ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Sur les propriétés arithmétiques du produit de Hadamard

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 1 (1990), p. 7-19

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_1_7_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 1, 1990

Sur les propriétés arithmétiques du produit de Hadamard[1]

JEAN-PAUL BEZIVIN[2]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous démontrons deux résultats sur les produits de Hadamard de séries formelles.

Tout d'abord, si $f(x) = \sum a(n)x^n$ est une série formelle à coefficients complexes telle que pour toute série formelle algébrique $g(x) = \sum b(n)x^n$, le produit de Hadamard $\sum a(n)b(n)x^n$ soit aussi algébrique, alors $f(x)$ est une série formelle rationnelle.

Ensuite, étant donné une série formelle $f(x) = \sum a(n)x^n$ à coefficients dans un corps commutatif de caractéristique zéro et des entiers positifs naturels s, ℓ, q, m tels que ℓ et q soient premiers avec s, si, à la fois, $\sum a(n)^s x^n$ et $\sum a(n)^\ell a(n+m)^q x^n$ sont des séries formelles rationnelles, alors $f(x) = \sum a(n)x^n$ est une série formelle rationnelle.

ABSTRACT. — In this paper, we prove two results on the Hadamard product of power series.

First, let $f(x) = \sum a(n)x^n$ be a power series with complex coefficients, such that for any algebraic power series $g(x) = \sum b(n)x^n$, the Hadamard product $\sum a(n)b(n)x^n$ is also algebraic. Then $f(x)$ is a rational power series.

Second, let $f(x) = \sum a(n)x^n$ a formal power series with coefficients in a commutative field with zero characteristic. Let s, ℓ, q, m be rational positive integers with ℓ and q prime to s.

Suppose that both $\sum a(n)^s x^n$ and $\sum a(n)^\ell a(n+m)^q x^n$ are rational power series. Then $f(x) = \sum a(n)x^n$ is a rational power series.

1. Introduction et notations

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle, et $f(x) = \sum a(n)x^n$, $g(x) = \sum b(n)x^n$ deux séries formelles à coefficients dans K. On définit le produit de Hadamard des deux séries $f(x)$ et $g(x)$ comme étant la série :

(1) AMS subject classification : 1 Q, 30 B.

(2) J-P. Bezivin, Université Paris VI, Mathématiques, Tour 45-46, 5$^{\text{ième}}$étage, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

$$h(x) = (f \star g)(x) = \sum a(n)b(n)x^n .$$

Le produit de Hadamard a été beaucoup étudié, depuis son introduction, en raison de la propriété suivante : on a essentiellement que des points singuliers de $f \star g$ sont les produits des points singuliers de f et de g (pour un énoncé plus correct, voir [3]).

Il est bien connu, et facile à démontrer, que si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux séries rationnelles (i.e. représentant les séries de Taylor à l'origine de deux fractions rationnelles), leur produit de Hadamard $f \star g$ est encore une série rationnelle.

En fait, on peut dire un peu mieux : si f est une série rationnelle, et g une série algébrique, leur produit de Hadamard est encore une série algébrique.

Pour traduire ce dernier résultat, dû à R. Jungen ([6]), nous allons donner une définition, introduite dans [7] :

DÉFINITION 1.— *Soit K un corps commutatif, de caractéristique nulle, et A une partie non vide de $K[[x]]$.*

Nous dirons que la série $m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ appartenant à $K[[x]]$ est un multiplicateur pour A, si, pour toute série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n$ dans A, la série :

$$(m \star f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)b(n)x^n \quad \textit{est encore dans } A.$$

Nous noterons $M(K, A)$ ou $M(A)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur le corps K, l'ensemble des multiplicateurs de A.

Le théorème de R. Jungen s'énonce alors de la façon suivante :

THÉORÈME J.— *Soit A la partie de $K[[x]]$ formée des séries formelles algébriques sur $K[x]$.*

Alors l'ensemble des séries rationnelles est inclus dans l'ensemble $M(A)$.

