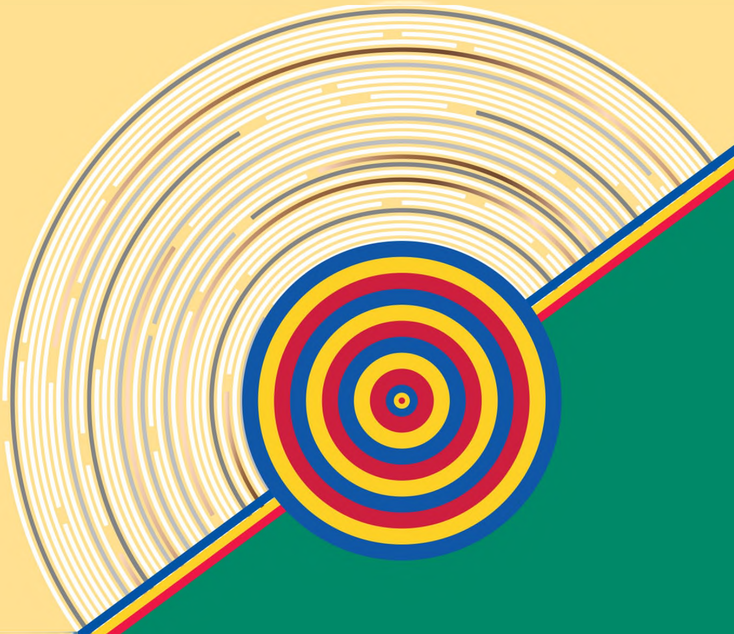
АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДОВЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

М.Н. ПОПА, В.В. ПРИКОП



ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА И ФОКУСА: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

КИШИНЭУ • 2018

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДОВЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

М. Н. ПОПА, В. В. ПРИКОП

ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА И ФОКУСА: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

Кишинэу 2018

CZU 517.9=135.1=111
П 570

ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА И ФОКУСА: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

Рассматривается нелинейная система $\dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x, y)$, $\dot{y} = \sum\limits_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x, y)$ с особой точкой второй группы (центр или фокус) в начале координат, где P_{m_i} и Q_{m_i} однородные полиномы степени $m_i \geq 1$ относительно x и y, а $m_0 = 1$. Множество $\{1, m_i\}_{i=1}^{\ell}$ состоит из конечного числа ($\ell < \infty$) различных натуральных чисел. Показано, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для указанной дифференциальной системы не превышает число $\varrho = 2(\sum_{i=0}^{\ell} m_i + \ell) + 3$. Исходя из этого и дополнительных аргументов выдвинута обоснованная гипотеза, что число существенных условий центра ω, которые решают проблему центра и фокуса для указанной дифференциальной системы не превышает указанное число ϱ, т.е. $\omega \leq \varrho$.

Показано также, что число $\varrho - 2$ является верхней границей числа функционально-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении указанной проблемы. Предполагается, что число существенных условий центра, решающих проблему центра и фокуса для рассматриваемой системы, удовлетворяет неравенству $\omega \leq \varrho - 2$.

Монография рассчитана на математиков, научных работников, преподавателей, докторантов.

Работа утверждена к изданию решением Ученого совета Института математики и информатики АН Молдовы от 18 декабря 2017.

Рецензенты:
доктор хабилитат физико-математических наук А. С. Шубэ,
доктор хабилитат физико-математических наук Д. В. Козма.

Попа, М. Н.

Проблема центра и фокуса: алгебраические решения и гипотезы / Михаил Николаевич Попа, Виктор Васильевич Прикоп ; Акад. наук Молдовы. Ин-т математики и информатики. – Кишинэу : Б. и. 2018 (Типография Академии Наук Молдовы). – 256 p.

Texte : lb. rom., engl. – Bibliogr.: p. 209-213(45 tit.). – 50 ex.

ISBN 978-9975-62-416-9.

517.9=135.1=111
П 570

ISBN 978-9975-62-416-9

CZU 517.9=135.1=111
П 570

THE CENTER-FOCUS PROBLEM: ALGEBRAIC SOLUTIONS AND HYPOTHESES

The nonlinear differential system $\dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x,y),\ \dot{y} = \sum\limits_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x,y)$ with a singular point of a center or focus type (a weak focus) at the origin of coordinates is considered, where P_{m_i} and Q_{m_i} are homogeneous polynomials of degree $m_i \geq 1$ in x and y, and $m_0 = 1$. The set $\{1, m_i\}_{i=1}^{\ell}$ consists of a finite number ($\ell < \infty$) of distinct natural numbers. It is proved that the maximal number of algebraically independent focal quantities used in solving of the center-focus problem for given differential system does not exceed $\varrho = 2(\sum_{i=0}^{\ell} m_i + \ell) + 3$. Based on this fact and additional arguments we put forward a lawful hypothesis, that the number of the essential center conditions ω, witch solve the center-focus problem for given differential system does not exceed ϱ, i.e. $\omega \leq \varrho$.

It is shown that the number $\varrho - 2$ is the upper border for the number of functional independent focal quantities that take part in solving of the considered problem. It is assumed that the number of the essential center conditions, which solve the center-focus problem for given differential system, satisfies the inequality $\omega \leq \varrho - 2$.

The monograph is intended for mathematicians, scientists, professors, PhD students.

The work was approved for publication by decision of the Academic Council of the Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova from December 18, 2017.

Reviewers:

A. S. Şubă, Doctor Habilitatus in Physics and Mathematics,

D. V. Cozma, Doctor Habilitatus in Physics and Mathematics.

Оглавление

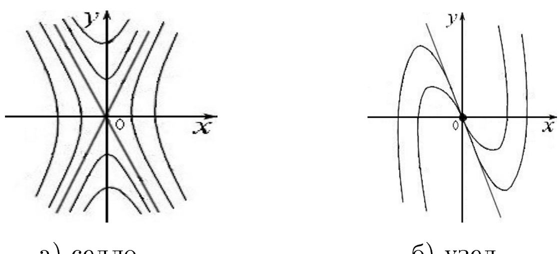
Введение

Одной из старых проблем качественной теории дифференциальных уравнений является проблема центра и фокуса. Она появляется, например, в случае, когда корни характеристического уравнения дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{1}$$

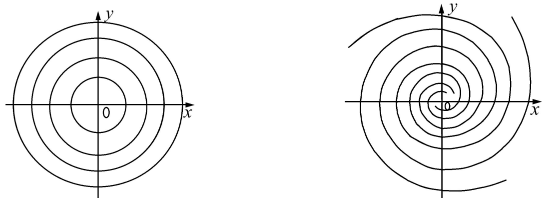
являются чисто мнимыми.

Указанная проблема была сформулирована более 130 лет назад французким математиком Анри Пуанкаре (1854–1912). Он показал, что если дифференциальная система не может быть решена в явном виде, то можно прибегнуть к изучению поведения их решений (интегральных кривых) без знания этих решений. Так появилась качественная теория дифференциальных уравнений. Одним из важнейших вопросов этой теории является изучение поведения интегральных кривых (траекторий) вблизи особых точек, т.е. таких точек, для которых $X(x, y) = Y(x, y) = 0$. В связи с этим Пуанкаре предложил следующую классификацию особых точек: седло, узел, центр и фокус.



а) седло б) узел

Фиг. 1. Особые точки первой группы



а) центр б) фокус

Фиг. 2. Особые точки второй группы

Как было отмечено выше, наличие центра или фокуса в особой точке системы (1) обеспечивается чистой мнимостью корней характеристического уравнения. При этом условии в случае центра особая точка окружена замкнутыми траекториями, а в случае фокуса окружена спиралями. Проблема центра и фокуса состоит в определении условия когда особая точка является центром. В общем случае проблема центра алгебраически неразрешима [1, 2]. Стоит отметить, что в мировой литературе проблеме центра и фокуса посвящено большое количество работ в научных центрах Франции, России, Белорусии, Китая, Великобритании, Испании, Польшы, Словении, Канады, США и др.

В Республике Молдова первым начал заниматься проблемой центра и фокуса для дифференциальных систем с полиномиальными нелинейностями академик К. С. Сибирский (1928–1990). Первая его работа „*Об условиях наличия центра и фокуса*" (Уч. зап. Кишин. ун-та 11, (1954), с. 115–117) вызвала интерес к этой проблеме и у нас в стране.

Его кандидатская диссертация была сосредоточена на некоторых аспектах проблемы центра и фокуса и была защищена в 1955 году в Казанском университете (Россия). На разных этапах ученики академика К. С. Сибирского (Н. И. Вулпе, А. С. Шубэ, Ю. Ф. Калин, В. А. Балтаг, Д. В. Козма и др.) рассматривали разные вопросы этой проблемы и получили значительные результаты.

Если рассмотреть случай когда функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ системы (1) являются полиномами, то для того, чтобы проблема центра и фокуса была алгебраически разрешима необходимо, чтобы линейные части этой системы были отличными от нуля. Запишем указанную систему в виде

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x, y), \;\; \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x, y) \;\; (\ell < \infty), \tag{2}$$

где P_{m_i} и Q_{m_i} являются однородными полиномами степени $m_i \geq 1$ относительно фазовых переменных x, y, а $m_0 = 1$. Множество $\{1, m_1, m_2, ..., m_\ell\}$ состоит из конечного числа ($\ell < \infty$) различных натуральных чисел. Коэффициенты и переменные полиномов системы (2) получают значения из поля действительных чисел $\mathbb{R}$. Систему (2) будем обозначать через $s(m_0, m_1, ..., m_\ell)$.

Фундаментальные результаты к проблеме центра и фокуса были получены А. М. Ляпуновым (1857–1918) [3]. Анри Пуанкаре и Александр Ляпунов заложили основы качественной теории дифференциальных систем.

Как было показано в [3, 4], при наличии особой точки второй группы в начале координат условия центра состоят из равенства нулю бесконечной последовательности полиномов

$$L_1, L_2, ..., L_k, ..., \tag{3}$$

зависящие от коэффициентов полиномов правых частей системы (2), которые принято называть фокусными величинами, постоянными Ляпунова или постоянными Пуанкаре-Ляпунова.

Если хотя бы одна из величин (3) отлична от нуля, то начало координат для системы (2) является фокусом. Эти условия являются необходимыми и достаточными.

Из теоремы Гильберта о конечности базиса полиномиальных идеалов следует, что *существенные условия центра*, которые выражают равенство нулю бесконечной последовательности полиномов (3), состоят из конечного числа многочленов, а остальные являются их следствием.

Принимая во внимание этот результат, проблему центра и фокуса можно сформулировать следующим образом: *какое конечное число ω полиномов из* (3) (*существенных условий центра*)

$$L_{n_1}, L_{n_2}, ..., L_{n_\omega} \ (n_i \in \{1, 2, ..., k, ...\}; \ i = \overline{1, \omega}, \ \omega < \infty) \tag{4}$$

необходимо для того, чтобы их равенство нулю аннулировало все полиномы из (3)?

Следовательно, проблема центра и фокуса состоит из двух частей. *Первая часть* относится к нахождению числа ω, определяющего верхнюю границу количества фокусных величин, которые составляют существенные условия центра. *Вторая часть* состоит в определении множества $\Omega = \{n_1, n_2, ..., n_\omega\}$ индексов n_i $(i = \overline{1, \omega})$, соотвествующих фокусным величинам которые составляют существенные условия центра.

Обобщенная проблема центра и фокуса состоит в определении верхней границы числа λ алгебраически-независимых фокусных величин из $\Pi = \{L_i : i \in \Omega\}$.

Существует мнение, что если проблема центра и фокуса для системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$, имеюшей в начале координат особую точку второй группы, (центр или фокус), случайно решается отрицательно, то решение обобщенной проблемы центра и фокуса может считаться окончательным решением этой проблемы.

Проблема нахождения существенных условий центра (4) с числом ω является сверхсложной задачей и ее полное решение дано для систем $s(1,2)$ и $s(1,3)$ для которых соотвественно имеем $\omega = 3,5$ (см., например, [5]– [7]).

На сегодняшний день не известно число ω для системы $s(1,2,3)$, которую можем считать также недостаточно сложной системой.

Существует неопубликованная гипотеза проф. Г. Жолондека (Польша), которая больше основывается на интуиции, что для системы $s(1,2,3)$ число $\omega \leq 13$. Эта гипотеза не опровернута до сих пор. Однако в работе [8] показано, что 12 фокусных величин не достаточно для решения проблемы центра и фокуса для системы $s(1,2,3)$.

Отметим, что путь решения проблемы центра и фокуса изначально был предложен Пуанкаре и Ляпуновым, который позволил получить её решение для систем $s(1,2)$ и $s(1,3)$ и других случаев частных систем. Однако для системы $s(1,2,3)$ указанный путь в решении проблемы центра и фокуса связан с непреодолимыми вычислениями даже с применением самых мощных компьютеров. Эти трудности также непреодолимы и для других более сложных систем $s(1,m_1,...,m_\ell)$.

Поэтому в качестве основы была взята обобщенная проблема центра и фокуса, которая была сформулирована выше для любых систем вида $s(1,m_1,...,m_\ell)$. Это позволило избежать вычисления фокусных величин (3) для указанных систем, и заменить этот процесс исследованием некоторых алгебр Ли операторов и градуированных алгебр Сибирского комитантов для рассматриваемых систем. Для оценки максимального числа алгебраически-независимых фокусных величин системы $s(1,m_1,...,m_\ell)$ и были использованы эти алгебры. В результате была получена конечная верхняя граница числа алгебраически-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для любой системы $s(1,m_1,...,m_\ell)$ из (1.1)–(1.2), об этом впервые было заявлено на международной конференции [43]. Результаты о решении обобщенной проблемы центра и фокуса докладывались на международных конференциях по дифференциальным уравнениям и по алгебре [44, 45].

Кроме того, для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1,m_1,m_2,...,m_\ell)$ из (41.1)–(41.2) найдена верхняя граница числа функционально-независимых фокусных величин, принимающие участие в решение проблемы центра и фокуса для этих систем.

Глава 1 (§§1–7) посвящена построению алгебры Ли операторов представления центроаффинной группы в пространстве коэффициентов и переменных дифференциальных систем с полиномиальными нелинейностями вида (2).

Глава 2 (§§8–13) посвящена исследованию дифференциальных уравнений для центроаффинных инвариантов и комитантов системы (2) и изучению их алгебраических базисов.

Глава 3 (§§14–18) посвящена исследованию производящих функций и рядов Гильберта для алгебр Сибирского комитантов и инвариантов полиномиальных дифференциальных систем вида (2).

Глава 4 (§§19–26) посвящена построению рядов Гильберта для алгебр Сибирского различных дифференциальных систем вида (2) и вычисления для этих алгебр размерностью Крулля.

Глава 5 (§§27–31) посвящена приведению понятий связанных с новой формулировкой проблемы центра и фокуса для системы вида (2).

Глава 6 (§§32–39) посвящается примерам дифференциальных систем, для которых определяется верхняя граница числа алгебраически-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса, а также обобщение этих результатов для любой системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Глава 7 (§§40–45) посвящена получению верхней границы числа функционально-независимых фокусных величин принимающих участие в решение проблемы центра и фокуса для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$ и сравнение ее с результатами главы 6. Результаты седьмой главы были получены в 2017 году и впервые публикуются в настоящей монографии. Здесь особенно важно отметить, что первоочередное ознакомление читателя с результатами седьмой главы поможет ему быстрее и ближе подойти к пониманию результатов первых шести глав.

