MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Sur quelques problèmes relatifs au vote pondéré

Mathématiques et sciences humaines, tome 84 (1983), p. 45-63
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1983__84__45_0>

Math. Sci. hum. (21[e] année, n°84, *1983*, p.45-63)

SUR QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AU VOTE PONDÉRÉ

G. KREWERAS*

1. Il est banal de remarquer que l'une des sources possibles de difficulté dans les procédures de vote est l'apparition des ex-aequo. Si une résolution recueille autant de voix "pour" que de voix "contre", doit-elle être considérée comme adoptée ou rejetée ? Si deux candidats à un siège recueillent le même nombre de voix, lequel doit-on proclamer élu ?

Les artifices employés sont nombreux et bien connus : assemblées ayant plutôt un nombre impair de votants, scrutins à plusieurs tours, élection au bénéfice de l'âge, prépondérance de la voix du président.

Ce dernier artifice est l'exemple le plus simple du "vote pondéré" : la voix du président "pèse", en cas d'ex-aequo, le double des autres, et cela parce qu'il est le président. Le poids doublé de sa voix fait partie de ses prérogatives présidentielles. Il est clair que le procédé peut être généralisé : chaque votant est alors défini non seulement par son identité, mais en outre par un "poids" individuel w ; si w est un entier, sa voix compte pour w voix.

---

* Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

Il faut bien voir que le vote pondéré n'a rien d'une simple vue de l'esprit, comme le montrent deux exemples bien familiers : dans les syndicats de co-propriété, chaque co-propriétaire a un poids proportionnel à la superficie qui lui appartient ; dans beaucoup d'instances internationales, les pays ont un poids qui est fonction croissante de leur population.

Le fait d'attribuer à chaque votant un poids qui soit un nombre entier positif n'empêche nullement, en général, qu'il puisse apparaître des ex-aequo. Il est cependant intéressant de remarquer que théoriquement on pourrait adopter des pondérations qui rendent toute situation d'ex-aequo impossible. En effet si l'on appelle n le nombre total de votants, il suffirait de faire en sorte que les 2^n coalitions a priori possibles (la "coalition vide" comprise) aient toutes des poids distincts. Si ces poids sont des entiers, on peut même faire en sorte que ces entiers soient 0, 1, 2, 3, ..., 2^n-1 ; il suffit pour cela de numéroter les votants de 1 à n (dans un ordre arbitraire) et d'attribuer au votant n° i le poids 2^{n-i} . Par exemple si $n = 8$, les huit poids seront donnés par le tableau suivant :

numéros	1	2	3	4	5	6	7	8
poids	128	64	32	16	8	4	2	1 .

Pour trouver celle des coalitions possibles qui a un poids donné, mettons 89, il suffit d'écrire ce poids dans le système binaire (89 = 0 1 0 1 1 0 0 1) ; c'est donc en l'occurrence la coalition formée des votants numérotés 2, 4, 5 et 8 .

En ce qui concerne cette solution, terminons par les trois remarques suivantes :

(a) elle est tout à fait théorique, c'est-à-dire sans autre intérêt pratique que d'être un point de repère pour la réflexion

(b) elle est minimale dans tous les sens possibles de ce mot (on ne peut diminuer ni aucun des poids individuels, ni la somme des poids, sans perdre la propriété)

(c) elle est dictatoriale en ce sens que le poids du votant le plus lourd (2^{n-1}) l'emporte sur la somme des poids de tous les autres ($2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1 = 2^{n-1} - 1$). C'est, en fait, le "serial dictatorship" de K. Arrow [2] ; chaque votant n'a une influence, d'ailleurs décisive, sur le résultat que dans la mesure où il y a indifférence de tous ceux qui "pèsent plus lourd" que lui.

2. D.L. Silverman [4] a formulé un problème de pondération dans lequel il cherche à respecter simultanément les deux conditions suivantes :

C1. Quel que soit l'entier k, les poids de toutes les coalitions de k votants sont distincts ("tie-avoiding").

C2. Quels que soient les entiers h et k avec $h > k$, toute coalition de h votants pèse plus que toute coalition de k votants ("majority-preserving").