On sait qu'il existe des séries algébriques qui ne sont pas des multiplicateurs; l'exemple classique est :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n , \quad \text{pour } K = \mathbf{C}, \text{ cf. [5]).}$$

Dans une première partie de cet article, nous allons déterminer l'ensemble des multiplicateurs quand A est l'ensemble des séries algébriques de $\mathbf{C}[[x]]$; nous montrerons que dans ce cas, $M(A)$ est exactement l'ensemble des séries rationnelles. Nous examinerons aussi le cas où A est l'ensemble des séries algébriques appartenant à une extension algébrique finie de $\mathbf{C}(x)$.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à la démonstration d'une forme faible de la conjecture de la racine s-ième de Hadamard.

Nous notons $\widetilde{K}\big[[x]\big]$ la partie de $K\big[[x]\big]$ constituée des séries formelles $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ qui possèdent la propriété suivante :

Il existe un sous-anneau U de K, dépendant de f, de type fini sur $\mathbf{Z}$, tel que f appartienne à $U\big[[x]\big]$.

La conjecture de la racine s-ième au sens de Hadamard, due à C. Pisot (cf. [1]) est la suivante :

CONJECTURE .— *Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle, et s un entier non nul. On suppose que la série formelle $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$, appartenant à $\widetilde{K}\big[[x]\big]$, vérifie la propriété suivante :*

La puissance s-ième au sens de Hadamard de f, c'est-à-dire la série $\sum a(n)^s x^n$, est une série rationnelle. Alors il existe une suite $b(n)$ d'éléments de K, tels que $a(n)^s = b(n)^s$ pout tout n, et que la série $\sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n$ soit rationnelle.

Remarques

1) Il est clair que si s est un entier pair, on ne peut pas éviter la forme de la conclusion de la conjecture.

2) L'hypothèse " f appartient à $\widetilde{K}\big[[x]\big]$ " est nécessaire, comme le montre l'exemple de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$, dont le carré de Hadamard est une série rationnelle, mais dont aucune des séries associées $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \sqrt{n}\, x^n$ avec ϵ_n appartenant à $\{\pm 1\}$ pour tout n n'est rationnelle.

3) On pourra trouver dans [9] des résultats récents sur cette conjecture.

Notre énoncé consiste à rajouter une hypothèse supplémentaire de même nature que l'hypothèse $\sum a(n)^s x^n$ rationnelle.

Par exemple, pour $s = 2$, les deux conditions :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)^2 x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a(n)a(n+1)x^n$$

rationnelles, impliquent, si $a(n)$ est non nul à partir d'un certain rang, que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ est rationnelle.

2. Énoncé des résultats

Nous allons démontrer les résultats suivants.

THÉORÈME 1.— *Soit A la partie de $\mathbb{C}[[x]]$ formée des séries formelles algébriques.*

Alors l'ensemble $M(A)$ des multiplicateurs de A est exactement l'ensemble des séries rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.

THÉORÈME 2.— *Soit f une série formelle de $\mathbb{C}[[x]]$, algébrique sur $\mathbb{C}(x)$ et non rationnelle.*

On considère la partie B égale à $\mathbb{C}(x, f(x)) \cap \mathbb{C}[[x]]$. Soit q le plus grand entier naturel tel que l'on puisse écrire $\mathbb{C}(x, f(x)) = \mathbb{C}(x, g(x^q))$ où g est une série formelle algébrique.

Alors l'ensemble $M(B)$ des multiplicateurs de B est l'ensemble des fractions rationnelles, n'ayant pour pôles éventuels que l'infini et les racines q-ième de l'unité.