Авторы чрезмерно благодарны Н. И. Вулпе, за полезные дискуссии по опубликованной статье [10], основные результаты которой вошли в настоящую монографию, и за рекламу, полученных результатов в научных центрах других стран.

Авторы глубоко признательны участникам семинара Института математики и информатики АНМ и Тираспольского госуниверситета (Кишинэу) „Дифференциальные уравнения и алгебры” за чрезвычайно полезные и плодотворные обсуждения материалов, включенных в эту книгу, а также Л. Т. Бендас за редактирование рукописи.

Авторы искренне благодарны рецензентам А. С. Шубэ и Д. В. Козма за критические замечания и советы. Все же недостатки на совести авторов.

Особую благодарность авторы выражают академику М. М. Чобану и журналистке Т. Ротару за популярное изложение, для широкого круга читателей, первоначальных результатов этой книги в статье [9].

Принципы, которые казались имеющими самую достоверную математическую базу, оспариваются теперь учеными. Книги, подобные глубокому сочинению Анри Пуанкаре „Наука и гипотеза" [11], дают доказательства этому на каждой странице. Этот знаменитый математик показал, что даже математика живет множеством гипотез и условностей.

Святитель Лука (Войно-Ясенецкий) [12]

Глава 1. Алгебра Ли операторов представления центроаффинной группы в пространстве коэффициентов полиномиальных дифференциальных систем

§1. Двумерные полиномиальные дифференциальные системы

Рассмотрим двумерную автономную полиномиальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dot{y} &= \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x,y) \equiv Q(x,y) \ (\ell < \infty), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Через $\Gamma = \{m_i\}_{i=0}^{\ell}$ обозначим некоторое конечное множество целых различных неотрицательных чисел, а однородности P_{m_i} и Q_{m_i} степени m_i относительно фазовых переменных x и y (то есть $P_{m_i}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{m_i} P_{m_i}(x,y)$, $Q_{m_i}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{m_i} Q_{m_i}(x,y)$ $\alpha \in \mathbb{R}$) в правой части системы (1.1) при $\binom{m_i}{k} = \frac{m_i!}{(m_i-k)!k!}$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} P_{m_i}(x,y) &= \sum_{k=0}^{m_i} \binom{m_i}{k} \overset{i}{a}{}^1_k x^{m_i-k} y^k, \\ Q_{m_i}(x,y) &= \sum_{k=0}^{m_i} \binom{m_i}{k} \overset{i}{a}{}^2_k x^{m_i-k} y^k, \ (m_i \in \Gamma, \ i = \overline{0,\ell}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Отметим, что все переменные и коэффициенты системы (1.1)–(1.2) принимают значение из поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

Для удобства системы вида (1.1)–(1.2) в одельных случях, будем задавать обозначениями $s(m_0, m_1, ..., m_\ell)$ или $s(\Gamma)$, где $\Gamma = \{m_i\}_{i=0}^{\ell}$, в которых сразу видно, однородности какой степени содержатся в правые части этих систем.

Приведем упрощенные записи некоторых систем вида (1.1)–(1.2), которые понадобятся в дальнейшем.

1.1. *Аффинная система.* Если в (1.1)–(1.2) принять $\Gamma = \{0,1\}$, то получим дифференциальную систему $s(0,1)$

$$\dot{x} = a + cx + dy, \quad \dot{y} = b + ex + fy, \tag{1.3}$$

где

$$a = \overset{0}{a}{}^1_0,\ b = \overset{0}{a}{}^2_0,\ c = \overset{1}{a}{}^1_0,\ d = \overset{1}{a}{}^1_1,\ e = \overset{1}{a}{}^2_0,\ f = \overset{1}{a}{}^2_1. \tag{1.4}$$

Отметим, что в системе (1.3) a и b называются свободными членами, а $cx + dy$ и $ex + fy$ – линейными частями.

1.2. *Система с квадратическими нелинейностями.* Если в (1.1)–(1.2) положить $\Gamma = \{1,2\}$, то получим дифференциальную систему $s(1,2)$, которая в упрощенной записи, принятой во многих работах, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + dy + gx^2 + 2hxy + ky^2, \\ \dot{y} &= ex + fy + lx^2 + 2mxy + ny^2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{gathered} c = \overset{0}{a}{}^1_0,\ d = \overset{0}{a}{}^1_1,\ e = \overset{0}{a}{}^2_0,\ f = \overset{0}{a}{}^2_1,\ g = \overset{1}{a}{}^1_0,\ h = \overset{1}{a}{}^1_1,\ k = \overset{1}{a}{}^1_2, \\ l = \overset{1}{a}{}^2_0,\ m = \overset{1}{a}{}^2_1,\ n = \overset{1}{a}{}^2_2. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Отметим, что при отсутсвии в системе (1.5) линейной части, получаем дифференциальную систему $s(2)$, которую принято называть

1.3. *Квадратичной системой*, которая записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= gx^2 + 2hxy + ky^2, \\ \dot{y} &= lx^2 + 2mxy + ny^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.4. *Система с кубическими нелинейностями.* Если в (1.1)–(1.2) положить $\Gamma = \{1, 3\}$, то получим дифференциальную систему $s(1,3)$, которая в упрощенной записи, принятой в некоторых работах, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + dy + px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3, \\ \dot{y} &= ex + fy + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{gathered} c = \overset{01}{a}_0^{}, \; d = \overset{01}{a}_1, \; e = \overset{02}{a}_0, \; f = \overset{02}{a}_1, \; p = \overset{11}{a}_0, \; q = \overset{11}{a}_1, \; r = \overset{11}{a}_2, \\ s = \overset{11}{a}_3, \; t = \overset{12}{a}_0, \; u = \overset{12}{a}_1, \; v = \overset{12}{a}_2, \; w = \overset{12}{a}_3. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Отметим, что при отсутствии в системе (1.8) линейной части, получаем дифференциальную систему $s(3)$, которую принято называть

1.5. *Кубической системой*, которая записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3, \\ \dot{y} &= tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3. \end{aligned} \tag{1.10}$$

В дальнейшем будут рассмотрены и другие системы вида (1) при различных $\Gamma = \{m_i\}_{i=0}^{\ell}$, отличных от вышеприведенных.

§2. Однопараметрические линейные группы преобразований фазовой плоскости системы (1.1) – (1.2)

Рассмотрим преобразования, включенные в однопараметрическое семейство $\{T_\alpha\}$:

$$\overline{x} = f^1(x, y, \alpha), \; \overline{y} = f^2(x, y, \alpha), \tag{2.1}$$

где α – вещественный параметр, непрерывно изменяющийся в некотором интервале из $\mathbb{R}$. Каждому частному значению параметра α соответствует некоторое преобразование семейства. Преобразование (2.1) фазовой плоскости $E^2(x, y)$ означает, что точка (x, y) переводится в новое положение $(\overline{x}, \overline{y})$ в той же плоскости $E^2(x, y)$.

Определение 2.1. *Скажем, что семейство $G_1 = \{T_\alpha\}$, состоящее из функций* (2.1), *непрерывно зависящих от параметра α, образует однопараметрическую группу G_1 преобразований, если*

1) $T_\alpha T_\beta = T_\gamma$, *где $T_\gamma \in \{T_\alpha\}$ и $\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$ считается достаточное число раз дифференцируемым*;

2) $T_{\alpha_0} = I$ (*или* $T_0 = I$) (*существование единицы*);

3) $T_\alpha^{-1} = T_{\alpha^{-1}}$ (*существование обратного элемента*);

4) $T_\alpha(T_\beta T_\gamma) = (T_\alpha T_\beta)T_\gamma$ (*ассоциативность умножения в группе*).

Отметим, что через α^{-1} обозначено значение параметра, отвечающеи обратному преобразованию, а условие 2) означает существование единственного значения параметра α, обеспечивающего тождественное преобразование в группе.

Пример 2.1. Рассмотрим замену переменных

$$\overline{x} = \mu x, \, \overline{y} = y (\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}). \tag{2.2}$$

Возьмем теперь два частных значениях μ и μ' параметра из $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и последовательно применим замену (2.2) и замену $T_{\mu'}$

$$\overline{\overline{x}} = \mu' \overline{x}, \, \overline{\overline{y}} = \overline{y} (\mu' \in \mathbb{R}\backslash\{0\}). \tag{2.3}$$

Подставлая (2.2) в эти равенства, получаем

$$\overline{\overline{x}} = \mu\mu' x, \, \overline{\overline{y}} = y (\mu, \, \mu' \in \mathbb{R}\backslash\{0\}).$$

Отсюда видно, что результат применения двух последовательных замен переменных (2.2) и (2.3) тождественен результату применения третьего преобразования этого семейства со значением параметра $\mu'' = \mu\mu'$. Символически это записывают в виде $T_\mu T_{\mu'} = T_{\mu''}$ и говорят, что замена (2.2) определяет *свойство группы.* Существование единицы в (2.2) определяется значением параметра $\mu_0 = 1$. Обратная замена для (2.2) имеет вид $x = \mu^{-1}\overline{x}$, $y = \overline{y}$, то есть $T_\mu^{-1} = T_{\mu^{-1}}$ и $\mu^{-1} = 1/\mu$. В этом случае говорят, что замена (2.2) *образует преобразование.* Для доказательства ассоциативности преобразования (2.2) кроме (2.3) берется еще преобразование $T_{\mu''}$:

$$\overline{\overline{\overline{x}}} = \mu'' \overline{\overline{x}}, \, \overline{\overline{\overline{y}}} = \overline{\overline{y}} \; (\mu'' \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

и непосредственно проверяется свойство 4) определения 2.1.

Следовательно, семейство $\{T_\mu\}$, заданное преобразованием (2.2), образует группу, которую обозначим через $M(2, \mathbb{R})$.

Пример 2.2. Рассмотрим замену переменных, заданных семейством $\{T_z\}$:

$$\overline{x} = x + zy, \, \overline{y} = y \; (z \in \mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Аналогично предыдущему примеру 2.1 можно показать, что все условия определения 2.1 выполняются и семейство замен (2.4) образует группу непрерывных преобразований от параметра z, которую обазначим через $Z_+(2,\mathbb{R})$.

Следует отметить, что в случае преобразования (2.4) обратное преобразование T_z^{-1} будет состоять из

$$x = \overline{x} - z\overline{y},\; y = \overline{y}. \tag{2.5}$$

При этом значение параметра, отвечающее обратному преобразованию, будет $z^{-1} = -z$.

В дальнейшем понадобятся еще две однопараметрические группы преобразований, заданные следующими примерами:

Пример 2.3. Группа преобразований $Z_-(2,\mathbb{R})$, заданная семейством замен $\{T_h\}$:

$$\overline{x} = x,\; \overline{y} = hx + y\,(h \in \mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Пример 2.4. Группа преобразований $L(2,\mathbb{R})$, заданная семейством замен $\{T_\lambda\}$:

$$\overline{x} = x,\; \overline{y} = \lambda y\,(\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}). \tag{2.7}$$

Примечание 2.1. *Группы $M(2,\mathbb{R})$, $Z_+(2,\mathbb{R})$, $Z_-(2,\mathbb{R})$, $L(2,\mathbb{R})$ будем называть линейными однопараметрическими группами.*

§3. Центроаффинная и унимодулярная группы преобразований фазовой плоскости системы (1.1) – (1.2)

В этом параграфе приведем две линейные группы, непрерывно зависящие больше чем от одного параметра, число которых конечное. Если число параметров равно r и нет возможности его уменьшить, то группа называется r–параметрической. Определения r–параметрической группы совпадает с определением 2.1, только в данном случае под параметром α будем понимать некий вектор с r–координатами.

Пример 3.1. $GL(2,\mathbb{R})$–группа всех центроаффинных преобразований фазовой плоскости $E^2(x,y)$:

$$\begin{gathered}\overline{x} = \alpha x + \beta y,\; \overline{y} = \gamma x + \delta y,\\ \left(\Delta = det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \neq 0\right),\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – новые переменные, а α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ получают непрерывно изменяющиеся значения.

Проверим выполнение семейством (3.1) условий определения 2.1. Если считать произведением последовательных преобразований (3.1) и

$$\begin{gathered}\overline{\overline{x}} = \alpha'\overline{x} + \beta'\overline{y}, \overline{y} = \gamma'\overline{x} + \delta'\overline{y}, \\ \left(\Delta' = det\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \neq 0\right),\end{gathered} \tag{3.2}$$

заданным равенствами

$$\begin{gathered}\overline{\overline{x}} = \alpha'(\alpha x + \beta y) + \beta'(\gamma x + \delta y) = \alpha'' x + \beta'' y, \\ \overline{\overline{y}} = \gamma'(\alpha x + \beta y) + \delta'(\gamma x + \delta y) = \gamma'' x + \delta'' y,\end{gathered} \tag{3.3}$$

то для их матриц имеем

$$\begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \alpha\gamma' + \gamma\delta' & \beta\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

или тоже самое

$$\begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Если обозначить через Δ'' определитель матрицы (3.4) для преобразования (3.3), то из (3.5) имеем

$$\Delta'' = \Delta'\Delta, \tag{3.6}$$

и этот определитель, согласно (3.1) и (3.2) отличен от нуля. Следовательно, преобразование (3.3) также является центроаффинным преобразованием, то есть выполняется первое условие определения 2.1.

В качестве единицы семейства (3.1) (тождественного центроаффинного преобразования) берется преобразование с параметрами

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 1. \tag{3.7}$$

С помощью (3.1) можно показать существование обратного элемента

$$x = \frac{\delta}{\Delta}\overline{x} + \frac{\beta'}{\Delta}\overline{y},\ y = \frac{\gamma'}{\Delta}\overline{x} + \frac{\alpha}{\Delta}\overline{y}, \tag{3.8}$$

где

$$\beta' = -\beta,\ \gamma' = -\gamma. \tag{3.9}$$

Аналогично первому условию можно проверить ассоциативность в группе.

Отметим, что параметры α, β, γ, δ в (3.1) являются независимыми, так как $\Delta \neq 0$. Следовательно, число параметров в этой группе нельзя уменьшить. А это показывает, что группа $GL(2,\mathbb{R})$ является четырехпараметрической.

Пример 3.2. $SL(2,\mathbb{R})$ – группа всех унимодулярных преобразований фазовой плоскости $E^2(x,y)$:

$$\begin{gathered}\overline{x} = \alpha x + \beta y,\, \overline{y} = \gamma x + \delta y,\\ \left(\Delta = det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1\right),\end{gathered} \tag{3.10}$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$–новые переменные, а α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ получают непрерывно изменяющиеся значения.

Отметим, что так как $\Delta = 1$, то число параметров можно уменьшить на единицу. Следовательно, унимодулярная группа является трехпараметрической.

Так как все унимодулярные преобразования содержатся в группе центроаффинных преобразований, то будем говорить, что они образуют подгруппу в группе всех центроаффинных преобразований.

Примечание 3.1. *Каждое центроаффинное преобразование* (3.1) *можно рассматривать как составную из двух преобразований*:

$$\overline{\overline{x}} = |\Delta|^{\frac{1}{2}}\overline{x},\, \overline{\overline{y}} = |\Delta|^{\frac{1}{2}}\overline{y} \tag{3.11}$$

и

$$\overline{x} = \frac{\alpha}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}\overline{\overline{x}} + \frac{\beta}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}\overline{\overline{y}},\, \overline{y} = \frac{\gamma}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}\overline{\overline{x}} + \frac{\delta}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}\overline{\overline{y}}, \tag{3.12}$$

где второе из них является унимодулярным.

Для доказательства приечания 3.1 достаточно вычислить произведение последовательных преобразований (3.11) и (3.12).

