

$$e^3 = K \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdots \right\}$$

Cancelling scalar factors:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R^4 \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 72 & 45 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = R^{14} \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} &= R \begin{bmatrix} 75 & 39 \\ 64 & 43 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 75 & 39 \\ 64 & 43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= RL^{11} \begin{bmatrix} 32 & 25 \\ 33 & 3 \end{bmatrix} \quad (a_0 = 20) \\ \begin{bmatrix} 32 & 25 \\ 33 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 8 \end{bmatrix} &= RL^2R^2 \begin{bmatrix} 50 & 17 \\ 13 & 19 \end{bmatrix} \quad (a_1 = 11, a_2 = 1, a_3 = 2) \\ \begin{bmatrix} 50 & 17 \\ 13 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 13 \\ 13 & 10 \end{bmatrix} &= R^2L^3 \begin{bmatrix} 111 & 102 \\ 122 & 53 \end{bmatrix} \quad (a_4 = 4) \\ \begin{bmatrix} 111 & 102 \\ 122 & 53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} &= RL^5RL \begin{bmatrix} 77 & 24 \\ 25 & 93 \end{bmatrix} \quad (a_5 = 3, a_6 = 1, a_7 = 5, a_8 = 1) \end{aligned}$$

and so on.

$$\text{Hence } e^3 = [20, 11, 1, 2, 4, 3, 1, 5, 1, \dots].$$