Devant l'assemblée des votants sont présentées des résolutions sur lesquelles chaque votant peut voter "oui", voter "non" ou s'abstenir. Si la pondération satisfait à C1 et C2, la pondération ne sera effectivement utile que si les nombres de oui et de non sont égaux; dans tout autre cas elle donnera le même résultat que la majorité simple.

Wynne et Narayana [6] ont exhibé une solution particulièrement simple du problème de Silverman, en utilisant des nombres qui interviennent également dans le dénombrement de certains tournois. Ces nombres utilisent les termes d'une suite numérique particulière

$$\delta = (\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_n \quad \dots)$$
$$= (1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 11 \quad 22 \quad 42 \quad 84 \quad 165 \quad 330 \dots)$$

découverte en 1838 par M.A. Stern [5] ; cette suite peut être définie par le fait que $\delta_1 = 1$ et que δ_{n+1} est la somme de ses π_n prédécesseurs, où $\pi_n = 1 + [n/2]$. Ainsi l'on a

$$n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \dots$$
$$\pi_n = 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \dots$$

et

$$\delta_2 = 1$$
$$\delta_3 = 1 + 1$$
$$\delta_4 = 2 + 1$$
$$\delta_5 = 3 + 2 + 1$$
$$\delta_6 = 6 + 3 + 2$$
$$\delta_7 = 11 + 6 + 3 + 2$$

(notons que δ_{2h+1} est toujours double de δ_{2h}).

La solution exposée par Narayana et Wynne consiste, s'il y a n votants, à donner au plus léger d'entre eux le poids δ_n, au suivant le poids $\delta_n + \delta_{n-1}$, etc., enfin au plus lourd le poids $\delta_n + \delta_{n-1} + \dots + \delta_1$. On obtient ainsi le tableau de poids suivant, dont chaque ligne n donne les n poids attribués dans l'ordre croissant ($n \leqslant 9$) :

n = 1	1								
2	1	2							
3	2	3	4						
4	3	5	6	7					
5	6	9	11	12	13				
6	11	17	20	22	23	24			
7	22	33	39	42	44	45	46		
8	42	64	75	81	84	86	87	88	
9	84	126	148	159	165	168	170	171	172

(Tableau I)

Il n'est pas difficile de s'assurer que les conditions C1 et C2 sont satisfaites pour chaque ligne de ce tableau ; il est commode de distinguer les cas où n est pair ou impair.

Soit par exemple $n = 8$. Les quatre poids les plus faibles (42, 64, 75, 81) ont pour somme 262 ; les trois plus forts (86, 87, 88) ont pour somme 261. Il en résulte que la condition C2 est toujours satisfaite.
Pour vérifier que la condition C1 l'est également, il suffit de s'assurer que si deux coalitions sont toutes deux formées de k votants, la comparaison de leurs poids se trouve être <u>la même que celle de leurs éléments minimaux</u>, et il suffit de s'en assurer pour la valeur de k la plus grande possible, soit ici $[n/2] = 4$; on constate en effet qu'une coalition de 4 votants comprenant le plus léger de tous (42) pèse au maximum $42 + 86 + 87 + 88 = 303$, alors qu'une coalition ne le comprenant pas pèse au moins $64 + 75 + 81 + 84 = 304$.

Dans la ligne $n = 9$ on vérifie, de façon analogue, que l'on a

$$84 + 126 + 148 + 159 + 165 = 682$$

(condition C2)

et $$168 + 170 + 171 + 172 = 681$$

et aussi que l'on a

$$126 + 170 + 171 + 172 = 639$$

(condition C1)

et $$148 + 159 + 165 + 168 = 640.$$

Il apparaît que le tableau I satisfait "de justesse" aux conditions C1 et C2 , et l'on peut montrer, en s'appuyant sur les propriétés de la suite δ , qu'il en est bien ainsi quel que soit n . La pondération proposée par Narayana et Wynne est donc d'une grande beauté, et il est tentant de se demander si elle n'est pas "minimale", en ce sens qu'il serait impossible de satisfaire aux conditions C1 et C2 avec des poids plus faibles.

3. M. A. Alvarez Rodriguez [1] a montré qu'en fait la solution de Narayana et Wynne n'est pas minimale dès que $n \geqslant 8$. Il l'a fait en cherchant d'abord à satisfaire à la condition C1 seule, puis en y adjoignant après coup la condition C2. Le reste du présent article a pour objet principal de présenter sa méthode dans ses grandes lignes, en renvoyant à son travail pour le détail des démonstrations.