Будем считать преобразования (3.1) или (3.10) заданными, если заданы матрицы преобразования $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, и запишем $q \in GL(2,\mathbb{R})$, или $q \in SL(2,\mathbb{R})$.

Следуя [13], покажем, что имеет место

Теорема 3.1. *Преобразование* (3.1)*, принадлежащее четырехпараметрической группе* $GL(2,\mathbb{R})$*, может быть представлено в виде произведения преобразований* (2.2), (2.4), (2.6) *и* (2.7)*, принадлежащих соответственно однопараметрическим группам* $M(2,\mathbb{R})$*,* $Z_+(2,\mathbb{R})$*,* $Z_-(2,\mathbb{R})$*,* $L(2,\mathbb{R})$*.*

Доказательство. Обозначим матрицы, соответствующие преобразованиям (2.2), (2.4), (2.6) и (2.7), через

$$q_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; q_2 = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}, \; q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

где $\mu, \ \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Очевидно, что $q_1, \ q_2, \ q_3, \ q_4 \in GL(2, \mathbb{R})$. Отметим, что выполнение преобразований с матрицами (3.13) в следующем порядке $q_4((q_1 q_2) q_3)$ дает преобразование с матрицей

$$q = \begin{pmatrix} \mu + \mu z h & \mu z \\ \lambda h & \lambda \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Для того чтобы преобразование (3.1) с матрицей $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ представить в виде (3.14), достаточно взять

$$\mu = \frac{\Delta}{\delta}, \; z = \frac{\beta\delta}{\Delta}, \; h = \frac{\gamma}{\delta}, \; \lambda = \delta \, (\delta \neq 0).$$

Если же $\delta = 0$, то $\Delta = \beta\gamma \neq 0$, и для данного преобразования может быть написана матрица

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\Delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

которая равна произведению

$$q_3 \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha h + \frac{\Delta}{\beta} & -\beta h \end{pmatrix}.$$

Согласно предыдущим рассуждениям получаем, что второй сомножитель в этом произведении можно представить в виде $q_4((q_1 q_2) q_3)$, потому что в равенстве

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha h + \frac{\Delta}{\beta} & -\beta h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

параметр $\delta_1 = -\beta h$ не равен нулю, так как в случае произвольного h $\beta = 0$, а это влечет за собой $\Delta = \beta\gamma = 0$. Теорема 3.1 доказана.

§4. Операторы Ли однопараметрических линейных групп и их представления в пространстве коэффициентов системы (1.1) – (1.2)

Предположим, что преобразования (2.1) образуют однопараметрическую линейную группу. Ясно, что после преобразования с элементами этой группы в системе (1.1)–(1.2) указанная система не меняет свой вид и может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{x}} &= \sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{b}{}^{1}_{k}\,\overline{x}^{m_i-k}\ \overline{y}^{k},\\
\dot{\overline{y}} &= \sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{b}{}^{2}_{k}\,\overline{x}^{m_i-k}\ \overline{y}^{k}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Примечание 4.1. *Отметим, что коэффициенты* $\overset{i}{b}{}^{j}_{k}$ $(j = 1, 2)$ *системы* (4.1) *являются линейными функциями от коэффициентов системы* (1.1)–(1.2) *с коэффициентами, зависящими от параметра* α. *Последнее утверждение запишем в виде*

$$\overset{i}{b}{}^{j}_{k} = \overset{ij}{g}_{k}(A,\alpha)\,(i=\overline{0,\ell};\ j=1,2;\ k=\overline{0,m_i}), \tag{4.2}$$

где через A обозначена совокупность коэффициентов правых частей системы (1.1)–(1.2).

Отметим, что равенства (4.2) *определяют некоторую группу линейных преобразований пространства коэффициентов* $E^N(A)$ *системы* (1.1)–(1.2), *гомоморфную группе* (2.1), *или, как говорят, соотношения* (4.2) *определяют некоторое линейное представление группы* (2.1) *в пространстве* $E^N(A)$. *Аналогично определяется линейное представление r–параметрической линейной группы* (2.1) *с* $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^r)$ *в пространстве* $E^N(A)$.

Через N обозначено число коэффициентов правых частей системы (1.1)–(1.2), которое определяется равенством

$$N = 2\left(\sum_{i=0}^{\ell} m_i + \ell + 1\right). \tag{4.3}$$

Предположим, что в группе (2.1) тождественное преобразование обеспечивается при $\alpha = 0$ (в [14] доказано, что в любой однопараметрической группе можно ввести новый параметр с этим условием, то есть если $T_{\alpha_0} = I$ и $\alpha_0 \neq 0$, то переобозначением параметра можно добится $T_0 = I$).

Разложим функции (2.1) и (4.2) в ряды Тейлора по параметру α в окрестности $\alpha = 0$. По условию $T_0 = I$ имеем $f^1(x, y, 0) = x$, $f^2(x, y, 0) = y$ и $\overset{i}{g}{}^j_k(A, 0) = \overset{i}{a}{}^j_k$ $(i = \overline{0, \ell};\ j = 1, 2;\ k = \overline{0, m_i})$. Поэтому, обозначив

$$\xi^j(x, y) = \left.\frac{\partial f^j(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}, \overset{i}{\eta}{}^j_k(A) = \left.\frac{\partial \overset{i}{g}{}^j_k(A, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{4.4}$$
$$(i = \overline{0, \ell};\ j = 1, 2;\ k = \overline{0, m_i}),$$

запишем преобразования (2.1) и (4.2) в виде

$$\begin{gathered} \overline{x} = x + \xi^1(x, y)\alpha + o(\alpha), \overline{y} = y + \xi^2(x, y)\alpha + o(\alpha), \\ \overset{i}{b}{}^j_k = \overset{i}{a}{}^j_k + \overset{i}{\eta}{}^j_k(A)\alpha + o(\alpha)\,(i = \overline{0, \ell};\ j = 1, 2;\ k = \overline{0, m_i}). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Если обозначить через B совокупность правых частей системы (4.1), то в этом случае говорят, что группы (2.1) и (4.2) определяются своим касательным векторным полем $(\xi, \eta) = \left(\xi^1, \xi^2, \overset{i}{\eta}{}^j_k\right)$ $(i = \overline{0, \ell};\ j = 1, 2;$ $k = \overline{0, m_i})$, так как формулами (4.4) задается касательный вектор в точке (x, y, A) к кривой, описываемой точками $(\overline{x}, \overline{y}, B)$ при групповом преобразовании (2.1) и (4.2).

Однопараметрические группы (2.1) и (4.2) полностью восстанавливаются, если известны координаты вектора (ξ, η). Этот процесс осуществляется с помощью уравнений Ли с начальным условием [15]:

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{x}}{d\alpha} = \xi^1(\overline{x}, \overline{y}),\ \overline{x}|_{\alpha=0} = x, \\ &\frac{d\overline{y}}{d\alpha} = \xi^2(\overline{x}, \overline{y}),\ \overline{y}|_{\alpha=0} = y, \\ &\frac{dB}{d\alpha} = \eta(B),\ B|_{\alpha=0} = A. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Для любой однопараметрической группы (2.1) и ее представления (4.2) записываются уравнения Ли (4.6) однозначным образом и обратно.

Касательное векторное поле (пространство) $(\xi, \eta) = \left(\xi^1, \xi^2, \overset{i}{\eta}{}^j_k\right)$ $(i = \overline{0, \ell};\ j = 1, 2;\ k = \overline{0, m_i})$ записывается также с помощью дифференциального оператора первого порядка:

$$X = \xi^1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + D, \tag{4.7}$$

где

$$D = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i} \overset{i}{\eta}{}^{j}_{k}(A)\frac{\partial}{\partial \overset{i}{a}{}^{j}_{k}}. \tag{4.8}$$

Функции $\xi^j(x,y)$ и $\overset{i}{\eta}{}^{j}_{k}(A)$ называются координатами операторов (4.7) и (4.8), а оператор (4.8) называется оператором представления группы (2.1) в пространстве коэффициентов $E^N(A)$ системы (1.1)–(1.2).

Оператор X (D) называется инфинитезимальным оператором Ли, или просто оператором Ли группы преобразований (2.1) в пространстве $E^{N+2}(x,y,A)$ ($E^N(A)$), где N из (4.3).

§5. Операторы представления линейных групп (2.2), (2.4), (2.6) и (2.7) в пространстве переменных и коэффициентов системы (1.1) – (1.2)

Теорема 5.1. *Оператор представления группы* $M(2,\mathbb{R})$ *из* (2.2) *в пространстве* $E^{N+2}(x,y,A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид*

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + D_1, \tag{5.1}$$

где

$$D_1 = \sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[(-m_i+k+1)\overset{i}{a}{}^1_k\frac{\partial}{\partial \overset{i}{a}{}^1_k} + (-m_i+k)\overset{i}{a}{}^2_k\frac{\partial}{\partial \overset{i}{a}{}^2_k}\right]. \tag{5.2}$$

Доказательство. При преобразовании (2.2) в системе (1.1)–(1.2) коэффициенты системы (4.1) запишутся в виде

$$\overset{i}{b}{}^1_k = \mu^{-m_i+k+1}\overset{i}{a}{}^1_k,\ \overset{i}{b}{}^2_k = \mu^{-m_i+k}\overset{i}{a}{}^2_k\,(i=\overline{0,\ell},\ k=\overline{0,m_i}). \tag{5.3}$$

Отметим, что для преобразований (2.2) и (5.3) тождественное преобразование получается при $\mu_0 = 1$. Если ввести $|\mu| = exp(\overline{\mu})$ ($\overline{\mu}\in\mathbb{R}$), то из (2.2) и (5.3) имеем следующее семейство преобразований $\{T_\mu\}$:

$$\begin{gathered}\overline{x} = xexp(\overline{\mu}),\ \overline{y} = y,\ \overset{i}{b}{}^1_k = \overset{i}{a}{}^1_k exp(-m_i+k+1)\overline{\mu},\\ \overset{i}{b}{}^2_k = \overset{i}{a}{}^2_k exp(-m_i+k)\overline{\mu}\ (i=\overline{0,\ell},\ k=\overline{0,m_i}),\ \overline{\mu}\in\mathbb{R},\end{gathered} \tag{5.4}$$

удовлетворяющее условию $T_0 = I$, и при этом $\overline{\mu}^{-1} = -\overline{\mu}$. Так как в (5.4) $\overline{\mu} = 0$ обеспечивает тождественное преобразование в пространстве $E^{N+2}(x, y, A)$, то, принимая во внимание (4.4) из (5.4), получаем

$$\xi^1 = x,\ \xi^2 = 0,\ \overset{i}{\eta}{}^1_k = (-m_i + k + 1)\overset{i}{a}{}^1_k,\ \overset{i}{\eta}{}^2_k = (-m_i + k)\overset{i}{a}{}^2_k.$$

Подставляя эти равенства в (4.7)–(4.8) находим (5.1)–(5.2). Теорема 5.1 доказана.

Следствие 5.1. *Оператор представления группы* $M(2, \mathbb{R})$ *в пространстве коэффициентов* $E^N(A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид* (5.2).

Теорема 5.2. *Оператор представления группы* $Z_+(2, \mathbb{R})$ *из* (2.4) *в пространстве* $E^{N+2}(x, y, A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид*

$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + D_2, \tag{5.5}$$

где

$$D_2 = \sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[\left(\overset{i}{a}{}^2_k - k\overset{i}{a}{}^1_{k-1}\right)\frac{\partial}{\partial \overset{i}{a}{}^1_k} - k\overset{i}{a}{}^2_{k-1}\frac{\partial}{\partial \overset{i}{a}{}^2_k}\right]. \tag{5.6}$$

Доказательство. Если осуществить преобразование (2.4) в системе (1.1)–(1.2), то коэффициенты полученной системы (4.1) запишутся в виде

$$\begin{gathered}\overset{i}{b}{}^1_k = \overset{i}{a}{}^1_k + (\overset{i}{a}{}^2_k - k\overset{i}{a}{}^1_{k-1})z + o(z),\ \overset{i}{b}{}^2_k = \overset{i}{a}{}^2_k - k\overset{i}{a}{}^2_{k-1}z + o(z)\\ (i = \overline{0, \ell},\ k = \overline{0, m_i}),\end{gathered} \tag{5.7}$$

где $o(z)$ является полиномом, содержающим z в степени не меньше двух во всех членах.

С помощью (2.4), (4.4) и (5.7) строим координаты касательного вектора (ξ, η) группы $Z_+(2, \mathbb{R})$, которые имеют вид

$$\xi^1 = y,\ \xi^2 = 0,\ \overset{i}{\eta}{}^1_k = \overset{i}{a}{}^2_k - k\overset{i}{a}{}^1_{k-1},\ \overset{i}{\eta}{}^2_k = -k\overset{i}{a}{}^2_{k-1}.$$

Подставляя эти равенства в (4.7)–(4.8), находим (5.5)–(5.6). Теорема 5.2 доказана.

Следствие 5.2. *Оператор представления группы* $Z_+(2, \mathbb{R})$ *в пространстве коэффициентов* $E^N(A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид* (5.6).

Теорема 5.3. *Оператор представления группы* $Z_-(2, \mathbb{R})$ *из* (2.6) *в пространстве* $E^{N+2}(x, y, A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид*

$$X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} + D_3, \tag{5.8}$$

где

$$D_3=\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[(-m_i+k)\overset{i}{a}{}^1_{k+1}\frac{\partial}{\partial\overset{i}{a}{}^1_k}+(\overset{i}{a}{}^1_k+(-m_i+k)\overset{i}{a}{}^2_{k+1})\frac{\partial}{\overset{i}{a}{}^2_k}\right]. \quad (5.9)$$

Доказательство. Если осуществить преобразование (2.6) в системе (1.1)–(1.2), то коэффициенты полученной системы (4.1) запишутся в виде

$$\begin{gathered}\overset{i}{b}{}^1_k=\overset{i}{a}{}^1_k-(m_i-k)\overset{i}{a}{}^1_{k+1}h+o(h),\\ \overset{i}{b}{}^2_k=\overset{i}{a}{}^2_k+[\overset{i}{a}{}^1_k-(m_i-k)\overset{i}{a}{}^2_{k+1}]h+o(h)\,(i=\overline{0,\ell},\,k=\overline{0,m_i}),\end{gathered} \quad (5.10)$$

где $o(h)$ является полиномом, содержающим h в степени не меньше двух во всех членах.

С помощью (2.6), (4.4) и (5.10) строим координаты касательного вектора (ξ,η) группы $Z_-(2,\mathbb{R})$, которые имеют вид

$$\xi^1=0,\,\xi^2=x,\,\overset{i}{\eta}{}^1_k=(-m_i+k)\overset{i}{a}{}^1_{k+1},\,\overset{i}{\eta}{}^2_k=\overset{i}{a}{}^1_k-(m_i-k)\overset{i}{a}{}^2_{k+1}.$$

Подставляя эти равенства в (4.7)–(4.8), находим (5.8)–(5.9). Теорема 5.3 доказана.

Следствие 5.3. *Оператор представления группы* $Z_-(2,\mathbb{R})$ *в пространстве коэффициентов* $E^N(A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид* (5.9).

