une catégorie "géométrique", i. e. satisfait les mêmes propriétés "de nature finie" que la catégorie des ensembles. En particulier, toute relation d'équivalence y est effective. Cela implique que si R est une relation d'équivalence dans un X fini sur S , alors le morphisme canonique $R \to X \times_Y X$ (où $Y = X/R$) est radiciel et surjectif (en fait une immersion fermée surjective, puisque c'est un monomorphisme).

3. Cas d'un groupe d'opérateurs.

On suppose de nouveau que $\underset{\sim}{C}$ est une catégorie quelconque. Soient G , X des objets de $\underset{\sim}{C}$, et supposons que G est un $\underset{\sim}{C}$-groupe d'opérateurs sur l'objet X de $\underset{\sim}{C}$. Cela signifie (cf. [2], A, § 1) que pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, on s'est donné une structure de groupe sur $G(T)$ et une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs $G(T)$ sur $X(T)$, de telle façon que pour T variable, les structures en question "varient fonctoriellement" avec T . Si dans $\underset{\sim}{C}$ les produits $G \times G$ et $G \times X$ existent, une telle structure peut encore se définir comme un couple de morphismes

$$G \times G \to G , \qquad \pi : G \times X \to X$$

soumis à la condition que pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, les lois de composition correspondantes pour les ensembles $G(T)$ et $X(T)$ fassent de $G(T)$ un groupe opérant sur $X(T)$. La traduction de cet axiome par la commutativité de certains diagrammes dans $\underset{\sim}{C}$ est facile, mais fastidieuse, et en fait, parfaitement inutile dans tous les cas à ma connaissance.

Supposons que $G \times X$ existe, et considérons les deux morphismes

$$p_1 , p_2 : G \times X \rightrightarrows X$$

avec

$$p_1 = pr_1 \quad , \quad p_2 = \pi \quad .$$

On constate aussitôt que le couple (p_1 , p_2) est un couple d'équivalence si, et seulement si, pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, l'application

$$G(T) \times X(T) \sim (G \times X)(T) \to X(T) \times X(T) ,$$

définie par ce couple, est injective, i. e. si le groupe $G(T)$ opère <u>librement</u> sur l'ensemble $X(T)$, i. e. $g \in G(T)$, $x \in X(T)$, $g.x = x$ implique g = élément unité du groupe $G(T)$. On dit alors que G <u>opère librement</u> sur X , (ou que X est un <u>$\underset{\sim}{C}$-espace principal sous</u> G). La relation d'équivalence associée au couple (p_1 , p_2) est alors appelée la <u>relation d'équivalence définie par le groupe</u> G opérant librement sur X . Lorsque $X \times X$ existe également et qu'on considère le morphisme

$$p : G \times X \to X \times X$$

défini par le couple (p_1 , p_2) , la condition que G opère librement signifie que p est un <u>monomorphisme</u>.

Bien entendu, même lorsque G n'opère pas librement sur X , on désire avoir des critères d'existence d'un quotient de X par G , i. e. du conoyau du couple (p_1 , p_2) précédent.

Le conoyau en question sera souvent noté X/G , ou de préférence $G\backslash X$ si G opère à gauche (la notation précédente étant réservée au cas où G opère à droite). On notera que même lorsque "l'image" de $G \times X$ par p existe (cette image étant définie par exemple comme le plus petit sous-objet de $X \times X$ par lequel on peut factoriser p), soit R , cette dernière n'est pas le plus souvent une relation d'équivalence dans X . Si on essaye alors de passer directement au quotient par R (ou plus précisément, par le couple des morphismes de R dans X induits par les deux projections pr_i) on perd sans espoir les caractères particuliers du couple de départ (p_1 , p_2) . Il importe ~~donc~~ de trouver une généralisation de la notion de relation d'équivalence, s'appliquant directement au couple défini par un $\underset{\sim}{C}$-groupe d'opérateurs.

4. <u>Pré-relations d'équivalence</u>.

Rappelons qu'on appelle <u>groupoïde</u> une catégorie où tous les morphismes sont des isomorphismes. D'autre part, une catégorie doit être définie comme formée de deux ensembles de base (X , R) , l'ensemble des <u>objets</u> et l'ensemble des <u>flèches</u>, munis des structures suivantes :

(i) Un couple d'applications

$$p_1 \; , \; p_2 \; : \; R \rightrightarrows X$$

appelées <u>application-source</u> et <u>application-but</u>,

(ii) Une application

$$\pi \; : \; (R \; , \; p_2) \times_X (R \; , \; p_1) \; \to \; R$$

appelée <u>application-composition</u>.