Exiger la condition C1 et elle seule, c'est chercher une pondération telle que, pour tout entier k, toutes les parties (ou "coalitions") de cardinal k de l'ensemble des votants aient des poids distincts, sans pour autant interdire que deux parties de cardinaux différents puissent avoir le même poids.

S'il y a deux votants et que l'on impose aux poids d'être des entiers non-négatifs, la solution manifestement minimale est de leur attribuer les poids respectifs 0 et 1 . On peut considérer ces poids comme déjà attribués lors de l'introduction d'un troisième votant ; celui-ci recevra alors au minimum le poids 2 . Si l'on continue à attribuer ainsi les poids dans l'ordre croissant, sans modifier les poids attribués précédemment et en adoptant chaque fois le poids le plus petit possible, le votant suivant (le quatrième) ne pourra recevoir le poids 3 (car $3+0=2+1$) ; mais pourra par contre recevoir le poids 4 .

Le cinquième votant ne pourra alors recevoir ni le poids 5 (car $5+0=3+2$) ni le poids 6 (car $6+0=4+2$), mais pourra recevoir le poids 7. On peut définir ainsi de proche en proche une suite, illimitée en droit,

$$s = (\,0 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 13 \quad 24 \ldots) \,,$$

dont il sera commode d'appeler les termes successifs (s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 ... s_{n-1} ...). L'une des manières de satisfaire à la condition C1 et à elle seule avec n votants sera précisément de leur attribuer les poids respectifs $s_0\ s_1\ \dots\ s_{n-1}$, et cette attribution sera minimale au sens indiqué plus haut: chacun des poids est le plus petit possible compte tenu des poids plus petits déjà attribués.

On observe que, si l'on pose par définition (pour tout entier positif n)

$$d_n = s_n - s_{n-1} ,$$

la suite $d = (d_1\ d_2\ \dots\ d_n\ \dots)$ commence par (1 1 2 3 6 11 ...), ce qui est une ressemblance avec la suite de Stern δ introduite plus haut. Malheureusement cette ressemblance ne se poursuit pas plus avant car on vérifie que $\delta_7 = 22$ mais que $d_7 = 20$ seulement.

L'intérêt principal du travail d'Alvarez Rodriguez est de donner de la suite d une définition récurrente, non-identique mais <u>analogue</u> à celle de la suite δ , définition récurrente qui permettra de remplacer le tâtonnement progressif qui définit la suite s par un calcul très rapide. L'un des instruments fondamentaux pour cela est la suite $p = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n\ \dots)$ ci-après, non identique mais <u>analogue</u> à la suite π qui permettait de définir δ :

$$p = (1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 6 \dots) .$$

Cette suite a été souvent rencontrée et une bibliographie la concernant se trouve dans [3] ; elle peut se décomposer en tranches successives, dont la i-ième est formée de i termes égaux à i . Il est naturel de l'appeler la "suite parabolique" puisque l'on montre facilement que p_n est la partie entière de $(1 + \sqrt{8n-7})/2$.

Le résultat central d'Alvarez Rodriguez est que dans la suite d le terme d_{n+1} est toujours la somme de ses p_n prédécesseurs ; elle est donc <u>analogue</u> à la suite δ dont le terme δ_{n+1} était toujours la somme de ses π_n

prédécesseurs. Une autre manière d'énoncer le même résultat est d'affirmer que si l'on commence par définir la suite $d = (d_1\ d_2\ \dots\ d_n\ \dots)$ par $d_1 = 1$ et $d_{n+1} = d_n + d_{n-1} + \dots + d_{n-p_n+1}$, et que l'on pose en outre $s_0 = 0$ et $s_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$, alors s_n est <u>le plus petit entier</u> tel que <u>l'on n'ait jamais</u>

$$s_{i_1} + s_{i_2} + \dots + s_{i_k} = s_{j_1} + s_{j_2} + \dots + s_{j_k}$$

(où $I = \{i_1\ i_2\ \dots\ i_k\}$ et $J = \{j_1\ j_2\ \dots\ j_k\}$ sont deux parties de même cardinal de $\{0,1,\dots,n\}$, dont l'une comprend l'entier n).