THÉORÈME 3.— *Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ une série formelle de $\widetilde{K}[[x]]$. Soit s un entier naturel non nul, et q, ℓ, m trois entiers naturels, q et ℓ étant premiers à s, et m non nul. On suppose que :*

a) $a(n)$ est non nul à partir d'un certain rang;

b) la série $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)^s x^n$ est rationnelle;

c) la série $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)^{\ell} a(n+m)^q x^n$ est rationnelle.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ est elle-même rationnelle.

3. Résultats préliminaires

Nous aurons besoin des résultats suivants :

THÉORÈME T (M. Tsuji, [10]). — *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ une série entière à coefficients dans* $\mathbf{C}$*, de rayon de convergence égal à un. On suppose que $f(x)$ n'a, sur son cercle de convergence, qu'un nombre fini de singularités, toutes algébriques. Alors il existe un entier naturel non nul k, un rationnel r, n'appartenant pas à l'ensemble des entiers négatifs, et deux constantes réelles positives c et d, telles que l'on ait, pour tout entier n assez grand l'inégalité :*

$$0 < cn^r \leq |a(n)| + \cdots + |a(n+k-1)| \leq dn^r .$$

Il résulte de plus, de la démonstration de Tsuji une expression pour le rationnel r.

En effet, notons $v_1, \ldots, v_t$ les points singuliers de $f(x)$ sur son cercle de convergence. Au voisinage de v_j, j appartenant à $\{1, \ldots, t\}$, $f(x)$ admet un développement de Puiseux de la forme :

$$f(x) = b_0^{(j)} (x - v_j)^{\frac{m_j}{p_j}} + \cdots + b_h^{(j)} (x - v_j)^{\frac{m_j + h}{p_j}} + \cdots$$

Avec $b_0^{(j)} \neq 0$, m_j dans $\mathbf{Z}$, et p_j dans $\mathbf{N} - \{0\}$.

Soit w_j le nombre rationnel défini par :

$$w_j = \inf \left\{ \frac{m_j + \ell}{p_j} \,,\ \ell \in \mathbf{N} \,,\ \text{avec } \frac{m_j + \ell}{p_j} \notin \mathbf{N} \ \text{ et } \ b_\ell^{(j)} \neq 0 \right\}$$

soit $w = \inf(w_j\,,\ j = 1, \ldots t)$.

On a alors : $r = -w - 1$.

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle, de type fini sur $\mathbf{Q}$; nous notons, comme dans [2] $R(K)$ l'ensemble des suites d'éléments de K qui s'écrivent sous la forme $\sum_{j=1}^{t} p_j(n)(b_j)^n$ avec b_j élément de K, et p_j dans $K[x]$ pour tout j. L'ensemble $R(K)$ est muni de la multiplication et de l'addition ordinaire des suites, ce qui en fait un anneau commutatif. On a alors les résultats suivants (cf. [1]).

THÉORÈME B1. — *Les éléments inversibles de l'anneau $R(K)$ sont exactement les suites $u = u(n)$ qui possèdent la propriété suivante :*

Il existe un entier T non nul, et pour $r = 0, \dots, T-1$ des éléments non nuls c_r et d_r dans K, tels que l'on ait :

$$u(kT + r) = c_r (d_r)^{kT} \quad \text{pout tout } k \text{ dans } \mathbf{N}.$$

De plus, si G est un sous-groupe multiplicatif de $K - \{0\}$, de type fini, tout élément $u = \big(u(n)\big)$ de $R(K)$ tel que $u(n)$ appartienne à G pour tout n est inversible dans $R(K)$.

Nous notons $R^*(K)$ l'ensemble des éléments de $R(K)$, réguliers pour la multiplication (ce sont les éléments de $R(K)$ n'ayant qu'un nombre fini de zéros).

On a alors l'énoncé suivant ([2]).

THÉORÈME B2. — *Dans le monoïde multiplicatif $R^*(K)$, il y a factorisation unique en produit d'éléments irréductibles.*

Nous aurons besoin enfin du théorème suivant : ([8], [11], [12]).