Теорема 5.4. *Оператор представления группы* $L(2,\mathbb{R})$ *из* (2.7) *в пространстве* $E^{N+2}(x,y,A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид*

$$X_4=y\frac{\partial}{\partial y}+D_4, \quad (5.11)$$

где

$$D_4=\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[-k\overset{i}{a}{}^1_k\frac{\partial}{\partial\overset{i}{a}{}^1_k}-(k-1)\overset{i}{a}{}^2_k\frac{\partial}{\partial\overset{i}{a}{}^2_k}\right]. \quad (5.12)$$

Доказательство. При преобразовании (2.7) в системе (1.1)–(1.2) коэффициенты полученной системы (4.1) запишутся в виде

$$\overset{i}{b}{}^1_k=\lambda^{-k}\overset{i}{a}{}^1_k,\,\overset{i}{b}{}^2_k=\lambda^{-k+1}\overset{i}{a}{}^2_k\ (i=\overline{0,\ell};\,k=\overline{0,m_i}). \quad (5.13)$$

Отметим, что для преобразований (2.7) и (5.13) тождественное преобразование получается при $\lambda_0=1$. Если ввести $|\lambda|=exp\overline{\lambda}$, $(\overline{\lambda}\in\mathbb{R})$, то из (2.7) и (5.13) имеем следующее семейство преобразований $\{T_{\overline{\lambda}}\}$:

$$\overline{x} = x,\ \overline{y} = y\, exp\overline{\lambda},\ \overset{i}{b}{}^1_k = \overset{i}{a}{}^1_k exp(-k\overline{\lambda}),\ \overset{i}{b}{}^2_k = \overset{i}{a}{}^2_k exp(-k+1)\overline{\lambda} \\ (i = \overline{0,\ell};\ k = \overline{0,m_i}),\ \overline{\lambda} \in \mathbb{R}, \tag{5.14}$$

удовлетворяющее условию $T_0 = I$, и при этом $\overline{\lambda}^{-1} = -\overline{\lambda}$.

Так как в (5.14) $\overline{\lambda} = 0$ обеспечивает тождественное преобразование в пространстве $E^{N+2}(x, y, A)$, то, принимая во внимание (4.4), из (5.14) получаем

$$\xi^1 = 0,\ \xi^2 = y,\ \overset{i}{\eta}{}^1_k = -k\overset{i}{a}{}^1_k,\ \overset{i}{\eta}{}^2_k = (-k+1)\overset{i}{a}{}^2_k.$$

Подставляя эти равенства в (4.7)–(4.8), находим (5.11)–(5.12). Теорема 5.4 доказана.

Следствие 5.4. *Оператор представления группы $L(2,\mathbb{R})$ из* (2.7) *в пространстве коэффициентов $E^N(A)$ системы* (1.1)–(1.2) *имеет вид* (5.12).

§6. Алгебра Ли операторов представления центроаффинной группы в пространстве переменных и коэффициентов системы (1.1) – (1.2)

Определение 6.1. *Следуя Л. В. Овсянникову* [14], *скажем, что линейное пространство L над полем $\mathbb{R}$ называется алгеброй Ли, если для любых двух его элементов u, v определена операция коммутации $[u, v]$, дающая снова элемент L (коммутатор элементов u, v) и удовлетворяющая следущим аксиомам:*

1) *билинейности: для любых $u, v, w \in L$ и $\alpha, \beta \in R$*

$$[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w],\ \ [u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w];$$

2) *антисимметричности: для любых $u, v \in L$*

$$[u, v] = -[v, u];$$

3) *справедливости тождества Якоби: для любых $u, v, w \in L$*

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0.$$

Размерностью алгебры Ли L называется размерность ее векторного пространства L и в случае конечной размерности r обозначается символом L_r и называется конечномерной.

В §5 было дано описание операторов Ли представления однопараметрических групп $M(2,\mathbb{R})$, $Z_+(2,\mathbb{R})$, $Z_-(2,\mathbb{R})$, $L(2,\mathbb{R})$ в пространствах $E^{N+2}(x,y,A)$ и $E^N(A)$ системы (1.1)–(1.2), где N из (4.3). Эти операторы являются дифференциальными операторами первого порядка, общий вид которых может быть записан следующим образом

$$Y(F) = \sum_{i=1}^{N+2} P_i \frac{\partial F}{\partial y_i}, \tag{6.1}$$

а вектор

$$(y_1, y_2, ..., y_{N+2}) = (x, y, \overset{0}{a}{}^1_0, \overset{0}{a}{}^1_1, ..., \overset{\ell}{a}{}^2_{m_\ell}) \in E^{N+2}(x,y,A) \tag{6.2}$$

и P_i – многочлены от $y_1, y_2, ..., y_{N+2}$.

Очевидно, что

$$\begin{gathered} Y(F_1+F_2) = Y(F_1) + Y(F_2), \\ Y(F_1F_2) = F_1Y(F_2) + F_2Y(F_1),\ Y(\alpha) = 0, \end{gathered} \tag{6.3}$$

если F_1, F_2–функции от $y_1, y_2, ..., y_{N+2}$, а $\alpha \in \mathbb{R}$. Композиция Y_1Y_2 двух дифференциальных операторов вида (6.1) есть снова дифференциальный оператор, но если Y_1 и Y_2 имеют порядок 1, то Y_1Y_2 будет иметь порядок 2, так как в него будут входить уже вторые производные. Однако то, что коммутатор

$$[Y_1, Y_2] = Y_1Y_2 - Y_2Y_1 \tag{6.4}$$

снова является оператором первого порядка, следует из того, что если для Y_1,Y_2 выполнены соотношения (6.3), то они выполнены и для $[Y_1, Y_2]$.

Если задать операторы Y_1 и Y_2 в координатной записи

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{N+2} P_i \frac{\partial}{\partial y_i},\ Y_2 = \sum_{i=1}^{N+2} Q_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{6.5}$$

где P_i и Q_i–функции от $y_1, y_2, ..., y_{N+2}$, то с учетом (6.3) и (6.4) получим

$$[Y_1, Y_2] = \sum_{i=1}^{N+2} R_i \frac{\partial}{\partial y_i},\ R_i = \sum_{i=1}^{N+2} \left(P_k \frac{\partial Q_i}{\partial y_k} - Q_k \frac{\partial P_i}{\partial y_k} \right). \tag{6.6}$$

Отсюда непосредственно видно, что $[Y_1, Y_2]$ является оператором первого порядка. Это может нам проиллюстрировать

Пример 6.1. Записывая операторы (5.1)–(5.2), (5.5)–(5.6), (5.8)–(5.9), (5.11)–(5.12) в пространстве $E^8(x, y, A)$ для системы (1.3), где

$$A = (a, b, c, d, e, f), \tag{6.7}$$

имеем

$$\begin{gathered} X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + D_1,\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + D_2, \\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} + D_3,\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} + D_4, \end{gathered} \tag{6.8}$$

а

$$\begin{gathered} D_1 = a\frac{\partial}{\partial a} + d\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial e}, \\ D_2 = b\frac{\partial}{\partial a} + e\frac{\partial}{\partial c} + (f-c)\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial f}, \\ D_3 = a\frac{\partial}{\partial b} - d\frac{\partial}{\partial c} + (c-f)\frac{\partial}{\partial e} + d\frac{\partial}{\partial f}, \\ D_4 = b\frac{\partial}{\partial b} - d\frac{\partial}{\partial d} + e\frac{\partial}{\partial e}. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Вычисляя всевозможные коммутаторы операторов (6.8)–(6.9), получаем

$$\begin{gathered} [X_1, X_2] = -X_2,\ [X_1, X_3] = X_3,\ [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_1] = X_2,\ [X_2, X_3] = X_4 - X_1,\ [X_2, X_4] = -X_2, \\ [X_3, X_1] = -X_3,\ [X_3, X_2] = X_1 - X_4,\ [X_3, X_4] = X_3, \\ [X_4, X_1] = 0,\ [X_4, X_2] = X_2,\ [X_4, X_3] = -X_3. \end{gathered} \tag{6.10}$$

Однако следует отметить, что равенство (6.4) имеет следующее преимущество

Лемма 6.1. *Коммутатор* (6.4), *операторы которого имеют вид* (6.5), *инвариантен относительно системы координат* (6.2) *в* $E^{N+2}(x, y, A)$.

Доказательство леммы 6.1 можно найти в работе Л. В. Овсянникова [14].

Легко можно проверить, что множество операторов (6.1) образуют линейное пространство и удовлетворяют определению 6.1. Следовательно, имеет место

Лемма 6.2. *Линейные дифференциальные операторы первого порядка* (6.1) *образуют алгебру Ли операторов.*

В этой алгебре отсутствует ассоциативность, но она заменена тождеством Якоби.

Предположим, что размерность алгебры Ли линейных дифференциальных операторов конечна и равна r, и зафиксируем в этой алгебре, которую обозначим через L_r, некоторый базис $Y_1, Y_2, ..., Y_r$. Рассмотрим коммутаторы $[Y_\mu, Y_\nu]$ всевозможных пар этих базисных операторов. Так как любой оператор Y из L_r разлагается по базису

$$Y = \sum_{\mu=1}^{r} e^\mu Y_\mu,\ e^\mu = const, \tag{6.11}$$

то значения всех $[Y_\mu, Y_\nu]$ позволяют однозначно найти коммутатор любых операторов из алгебры L_r с использованием билинейности. Отсюда ясно, что r–мерное векторное пространство L_r с базисом $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ образует алгебру Ли тогда и только тогда, когда коммутаторы базисных операторов принадлежат L_r, то есть когда

$$[Y_\mu, Y_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{r} C_{\mu\nu}^{\lambda} Y_\lambda,\ (\mu, \nu = \overline{1, r}), \tag{6.12}$$

где $C_{\mu\nu}^{\lambda}$–вещественные числа, называемые *структурными постоянными* алгебры L_r. Удобный способ для непосредственной работы с алгеброй Ли следующий: задается базис операторов и таблица их коммутаторов, которая легко строится с помощью (6.3) и в которой значение $[Y_\mu, Y_\nu]$ располагается на пересечении μ-й строки и ν-го столбца. Если таблица коммутаторов состоит из одних нулей, то алгебра Ли является коммутативной. Отсюда имеем

Следствие 6.1. *Одномерная алгебра Ли операторов, то есть алгебра Ли, состоящая из одного базисного оператора, является коммутативной.*

Примечание 6.1. *С помощью формул* (6.6) *можно показать, что равенства* (6.10) *имеют место для операторов* (5.1)–(5.2), (5.5)–(5.6), (5.8)–(5.9), (5.11)–(5.12), *применяемых к системе* (1.1)–(1.2) *при любом* $\Gamma = \{m_i\}_{i=0}^{\ell}$.

Изходя из примечания 6.1, рассмотрим совокупность этих операторов и составим таблицу 6.1 их коммутаторов, в которой значение $[Y_\mu, Y_\nu]$ располагается на пересечении μ-й строки и ν-го столбца.

Таблица 6.1

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-X_2$	X_3	0
X_2	X_2	0	$X_4 - X_1$	$-X_2$
X_3	$-X_3$	$X_1 - X_4$	0	X_3
X_4	0	X_2	$-X_3$	0

Отсюда заметим, что векторное пространство с базисом (5.1), (5.5), (5.8) и (5.11) образует 4-мерную алгебру Ли L_4.

Примечание 6.2. *Если в таблице* 6.1 X_1, X_2, X_3, X_4 *заменить соответственно на* D_1, D_2, D_3, D_4 *из* (5.2), (5.6), (5.9), (5.12), *то для новых операторов эта таблица сохранится и, следовательно, векторное пространство с этим базисом образует* 4*-мерную алгебру Ли при* $\Gamma \neq \{1\}$.

Равенства (6.10) называются *структурными уравнениями* алгебры Ли L_4.

Если теперь принять во внимание, что операторы (5.1), (5.5), (5.8), (5.11) ((5.2), (5.6), (5.9), (5.12)) являются соответсnвенно операторами представлений однопараметрических групп (2.2), (2.4), (2.6), (2.7) в пространстве $E^{N+2}(x, y, A)$ $(E^N(A))$, то с учетом теоремы 3.1 необходимо отметить, что эти однопараметрические группы являются теми группами, на которые разлагается группа $GL(2, \mathbb{R})$, и ее представление в пространстве $E^{N+2}(x, y, A)$ $(E^N(A))$. Таким образом, представлению группы $GL(2, \mathbb{R})$ в пространстве $E^{N+2}(x, y, A)$ $(E^N(A))$ ставится в соответствие алгебра Ли операторов X_1, X_2, X_3, X_4 (D_1, D_2, D_3, D_4), определенных таблицей 6.1 коммутаторов.

§7. Комментарии к первой главе

В этой главе рассматриваются непрерывные группы линейных преобразований для двумерных полиномиальных дифференциальных систем (1.1)–(1.2). Показано, что эти преобразования сохраняют форму указанных систем. Это приводит нас к теории групп и алгебр Ли, без которых нельзя сегодня представить современную математику и даже физику. Поэтому сохранение формы дифференциальной системы (1.1)–(1.2) при указанных выше группах линейных преобразований и означает допуск этих групп и соотвествующих им алгебр Ли операторов к указаным системам. Как показано в [15, 20] этот факт проверяется тем, что координаты полученных операторов X_1, X_2, X_3, X_4 соотвественно из (5.1)–(5.2), (5.5)–(5.6), (5.8)–(5.9), (5.11)–(5.12), с учетом (4.7)–(4.8) удовлетворяют определяющим уравнениям

$$\begin{aligned} \xi^1_x P + \xi^1_y Q &= \xi^1 P_x + \xi^2 P_y + D(P), \\ \xi^2_x P + \xi^2_y Q &= \xi^1 Q_x + \xi^2 Q_y + D(Q), \end{aligned} \tag{7.1}$$

соответствующим системе (1.1)–(1.2), где P и Q из указанной системы.

Глава 2. Дифференциальные уравнения для центроаффинных инвариантов и комитантов дифференциальных систем и их применения

§8. Понятие центроаффинного комитанта и инварианта дифференциальной системы

Напомним, что в дальнейшем будем считать заданность преобразования (3.1) через матрицу $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, а ее принадлежность к группе $GL(2,\mathbb{R})$ будем писать $q \in GL(2,\mathbb{R})$ и $\Delta = det(q)$.

Обозначим совокупность коэффициентов системы (1.1)–(1.2) через A, а (4.1)–через B. Из примечания 4.1 видно, что $B = g(A,q)$, то есть B является линейной функцией от A и рациональной от элементов преобразования q.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8.1. Рассмотрим многочлен, зависящий от коэффициентов системы (1.3) и фазовых переменных x, y, который запишем в виде определителя

$$k_1(x,y,A) = det \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

где через A обозначим совокупность коэффициентов правой части этой системы. Тогда после преобразования (3.1) в системе (1.3) получаем систему

$$\dot{\overline{x}} = \overline{a} + \overline{c}\,\overline{x} + \overline{d}\,\overline{y},\ \dot{\overline{y}} = \overline{b} + \overline{e}\,\overline{x} + \overline{f}\,\overline{y}, \tag{8.2}$$

где

$$\begin{gathered}
\overline{a} = \alpha a + \beta b,\ \overline{b} = \gamma a + \delta b,\\
\Delta \overline{c} = \delta(\alpha c + \beta e) - \gamma(\alpha d + \beta f),\\
\Delta \overline{d} = -\beta(\alpha c + \beta e) + \alpha(\alpha d + \beta f),\\
\Delta \overline{e} = \delta(\gamma c + \delta e) - \gamma(\gamma d + \delta f),\\
\Delta \overline{f} = -\beta(\gamma c + \delta e) + \alpha(\gamma d + \delta f).
\end{gathered} \tag{8.3}$$

Аналогичное выражение (8.1) для системы (8.2) будет иметь вид

$$k_1(\overline{x}, \overline{y}, B) = det \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{x} \\ \overline{b} & \overline{y} \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Будем искать, какое соотношение существует между (8.1) и (8.4). Для этого заметим, что матрица из (8.4) с помощью (3.1) и (8.3) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{x} \\ \overline{b} & \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha x + \beta y \\ \gamma a + \delta b & \gamma x + \delta y \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

где правая часть получит вид

$$\begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha x + \beta y \\ \gamma a + \delta b & \gamma x + \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}.$$

Отсюда с учетом (8.5) имеем

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{x} \\ \overline{b} & \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}.$$

Применяя к этому равенству свойство определителя, получаем

$$det \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{x} \\ \overline{b} & \overline{y} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix},$$

откуда с учетом (3.1), (8.1), (8.4) находим равенство

$$k_1(\overline{x}, \overline{y}, B) = \Delta k_1(x, y, A) \tag{8.6}$$

для любой совокупности коэффициентов A системы (1.3), любых x и y и любых преобразований $q \in GL(2, \mathbb{R})$. Заметим также из (8.6), что выражение (8.4) равно произведению определителя преобразования (3.1) на искомое выражение (8.1).