Une telle égalité de sommes équivaudrait à dire que, pour tout n , s_{n+1} est égal à une combinaison linéaire de ses prédécesseurs avec des coefficients tous égaux à -1, 0 ou 1 ; ou encore, puisque $s_{n+1} - s_n = d_{n+1}$, elle équivaudrait à dire que

$$d_{n+1} = x_1\, d_1 + x_2\, d_2 + \dots + x_n\, d_n$$

où l'on aurait $x_1 \in \{-1,\ 0,\ 1\}$, $x_{i+1} - x_i \in \{-1,\ 0,\ 1\}$ et $x_n = 0$.

Les suites $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ satisfaisant à ces trois conditions ont elles aussi été rencontrées par de nombreux auteurs ; appelons-les "suites ternaires contraintes". (Les suites dites "ternaires" sont celles qui satisfont aux deux premières conditons, et leur nombre total est évidemment 3^n ; le mot "contraintes" exprime la condition $x_n = 0$. Il sera commode de désigner par $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des suites ternaires et par $\mathcal{T}'_n$ l'ensemble des suites ternaires contraintes ; il sera également commode d'appeler <u>hauteur</u> d'une suite $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ le nombre $h(X) = x_1\, d_1 + x_2\, d_2 + \dots + x_n\, d_n)$.

D'où une reformulation du résultat d'Alvarez Rodriguez : les deux définitions suivantes (A) et (B) d'une suite d commençant par $d_1 = 1$ sont équivalentes :

(A) : $d_{n+1} = d_n + d_{n-1} + \ldots + d_{n-p_n+1}$

(B) : d_{n+1} est le plus petit entier positif tel qu'il n'existe dans $\mathcal{C}'_n$ aucune suite de hauteur d_{n+1} .

4. La démarche suivie consiste bien entendu à prendre pour point de départ la propriété (A) et à montrer que la suite ainsi définie possède la propriété (B). Cette dernière se décompose en deux propriétés distinctes, dont ni l'une ni l'autre ne sont tout à fait évidentes :

(B_1) Tout entier d <u>inférieur</u> à d_{n+1} est hauteur d'une suite de $\mathcal{C}'_n$.
(B_2) d_{n+1} n'est hauteur d'aucune suite de $\mathcal{C}'_n$.

La propriété (B_1) repose sur deux remarques
(1°) Le nombre $d_{n+1} - 1$ est hauteur d'une suite très particulière A_n de $\mathcal{C}'_n$, qu'on peut appeler la "suite semi-parabolique", et qui est définie par

$$a_i = \min\{p_i \, , n - i\} \, .$$

Par exemple pour $n = 12$ on a

$$A_{12} = (1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0)$$

$$d = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 11 \quad 20 \quad 40 \quad 77 \quad 148 \quad 285 \quad 570 \ldots)$$

$$h(A_{12}) = 1x1 + 2x1 + 2x2 + \ldots + 2x148 + 1x285 + 0x570$$
$$= 1119 = d_{13} - 1 \qquad (\text{car } d_{13} = 1120) \cdot$$

Cette suite semi-parabolique appartient non seulement à $\mathcal{C}'_n$, mais à la partie $\mathcal{F}_n$ de $\mathcal{C}'_n$ que l'on peut définir par la condition supplémentaire $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(2°) Etant donné une suite quelconque $X \in \mathcal{F}_n$, on peut trouver dans le même $\mathcal{F}_n$ une suite X' telle que l'on ait soit h(X') = h(X) soit

$h(X') = h(X) - 1$.

Le tableau suivant illustre, pour $n = 6$, la façon dont on peut de proche en proche trouver dans $\mathcal{F}_6$ des suites de hauteurs décroissantes d'unité en unité à partir de $d_7 - 1 = 19$.