THÉORÈME DU QUOTIENT DE HADAMARD. — *Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle, et :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) x^n \quad ; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) x^n$$

deux séries rationnelles. On suppose que $b(n)$ est non nul à partir d'un certain rang N, et que la série quotient de Hadamard de f par g, c'est-à-dire la série $\sum_{n \geq N} \frac{a(n)}{b(n)} x^n$, est dans $\widetilde{K}[[x]]$.

Alors cette série $\sum_{n \geq N} \frac{a(n)}{b(n)} x^n$ est la série de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle.

4. Démonstration des résultats

Preuve du théorème 1.— Soit $m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ un multiplicateur pour la famille A des séries formelles algébriques sur $\mathbf{C}(x)$.

On voit tout d'abord que $m(x)$ est algébrique. En effet, l'élément neutre pour le produit de Hadamard est la série $e(x) = 1/(1-x)$, qui est rationnelle; par suite, $m \star e = m$ est algébrique. On démontre ensuite facilement par récurrence que, pour tout s entier naturel non nul, la série $m_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)^s x^n$ est encore algébrique.

Si le rayon de convergence de la série $m(x)$ (qui est non nul, puisque $m(x)$ est algébrique) est infini, alors $m(x)$ est un polynôme; on peut donc supposer dans la suite de la démonstration que le rayon de convergence R de m est fini.

D'après le théorème T, il existe des constantes k, r, c_1, d_1, telles que pour tout n assez grand, on ait :

$$0 < c_1 R^{-n} n^r \leq |a(n)| + \cdots + |a(n+k-1)| \leq d_1 R^{-n} n^r . \tag{1}$$

On remarquera que r est parfaitement déterminé à partir de la fonction $m(x)$, ainsi que R bien sûr, mais que ce n'est pas le cas pour l'entier k.

On en déduit facilement de (1) que pour tout entier naturel s non nul, on a de même, pour tout n assez grand :

$$0 < c_s R^{-sn} n^{rs} \leq |a(n)|^s + \cdots + |a(n+k-1)|^s \leq d_s R^{-sn} n^{rs} . \tag{2}$$

Puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)^s x^n$ est algébrique, on en déduit du théorème T de Tsuji que rs n'est pas un entier négatif, et ceci pour tout s.

Il en résulte donc que le rationnel r attaché à la série $m(x)$ par la relation (1) est positif ou nul.

Soit maintenant $P(x)$ un polynôme non nul, à coefficients dans $\mathbf{C}$.

Soit $g(x) = P(x)m(x)$; nous allons montrer que $g(x)$ est encore un multiplicateur de A.

Il suffit pour cela de considérer le cas où $P(x)$ est un monôme; on prend donc $P(x) = x^i$, $i \in \mathbf{N}$.

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b(x)x^n$ une série formelle algébrique. Le produit de Hadamard de $f(x)$ avec $x^i m(x)$ est égal à la série $\sum_{n\geq 0} a(n-i)b(n)x^n$, avec la convention que $a(\ell) = 0$ si ℓ est négatif.

On voit facilement que :

$$\sum_{n\geq 0} a(n-i)b(n)x^n = x^i\left[(m\star f_i)(x)\right] \text{ avec } f_i(x) = x^{-i}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{i-1} b_j x^j\right] .$$

La série f_i étant encore dans A, $m\star f_i$ est aussi dans A, et par suite, pour tout f dans A, le produit de Hadamard de $f(x)$ et de $x^i m(x)$ est encore dans A, ce qui prouve l'assertion.

Nous considérons maintenant l'ensemble des points singuliers de $m(x)$ dans $\mathbf{C}$, que nous notons $w_1,\ldots,w_t$.

On peut trouver un polynôme $P(x)$, tel que le produit $g(x) = P(x)m(x)$ ait, aux points w_j, des développements de Puiseux dont tous les termes ont des exposants positifs.