Ces données doivent satisfaire à des axiomes bien connus, que nous ne répéterons pas ici, et qui pourraient s'expliciter par la commutativité de certains diagrammes, et l'existence d'une application $D \; : \; X \; \to \; R$ (nécessairement unique) rond commutatifs deux autres diagrammes. D correspond au passage d'un objet à la flèche identique correspondante, et satisfait à

$$p_1 \, D = p_2 \, D = \mathrm{id}_X \qquad .$$

Dire que la catégorie est un groupoïde signifie alors qu'il existe une application

$$s \; : \; R \; \to \; R$$

(nécessairement unique), appelée la <u>symétrie</u> de R , transformant chaque flèche en une flèche inverse, ce qui pourrait s'expliciter par la commutativité de quatre autres diagrammes, formés au moyen de s , Δ et des données précédentes, et dont les deux premiers s'écrivent :

$$p_1 \, s = p_2 \; , \; p_2 \, s = p_1 \qquad .$$

Ces points étant rappelés, les définitions générales dans ([2], A, § 1) montrent en particulier ce qu'il faut entendre par une structure de <u>$\underset{\sim}{C}$-catégorie</u>, resp. de <u>$\underset{\sim}{C}$-groupoïde</u>, sur un couple d'objets X , R d'une catégorie quelconque $\underset{\sim}{C}$: c'est, par définition, la donnée, pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, d'une structure de catégorie resp. de groupoïde au sens ensembliste, dont l'ensemble des objets soit $X(T)$, et l'ensemble des flèches $R(T)$, ces structures "variant fonctoriellement" avec T variable. Cela implique donc la définition de deux morphismes

$$p_1 \; , \; p_2 \; : \; R \rightrightarrows X$$

appelés <u>morphisme-source</u> et <u>morphisme-but</u>, et lorsque le produit fibré voulu existe d'un morphisme

$$\pi : (R , p_2) \times_X (R , p_1) \to R$$

appelé morphisme composition , ces trois données suffisant alors à déterminer la structure de catégorie sur X , R , l'axiome à mettre sur ces données étant le suivant : pour tout T , les trois données correspondantes pour $X(T)$, $R(T)$ définissent sur ce couple d'ensembles une structure de catégorie, (resp. de groupoïde). Le cas échéant, cela peut s'exprimer par la commutativité de certains diagrammes, impliquant un morphisme bien déterminé

$$D : X \to R$$

et dans le cas des groupoïdes, un morphisme bien déterminé

$$s : R \to R ,$$

diagrammes qui s'explicitent comme dans le cas "ensembliste". Cette interprétation fastidieuse des axiomes est heureusement inutile pour la pratique, le seul intérêt théorique de la possibilité d'exprimer les données et axiomes à partir de morphismes et égalités de morphismes entre certains produits fibrés étant le suivant : si on a un foncteur $F : \underset{\sim}{C} \to \underset{\sim}{C}'$ exact à gauche (i. e. commutant aux produits finis et aux produits fibrés), il transforme une $\underset{\sim}{C}$-catégorie (resp. un $\underset{\sim}{C}$-groupoïde) en une $\underset{\sim}{C}'$-catégorie (resp. en un $\underset{\sim}{C}'$-groupoïde) (sous réserve de l'existence des produits finis et produits fibrés dans $\underset{\sim}{C}$).

Il est important en pratique de savoir interpréter les morphismes p_1 , p_2 , π , D , s comme des *opérations simpliciales* dans un objet semi-simplicial ou simplicial convenable de $\underset{\sim}{C}$, du moins lorsque dans $\underset{\sim}{C}$ les produits fibrés existent. Pour fixer la terminologie, introduisons la *catégorie* $\underset{\sim}{S}$ *des simplexes-types* comme la catégorie dont les objets sont les ensembles finis de la forme

$$\Delta_n = [0 , n] \qquad \text{où } n \geq 0$$

(intervalle des entiers de 0 à n), et dont les morphismes ou flèches sont les *applications quelconques* entre ces ensembles finis. On notera que la catégorie $\underset{\sim}{S}$ est équivalente à la catégorie des ensembles finis *non vides*, où on prend comme morphismes les applications entre ensembles finis. Dans $\underset{\sim}{S}$, la somme d'une famille finie *non vide* d'objets existe évidemment, ainsi que la somme amalgamée de deux objets sous un troisième (opération duale du produit fibré). On désigne par $\underset{\sim}{\ }'$ la sous-catégorie de $\underset{\sim}{S}$ ayant mêmes objets, mais où les morphismes sont les *applications croissantes* entre les Δ_n . Cette catégorie est équivalente à la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés non vides. Dans cette catégorie la somme de deux objets n'existe jamais, et la somme amalgamée de deux objets A, B sous un troisième C n'existe pas en général (prendre par exemple $C = \Delta_o$, $A = B = \Delta_1$, les deux applications structurales $u : C \to A$ et $v : C \to B$ égales). Elle existe cependant dans certains cas, par exemple