X	h(X)
$A_6 = 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 0$	19 (= $d_7 - 1$)
1 1 2 2 1 0	18
0 1 $\underline{2}$ 2 1 0	17
1 2 1 1 1 0	17
1 1 1 2 1 0	16
0 $\underline{1}$ 1 2 1 0	15
1 0 1 2 1 0	15
0 0 1 $\underline{2}$ 1 0	14
0 1 $\underline{2}$ 1 1 0	14
1 2 1 1 1 0	14
1 1 1 1 1 0	13
0 $\underline{1}$ 1 1 1 0	12
1 0 1 1 1 0	12
0 0 $\underline{1}$ 1 1 0	11
1 1 0 1 1 0	11
0 1 0 1 1 0	10 (= $d_6 - 1$)
1 2 2 1 0 0	10
1 1 2 1 0 0	9
- - - - - - - - - - -	- - - - - - - -

Remarquons que ce que l'on cherchait dans $\mathcal{C}'_n$ (à savoir des suites de hauteur donnée) s'est révélé plus commode à trouver dans l'ensemble $\mathcal{F}_n$ <u>plus restreint</u> que $\mathcal{C}'_n$.

On trouve dans [1] une description générale de cette procédure et une démonstration rigoureuse de sa validité pour n quelconque.

La propriété (B_2), à savoir qu'aucune suite de $\mathcal{T}'_n$ n'a pour hauteur d_{n+1}, est la plus difficile à établir. (Notons qu'elle n'exclut nullement que certaines suites de $\mathcal{T}'_n$ aient des hauteurs <u>supérieures</u> à d_{n+1}). La méthode employée dans [1] consiste à la déduire d'un lemme qui s'énonce comme suit :

LEMME. Il n'existe dans $\mathcal{T}_m$ aucune suite dont la hauteur dépasse d'exactement 1 unité la hauteur de la suite parabolique de m termes.

L'intérêt de ce lemme est d'introduire l'ensemble $\mathcal{T}_m$ de <u>toutes</u> les suites ternaires (non nécessairement contraintes) de m termes, lequel comprend en particulier la suite "parabolique de m termes" $P_m = (p_1 p_2 \dots p_m)$, ce qui se prête mieux à des raisonnements par récurrence sur m .

Illustration pour $m = 4$:

$$P_4 = (1 \quad 2 \quad 2 \quad 3)$$

$$h(P_4) = d_1 + 2d_2 + 2d_3 + 3d_4 = 1 + 2 + 4 + 9 = \underline{\underline{16}} \quad .$$

On vérifie aisément qu'<u>aucune</u> suite ternaire de 4 termes n'a pour hauteur 17 (ce qui n'empêche pas la suite ternaire particulière (1 2 3 3) d'avoir pour hauteur 18).

Il s'agit, pour m quelconque, de chercher dans $\mathcal{T}_m$ une suite de hauteur $1 + h(P_m)$. Il est clair que la recherche parmi les suites X telles que $x_m < 0$ est désespérée d'avance puisque toutes ces suites seront "trop basses" (du fait de la présence du terme fortement négatif $d_m x_m$ dans leur hauteur). Il suffit donc de conduire la recherche dans la partie $\mathcal{T}_m^+$ de $\mathcal{T}_m$ définie par $x_m \geqslant 0$. En fait, pour montrer que la recherche dans $\mathcal{T}_m^+$ d'une suite de hauteur $1 + h(P_m)$ est vouée à l'échec, il sera commode de montrer que cette recherche dans un certain ensemble $\mathcal{K}_m$ plus vaste que $\mathcal{T}_m^+$ est elle aussi vouée à l'échec.

L'ensemble $\mathcal{K}_m$ sur lequel la récurrence par rapport à m se révèlera efficace est celui des suites $X = UV$ formées par la juxtaposition d'une suite $U \in \mathcal{T}_u'$ et d'une suite V dite "de Catalan" de v termes, avec $u + v = m$. Par "suite de Catalan" de v termes, $V = (y_1\, y_2 \dots y_v)$, nous entendons une suite d'entiers telle que $y_1 \in \{0,1\}$ et que $0 \leqslant y_{i+1} \leqslant y_i + 1$ (la dénomination "de Catalan" se justifie par le fait que le nombre total de ces suites est le nombre de Catalan $(2v+2)!/[(v+1)!(v+2)!]$). Il est clair que $\mathcal{K}_m \supset \mathcal{T}_m^+$.
Exemple pour $m = 22$ ($u=8$, $v=14$) :

$$X = (\underline{1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ -1\ \ -2\ \ -1\ \ 0}\ \ \underline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ 8\ 4}) \in \mathcal{K}_{22}$$

On commence par considérer la partie de $\mathcal{K}_m$ formée des suites UV qui, <u>dans la partie V</u>, ont tous leurs termes $\leqslant p_m - 1$, et par démontrer (à partir des propriétés de d) que ces suites sont <u>trop basses</u>, c'est-à-dire de hauteur <u>inférieure</u> à $1 + h(P_m)$.