Пример 8.2. Рассмотрим для системы (1.3) матрицу коэффициентов в виде

$$F = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

и запишем сумму ее элементов по главной диагонали

$$i_1(F) = c + f. \tag{8.8}$$

Обычно эту сумму обозначают trF и называют ее следом матрицы F. Тогда для соответствующей системы (8.2), полученной после преобразования (3.1), в системе (1.3) аналогичное выражение имеет вид

$$i_1(\overline{F}) = \overline{c} + \overline{f}. \tag{8.9}$$

Используя равенства (8.3), находим

$$i_1(\overline{F}) = i_1(F), \tag{8.10}$$

то есть искомое выражение (8.8) не меняет своего значения после любого преобразования (3.1) в системе (1.3).

С помощью (8.3) легко можно убедится, что сумма элеменов второй диагонали $d + e$ матрицы F из (8.7) не обладает указанным выше свойством.

Если обозначить совокупность коэффициентов системы (4.1), полученной после преобразования (3.1) в системе (1.1)–(1.2), через B, то примеры 8.1 и 8.2 подводят нас к тому, что можно дать следующее

Определение 8.1. *Скажем, что целая рациональная функция*

$$K(x, y, \overset{01}{a_0}, \overset{01}{a_1}, ..., \overset{01}{a_{m_1}}, ..., \overset{\ell 2}{a_0}, \overset{\ell 2}{a_1}, ..., \overset{\ell 2}{a_{m_\ell}}),$$

которую в дальнейшем будем обозначать через $K(x, y, A)$, от совокупности A коэффициентов системы (1.1)–(1.2) *и фазовых переменных x и y называется центроаффинным комитантом этой системы, если существует такая функция $\lambda(q)$, что тождество*

$$K(\overline{x}, \overline{y}, B) \equiv \lambda(q) K(x, y, A) \tag{8.11}$$

имеет место для любых $q \in GL(2, \mathbb{R})$, всевозможных коэффициентов системы (1.1)–(1.2) *и любых переменных x и y. Если же комитант K не зависит от переменных x и y, то его принято называть центроаффинным инвариантом системы* (1.1)–(1.2).

Примечание 8.1. *В монографии* [16] *показано, что в* (8.11) $\lambda(q) = \Delta^{-g}$, *где g – целое число.* Число g принято называть *весом* комитанта $K(x, y, A)$.

Если $g = 0$, то комитант $K(x, y, A)$ называется *абсолютным*, в противном случае – *относительным.*

В определенных случаях в назывании "центроаффинный комитант" будем опускать слово "центроаффинный если это не приводит к недоразумениям.

Из примеров 8.1 и 8.2 получаем

Замечание 8.1. *Выражение* k_1 *из* (8.1) *является относительным комитантом с весом* $g = -1$ *для системы* (1.3), *а* i_1 *из* (8.8) *является абсолютным инвариантом системы* (1.3).

Непосредственно из определения 8.1 вытекает

Свойство 8.1. *Произведение любых двух центроаффинных комитантов (инвариантов) системы* (1.1)–(1.2) *является центроаффинным комитантом (инвариантом) с весом, равным сумме весов сомножителей.*

Свойство 8.2. *Сумма двух центроаффинных комитантов (инвариантов) системы* (1.1)–(1.2) *с одинаковыми весами является ее центроаффинным комитантом (инвариантом) с тем же весом.*

Очевидно, что сумма двух центроаффинных комитантов (инвариантов) не всегда является центроаффинным комитантом (инвариантом).

Замечание 8.2. *Аналогично примерам* 8.1 *и* 8.2 *с помощью* (8.3) *легко можно убедится, что следующие выражения являются центроаффинными инвариантами и комитантами системы* (1.3) *с соответствующими весами* g

$$
\begin{gathered}
i_1 = c + f,\ g = 0,\\
i_2 = c^2 + 2de + f^2,\ g = 0,\\
i_3 = -ea^2 + (c-f)ab + db^2,\ g = -1,\\
k_1 = -bx + ay,\ g = -1;\\
k_2 = -ex^2 + (c-f)xy + dy^2,\ g = -1,\\
k_3 = -(ea + fb)x + (ca + db)y,\ g = -1.
\end{gathered}
\tag{8.12}
$$

Ясно, что с учетом свойств 8.1, 8.2 из (8.12) можно получить бесконечное число центроаффинных комитантов и инвариантов системы (1.3).

§9. Центроаффиные преобразования системы (1.1) – (1.2)

Лемма 9.1. *Представлением группы центроаффинных преобразований* $GL(2,\mathbb{R})$ *с формулами* (3.1) *в пространстве коэффициентов* $E^N(A)$ *дифференциальной системы* (1.1)–(1.2) *является четырехпа-*

раметрическая группа, заданная одной из серий выражений

$$\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k=(-1)^k\frac{(m_i-k)!}{(m_i)!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k[\alpha P_{m_i}(\delta,-\gamma)+\beta Q_{m_i}(\delta,-\gamma)], \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k=(-1)^k\frac{(m_i-k)!}{(m_i)!}\Bigg[\gamma\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k P_{m_i}(\delta,-\gamma)+\\ +\delta\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k Q_{m_i}(\delta,-\gamma)\Bigg]\ (i=\overline{0,\ell};\ k=\overline{0,m_i}),\end{aligned} \tag{9.2}$$

или

$$\begin{aligned}\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k=(-1)^{m_i-k}\frac{k!}{(m_i)!}\Bigg[\alpha\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k}P_{m_i}(-\beta,\alpha)+\\ +\beta\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k}Q_{m_i}(-\beta,\alpha)\Bigg],\end{aligned} \tag{9.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k=(-1)^{m_i-k}\frac{k!}{(m_i)!}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k}[\gamma P_{m_i}(-\beta,\alpha)+\\ +\delta Q_{m_i}(-\beta,\alpha)]\,(i=\overline{0,\ell},\ k=\overline{0,m_i}),\end{aligned} \tag{9.4}$$

в которых значение параметров $\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=0$ *отвечает тождественному преобразованию* (3.7).

Доказательство. Согласно примечанию 4.1 выражения (9.1), (9.2) или (9.3), (9.4) образуют группу преобразований пространства коэффициентов $E^N(A)$ системы (1.1)–(1.2).

При центроаффинном преобразовании (3.1) в системе (1.1) с учетом (3.8)–(3.9) находим

$$\begin{aligned}\dot{\overline{x}}&=\sum_{m_i\in\Gamma}[\alpha\Delta^{-m_i}P_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})+\\ &\quad+\beta\Delta^{-m_i}Q_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})],\\ \dot{\overline{y}}&=\sum_{m_i\in\Gamma}[\gamma\Delta^{-m_i}P_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})+\\ &\quad+\delta\Delta^{-m_i}Q_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})].\end{aligned} \tag{9.5}$$

С учетом (1.2) для P_{m_i} и Q_{m_i} имеем

$$P_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{a}{}^1_k(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y})^{m_i-k}(\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})^k,$$

$$Q_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{a}{}^2_k(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y})^{m_i-k}(\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})^k,$$

или, что тоже самое

$$\begin{aligned}P_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})&=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{B}{}^1_k\overline{x}^{m_i-k}\,\overline{y}^k,\\ Q_{m_i}(\delta\overline{x}+\beta'\overline{y},\gamma'\overline{x}+\alpha\overline{y})&=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{B}{}^2_k\overline{x}^{m_i-k}\,\overline{y}^k,\end{aligned}\tag{9.6}$$

где коэффициенты $\overset{i}{B}{}^1_k$ и $\overset{i}{B}{}^2_k$ являются рациональными функциями от α, β', γ', δ и линейными функциями от $\overset{i}{a}{}^j_k$. Тогда из (9.5) с учетом (9.6) находим

$$\begin{aligned}\dot{\overline{x}}&=\sum_{m_i\in\Gamma}\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{b}{}^1_k\overline{x}^{m_i-k}\,\overline{y}^k,\\ \dot{\overline{y}}&=\sum_{m_i\in\Gamma}\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{b}{}^2_k\overline{x}^{m_i-k}\,\overline{y}^k,\end{aligned}\tag{9.7}$$

где

$$\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k=\alpha\overset{i}{B}{}^1_k+\beta\overset{i}{B}{}^2_k,\ \Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k=\gamma\overset{i}{B}{}^1_k+\delta\overset{i}{B}{}^2_k\ (i=\overline{0,\ell}).\tag{9.8}$$

Обозначим $\xi=\frac{\overline{y}}{\overline{x}}$, $\eta=\frac{\overline{x}}{\overline{y}}$ и из (9.6) находим

$$\begin{aligned}P_{m_i}(\delta+\beta'\xi,\gamma'+\alpha\xi)&=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{B}{}^1_k\xi^k,\\ Q_{m_i}(\delta+\beta'\xi,\gamma'+\alpha\xi)&=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{B}{}^2_k\xi^k\ (i=\overline{0,\ell})\end{aligned}\tag{9.9}$$

и

$$\begin{aligned}P_{m_i}(\delta\eta+\beta',\gamma'\eta+\alpha)&=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{B}{}^1_k\eta^{m_i-k},\\ Q_{m_i}(\delta\eta+\beta',\gamma'\eta+\alpha)&=\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{B}{}^2_k\eta^{m_i-k}\ (i=\overline{0,\ell}).\end{aligned}\tag{9.10}$$

Если разложить в ряд Тейлора многочлены (9.9) и (9.10) соответственно по переменным ξ и η, то получим

$$\begin{gathered}
P_{m_i}(\delta+\beta'\xi,\gamma'+\alpha\xi)=\sum_{k=0}^{m_i}\frac{\xi^k}{k!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma'}+\beta'\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k P_{m_i}(\delta,\gamma'),\\
Q_{m_i}(\delta+\beta'\xi,\gamma'+\alpha\xi)=\sum_{k=0}^{m_i}\frac{\xi^k}{k!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma'}+\beta'\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k Q_{m_i}(\delta,\gamma')\\
(i=\overline{0,\ell})
\end{gathered}\tag{9.11}$$

и

$$\begin{gathered}
P_{m_i}(\delta\eta+\beta',\gamma'\eta+\alpha)=\sum_{k=0}^{m_i}\frac{\eta^{m_i-k}}{(m_i-k)!}\left(\gamma'\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta'}\right)^{m_i-k} P_{m_i}(\beta',\alpha),\\
Q_{m_i}(\delta\eta+\beta',\gamma'\eta+\alpha)=\sum_{k=0}^{m_i}\frac{\eta^{m_i-k}}{(m_i-k)!}\left(\gamma'\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta'}\right)^{m_i-k} Q_{m_i}(\beta',\alpha)\\
(i=\overline{0,\ell}).
\end{gathered}\tag{9.12}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ и η соответственно в (9.9) и (9.11), а также (9.10) и (9.12), получаем

$$\begin{gathered}
\overset{i}{B}{}^1_k=\frac{(m_i-k)!}{m_i!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma'}+\beta'\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k P_{m_i}(\delta,\gamma'),\\
\overset{i}{B}{}^2_k=\frac{(m_i-k)!}{m_i!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma'}+\beta'\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k Q_{m_i}(\delta,\gamma')\,(i=\overline{0,\ell}),
\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}
\overset{i}{B}{}^1_k=\frac{k!}{m_i!}\left(\gamma'\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta'}\right)^{m_i-k} P_{m_i}(\beta',\alpha),\\
\overset{i}{B}{}^2_k=\frac{k!}{m_i!}\left(\gamma'\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta'}\right)^{m_i-k} Q_{m_i}(\beta',\alpha)\,(i=\overline{0,\ell}).
\end{gathered}$$

Из последних четырех равенств с учетом (3.9) имеем

$$\begin{gathered}
\overset{i}{B}{}^1_k=(-1)^k\frac{(m_i-k)!}{m_i!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k P_{m_i}(\delta,-\gamma),\\
\overset{i}{B}{}^2_k=(-1^k)\frac{(m_i-k)!}{m_i!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^k Q_{m_i}(\delta,-\gamma)\,(i=\overline{0,\ell}),
\end{gathered}\tag{9.13}$$

или

$$
\begin{aligned}
\overset{i}{B}{}^1_k &= (-1)^{m_i-k}\frac{k!}{m_i!}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k} P_{m_i}(-\beta,\alpha),\\
\overset{i}{B}{}^2_k &= (-1)^{m_i-k}\frac{k!}{m_i!}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k} Q_{m_i}(-\beta,\alpha)\,(i=\overline{0,\ell}).
\end{aligned}
\tag{9.14}
$$

С учетом (9.8) и (9.13)–(9.14) получаем для $\overset{i}{b}{}^1_k$ и $\overset{i}{b}{}^2_k$ выражения (9.1)–(9.2) или (9.3)–(9.4). Лемма 9.1 доказана.

Сравнивая (1.1)–(1.2) и (9.7), получаем

Следствие 9.1. *При центроаффинном преобразовании* (3.1) *система* (1.1) *с новыми коэффициентами и новыми переменными сохраняет свой прежний вид, а ее однородности правых частей относительно x и y переходят в однородности той же степени относительно $\overline{x}$ и $\overline{y}$.*

Из (9.1)–(9.2) и (9.3)–(9.4) имеем

Следствие 9.2. *Выражение* $\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k$ ($\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k$) *имеет вид* (9.1) *или* (9.3) ((9.2) *или* (9.4)) *и является однородной функцией степени* $k+1$ (k) *относительно пары* (α,β) *и степени* m_i-k (m_i-k+1) *относительно пары* (γ,δ).

Рассмотрим выражения коэффициентов аффиной дифференциальной системы (1.3) после центроаффинного преобразования (3.1). С помощью леммы 9.1 и равенств (1.4) получаем (8.3), где в системе (8.2) имеем $\overline{a}=\overset{0}{b}{}^1_0$, $\overline{b}=\overset{0}{b}{}^2_0$, $\overline{c}=\overset{1}{b}{}^1_0$, $\overline{d}=\overset{1}{b}{}^1_1$, $\overline{e}=\overset{1}{b}{}^2_0$, $\overline{f}=\overset{1}{b}{}^2_1$.