$$C = \Delta_o , \qquad A = \Delta_m , \qquad B = \Delta_n , \qquad u(0) = m , \qquad v(0) = 0$$

et dans ce cas, on a

$$\Delta_m \sqcup_{\Delta_o} \Delta_n = \Delta_{m+n} \quad .$$

Un <u>objet simplicial</u> (resp. un objet <u>semi-simplicial</u>) dans une catégorie $\underset{\sim}{C}$ est par définition un foncteur contravariant K de $\underset{\sim}{S}$ (resp. de $\underset{\sim}{S}'$) dans $\underset{\sim}{C}$. Un objet simplicial définit donc un objet semi-simplicial par restriction, mais la première notion diffère de la seconde essentiellement par la présence d'<u>opérations de symétrie</u> dans les $K_n = K(\Delta_n)$, qui correspondent aux transformés par le foncteur K des éléments du groupe symétrique à $n + 1$ lettres (considéré comme le groupe des automorphismes de Δ_n dans $\underset{\sim}{S}$).

Ceci dit, pour tout n, soit Δ_n' (resp. Δ_n'') la catégorie finie, dont l'ensemble des objets est Δ_n, définie par la relation d'ordre chaotique (resp. d'ordre total naturel) sur Δ_n (l'ensemble des flèches étant le graphe de la dite relation d'ordre). Il est évident que Δ_n' (resp. Δ_n'') dépend fonctoriellement de l'objet Δ_n de $\underset{\sim}{S}$ (resp. $\underset{\sim}{S}'$). Si alors Z est une catégorie, $\mathrm{Hom}(\Delta_n', Z)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\Delta_n'', Z)$) est, pour Δ_n variable, un foncteur de la catégorie $\underset{\sim}{S}$, (resp. $\underset{\sim}{S}'$), dans la catégorie des ensembles, i. e. un <u>ensemble simplicial</u> (resp. <u>semi-simplicial</u>), dit <u>associé à la catégorie</u> Z : soient Z' et Z''. On a d'ailleurs un homomorphisme naturel évident de l'ensemble semi-simplicial associé à Z' dans Z'', et ce dernier est un isomorphisme si et seulement si Z est un groupoïde. Ceci posé :

PROPOSITION 4.1. - Le foncteur $Z \rightsquigarrow Z''$ de la catégorie des catégories dans la catégorie des ensembles semi-simpliciaux est pleinement fidèle, et définit une équivalence de la catégorie des <u>catégories</u> avec la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, i. e. des foncteurs contravariants K de $\underset{\sim}{S}'$ dans (Ens), <u>qui transforment les sommes amalgamées</u> $A \,_C\, B$ <u>du type précisé plus haut, en produits fibrés d'ensembles</u>. De même, le foncteur $Z \rightsquigarrow Z'$ de la catégorie des groupoïdes dans la catégorie des ensembles simpliciaux est pleinement fidèle, et définit une équivalence de la catégorie des <u>groupoïdes</u> avec la catégorie des ensembles simpliciaux, i. e. des foncteurs contravariants K de $\underset{\sim}{S}$ dans (Ens), qui transforment des sommes amalgamées en produits fibrés.

On peut donc considérer les catégories comme des ensembles semi-simpliciaux particuliers, et les groupoïdes comme des ensembles simpliciaux particuliers, à condition bien entendu de raisonner "à un isomorphisme près" comme il est de rigueur quand on interprète certaines structures en termes d'autres. Le procédé habituel de réduction au cas ensembliste implique alors :

COROLLAIRE 4.2. - L'énoncé précédent reste valable quand on remplace les catégories, groupoïdes, ensembles simpliciaux, par des $\underset{\sim}{C}$-catégories, $\underset{\sim}{C}$-groupoïdes, $\underset{\sim}{C}$-objets simpliciaux, pourvu que dans $\underset{\sim}{C}$ les produits fibrés existent.