Le reste de $\mathcal{K}_m$ est formé des suites dans lesquelles la valeur maximale s des termes de V est $\geqslant p_m$. Deux cas sont alors à distinguer, dont le premier (cas "irréductible") est celui où seuls sont égaux à s le dernier terme de V et peut-être un ou plusieurs de ses prédécesseurs immédiats. L'impossibilité de $h(X) = 1 + h(P_m)$ résulte alors du fait que X peut être prouvée trop haute si $s \geqslant p_m + 2$, et résulte de l'hypothèse de récurrence si $s = p_m$. Le seul cas qui exige une investigation plus poussée est celui où $s = p_m + 1$; on montre qu'alors la suite X est en général <u>trop haute</u>, sauf peut-être si $m = p(p+1)/2$. Dans ce dernier cas, si l'on pose $r = 1 + [(p-1)(p-2)/2]$ et si $x_r > 3-p$, X est encore <u>trop haute</u> ; mais si x prend sa plus petite valeur possible $3-p$, on montre que l'égalité $h(X) = 1 + h(P_m)$ est conditionnée par l'existence dans $\mathcal{T}_{r-1}$ d'une suite Z telle que $h(Z) = 1 + h(P_{r-1})$, ce qui est exclu par l'hypothèse de récurrence (X peut alors être soit trop haute, soit trop basse).

Enfin s'il existe dans V un terme x_i égal à s et immédiatement suivi d'un terme $x_{i+1} < s$, on peut <u>réduire</u> X en augmentant x_{i+1} et en diminuant ses p_i prédécesseurs, ce qui donne une nouvelle suite de même hauteur que X et appartenant toujours à $\mathcal{K}_m$; par des réductions successives on peut ainsi se ramener soit au cas où $s \leqslant p_m - 1$, soit au cas irréductible.

Illustration à partir de l'exemple précédent (m = 22) : $p_{22} = 7$

X = 1 0 1 0 -1 -2 -1 0 1 2 3 1 2 3 4 5 4 5 6 7 8 4, $s=8=x_{21}$

réduction→1 0 1 0 -1 -2 -1 0 1 2 3 1 2 3 4 4 3 4 5 6 7 5, $s=7=x_{21}$

réduction→1 0 1 0 -1 -2 -1 0 1 2 3 1 2 3 4 3 2 3 4 5 6 6, $s=6=p_{22}-1$

La suite X se trouve être de hauteur inférieure à $1 + h(P_{22})$ ("<u>trop basse</u>"). Si la suite X avait eu pour 22^{me} terme 5 au lieu de 4, les 21 premiers termes restant inchangés, les deux réductions successives auraient donné

1 0 1 0 -1 -2 -1 0 1 2 3 1 2 3 4 3 2 3 4 5 6 7, $s=7=p_{22}$.

On tombe sur le cas "irréductible", mais avec $s = p_m$, et le problème pour m = 22 se trouve ramené à un problème pour m = 21, et même ici pour m = 20 puisque $x_{21} = p_{21} = 6$. Il s'agit donc de s'assurer que la hauteur de la suite de 20 termes

1 0 1 0 -1 -2 -1 0 1 2 3 1 2 3 4 3 2 3 4 5

est différente de $1 + h(P_{20})$; c'est de nouveau le cas car pour cette suite tous les termes de la partie V sont $\leqslant p_{20} - 1 = 5$; la suite est donc encore <u>trop basse</u>.

Enfin si la suite X avait eu pour 22^{me} terme 6 au lieu de 4 ou de 5, une seule réduction aurait été possible et aurait donné

$1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 7, \ s=7=x_{22}$.