D'après ce que l'on a vu, $g(x)$ est un multiplicateur. Si $g(x)$ a un rayon de convergence fini, il en résulte que le rationnel r qui lui est attaché par la formule (1) est positif ou nul.

D'après la définition du réel w attaché à la fonction $g(x)$ (voir après le théorème T), et le choix du polynôme $P(x)$, on a w positif ou nul.

Comme $r = -w-1$, ceci entraîne r négatif, ce qui est contradictoire avec ce qui précède.

Le rayon de convergence de $g(x) = P(x)m(x)$ est infini, donc $g(x)$ est un polynôme, et ceci termine la démonstration du théorème 1.

Preuve du théorème 2.— Remarquons tout d'abord que l'ensemble $M(B)$ n'est pas vide, puisque la série $e(x) = 1/(1-x)$ appartient clairement à $M(B)$. Nous voyons d'autre part que la preuve du théorème 1 se recopie sans difficultés, pour montrer que si $m(x)$ appartient à $M(B)$, alors $m(x)$ est une fraction rationnelle.

Soit $m(x) = E(x) + P(x)/Q(x)$ un élément de $M(B)$, avec E polynôme, P et Q deux polynômes tels que le degré de P soit inférieur au degré de Q. Il est clair qu'alors $P(x)/Q(x)$ est un multiplicateur.

Nous avons déjà vu dans la preuve du théorème 1 qu'en multipliant par un polynôme un multiplicateur, on trouve encore un multiplicateur.

Par suite, si z^{-1} est un pôle d'un multiplicateur, il en résulte que la série $1/(1-zx)$ est aussi un multiplicateur.

Nous notons S l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que la série $1/(1-zx)$ soit un multiplicateur.

Nous allons montrer que S est une partie finie de $\mathbf{C}$. Pour cela, nous raisonnons par l'absurde, en supposant S infini.

Soit N la dimension de $\mathbf{C}(x\,,\,f(x))$ sur $\mathbf{C}(x)$; on peut trouver une infinité de $N+1$-uplets d'éléments de S, que nous notons $\left(z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, \ldots, z_N^{(k)}\right)$, qui possède la propriété suivante : pout tout couple (ℓ, k) d'entiers naturels, avec k différent de ℓ, l'intersection des ensembles $\left\{z_i^{(k)}\left(z_j^{(k)}\right)^{-1}, i \neq j\right\}$ et $\left\{z_i^{(\ell)}\left(z_j^{(\ell)}\right)^{-1}, i \neq j\right\}$ est vide.

La fonction algébrique $f(x)$ possède, puisqu'elle n'est pas rationnelle, au moins une singularité x_0, non nulle, qui n'est pas un pôle.

Pour chaque entier k, il existe une relation non triviale de dépendance linéaire sur $\mathbf{C}(x)$ entre les $f(z_i^{(k)}x)$ $i = 0, \ldots, N$, qui sont tous dans $\mathbf{C}(x\,,\,f(x))$.

Soit $P_{0,k}(x)f(z_0^{(k)}x) + \cdots + P_{N,k}(x)f(z_N^{(k)}x) = 0$ une telle relation.

Soit i_1 un indice tel que $P_{i_1,k}(x)$ soit non nul. Le nombre complexe $x_0\left(z_{i_1}^{(k)}\right)^{-1}$ est alors une singularité de $P_{i_1,k}(x)f(z_{i_1}^{(k)}x)$. Il existe donc un indice j_1, distinct de v_1, tel que $x_0\left(z_{i_1}^{(k)}\right)^{-1}$ soit une singularité de $f(xz_{j_1}^{(k)})$.

Il en résulte que $x_0\left(z_{j_1}^{(k)}\right)\left(z_{i_1}^{(k)}\right)^{-1}$ est une singularité de $f(x)$. Mais alors $f(x)$ a un ensemble infini de singularités, ce qui est absurde.