L'objet semi-simplicial K dans $\underset{\sim}{C}$ associé à une catégorie $(X , R , \ldots)$ dans $\underset{\sim}{C}$ peut s'expliciter, en interprétant la composante $K_n = K(\Delta_n)$ de K comme étant la puissance fibrée $(n + 1)$-ième de (R , p_1) sur X, ou mieux, par la formule de récurrence,

$$K_o = R , \qquad K_n = (K_{n-1} , p_n^{(n-1)}) \times_X (R , p_1)$$

où les $p_i^{(n-1)}$ $(0 \leq i \leq n - 1)$ sont les projections naturelles de K_{n-1} dans X (qui se définissent également par récurrence). De cette façon, p_1 , p_2 , π , D , s s'interprètent comme les opérations simpliciales qui correspondent respectivement aux morphismes dans $\underset{\sim}{S}$: face 0 de Δ_1 , face 1 de Δ_1 , face $(0 , 2)$ de Δ_2 , dégénérescence $\Delta_1 \to \Delta_o$, symétrie de Δ_1 . Toutes les autres opérations semi-simpliciales (resp. simpliciales) se déduisent formellement des quatre (resp. cinq) précédentes par composition et produits fibrés.

On appelle maintenant pré-relation d'équivalence dans un objet X d'une catégorie, la donnée d'un groupoïde dont l'objet des objets (si on peut dire) est X . Une telle donnée comporte donc entre autres un objet R et deux morphismes

$$p_1 , p_2 : R \rightrightarrows X \quad .$$

Mais on notera que ces seules données ne déterminent pas la structure envisagée, contrairement à ce qui a lieu pour les couples d'équivalence. Dans cet exposé, nous nous intéressons à cette notion dans le but d'obtenir des critères de possibilité de passage au quotient, i. e. de formation du conoyau du couple (p_1 , p_2). L'énoncé du problème ne fait donc pas appel aux données supplémentaires inhérentes à un groupoïde. Dans la démonstration des résultats qui vont suivre, on se sert cependant de ces données supplémentaires, et en particulier des opérations simpliciales (y inclus des opérations de symétrie) jusqu'en dimension 3 (faisant intervenir la puissance fibrée quadruple de R sur X).

Une relation d'équivalence dans un objet X de $\underset{\sim}{C}$ définit une pré-relation d'équivalence : il suffit de le voir dans le cas ensembliste, et on associe alors à une relation d'équivalence, dans un ensemble X , le groupoïde dont l'ensemble d'objets est X , et l'ensemble des flèches est l'ensemble graphe de la relation d'équivalence.

Un $\underset{\sim}{C}$-monoïde G opérant sur un objet X de $\underset{\sim}{C}$ définit une $\underset{\sim}{C}$-catégorie dont les objets de base sont $R = G \times X$ et X (sous réserve que $G \times X$ existe), et qui est un $\underset{\sim}{C}$-groupoïde si et seulement si G est un groupe. Il suffit encore d'en faire la vérification dans le cas ensembliste. On définit alors la composition des flèches (g , a) et $(g' , g.a)$ comme étant

$$(g' , g.a)(g , a) = (g' g , a)$$

i. e. si $a , b \in X$; alors $\mathrm{Hom}(a , b)$ est par définition le transporteur de a dans b , et les morphismes se composent grâce à la composition des éléments de G .

REMARQUE. - On peut éviter les difficultés logiques que soulève un énoncé tel que (4.1) en y sous-entendant que tous les objets envisagés se trouvent dans un "Univers" fixé, (qui lui-même est un ensemble).

5. Quotient par une relation d'équivalence finie et plate.

THÉORÈME 5.1. - Soient $X = \mathrm{Spec}(B)$ un schéma affine, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans X , dont la composante R_1 est affine, soit $R_1 = \mathrm{Spec}(C)$. On suppose que la première projection $p_1 : R_1 \to X$ est un morphisme fini et localement libre, en d'autres termes que l'homomorphisme d'anneaux correspondant $p_1^! : B \to C$ fait de C un B-module projectif de type fini. Soit A le sous-anneau de B noyau du couple d'homomorphismes $p_1^! , p_2^! : B \rightrightarrows C$ (= ensemble des éléments b tels que $p_1^!(b) = p_2^!(b)$). Soit $Y = \mathrm{Spec}(A)$, et $f : X \to Y$ le morphisme défini par l'immersion de A dans B . Sous ces conditions :

(i) B est entier sur A , i. e. f est un morphisme entier.

(ii) Le morphisme f est surjectif, ses fibres sont les classes d'équivalence ensemblistes $p_2(p_1^{-1}(x))$ dans X modulo $\mathcal{R}$, et la topologie de Y est quotient de celle de X .