§10. Дифференциальные уравнения для центроаффинных инвариантов и комитантов

Пример 10.1. Рассмотрим алгебру Ли операторов, соответствующую представлению группы $GL(2,\mathbb{R})$ в пространстве $E^6(x,y,A)$ системы (1.3). Согласно примеру 6.1 указанная алгебра Ли состоит из операторов (6.8)–(6.9). Для инвариантов и комитантов (8.12) системы (1.3) при группе $GL(2,\mathbb{R})$ с помощью указанных операторов получим равенства

$D_m(i_j)=0\,(m=\overline{1,4},\ j=1,2)$, $D_1(i_3)=D_4(i_3)=i_3$, $D_2(i_3)=D_3(i_3)=0$

и

$$X_1(k_j) = X_4(k_j) = i_3,\ X_2(k_j) = X_3(k_j) = 0\,(j = \overline{1,3}).$$

Имеет место

Теорема 10.1. *Для того, чтобы целая рациональная функция от коэффициентов системы* (1.1)–(1.2) *была центроаффинным инвариантом этой системы с весом g, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнениям*

$$D_1(I) = D_4(I) = -gI,\ D_2(I) = D_3(I) = 0, \tag{10.1}$$

где D_m $(m = \overline{1,4})$ из (5.2), (5.6), (5.9), (5.12) *и образуют алгебру Ли операторов для представления группы $GL(2,\mathbb{R})$ в пространстве коэффициентов $E^N(A)$ системы* (1.1)–(1.2).

Доказательство. Необходимость. Предположим что, $I(A)$ является центроаффинным инвариантом системы (1.1)–(1.2) с весом g. Тогда согласно определению 8.1 и примечанию 8.1 имеет место тождество

$$I(B) = \Delta^{-g} I(A), \tag{10.2}$$

где совокупность B состоит из коэффициентов системы (9.7), имеющих вид (9.1)–(9.4).

Отметим, что определитель преобразования (3.1) удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\Delta}{\partial\beta} = \Delta,\ \gamma\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha} + \delta\frac{\partial\Delta}{\partial\beta} = 0,\\ &\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma} + \beta\frac{\partial\Delta}{\partial\delta} = 0,\ \gamma\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma} + \delta\frac{\partial\Delta}{\partial\delta} = \Delta. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Если применить к обеим частям равенства (10.2) операторы

$$\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial}{\partial\beta},\ \gamma\frac{\partial}{\partial\alpha} + \delta\frac{\partial}{\partial\beta},\ \alpha\frac{\partial}{\partial\gamma} + \beta\frac{\partial}{\partial\delta},\ \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} + \delta\frac{\partial}{\partial\delta},$$

то с учетом равенств (10.3) получим

$$\begin{aligned} &\alpha\frac{\partial I(B)}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial I(B)}{\partial\beta} = -gI(B),\ \gamma\frac{\partial I(B)}{\partial\alpha} + \delta\frac{\partial I(B)}{\partial\beta} = 0,\\ &\alpha\frac{\partial I(B)}{\partial\gamma} + \beta\frac{\partial I(B)}{\partial\delta} = 0,\ \gamma\frac{\partial I(B)}{\partial\gamma} + \delta\frac{\partial I(B)}{\partial\delta} = -gI(B). \end{aligned} \tag{10.4}$$

Эту систему дифференциальных уравнений можно представить и в другом виде с учетом того, что согласно равенствам (9.1)–(9.4) $I(B)$

является сложной функцией от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ входящих в $\overset{0}{b}{}_0^1, \overset{0}{b}{}_1^1, ..., \overset{0}{b}{}_{m_1}^1, ..., \overset{\ell}{b}{}_0^2, \overset{\ell}{b}{}_1^2, ..., \overset{\ell}{b}{}_{m_\ell}^2$. Тогда из (10.4) получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\beta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}+\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\beta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}\right]=-gI(B),$$

$$\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\beta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}+\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\beta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}\right]=0,$$

$$\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\delta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}+\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\delta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}\right]=0,$$

$$\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\delta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}+\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\delta}\right)\frac{\partial I(B)}{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}\right]=-gI(B). \tag{10.5}$$

Рассмотрим получение более простых выражений для круглых скобок из (10.5). С учетом равенств (10.3) имеем

$$\Delta^{m_i}\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\beta}\right)=-m_i\overset{i}{b}{}_k^1\Delta^{m_i}+\alpha\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^1)}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^1)}{\partial\beta}, \tag{10.6}$$

$$\Delta^{m_i}\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\beta}\right)=-m_i\overset{i}{b}{}_k^2\Delta^{m_i}+\alpha\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^2)}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^2)}{\partial\beta}, \tag{10.7}$$

$$\Delta^{m_i}\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\beta}\right)=\gamma\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^1)}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^1)}{\partial\beta}, \tag{10.8}$$

$$\Delta^{m_i}\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\beta}\right)=\gamma\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^2)}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^2)}{\partial\beta}, \tag{10.9}$$

$$\Delta^{m_i}\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\delta}\right)=\alpha\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^1)}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_k^1)}{\partial\delta}, \tag{10.10}$$

$$\Delta^{m_i}\left(\alpha\frac{\partial\overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial\overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\delta}\right)=\alpha\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\delta}, \tag{10.11}$$

$$\Delta^{m_i}\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\delta}\right)=-m_i\overset{i}{b}{}^1_k\Delta^{m_i}+\gamma\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k)}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k)}{\partial\delta}, \tag{10.12}$$

$$\Delta^{m_i}\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\delta}\right)=-m_i\overset{i}{b}{}^2_k\Delta^{m_i}+\gamma\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\delta}. \tag{10.13}$$

Принимая во внимание степени однородностей выражений $\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k$ и $\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k$ относительно пар (α,β) и (γ,δ) из следствия 9.2, по теореме Эйлера об однородности функции для равенств (10.6)–(10.7) и (10.12)–(10.13) соответственно получаем

$$\begin{gathered}
\alpha\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k)}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k)}{\partial\beta}=(k+1)\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k,\\
\alpha\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\beta}=k\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k,\\
\gamma\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k)}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k)}{\partial\delta}=(m_i-k)\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^1_k,\\
\gamma\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial(\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k)}{\partial\delta}=(m_i-k+1)\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}^2_k.
\end{gathered} \tag{10.14}$$

С учетом (9.3) для выражения из левой части (10.8) находим

$$(-1)^{m_i-k}\frac{(m_i)!}{k!}\Delta^{m_i}\left(\gamma\frac{\partial\overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial\overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\beta}\right)=\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k}\times$$

$$\times[\gamma P_{m_i}(-\beta,\alpha)+\delta Q_{m_i}(-\beta,\alpha)]+\alpha\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k+1}P_{m_i}(-\beta,\alpha)+$$

$$+\beta\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k+1}Q_{m_i}(-\beta,\alpha).$$

Из этого равенства с помощью (9.3) и (9.4) при $k-1$ имеем

$$\gamma\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\beta}=\overset{i}{b}{}_k^2-k\overset{i}{b}{}_{k-1}^1. \tag{10.15}$$

Для левой части (10.9) с учетом (9.4) получаем

$$\Delta^{m_i}\left(\gamma\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\beta}\right)=(-1)^{m_i-k}\frac{k!}{(m_i)!}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m_i-k+1}\times$$
$$\times[\gamma P_{m_i}(-\beta,\alpha)+\delta Q_{m_i}(-\beta,\alpha)]=-k\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_{k-1}^2. \tag{10.16}$$

С помощью (9.1) для левой части (10.10) имеем

$$\Delta^{m_i}\left(\alpha\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^1}{\partial\delta}\right)=(-1)^{k}\frac{(m_i-k)!}{(m_i)!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^{k+1}\times$$
$$\times[\alpha P_{m_i}(\delta,-\gamma)+\beta Q_{m_i}(\delta,-\gamma)]=-(m_i-k)\Delta^{m_i}\overset{i}{b}{}_{k+1}^1. \tag{10.17}$$

С учетом (9.2) для левой части (10.11) получаем

$$(-1)^k\frac{(m_i)!}{(m_i-k)!}\Delta^{m_i}\left(\alpha\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\delta}\right)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^{k}\times$$
$$\times[\alpha P_{m_i}(\delta,-\gamma)+\beta Q_{m_i}(\delta,-\gamma)]+\gamma\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^{k+1}P_{m_i}(\delta,-\gamma)+$$
$$+\delta\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^{k+1}Q_{m_i}(\delta,-\gamma).$$

Отсюда с учетом (9.1) и (9.2) при $k+1$ имеем

$$\alpha\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial \overset{i}{b}{}_k^2}{\partial\delta}=\overset{i}{b}{}_k^1-(m_i-k)\overset{i}{b}{}_{k+1}^2. \tag{10.18}$$

Тогда с помощью (10.14), (10.16) и (10.17) из (10.6)–(10.7), (10.9)–

(10.10) и (10.12)–(10.13) после сокращения на Δ^{m_i} получаем

$$
\begin{gathered}
\alpha\frac{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\beta}=-(m_i-k-1)\overset{i}{b}{}^1_k,\\
\alpha\frac{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\beta}=-(m_i-k)\overset{i}{b}{}^2_k,\\
\gamma\frac{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\beta}=-k\overset{i}{b}{}^2_{k-1},\\
\alpha\frac{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\delta}=-(m_i-k)\overset{i}{b}{}^1_{k+1},\\
\gamma\frac{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}{\partial\delta}=-k\overset{i}{b}{}^1_k,\\
\gamma\frac{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}{\partial\delta}=-(k-1)\overset{i}{b}{}^2_k.
\end{gathered}
\tag{10.19}
$$

С учетом (10.15), (10.18) и (10.19) система (10.5) перепишется в виде

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[(m_i-k-1)\overset{i}{b}{}^1_k\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}+(m_i-k)\overset{i}{b}{}^2_k\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}\right]=-gI(B),\\
\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[k\overset{i}{b}{}^1_{k-1}\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}+k\overset{i}{b}{}^2_{k-1}\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}-\overset{i}{b}{}^2_k\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}\right]=0,\\
\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[(m_i-k)\overset{i}{b}{}^1_{k+1}\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}+(m_i-k)\overset{i}{b}{}^2_{k+1}\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}-\overset{i}{b}{}^1_k\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}\right]=0,\\
\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left[k\overset{i}{b}{}^1_k\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^1_k}+(k-1)\overset{i}{b}{}^2_k\frac{\partial I(B)}{\partial \overset{i}{b}{}^2_k}\right]=-gI(B).
\end{gathered}
\tag{10.20}
$$

Эта система уравнений должна иметь место для любого преобразования (3.1). В частности, при тождественном преобразовании $\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=0$ с помощью (1.1)–(1.2) и (3.1) получаем равенства $\overset{i}{b}{}^j_k=\overset{i}{a}{}^j_k$ $(i=\overline{0,\ell},\ j=1,2,\ k=\overline{0,m_i})$. С учетом этого из (10.20) с помощью D_m $(m=\overline{1,4})$ из (5.2), (5.6), (5.9), (5.12) находим необходимость условий (10.1).

Достаточность. Предположим, что целая рациональная функция $I(A)$ удовлетворяет уравнениям (10.1) с операторами (5.2), (5.6), (5.9), (5.12) при любых $A \in E^N(A)$. Тогда с учетом этого справедливы равенства (10.20) и, следовательно, равенства (10.4).

Отметим, что если формально применять $L = ln|I(B)|$, то из (10.4) находим равенства

$$\begin{aligned} &\alpha\frac{\partial L}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial L}{\partial \beta} = -g,\ \gamma\frac{\partial L}{\partial \alpha} + \delta\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,\\ &\alpha\frac{\partial L}{\partial \gamma} + \beta\frac{\partial L}{\partial \delta} = 0,\ \gamma\frac{\partial L}{\partial \gamma} + \delta\frac{\partial L}{\partial \delta} = -g. \end{aligned} \tag{10.21}$$

С учетом (10.3) этим же уравнениям удолетворяет функция $L = -gln|\Delta| + ln|C|$, где Δ из (3.1), а C–произвольная константа. Следовательно, из $ln|I(B)| = -gln|\Delta| + ln|C|$ получаем

$$I(B) = C\Delta^{-g}. \tag{10.22}$$

Это имеет место также и при тождественном преобразовании $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$ группы (3.1) в системе (1.1)–(1.2). Так как в этом случае $\overset{i}{b}{}^j_k = \overset{i}{a}{}^j_k$ $(i = \overline{0,\ell},\ j = 1,2,\ k = \overline{0,m_i})$, то $C = I(A)$. С учетом равенства (10.22) находим тождество (10.2), которое согласно определению 7.1 потверждает достаточность условий (10.1).

О том, что операторы D_m $(m = \overline{1,4})$ образуют алгебру Ли для представления группы $GL(2,\mathbb{R})$ в пространстве $E^N(A)$, нужно смотреть в §6. Теорема 10.1 доказана.

Замечание 10.1. *Дифференциальные операторы D_2 и D_3, содержащиеся в уравнениях системы* (10.1)*, совпадают с установленными в работе* [17] *операторами Ω и Θ.*

Следуя аналогичному доказательству теоремы 10.1, можно показать, что имеет место

Теорема 10.2. *Для того, чтобы целая рациональная функция $K(x,y,A)$ была центроаффинным комитантом этой системы с весом g, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнениям*

$$X_1(K) = X_4(K) = -gK,\ X_2(K) = X_3(K) = 0, \tag{10.23}$$

где X_m $(m = \overline{1,4})$ из (5.1)*,* (5.5)*,* (5.8)*,* (5.11) *и образуют алгебру Ли операторов для представления группы $GL(2,\mathbb{R})$ в пространстве $E^{N+2}(x,y,A)$ системы* (1.1)–(1.2).

§11. Рациональные абсолютные центроаффинные инварианты и комитанты и их применения

Рассмотрим случай, когда в (8.11) $K(x, y, A)$ есть дробь, то есть ее числитель и знаменатель являются многочленами от совокупности A коэффициентов системы (1.1)–(1.2) и фазовых переменных x, y.

Итак, пусть

$$K(x, y, A) = \frac{R(x, y, A)}{S(x, y, A)}, \tag{11.1}$$

где R и S – взаимно простые целые рациональные функции от совокупности A и фазовые переменные x, y.

Если $K(x, y, A)$ является рациональным абсолютным центроаффинным комитантом, то из (8.11) будет следовать

$$R(\overline{x}, \overline{y}, B)S(x, y, A) = R(x, y, A)S(\overline{x}, \overline{y}, B). \tag{11.2}$$

В равенстве (11.2) после подстановки вместо совокупности B их выражения из (9.1)–(9.2) или (9.3)–(9.4) и $\overline{x}, \overline{y}$ из (3.1) полученное соотношение должно обращатся в тождество относительно коэффициентов системы (1.1)–(1.2) и фазовых переменных x, y при любых значениях $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, для которых $det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0$. В силу равенства (11.2) левая часть должна делится на $R(x, y, A)$. Но R и S являются взаимно простыми. Следовательно, $R(\overline{x}, \overline{y}, A)$, рассматриваемое как многочлен от коэффициетов системы (1.1)–(1.2) и фазовых переменных x, y, должно делится на $R(x, y, A)$. Так как степени этих многочленов, очевидно, одинаковы, то

$$R(\overline{x}, \overline{y}, B) = \lambda_1(q)R(x, y, A).$$

Рассуждая аналогично, для $S(x, y, A)$ из (11.2) находим

$$S(\overline{x}, \overline{y}, B) = \lambda_2(q)S(x, y, A).$$

Согласно примечанию 8.1 $\lambda_1(q) = \Delta^{-g_1}$ и $\lambda_2(q) = \Delta^{-g_2}$, где g_1 и g_2– целые числа.