L'ensemble S est donc fini. Il est clair que l'ensemble $M(B)$ est stable par produit de Hadamard. Donc, si z est dans S, il en est de même de toutes les puissances de z.

Par suite, tous les éléments de S sont des racines de l'unité, et il est facile de voir que S est un groupe de racines de l'unité.

Soit q le cardinal de S, et k appartenant à $\{0, 1, \ldots, q-1\}$.

L'élément $x^k f(x)$ est dans B; par suite, pour tout z dans S, il en est de même de $z^k x^k f(zx)$.

Donc $\sum_{z \in S} z^k f(zx) = g_k(x^q)$ est aussi dans B. On en déduit facilement, en exprimant $f(x)$ en fonction des $g_k(x^q)$, que l'on a :

$$\mathbf{C}(x, f(x)) = \mathbf{C}\left(x, g_0(x^q), \ldots, g_{q-1}(x^q)\right) ,$$

et enfin qu'il existe g dans $\mathbf{C}[[x]]$ tel que $\mathbf{C}(x, f(x)) = \mathbf{C}(x, g(x^q))$. Il est clair que q est le plus grand entier tel que l'on ait cette propriété.

Il nous reste à démontrer que $M(B)$ est exactement l'ensenble des fractions rationnelles ayant tous leurs pôles dans S.

Il suffit pour cela de démontrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à un, et pour tout z dans S, la série $1/(1-zx)^j$ est dans $M(B)$. Nous procédons par récurrence sur j, le cas de $j=1$ étant la définition de S.

Soit L l'opérateur différentiel $L = x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$; L applique B dans B. On vérifie facilement que :

$$L\left(\frac{1}{(1-zx)^s} \star h\right) = L\left(\frac{1}{(1-zx)^s}\right) \star h \quad \text{pour tout } h \text{ dans } B\,.$$

Par suite : $$L\left(\frac{1}{(1-zx)^s}\right) = \frac{zsx}{(1-zx)^{s+1}}$$

est un multiplicateur, et on en déduit facilement l'assertion.

Preuve du théorème 3.— Nous posons :
$b(n) = a(n)^s$ et $c(n) = a(n)^\ell a(n+m)^q$. Il en résulte l'égalité :

$$c(n)^s = b(n)^\ell b(n+m)^q\,. \tag{3}$$

On peut sans restreindre la généralité supposer que K est de type fini sur $\mathbf{Q}$, et que les suites $b(n)$ et $c(n)$ sont dans $R(K)$. Puisque $a(n)$ est non nulle à partir d'un certain rang, les deux suites $b(n)$ et $c(n)$ sont alors dans $R^*(K)$.

Nous allons d'abord démontrer que $b(n)$ est, à un facteur inversible de $R(K)$ près, la puissance s-ième d'un élément de $R(K)$. Nous raisonnons par l'absurde; on peut donc écrire :

$$b(n) = w(n)I_1(n)^{e_1}\dots I_h(n)^{e_h}(\widetilde{b}(n))^s \tag{4}$$

où $w(n)$ est un élément inversible de $R(K)$, les $I_j(n)$ des éléments irréductibles de $R(K)$, les entiers e_j sont non nuls et non multiples de s, et enfin $\widetilde{b}(n)$ est un élément de $R(K)$.

De l'égalité (3), et du fait que ℓ et q sont premiers à s, il résulte alors facilement que, pour tout i, il existe j et un élément inversible $e(n)$ dans $R(K)$ tel que l'on ait : $I_i(n) = e(n)I_j(n+m)$. Il existe alors un des facteurs irréductibles $I_i(n)$, que nous notons $I(n)$, qui possède la propriété suivante :

On a l'égalité $I(n+w_0) = e_0(n)I(n)$, où w_0 est un entier naturel non nul, et $e_0(n)$ un élément inversible de $R(K)$. Soit G le sous-groupe de type fini de $K-\{0\}$, engendré par les valeurs $e_0(n)$, $n \in \mathbf{N}$, et les éléments $I(0),\dots,I(w_0-1)$.