(iii) Y est le quotient de X par $\mathcal{R}$ dans la catégorie des préschémas.

(iv) Si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence, alors le morphisme $f : X \to Y$ est fini localement libre (i. e. B est un A-module projectif de type fini), et la relation d'équivalence est effective, i. e. $R_1 \to X \times_Y X$ est un isomorphisme.

Ce théorème généralise le théorème bien connu relatif au cas d'un groupe fini G opérant par automorphismes sur l'anneau B , et à l'anneau A des invariants, et la démonstration est analogue à la démonstration connue. On peut préciser (iii) ainsi :

COROLLAIRE 5.2. - Le morphisme canonique $R_1 \to X \times_Y X$ est surjectif.

Soit toujours $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence "finie et localement libre" dans X , mais X étant un préschéma quelconque. Supposons qu'on puisse trouver un préschéma Y et un morphisme $f : X \to Y$ tel que $fp_1 = fp_2$, et tel en plus que la suite d'homomorphismes de faisceaux d'anneaux sur Y :

$$\mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X) \rightrightarrows g_*(\mathcal{O}_R)$$

soit exacte (où $g = fp_i$) . Il résulte alors du théorème qu'on a des conclusions (i) à (iv) analogues à celles du théorème, en particulier, par (iii), Y est le quotient de X par $\mathcal{R}$, et par suite déterminé à un isomorphisme unique près. On dira sous ces conditions que la pré-relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans X est "admissible". Avec cette définition :

THÉORÈME 5.3. - Soient X un préschéma, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans X , telle que $p_1 : R_1 \to X$ soit un morphisme fini et localement libre. Pour que $\mathcal{R}$ soit admissible, il faut et il suffit que toute classe d'équivalence ensembliste $p_2(p_1^{-1}(x))$ dans X modulo $\mathcal{R}$ soit contenue dans un ouvert affine (condition toujours vérifiée si toute partie finie de X est contenue dans un ouvert affine, par exemple si X est quasi-projectif sur un schéma affine).

On montre en effet sans difficulté que toute classe d'équivalence mod $\mathcal{R}$ dans X est alors contenue dans un ouvert affine stable par $\mathcal{R}$, et on construit le quotient Y par recollement des morceaux obtenus à l'aide du théorème 5.1.

COROLLAIRE 5.4. - Supposons cette condition réalisée et que de plus $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence. Alors cette dernière est effective, i. e. $R_1 \to X \times_Y X$ est un isomorphisme, et $f : X \to Y$ est un morphisme fini localement libre.

On en conclut aussitôt, par "descente" :

COROLLAIRE 5.5. - Sous les conditions de (5.4), pour que X soit partout de rang n au-dessus de Y, il faut et il suffit que (R_1, p_1) soit partout de rang n au-dessus de X. Si X, R_1 sont des Z-préschémas et p_1, p_2 des Z-morphismes, donc Y un Z-préschéma, alors X est plat sur Z si et seulement si Y l'est.

En résumé :

SCHOLIE. - La donnée d'un morphisme fini, localement libre et surjectif $f : X \to Y$ de préschémas, est équivalente à la donnée d'un préschéma X muni d'une relation d'équivalence R telle que $p_1 : R \to X$ soit fini et localement libre, et que toute classe $p_2(p_1^{-1}(x))$ soit contenue dans un ouvert affine.

REMARQUES 5.6.

1° On n'a pas eu à faire d'hypothèse noethérienne.

2° Cette notion de passage au quotient comprend comme cas particulier la "descente inséparable" de CARTIER, qui correspond à la détermination des morphismes finis localement libres $f : X \to Y$ tels que $f_*(\mathcal{O}_X)$ admette une p-base par rapport à $\mathcal{O}_Y$ (X étant un préschéma donné dont le faisceau $\mathcal{O}_X$ est annulé par le nombre premier $p > 0$). On notera que le résultat s'exprime aisément sans hypothèse de régularité sur les anneaux locaux et sans supposer que X est un schéma algébrique sur un corps. La théorie de JACOBSON-BOURBAKI est obtenue en prenant pour X le spectre d'un corps de caractéristique p.

3° GABRIEL avait auparavant obtenu un cas particulier du théorème (5.3) dans la théorie du passage au quotient pour les groupes commutatifs finis au-dessus d'un corps k. [Comparer (7.4)].