C'est de nouveau le cas irréductible avec $s = p_m$ et on est ramené à montrer que la suite de 21 termes

$1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

a une hauteur distincte de $1 + h(P_{21})$. Il se trouve cette fois que $s = p_m+1$ ($7 = p_{21} + 1$, puisque $p_2 = 6$). On ne peut affirmer immédiatement que la suite est trop haute, car on a précisément $m = p(p+1)/2$ $(21 = 6.7/2)$; il faut calculer $r = 1 + (5.4/2) = 11$ et comparer x_r $(= x_{11} = 3)$ à $3 - p(= 3-6 = -3)$; on constate que $x_r > 3 - p$ $(3 > -3)$ et on peut alors seulement en conclure que la suite X est en effet trop haute.

Une fois établi le lemme, la propriété (B_2) n'est pas établie immédiatement pour autant ; le raisonnement complet exige une application supplémentaire d'une propriété de la suite d qui a déjà été nécessaire pour les étapes antérieures. Enonçons-la ici pour simple information, en omettant la démonstration (assez lourde et longue, mais nous n'en connaissons pas d'autre) : la suite $Y = (y_1\ y_2 \ldots y_n)$ de terme général $y_i = \min(i,\ n+p_n-i)$, qui est plus haute que P_n , a une hauteur qui n'excède pas celle de P_n de plus de d_{n+2} .

Illustration numérique pour $n = 11$:

P_{11}	:	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5
Y	:	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5
$Y - P_{11}$	:	0	0	1	1	2	3	3	4	3	2	0
d	:	1	1	2	3	6	11	20	40	77	148	285 ...

$$h(Y)-h(P_{11}) = 1x2 + 1x3 + \ldots + 3x77 + 2 \times 148 = 797 < 1120 = d_{13} .$$

On voit en fin de compte que l'édifice logique qui permet de passer de (A) à (B) est assez compliqué ; sa simplification justifierait certainement un effort de recherche supplémentaire, assaisonné de talent et de patience.

Quoi qu'il en soit on est désormais assuré que les nombres $s_0\ s_1\ s_2\ \dots\ s_n\ \dots$ qui permettent de satisfaire de façon "minimale" (au sens récurrent indiqué plus haut) à la condition C1 seule ne sont autres que les sommes successives des premiers termes de la suite d :

$$s_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n \ .$$

De la propriété (A) de la suite d on tire d'ailleurs immédiatement une récurrence très simple à laquelle satisfont les s_n :

$$s_{n+1} = 2s_n - s_{n-p_n} \ .$$

Le tâtonnement progressif qui a permis de calculer les premiers termes 0, 1, 2, 4, 7,... est ainsi remplacé par un calcul extrêmement rapide, qui donne pour $n \leqslant 14$:

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
s_n =	0	1	2	4	7	13	24	44	84	161	309	594	1164	2284	4484

5. Supposons qu'il y ait 7 votants ; la pondération définie ci-dessus est alors, dans l'ordre croissant :

$$(0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 13,\ 24) \ .$$

Appelons-la par convention la "solution basse" (nous employons ici le mot "solution" au sens de "manière de satisfaire à C1"). Il est facile de déduire de cette solution-là une "solution haute" obtenue en retranchant tous les poids du plus grand d'entre eux ; on trouve ici, en rétablissant l'ordre croissant :

$$(0,\ 11,\ 17,\ 20,\ 22,\ 23,\ 24) \ .$$

La solution haute n'est plus, bien entendu, minimale au sens de la somme des poids ; cependant son poids le plus élevé est nécessairement le même que celui de la solution basse.

Remarquons qu'à partir de n'importe quelle solution on en obtient une nouvelle en augmentant tous les poids d'un même entier a . Il est clair que si a est très grand la solution ainsi trouvée satisfera non seulement à C1 mais aussi à C2 (condition de préservation des majorités). Il est donc naturel, si l'on veut satisfaire aux deux conditions C1 et C2 à la fois avec des poids pas trop élevés, de choisir a juste assez grand, soit à partir de la solution basse, soit à partir de la solution haute. On obtient ainsi, à partir de la solution basse :

$$4a + 0 + 1 + 2 + 4 > 3a + 7 + 13 + 24 ,$$

d'où $a > 37$, donc $a = 38$ et des poids

(38, 39, 40, 42, 45, 51, 62).

A partir de la solution haute on obtient de même

$$4a + 0 + 11 + 17 + 20 > 3a + 22 + 23 + 24 ,$$

d'où $a > 21$, donc $a = 22$ et des poids

(22, 33, 39, 42, 44, 45, 46) .