On voit facilement que, pour tout n, $I(n)$ appartient à G. D'après le théorème B1, Il en résulte que $I(n)$ est inversible dans $R(K)$, ce qui est absurde, et démontre l'assertion.

Soit L une extension finie de K où l'élément inversible $w(n)$ figurant dans la formule (4) est une puissance s-ième d'un élément de $R(L)$. On a alors : $a(n)^s = d(n)^s$, avec $d(n)$ appartenant à $R(L)$.

Il existe donc une suite $v(n)$, à valeurs dans l'ensemble des racines s-ième de l'unité, telle que $a(n) = v(n)d(n)$ pour tout n.

On conclut que les deux séries :

$\sum d(n)^\ell d(n+m)^q x^n$ et $\sum v(n)^\ell v(n+m)^q d(n+m)^q x^n$ sont rationnelles.

D'après le théorème du quotient de Hadamard, la série :

$\sum v(n)^\ell v(n+m)^q x^n$ est alors elle aussi rationnelle.

Il en résulte que la suite $v(n)^\ell v(n+m)^q$, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, est périodique à partir d'un certain rang. Soit N une période, on a donc :

$$\left[\frac{v(n+N)}{v(n)}\right]^\ell = \left[\frac{v(n+m+N)}{v(n+m)}\right]^{-q} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.} \tag{5}$$

Soit t dans $\mathbb{N}$ tel que $-tq$ soit congru à 1 modulo s, et posons $\ell' = t\ell$. L'entier ℓ' est encore premier à s, et en élevant la relation (5) précédente à la puissance t, on trouve :

$$\left[\frac{v(n+m+N)}{v(n+m)}\right] = \left[\frac{v(n+N)}{v(n)}\right]^{\ell'} \tag{6}$$

Soit h un entier tel que $(\ell')^h$ soit congru à 1 modulo s. En itérant la relation (6) h fois, on trouve :

$$\frac{v(n+hm+N)}{v(n+hm)} = \frac{v(n+N)}{v(n)} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.} \tag{7}$$

On montre facilement que pour tout couple k_1, k_2 d'entiers on a :

$$\frac{v(n+k_1hm+k_2N)}{v(n+k_1hm)} = \frac{v(n+k_2N)}{v(n)} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.} \tag{8}$$

En prenant $k_1 = N$, $k_2 = hm$, et en posant $T = hmN$, on voit que :

$$\frac{v(n+2T)}{v(n+T)} = \frac{v(n+T)}{v(n)} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.} \tag{9}$$

Pour $j = 0, 1, \ldots, T-1$, on pose $w_j(k) = \dfrac{v((k+1)T+j)}{v(kT+j)}$. Il résulte de (9) que $w_j(k)$ est constante, pour k assez grand.

Par suite, chacune des suites $v(kT+j)$, $j = 0, \ldots, T-1$ est récurrente linéaire, et il en est donc de même pour la suite $v(n)$.

Enfin, et ceci termine la démonstration, la série $\sum a(n)x^n$ est une fraction rationnelle, comme produit de Hadamard des deux séries rationnelles $\sum v(n)x^n$ et $\sum d(n)x^n$.

5. Commentaires et questions ouvertes

1°) Tout d'abord, les théorèmes 2 et 3 ne sont démontrés que pour le corps des nombres complexes. On peut donc se demander si le résultat est encore vrai quand le corps de base est un corps commutatif de caractéristique nulle quelconque.

2°) Par contre, si K est un corps commutatif de caractéristique non nulle, un théorème de H. Furstenberg montre que le produit de Hadamard de deux séries algébriques quelconques est encore algébrique (voir [5]).

3°) On peut aussi se demander ce qu'il se passe quand on considère des séries rationnelles ou algébriques à plusieurs variables.