6. Quotient par une relation d'équivalence propre et plate.

THÉORÈME 6.1. - Soient S un préschéma localement noethérien, X un S-schéma quasi-projectif, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans X, telle que :

(a) $p_1 : R_1 \to X$ est propre et plat ; (b) $R_1 \to X \times_S X$ est un morphisme fini, ou ce qui revient au même en vertu de (a), à fibres finies (condition automatiquement vérifiée si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence). Sous ces conditions :

(i) $X/\mathcal{R} = Y$ existe, et (si S est noethérien) est quasi-projectif sur S.

(ii) Le morphisme canonique $f : X \to Y$ est surjectif, propre, ouvert, ses fibres sont les classes d'équivalence $p_2(p_1^{-1}(x))$ dans X mod $\mathcal{R}$, donc Y s'identifie à l'espace topologique quotient de X par la relation d'équivalence ensembliste définie par $\mathcal{R}$. Enfin, $R_1 \to X \times_Y X$ est surjectif.

(iii) Si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence, cette dernière est effective, i. e. $R_1 \to X \times_Y X$ est un isomorphisme, et de plus $f : X \to Y$ est plat (donc fidèlement plat).

Pour la démonstration, on se ramène à (5.1) grâce à des quasi-sections convenables de X pour $\mathcal{R}$, la démonstration étant analogue à la construction des groupes algébriques quotients dans le Séminaire Chevalley.

En résumé :

SCHOLIE. - Soit X quasi-projectif sur S localement noethérien. La donnée d'un morphisme propre, fidèlement plat et surjectif $f : X \to Y$ de X dans un S-préschéma Y, est équivalente à la donnée d'une relation d'équivalence R sur X, telle que $p_1 : R \to X$ soit propre et plat.

La même méthode donne le résultat suivant :

THÉORÈME 6.2. - Soient S un préschéma noethérien, X un préschéma de type fini sur S, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans le S-préschéma X, on suppose que : (a) $p_1 : R_1 \to X$ est plat et de type fini ; (b) Le morphisme $R_1 \to X \times_S X$ est quasi-fini, (i. e. à fibres finies). Alors il existe un ouvert U dense dans X saturé pour $\mathcal{R}$, tel que :

(i) Si $\mathcal{R}_U$ est la pré-relation d'équivalence induite par $\mathcal{R}$ dans U, alors $U/\mathcal{R}_U$ existe, et est de type fini sur S.

(ii) Le morphisme canonique $U \to U/\mathcal{R}_U$ est surjectif et ouvert, ses fibres sont les classes d'équivalence ensembliste pour $\mathcal{R}_U$, (donc $U/\mathcal{R}_U$ est un espace topologique quotient de U par la relation d'équivalence ensembliste définie par $\mathcal{R}_U$), enfin le morphisme $(\mathcal{R}_U)_1 \to U \times_{U/\mathcal{R}_U} U$ est surjectif.

(iii) Si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence, on peut supposer $U \to U/\mathcal{R}_U$ fidèlement plat et $\mathcal{R}_U$ effectif.

C'est là un résultat de nature essentiellement "birationnelle".

REMARQUES 6.3.

1° J'ignore si dans (6.1) et (6.2) l'hypothèse (b) est inutile. Elle nous oblige pratiquement dans le passage au quotient par des groupes de nous borner au cas où les stabilisateurs sont tous des groupes finis.

2° On peut se demander s'il n'y a pas des résultats analogues à (6.1) et (6.2) sans hypothèse de platitude. Je n'ai aucun contre-exemple dans cette direction. Par contre, même en gardant l'hypothèse de platitude, et en se bornant à des relations d'équivalence telles que $p_1 : R \to X$ soit plat et quasi-fini (mais non fini), X étant affine, il peut arriver que R ne soit pas effective : prendre les relations d'équivalence induites sur des ouverts affines recouvrant la variété de Nagata (où un groupe à deux éléments opère de façon "non admissible").

7. Applications.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'application la plus importante de (6.1) est la construction de schémas de Picard, ainsi que de solutions pour divers autres problèmes de "modules", sur lesquels nous reviendrons ultérieurement.

On obtient une démonstration simple du résultat suivant de SHIMURA :

PROPOSITION 7.1. - Soit A un schéma abélien défini sur un anneau de valuation discrète V de corps des fractions K. Alors tout schéma abélien B' sur K isogène à un quotient de $A \otimes_V K$ "se réduit bien pour V" i. e. est isomorphe à un $B \otimes_V A$, où B est un schéma abélien sur V (essentiellement unique, rappelons-le).