On observe deux choses :

1°) la solution haute engendre des poids plus petits que la solution basse ; ce fait est général, c'est-à-dire vrai pour tout n

2°) les poids obtenus pour $n = 7$ à partir de la solution haute sont les mêmes que ceux de la solution Narayana-Wynne. Mais ce fait-là n'est vrai que pour $n \leqslant 7$. Le calcul analogue pour $n = 8$ et 9 donne les poids ci-après

$n = 8$	42	62	73	79	82	84	85	86	
$n = 9$	82	122	142	153	159	162	164	165	166

On voit, par rapprochement avec le tableau I, que ces poids, qui satisfont aux conditions C1 et C2, sont plus petits que ceux de Narayana et Wynne ; lesquels donc, contrairement à ce qu'il était tentant de conjecturer, <u>ne constituent pas</u> une solution minimale.

Mentionnons pour terminer deux problèmes qui demeurent ouverts ; ils se rattachent tous deux étroitement à ce qui précède et ne semblent faciles ni l'un ni l'autre.

1°) L'existence de la solution exposée ci-dessus répond <u>négativement</u> à la question, laissée ouverte par Narayana et Wynne, de savoir si leur façon de satisfaire aux conditions C1 et C2 était minimale. Mais cette solution est-elle elle-même minimale ou peut-on faire encore mieux ?

2°) On pourrait légitimement n'avoir le désir que de satisfaire à la condition C1 seule, ce qui revient à ne vouloir faire intervenir les poids des votants que dans les seuls cas où il y a exactement autant de voix "pour" que de voix "contre", en ne considérant dans tout autre cas que les <u>nombres</u> de voix (voir un exemple plus loin). Dans cette hypothèse on a vu que la "solution basse" était minimale "au sens récurrent", c'est-à-dire que chaque poids était minimal compte tenu des poids <u>plus petits</u> déjà attribués. Or il est naturel de se poser la question suivante : étant donné le nombre n des votants, comment pondérer en satisfaisant à C1 de telle sorte que le poids <u>le plus lourd</u> soit minimal ? On a vu que la "solution basse" et la "solution haute" donnent la même valeur s_{n-1} au poids le plus lourd ; c'est $s_5 = 13$ pour $n = 6$. Peut-on faire mieux ? Par tâtonnement on s'assure assez facilement que non pour $n \leqslant 6$. Mais pour $n = 7$ on a $s_{n-1} = 24$, et cependant on peut trouver une pondération où le poids le plus lourd n'est que de 23, à savoir

noms :	A	B	C	D	E	F	G
poids :	0	1	2	11	17	20	23 .

On s'assure aisément que les 21 sommes de deux poids sont distinctes et que les 35 sommes de trois poids sont également distinctes, ce qui suffit pour que la condition C1 soit satisfaite. Avec une telle pondération, la coalition CDG l'emporte sur la coalition EF parce qu'elle est plus nombreuse (3 contre 2) ; mais si A , malgré son poids nul, se joint à EF, on est à 3 contre 3 et les poids interviennent, ce qui donne 37 pour AEF contre 36 pour CDG . L'exemple peut sembler artificiel, mais n'est pas absurde. En tout cas le problème ouvert est le suivant : quelle est, pour n donné, la valeur minimale w_n du poids le plus lourd d'une pondération satisfaisant à C1 ? On sait que $w_n = s_{n-1}$ tant que $n \leqslant 6$ et $w_n \leqslant s_{n-1}$ au-delà, mais peut-on trouver une définition récurrente maniable de la suite w_n ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALVAREZ RODRIGUEZ M.A., *Etude des propriétés d'une suite numérique liée à un problème de vote pondéré*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris VI, Juin 1983.

[2] ARROW K.J., *Social Choice and Individual Values*, Cowles Commission Monograph 12, Wiley, New York, 1951.

[3] KNUTH D.E., *The art of Computer programming*, Addison-Wesley, 1972.

[4] SILVERMAN D.L., *The Board of Directors problem*, Journal of Recreational Mathematics, 8, 1975, 234.

[5] STERN M.A., *Aufgaben*, Journal de Crelle, Berlin, 18, 1838, 100.

[6] WYNNE B.E. and NARAYANA T.V., *Tournament Configuration and Weighted Voting*, Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, Paris, 36, 1981, 76.