Un exemple dû a Hurwitz montre que le produit de Hadamard de deux séries rationnelles à deux variables n'est pas toujours une série rationnelle; l'exemple est :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - x_1 x_2} \quad ; \quad g(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - (x_1 + x_2)} .$$

La question de déterminer les multiplicateurs pour les séries rationnelles à deux variables n'est donc pas triviale.

4°) Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Nous rappelons brièvement la notion de diagonale d'une fraction rationnelle régulière à l'origine. Pour :

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \frac{P(x_1, \ldots, x_s)}{Q(x_1, \ldots, x_s)} = \sum a(n_1, \ldots, n_s) x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s} ,$$

on appelle diagonale de F la série formelle à une variable : $\sum a(n_1, \ldots, n_s) t^n$.

On note $\mathcal{D}_k(K)$ l'ensemble des diagonales de fractions rationnelles à s variables.

Il est clair que $\mathcal{D}_1(K) = K(x) \cap K[[x]]$, et on sait que $\mathcal{D}_2(K)$ est l'ensemble des séries algébriques (voir [4]). Quel est l'ensemble des multiplicateurs pour $\mathcal{D}_s(K)$? (noter que cette question est liée à 3°).

5°) Dans le cas du théorème 3, si l'on remplace l'hypothèse b) par " il existe ℓ premier à s tel que $\sum a(n)^{\ell}x^n$ soit rationnelle ", on voit facilement en utilisant le théorème du quotient de Hadamard que $\sum a(n)x^n$ est rationnelle.

6°) L'hypothèse " $a(n)$ non nul à partir d'un certain rang " est nécessaire; en effet : soit u_n appartenant à $\{\pm 1\}$ tel que la série $\sum a(n)x^n$ avec $a_{2n} = u_n$, $a_{2n+1} = 0$ ne soit pas rationnelle. Les deux séries $\sum a(n)^2x^n$ et $\sum a(n)a(n+1)x^n$ sont pourtant rationnelles.

Bibliographie

[1] BENZAGHOU (B.) .— *Algèbres de Hadamard,*
Bull. Soc. Math. France **28** (1970) pp. 209-252

[2] BEZIVIN (J-P.) .— *Factorisation de suites récurrentes linéaires et applications,*
Bull. Soc. Math. France **112** (1984) pp. 365-376

[3] BIEBERBACH (L.) .— *Analytische Fortsetzung ,*
Springer-Verlag (1955)

[4] CHRISTOL (G.) .— *Diagonales de Fractions rationnelles,*
Preprint

[5] FURSTENBERG (H.) .— *Algebraic functions over finite fields,*
Journal of Algebra **7** (1967) pp. 271-277

[6] JUNGEN (R.) .— *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence,*
Comment. Math. Helv. **3** (1931) pp. 266-306

[7] LIPSHITZ (L.) and RUBEL (L.A.) .— *A gap theorem for power series solutions of algebraic differential equations,*
American J. of Math. **5**, 108 (1986) pp. 1193-1213

[8] RUMELY (R.S.) .— *Notes on Van Der Poorten's proof of the Hadamard quotient theorem, I and II,*
Unpublished notes

[9] RUMELY (R.S.) and VAN DER POORTEN (A.J.) .— *A note on the Hadamard k-th-root of a rational function,*
Preprint

[10] TSUJI (M.) .— *On a power series which has only algebraic singularities on its convergence circle,*
Japanese Journal of Math. **3** (1926) pp. 69-85

[11] VAN DER POORTEN (A.J.) .— *Hadamard operations on rational functions,*
Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, exposé n°**4** (1982-84)

[12] VAN DER POORTEN (A.J.) .— *p-adics methods in the study of Taylor coefficients of rational functions (to* KURT MAHLER *on his 80-th Birthday),*
Bull. Australian Math. Soc. **19** (1984) pp. 109-117