On peut supposer que B' est le quotient de A_K par un sous-schéma en groupes C'. (N. B. : C' ne sera en général pas "réduit", i. e. ses anneaux locaux auront des éléments nilpotents). Considérons le sous-schéma fermé C de A "adhérence" de C', i. e. le plus petit sous-schéma fermé de A tel que C_K majore C'. On aura $C_K = C'$, et du fait que V est un anneau de valuation discrète, on tire facilement que C est un sous-schéma en groupes de A sur V. Comme A est propre sur $\mathrm{Spec}(V) = S$, il en est de même de C, d'autre part A est même projectif sur S. On peut alors appliquer (6.1) pour construire $A/C = B$, c'est le B cherché.

Enfin, des raisonnements essentiellement connus permettent de tirer de (6.2) le résultat suivant :

THÉORÈME 7.2. - Soient S le spectre d'un anneau artinien, F et G des schémas en groupes de type fini sur S, $u : F \to G$ un homomorphisme de schémas en groupes sur S. On suppose

(i) F est plat sur S ;

(ii) le noyau de u est fini.

Sous ces conditions, le schéma quotient G/F existe, le morphisme canonique $G \to G/F$ est surjectif et ouvert, ses fibres sont les classes d'équivalence ensemblistes définies par les opérations à droite de F sur G. Enfin, si u est un monomorphisme, alors le morphisme $G \to G/F$ est plat et le morphisme $G \times F \to G \times_{(G/F)} G$ est un isomorphisme, en d'autres termes G est un espace principal homogène sur G/F, de groupe structural (opérant à droite) F, ou plutôt $F \times_S (G/F)$ considéré comme schéma en groupes sur G/F (cf. [1], B, § 6).

COROLLAIRE 7.3. - Sous ces conditions, pour que G soit plat sur S, il faut et il suffit que G/F le soit. Si cette condition est vérifiée, alors le passage au quotient par F commute à toute extension de la base S, et si F est un sous-groupe invariant de G, G/F peut être muni d'une structure de groupe quotient de G par F.

La situation est particulièrement simple si S est le spectre d'un corps, car alors tout S-préschéma est automatiquement plat sur S. On trouve :

COROLLAIRE 7.4. - Soient F, G des schémas en groupes de type fini sur un corps k, et soit $u : F \to G$ un homomorphisme de k-groupes. Alors u se factorise en $F \to F' \to G$, où $F \to F'$ est un homomorphisme de passage au quotient par le sous-groupe fermé $\operatorname{Ker} u$ de F, et où $F' \to G$ est un homomorphisme de groupes qui est une immersion fermée. Le quotient $G/F = G/F'$ existe. Le formalisme habituel (genre théorèmes de Noether) est valable parmi les groupes algébriques sur k.

Ce résultat permet de traiter de manière uniforme le passage au quotient dans les groupes algébriques au sens classique (i. e. qui sont irréductibles sur k et simples sur k), et le passage au quotient par des sous-groupes "infinitésimaux" considéré par CARTIER. Il y a avantage à considérer les "hyperalgèbres" introduites par CARTIER, à la suite des travaux de DIEUDONNÉ sur les groupes formels, comme des groupes dans la catégorie des schémas formels au-dessus de k, et le cas échéant (s'ils correspondent à des hyperalgèbres de rang fini sur k) comme des groupes algébriques finis sur k.

8. Une conjecture.

Elle répond au besoin de savoir passer au quotient par le groupe projectif opérant sur certains sous-schémas des "schémas de Hilbert" (ces derniers remplaçant, en théorie des schémas, les variétés de Chow).

Soient S un préschéma, et n un entier. A tout préschéma S' sur S, faisons correspondre le groupe $Gl(n, \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}))$ des matrices inversibles à n lignes et n colonnes à valeurs dans l'anneau des sections de $\mathcal{O}_{S'}$. On obtient ainsi un foncteur contravariant en S', dont on montre aisément qu'il est représentable, il correspond donc à un schéma en groupes sur S, d'ailleurs affine sur S, noté $G\ell(n)_S$. Sa formation est compatible avec le changement de base, de sorte qu'en réalité tout provient d'un schéma en groupes sur $\underset{\sim}{Z}$, noté $G\ell(n)$. Le groupe $Gl(1)$, appelé groupe multiplicatif et souvent noté G_m, correspond au foncteur $S \rightsquigarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*$, groupe des "unités" sur S. On a un homomorphisme évident $Gl(1) \to Gl(n)$, et on construit facilement le groupe quotient, noté $GP(n-1)$ et appelé le groupe projectif de degré $n-1$ sur $\underset{\sim}{Z}$. Il représente le foncteur qui, à S, associe le groupe des sections du faisceau $\underset{\sim}{Gl}(n)_S/\underset{\sim}{Gl}(1)_S$ où $\underset{\sim}{Gl}(n)_S$ désigne le faisceau des germes de sections de $Gl(n)_S$ sur S. (On fera attention que les sections de $GP(n-1)_S$ sur S ne proviennent pas en général de sections de $Gl(n)_S$ sur S !). Notons que l'on peut prouver que $GP(n-1)$ représente également le foncteur $S \rightsquigarrow \mathrm{Aut}_S(P_S^{n-1})$, (où P_S^{n-1} est le schéma projectif-type de dimension relative $n-1$ sur S), du moins pour S noethérien. C'est de cette façon qu'il s'introduit en théorie des modules.