Нетрудно убедится, что $g_1 = g_2$. Следовательно, R и S являются относительными центроаффинными комитантами с одинаковыми весами. То же самое можно сказать и по отношению к целым рациональным абсолютным центроаффинным инвариантам. Отсюда имеет место

Теорема 11.1. *Всякий абсолютный рациональный центроаффинный комитант (инвариант) системы* (1.1)–(1.2) *есть частное от деления двух целых рациональных центроаффинных комитантов (инвариантов) этой системы с одинаковыми весами и наоборот.*

Замечание 11.1. *Идея доказательства теоремы* 11.1 *взята нами из работы* [18].

Пример 11.1. Рассмотрим выражения (8.12), которые согласно замечанию 8.2 являются центроаффинными инвариантами и комитантами системы (1.3) с конкретными весами g.

В соответствии с теоремой 11.1 легко можно убедится, что, например, отношения $\frac{i_1}{i_2}$, $\frac{k_1}{i_3}$, $\frac{k_2}{i_3}$, $\frac{k_3}{i_3}$, $\frac{k_2}{k_1}$, $\frac{k_3}{k_1}$, $\frac{k_3}{k_2}$ являются абсолютными рациональными центроаффинными инвариантами и комитантами системы (1.3).

Из теорем 10.1 и 10.2 легко получаем, что имеет место

Лемма 11.1. *Для того, чтобы функция* (11.1) *была рациональным абсолютным центроаффинным комитантом (инвариантом) системы* (1.1)–(1.2), *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнениям*

$$X_i(K) = 0,\ (D_i(K) = 0)\,(i = \overline{1,4}), \tag{11.3}$$

где выражения X_1, X_2, X_3, X_4 (D_1, D_2, D_3, D_4) *из* (5.1), (5.5), (5.8), (5.11) ((5.2), (5.6), (5.9), (5.12)) *образуют алгебру Ли операторов.*

Если составить матрицу M из координат операторов X_1, X_2, X_3, X_4 а через M_1–ту же матрицу только для операторов D_1, D_2, D_3, D_4 и обозначить их общие ранги соответственно через R и R_1, то с помощью леммы 11.1 из однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных (11.3) получаем, что имеет место

Лемма 11.2. *Максимальное число функциональных независимых рациональных абсолютных центроаффинных комитантов (инвариантов) дифференциальной системы* (1.1)–(1.2) *равно*

$$2\left(\sum_{i=0}^{\ell} m_i + \ell\right) + 4 - R \qquad \left(2\left(\sum_{i=0}^{\ell} m_i + \ell\right) + 2 - R_1\right). \tag{11.4}$$

Отметим, что для того, чтобы система (1.1)–(1.2) обладала m рациональными абсолютными центроаффинными комитантами и инвариантами, небходимо, чтобы она имела $m+1$ центроаффинных комитантов и инвариантов из определения 8.1. С учетом этого и леммы 11.2 получаем, что при $R = R_1 = 4$ имеет место

Теорема 11.2. *Максимальное число функциональных независимых центроаффинных комитантов (инвариантов) системы* (1.1)–(1.2) *равно*

$$\varrho = 2\left(\sum_{i=0}^{\ell} m_i + \ell\right) + 1 \ \left(\widetilde{\varrho} = 2\left(\sum_{i=0}^{\ell} m_i + \ell\right) - 1,\ \Gamma \neq \{0\},\{1\}\right). \tag{11.5}$$

В формулировке теоремы 11.2 исключена из рассмотрения система (1.1)–(1.2) при $\Gamma \neq \{0\},\{1\}$ для дифференциальных инвариантов, так как в первом случае отсуствуют абсолютные инварианты группы $GL(2,\mathbb{R})$, а во втором – их два.

Легко показать, что в остальных случаях матрица, построенная на координатах операторов X_1, X_2, X_3, X_4 (D_1, D_2, D_3, D_4), всегда обладает минором 4-го порядка, отличным от нуля.

Примечание 11.1. *Проведя аналогичные рассуждения, как в теории инвариантов бинарных форм (см., например,* [13]*), убеждаемся, что указанные числа в теореме* 11.2 *есть не что иное, как число элементов в алгебраическом базисе комитантов (инвариантов) дифференциальной системы* (1.1)–(1.2)*, то есть если обозначить эти центроаффинные комитанты через* $K_1, K_2, ..., K_\varrho$ *(инварианты через* $I_1, I_2, ..., I_{\widetilde{\varrho}}$*), то для любого центроаффинного комитанта* K *(инварианта* I*) он удовлетворяет уравнению*

$$P_0K^m + P_1K^{m-1} + ... + P_m = 0\ (Q_0I^n + Q_1I^{n-1} + ... + Q_n = 0), \tag{11.6}$$

где P_{m_i} $(i = \overline{0,m})$ $(Q_i\ (i = \overline{0,n}))$ *являются многочленами от* $K_1, K_2, ...,$ K_ϱ $(I_1, I_2, ..., I_{\widetilde{\varrho}})$*. Поэтому в дальнейшем число* ϱ $(\widetilde{\varrho})$ *из теоремы* 11.2 *будем считать относящимся к алгебраическому базису центроаффинных комитантов (инвариантов) системы* (1.1)–(1.2)*.*

Обозначим через S коэффициент при наивысшей степени x^δ в комитанте K, который в [17] назван *полуинвариантом.* В этой же монографии показано, что если S является полуинвариантом в комитанте K системы (1.1)–(1.2), то

$$K = Sx^\delta - D_3(S)x^{\delta-1}y + \frac{1}{2!}D_3^2(S)x^{\delta-2}y^2 + ... + \frac{(-1)^\delta}{\delta!}D_3^\delta(S)y^\delta, \tag{11.7}$$

где D_3 взят из (5.9).

Примечание 11.2. *С помощью равенства* (11.7) *можно увидеть, что комитанты* $K_1, K_2, ..., K_\varrho$ *для системы* (1.1)–(1.2) *являются алгебраически-независимыми тогда и только тогда, когда являются алгебраически-независимыми их полуинварианты.*

Предположим, что комитант (11.7) записан в виде

$$K = (S_0+\alpha_0)x^\delta + (S_1+\alpha_1)x^{\delta-1}y + (S_2+\alpha_2)x^{\delta-2}y^2 + ... + (S_\delta+\alpha_\delta)y^\delta, \tag{11.8}$$

где $S_i\,(i=\overline{0,\delta})$–некоторые известные многочлены от коэффициентов системы (1.1)–(1.2), а $\alpha_i\,(i=\overline{0,\delta})$–неизвестные полиномы, которые зависят от коэффициентов той же системы.

Согласно равенству (11.7) для комитанта (11.8) получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{gathered} D_3(S_0+\alpha_0) = -(S_1+\alpha_1),\ -D_3(S_1+\alpha_1) = S_2+\alpha_2, \\ D_3(S_2+\alpha_2) = -(S_3+\alpha_3),\ -D_3(S_3+\alpha_3) = S_4+\alpha_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-1)^{k-1}D_3(S_{k-1}+\alpha_{k-1}) = (-1)^k(S_k+\alpha_k)\ (k=\overline{1,\delta}). \end{gathered} \tag{11.9}$$

Поскольку число неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\delta$ больше на единицу, чем число уравнений (11.9), то справедлива

Лемма 11.3. *Система* (11.9) *имеет бесконечное множество решений, которые порождают бесконечное число комитантах вида* (11.8) *для дифференциальной системы* (1.1)–(1.2).

§12. Примеры алгебраических базисов центроаффинных комитантов и инвариантов для некоторых дифференциальных систем

Пример 12.1. Для системы (1.3) алгебра Ли операторов представления центроаффинной группы в пространстве $E^8(x,y,A)$ состоит из операторов (6.8)–(6.9). С учетом этого и системы (1.3), выписывая для нее матрицу координат этих операторов, имеем

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 & a & 0 & 0 & d & -e & 0 \\ y & 0 & b & 0 & e & f-c & 0 & -e \\ 0 & x & 0 & a & -d & 0 & c-f & d \\ 0 & y & 0 & b & 0 & -d & e & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Нетрудно проверить, что $R = rank\,M = 4$. Такой вывод сделан исходя из того, что, например, для одного из миноров M четвертого порядка имеем

$$det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & d \\ y & 0 & e & f-c \\ 0 & x & -d & 0 \\ 0 & y & 0 & -d \end{pmatrix} = -d\ k_2 \not\equiv 0,$$

где k_2 из (8.12). Так как в этом случае для системы (1.3) имеем $\Gamma = \{0, 1\}$, то есть она получается из системы (1.1)–(1.2) при $\ell = 1$, $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, то из (11.5) находим $\varrho = 5$. Следовательно, для системы (1.3) алгебраический базис состоит из пяти центроаффинных инвариантов и комитантов. Покажем, что в качестве таковых можно взять первые пять инвариантов и комитантов из (8.12). Для этого составляем с помощью всех шести инвариантов и комитантов из (8.12) матрицу Якоби

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial i_1}{\partial x} & \frac{\partial i_1}{\partial y} & \frac{\partial i_1}{\partial a} & \frac{\partial i_1}{\partial b} & \frac{\partial i_1}{\partial c} & \frac{\partial i_1}{\partial d} & \frac{\partial i_1}{\partial e} & \frac{\partial i_1}{\partial f} \\ \frac{\partial i_2}{\partial x} & \frac{\partial i_2}{\partial y} & \frac{\partial i_2}{\partial a} & \frac{\partial i_2}{\partial b} & \frac{\partial i_2}{\partial c} & \frac{\partial i_2}{\partial d} & \frac{\partial i_2}{\partial e} & \frac{\partial i_2}{\partial f} \\ \frac{\partial i_3}{\partial x} & \frac{\partial i_3}{\partial y} & \frac{\partial i_3}{\partial a} & \frac{\partial i_3}{\partial b} & \frac{\partial i_3}{\partial c} & \frac{\partial i_3}{\partial d} & \frac{\partial i_3}{\partial e} & \frac{\partial i_3}{\partial f} \\ \frac{\partial k_1}{\partial x} & \frac{\partial k_1}{\partial y} & \frac{\partial k_1}{\partial a} & \frac{\partial k_1}{\partial b} & \frac{\partial k_1}{\partial c} & \frac{\partial k_1}{\partial d} & \frac{\partial k_1}{\partial e} & \frac{\partial k_1}{\partial f} \\ \frac{\partial k_2}{\partial x} & \frac{\partial k_2}{\partial y} & \frac{\partial k_2}{\partial a} & \frac{\partial k_2}{\partial b} & \frac{\partial k_2}{\partial c} & \frac{\partial k_2}{\partial d} & \frac{\partial k_2}{\partial e} & \frac{\partial k_2}{\partial f} \\ \frac{\partial k_3}{\partial x} & \frac{\partial k_3}{\partial y} & \frac{\partial k_3}{\partial a} & \frac{\partial k_3}{\partial b} & \frac{\partial k_3}{\partial c} & \frac{\partial k_3}{\partial d} & \frac{\partial k_3}{\partial e} & \frac{\partial k_3}{\partial f} \end{pmatrix}. \qquad (12.2)$$

Вычислив все 28 миноров шестого порядка для этой матрицы, находим что все они равны нулю. Следовательно, среди шести центроаффинных инвариантов и комитантов (8.12) системы (1.3) есть алгебраическая зависимость, которая имеет вид

$$(i_1k_1 - k_3)^2 - i_2k_1^2 - 2i_3k_2 + k_3^2 = 0. \qquad (12.3)$$

Отметим, что в теории инвариантов дифференциальных систем (см., например [16]) соотношения вида (12.3) называются *сизигией*.

Далее, вычисляя с помощью (8.12) минор пятого порядка матрицы (12.2), построенный на линиях 1,2,3,4,5 и столбцах 1,2,3,5,6, получаем

$$\Delta_{12345}^{12356} = 2[(-4a^2e^3 + 4abce^2 - 4abe^2f - b^2c^2e + 2b^2cef - b^2ef^2)x+$$
$$+(2a^2ce^2 - 2a^2e^2f - abc^2e + 2abcef + 4abde^2 - 2abef^2 - 2b^2cde+$$
$$+2b^2def)y] \not\equiv 0.$$

Это позволяет заключить, что выражения i_1, i_2, i_3, k_1 и k_2 составляют алгебраический базис центроаффинных комитантов системы (1.3).

Примечание 12.1. *Аналогично предыдущему случаю можно показать, что любые пять центроаффинных комитантов и инвариантов из* (8.12) *образуют алгебраический базис комитантов системы* (1.3).

Примечание 12.2. *С помощью операторов* (6.9) *и формулы для* $\widetilde{\varrho}$ *из* (11.5) *легко доказывается, что алгебраический базис инвариантов системы* (1.3) *состоит из 3-х элементов. Таковыми могут быть* i_1, i_2, i_3 *из* (6.12).

Пример 12.2. Рассмотрим квадратичную систему дифференциальных уравнений (1.7). С учетом обозначений (1.6) и алгебры Ли операторов представления центроаффинной группы в пространстве $E^6(A)$ системы (1.7) (см. §5) получаем, что она состоит из операторов

$$\begin{gathered}
D_1 = -g\frac{\partial}{\partial g} + k\frac{\partial}{\partial k} - 2l\frac{\partial}{\partial l} - m\frac{\partial}{\partial m}, \\
D_2 = l\frac{\partial}{\partial g} + (-g+m)\frac{\partial}{\partial h} + (-2h+n)\frac{\partial}{\partial k} - l\frac{\partial}{\partial m} - 2m\frac{\partial}{\partial n}, \\
D_3 = -2h\frac{\partial}{\partial g} - k\frac{\partial}{\partial h} + (-2m+g)\frac{\partial}{\partial l} + (-n+h)\frac{\partial}{\partial m} + k\frac{\partial}{\partial n}, \\
D_4 = -h\frac{\partial}{\partial h} - 2k\frac{\partial}{\partial k} + l\frac{\partial}{\partial l} - n\frac{\partial}{\partial n}.
\end{gathered} \tag{12.4}$$

Составляя матрицу M_1, построенную на координатных векторах этих операторов, получаем

$$M_1 = \begin{pmatrix} -g & 0 & k & -2l & -m & 0 \\ l & -g+m & -2h+n & 0 & -l & -2m \\ -2h & -k & 0 & -2m+g & -n+h & k \\ 0 & -h & -2k & l & 0 & -n \end{pmatrix}. \tag{12.5}$$

Нетрудно убедится, что все 15 миноров чертвертого порядка этой матрицы не тождественны нулю. В качестве примера приведем выражение одного из таких миноров, построенного на столбцах 1,2,3,4 матрицы (12.5), имеющего вид

$$\begin{gathered}
\Delta_{1234} = -2g^3k + 2g^2h^2 - g^2hn + 6g^2km - 4gh^2m - 9ghkl - \\
+2ghmn + gkln - 4gkm^2 + 8h^3l - 4h^2ln + 8hklm - 3k^2l^2 \not\equiv 0.
\end{gathered} \tag{12.6}$$

Следовательно, для матрицы (12.5) общий ранг $R_1 = rank M_1 = 4$. Тогда с учетом примечания 11.1 и теоремы 11.2 (в этом случае имеем $\ell = 0$, $m_0 = 2$) находим $\widetilde{\varrho} = 3$, то есть система (1.7) обладает алгебраическим базисом центроаффинных инвариатов, состоящих из трех элементов.