Soit S un schéma noethérien, qu'on peut si on veut supposer affine, et soit X un S-préschéma quasi-projectif, muni d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ très ample relativement à S. On suppose que le groupe $G = GP(n)_S$ opère sur X et en même temps sur $\mathcal{L}$ (de façon compatible avec ses opérations sur X), et qu'il opère librement sur S.

CONJECTURE 8.1. - Sous les conditions précédentes :

1° La relation d'équivalence définie par G est effective, le quotient $Y = X/G$ est de type fini sur S et le morphisme canonique $f : X \to Y$ est plat et surjectif (donc X devient un fibré principal homogène sur Y, de groupe $G \times_S Y = GP(n)_Y$).

2° Soit $\mathcal{L}'$ le faisceau inversible sur Y déduit de $\mathcal{L}$ par "descente fidèlement plate" par f (cf. [1], B, § th. 1). Alors $\mathcal{L}'$ est "préample" sur Y par rapport à S, i. e. il existe un entier m et un morphisme quasi-fini de Y dans un schéma projectif-type convenable P_S^N, tels que $(\mathcal{L}')^{\otimes m}$ soit isomorphe à l'image inverse de $\mathcal{O}_{P_S^N}(1)$.

On notera que même si X est séparé sur S, il pourra arriver que Y ne soit pas séparé sur S (situation qui se rencontre dans des situations de "problèmes de modules" pas du tout pathologiques). Si 1° est vérifié, alors Y est séparé si et seulement si la relation d'équivalence définie par G a un graphe fermé, i. e. si $G \times X \to X \times X$ a une image fermée (c'est alors une immersion fermée). Si Y est séparé, alors $\mathcal{L}'$ est préample sur Y par rapport à S si et seulement si il est ample, i. e. si une puissance tensorielle convenable définit une immersion projective. Dans les problèmes de modules mentionnés dans l'introduction, on peut montrer que la relation d'équivalence à laquelle on parvient à bien un graphe fermé.

REMARQUES 8.1. - Nous avons supposé $G = GP(n)_S$ pour fixer les idées et parce que c'est le cas le plus important en pratique, à l'heure actuelle. L'hypothèse raisonnable à faire sur G semblerait plutôt que G soit une des "formes" sur S d'un des groupes de Tohokû (dont la construction sur les entiers a été faite également par CHEVALLEY). Le seul fait positif qui me soit connu dans la direction de la conjecture précédente est le suivant : Soit X un schéma affine sur un corps k de caractéristique 0, où le groupe $Gl(n)_k$ ou $GP(n-1)_k$ opère librement. Alors la relation d'équivalence définie par G est effective, le quotient X/G est également affine, et le morphisme $X \to X/G$ est plat et surjectif. La démonstration utilise le fait suivant (qui pour l'instant n'est démontré qu'en caractéristique 0) : lorsque l'on fait opérer G sur l'anneau affine A de G, considéré comme espace vectoriel sur k, la représentation triviale de G n'intervient qu'une fois (dans une suite de composition d'un sous-espace vectoriel de dimension finie sur k stable sous G). Il semble possible qu'une utilisation systématique de la théorie des représentations linéaires de G finira par donner une démonstration de la conjecture, du moins lorsque l'on est sur un corps de base. Lorsque l'on n'est plus sur un corps de base, le conférencier ignore tout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I : Généralités, Séminaire Bourbaki, 1959/60, n° 190, 29 p.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, II : Le théorème d'existence en théorie formelle des modules, Séminaire Bourbaki, 1959/60, n° 195, 22 p.

[3] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Éléments de géométrie algébrique, I : Le langage des schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 4).