Будем искать этот базис среди инвариантов этой дифференциальной системы, известных из работы [16] и имеющих вид

$$
\begin{gathered}
I_7 = g^3k - g^2h^2 + g^2hn + g^2km - 3gh^2m + 2ghkl + 2ghmn + 2gkln- \\
-gkm^2 + gmn^2 - h^3l - h^2ln - 4h^2m^2 + 2hklm + hln^2 - 3hm^2n+ \\
+2klmn - km^3 + ln^3 - m^2n^2, \\
I_8 = g^3k - g^2h^2 + g^2hn - g^2km - gh^2m + 4ghkl + 3gkm^2 + gmn^2- \\
-3h^3l + 3h^2ln - 4h^2m^2 - 4hklm - hln^2 - hm^2n + 2k^2l^2 + 4klmn- \\
-3km^3 + ln^3 - m^2n^2, \\
I_9 = g^3k - g^2h^2 + g^2hn + 3g^2km + 2g^2n^2 - 5gh^2m - 4ghmn+ \\
+3gkm^2 + gmn^2 + h^3l + 3h^2ln - 4h^2m^2 + 3hln^2 - 5hm^2n+ \\
+km^3 + ln^3 - m^2n^2, \\
I_{15} = g^4kn - g^3h^2n - 2g^3hkm + g^3hn^2 - g^3k^2l - g^3kmn+ \\
+2g^2h^3m + 3g^2h^2kl - 3g^2h^2mn + 3g^2hkln - 3g^2k^2lm - 3g^2km^2n- \\
-g^2mn^3 - 2gh^4l - gh^3ln + 4gh^3m^2 + 3gh^2klm + 3gh^2ln^2 + 6ghkm^3+ \\
+ghln^3 + 3ghm^2n^2 - 3gk^2lm^2 - 3gklmn^2 + gkm^3n - gln^4 + gm^2n^3- \\
-4h^4lm + h^3kl^2 - 6h^3lmn + 3h^2kl^2n - 4h^2m^3n + 3hkl^2n^2- \\
-3hklm^2n + 4hkm^4 + 2hlmn^3 - 2hm^3n^2 - k^2lm^3 + kl^2n^3- \\
-3klm^2n^2 + 2km^4n.
\end{gathered} \tag{12.7}
$$

Применяя теорему 10.1 к этим выражениям, получаем

$$
\begin{gathered}
D_1(I_j) = D_4(I_j) = -2I_j,\ D_2(I_j) = D_3(I_j) = 0\ (j = 7, 8, 9), \\
D_1(I_{15}) = D_4(I_{15}) = -3I_{15},\ D_2(I_{15}) = D_3(I_{15}) = 0,
\end{gathered}
$$

где D_i $(i = \overline{1, 4})$ из (12.4). Это потверждает, что выражения (12.7) являются центроаффинными инвариантами системы (1.7). Составляя для многочленов (12.7) матрицу Якоби, находим

$$
\mathcal{J} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial I_7}{\partial g} & \frac{\partial I_7}{\partial h} & \frac{\partial I_7}{\partial k} & \frac{\partial I_7}{\partial l} & \frac{\partial I_7}{\partial m} & \frac{\partial I_7}{\partial n} \\
\frac{\partial I_8}{\partial g} & \frac{\partial I_8}{\partial h} & \frac{\partial I_8}{\partial k} & \frac{\partial I_8}{\partial l} & \frac{\partial I_8}{\partial m} & \frac{\partial I_8}{\partial n} \\
\frac{\partial I_9}{\partial g} & \frac{\partial I_9}{\partial h} & \frac{\partial I_9}{\partial k} & \frac{\partial I_9}{\partial l} & \frac{\partial I_9}{\partial m} & \frac{\partial I_9}{\partial n} \\
\frac{\partial I_{15}}{\partial g} & \frac{\partial I_{15}}{\partial h} & \frac{\partial I_{15}}{\partial k} & \frac{\partial I_{15}}{\partial l} & \frac{\partial I_{15}}{\partial m} & \frac{\partial I_{15}}{\partial n}
\end{pmatrix}. \tag{12.8}
$$

Отметим, что все 15 миноров четвертого порядка этой матрицы равны нулю. Следовательно, среди центроаффинных инвариантов (12.7) существует алгебраическая зависимость, которая имеет вид

$$f_1 \equiv (I_8 - I_7)I_9^2 + (I_9 - I_7)I_7^2 - 2I_{15}^2 = 0. \tag{12.9}$$

Эта сизигия известна из работы [16]. Далее, вычислив построенный третьего порядка минор, например, на первых трех линиях и первых трех столбцах матрицы (12.8), найдем, что он отличен от нуля. Следовательно, центроаффинные инварианты I_7, I_8, I_9 можно взять в качестве элементов алгебраического базиса центроаффинных инвариантов системы (1.7). Нетрудно убедится, что любые три инварианта из (12.7) также формируют алгебраический базис центроаффинных инвариантов системы (1.7), то есть $\widetilde{\varrho} = 3$.

Пример 12.3. Рассмотрим кубическую систему дифференциальных уравнений (1.10). С учетом обозначений (1.9) и алгебры Ли операторов для представления центроаффинной группы в пространстве $E^8(A)$ системы (1.10) (см. §5) получаем, что она состоит из операторов

$$\begin{gathered}
D_1 = -2p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} + s\frac{\partial}{\partial s} - 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v},\\
D_2 = t\frac{\partial}{\partial p} + (-p+u)\frac{\partial}{\partial q} + (-2q+v)\frac{\partial}{\partial r} + (-3r+w)\frac{\partial}{\partial s} - \\
-t\frac{\partial}{\partial u} - 2u\frac{\partial}{\partial v} - 3v\frac{\partial}{\partial w},\\
D_3 = -3q\frac{\partial}{\partial p} - 2r\frac{\partial}{\partial q} - s\frac{\partial}{\partial r} + (-3u+p)\frac{\partial}{\partial t} + (-2v+q)\frac{\partial}{\partial u} + \\
+(-w+r)\frac{\partial}{\partial v} + s\frac{\partial}{\partial w},\\
D_4 = -q\frac{\partial}{\partial q} - 2r\frac{\partial}{\partial r} - 3s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2w\frac{\partial}{\partial w}.
\end{gathered} \tag{12.10}$$

Составляя матрицу M_1, построенную на координатных векторах этих операторов, получаем

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2p & -q & 0 & s & -3t & -2u & -v & 0\\ t & -p+u & -2q+v & -3r+w & 0 & -t & -2u & -3v\\ -3q & -2r & -s & 0 & -3u+p & -2v+q & -w+r & s\\ 0 & -q & -2r & -3s & t & 0 & -v & -2w \end{pmatrix}. \tag{12.11}$$

Легко проверить, что все 70 миноров четвертого порядка этой матрицы не тождественно равны нулю. К примеру приведем выражение одного из таких миноров, построенного на столбцах 1,2,3,4 матрицы (12.11), имеющего вид

$$
\begin{gathered}
\Delta_{1234} = 6p^2s^2 - 36pqrs + 2pqsw + 24pr^3 - 8pr^2w + 12prsv- \\
-6ps^2u + 24q^3s - 18q^2r^2 + 6q^2rw - 12q^2sv + 6qrsu+ \\
+4qs^2t - 4r^2st.
\end{gathered} \tag{12.12}
$$

Следовательно, для матрицы (12.11) общий ранг $R_1 = rank M_1 = 4$. Тогда с учетом примечания 11.1 и теоремы 11.2 (в ней имеем $\ell = 0$, $m_0 = 3$) находим $\widetilde{\varrho} = 5$, то есть система (1.10) обладает алгебраическим базисом центроаффинных инвариатов, состоящих из пяти элементов. Будем искать этот базис среди инвариантов этой дифференциальной системы, известных из работы [17] и имеющих вид

$$
\begin{gathered}
J_1 = 2pr + 2pw - 2q^2 - 4qv + 2ru + 2uw - 2v^2, \\
J_2 = 2pr - 2q^2 + 2qv - 4ru + 2st + 2uw_2 - 2v^2, \\
J_3 = -p^2s + 3pqr - pqw + 5prv - 2psu + pvw - 2q^3 - 2q^2v - qru - 5quw+ \\
+2qv^2 + r^2t + 2rtw + ruv - su^2 + tw^2 - 3uvw + 2v^3, \\
J_4 = -p^2s + 3pqr - pqw + 2prv + psu + pvw - 2q^3 + q^2v - 4qru - 3qst- \\
-2quw - qv^2 + 4r^2t - rtw + 4ruv + 3stv - 4su^2 + tw^2 - 3uvw + 2v^3, \\
J_5 = -p^2rw + p^2sv + pq^2w - 2pqsu + pr^2u - 2pruw + 2prv^2 - puw^2+ \\
+pv^2w - q^3v + q^2ru + q^2st + 2q^2uw - 2q^2v^2 - qr^2t + 2qstv - 2qsu^2+ \\
+qtw^2 - qv^3 - 2r^2tv + 2r^2u^2 - 2rtvw + ru^2w + ruv^2 + stv^2 - su^2v, \\
J_6 = 2p^3w^3 - 18p^2qvw^2 + 6p^2ruw^2 + 12p^2rv^2w - 6p^2stw^2 + 12p^2suvw- \\
-12p^2sv^3 + 12pq^2uw^2 + 42pq^2v^2w + 12pqrtw^2 - 120pqruvw + 24pqstvw- \\
-24pqsu^2w + 36pqsuv^2 - 24pr^2tvw + 78pr^2u^2w - 24prstuw+ \\
+24prstv^2 - 36prsu^2v + 6ps^2t^2w - 12ps^2tuv + 12ps^2u^3 - 12q^3tw^2- \\
-42q^3v^3 + 36q^2rtvw + 126q^2ruv^2 + 24q^2stuw - 78q^2stv^2 - 36qr^2tuw- \\
-126qr^2u^2v - 12qrst^2w + 120qrstuv - 6qs^2t^2v - 12qs^2tu^2+ \\
+12r^3t^2w + 42r^3u^3 - 12r^2st^2v - 42r^2stu^2 + 18rs^2t^2u - 2s^3t^3.
\end{gathered} \tag{12.13}
$$

Применяя теорему 10.1 к этим выражениям, получаем

$$
\begin{gathered}
D_1(J_j) = D_4(J_j) = -2J_j,\ D_2(J_j) = D_3(J_j) = 0\ (j = 1, 2), \\
D_1(J_j) = D_4(J_j) = -3J_j,\ D_2(J_j) = D_3(J_j) = 0\ (j = 3, 4), \\
D_1(J_5) = D_4(J_5) = -4J_5,\ D_2(J_5) = D_3(J_5) = 0, \\
D_1(J_6) = D_4(J_6) = -6J_6,\ D_2(J_6) = D_3(J_6) = 0,
\end{gathered}
$$

где D_i $(i = \overline{1,4})$ из (12.10).

Это подверждает, что выражения (12.13) являются центроаффинными инвариантами системы (1.10). Составляя для многочленов (12.13) матрицу Якоби, имеем

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial p} & \frac{\partial J_1}{\partial q} & \frac{\partial J_1}{\partial r} & \frac{\partial J_1}{\partial s} & \frac{\partial J_1}{\partial t} & \frac{\partial J_1}{\partial u} & \frac{\partial J_1}{\partial v} & \frac{\partial J_1}{\partial w} \\ \frac{\partial J_2}{\partial p} & \frac{\partial J_2}{\partial q} & \frac{\partial J_2}{\partial r} & \frac{\partial J_2}{\partial s} & \frac{\partial J_2}{\partial t} & \frac{\partial J_2}{\partial u} & \frac{\partial J_2}{\partial v} & \frac{\partial J_2}{\partial w} \\ \frac{\partial J_3}{\partial p} & \frac{\partial J_3}{\partial q} & \frac{\partial J_3}{\partial r} & \frac{\partial J_3}{\partial s} & \frac{\partial J_3}{\partial t} & \frac{\partial J_3}{\partial u} & \frac{\partial J_3}{\partial v} & \frac{\partial J_3}{\partial w} \\ \frac{\partial J_4}{\partial p} & \frac{\partial J_4}{\partial q} & \frac{\partial J_4}{\partial r} & \frac{\partial J_4}{\partial s} & \frac{\partial J_4}{\partial t} & \frac{\partial J_4}{\partial u} & \frac{\partial J_4}{\partial v} & \frac{\partial J_4}{\partial w} \\ \frac{\partial J_5}{\partial p} & \frac{\partial J_5}{\partial q} & \frac{\partial J_5}{\partial r} & \frac{\partial J_5}{\partial s} & \frac{\partial J_5}{\partial t} & \frac{\partial J_5}{\partial u} & \frac{\partial J_5}{\partial v} & \frac{\partial J_5}{\partial w} \\ \frac{\partial J_6}{\partial p} & \frac{\partial J_6}{\partial q} & \frac{\partial J_6}{\partial r} & \frac{\partial J_6}{\partial s} & \frac{\partial J_6}{\partial t} & \frac{\partial J_6}{\partial u} & \frac{\partial J_6}{\partial v} & \frac{\partial J_6}{\partial w} \end{pmatrix}. \tag{12.14}$$

Отметим, что все 28 миноров шестого порядка этой матрицы равны нулю. Следовательно, среди центроаффинных инвариантов (12.13) существует алгебраическая зависимость (сизигия), которая имеет вид

$$\begin{gathered} \varphi_1 \equiv 18J_1^6 - 81J_1^5J_2 + 189J_1^4J_2^2 + 108J_1^4J_5 - 279J_1^3J_2^3 - 108J_1^3J_2J_5 - \\ -30J_1^3J_3^2 + 96J_1^3J_3J_4 - 12J_1^3J_4^2 - 144J_1^3J_6 + 243J_1^2J_2^4 - 324J_1^2J_2^2J_5 + \\ +162J_1^2J_2J_3^2 - 432J_1^2J_2J_3J_4 + 108J_1^2J_2J_4^2 + 324J_1^2J_2J_6 - 108J_1J_2^5 + \\ +540J_1J_2^3J_5 - 196J_1J_2^2J_3^2 + 504J_1J_2^2J_3J_4 - 144J_1J_2^2J_4^2 - 432J_1J_2^2J_6 - \\ -648J_1J_2J_5^2 + 288J_1J_3^2J_5 - 144J_1J_3J_4J_5 - 144J_1J_4^2J_5 - 432J_1J_5J_6 + \\ +18J_2^6 - 216J_2^4J_5 + 66J_2^3J_3^2 - 168J_2^3J_3J_4 + 48J_2^3J_4^2 + 144J_2^3J_6 + \\ +648J_2^2J_5^2 - 720J_2J_3^2J_5 + 1008J_2J_3J_4J_5 - 288J_2J_4^2J_5 - 864J_2J_5J_6 + \\ +128J_3^4 - 416J_3^3J_4 + 480J_3^2J_4^2 + 264J_3^2J_6 - 224J_3J_4^3 - 672J_3J_4J_6 + \\ +32J_4^4 + 192J_4^2J_6 - 2592J_5^3 + 288J_6^2 = 0. \end{gathered} \tag{12.15}$$

Далее, вычислив построенный пятого порядка минор, например, на первых пяти линиях и первых пяти столбцах матрицы (12.14), находим, что он отличен от нуля. Следовательно, центроаффинные инварианты $J_1 - J_5$ можно взять в качестве элементов алгебраического базиса центроаффинных инвариантов системы (1.10). Можно также убедиться, что любые пять инвариантов из (12.13) также формируют алгебраический базис центроаффинных инвариантов системы (1.10).

§13. Комментарии ко второй главе

Центроаффинные комитанты и инварианты дифференциальных систем вида (1.1)–(1.2) нашли широкое применение в качественном исследовании этих систем (см., например, [15]– [17]). Однако существующие методы их построения [16, 17] не дают возможности заранее определить количество инвариантов и комитантов в алгебраическом и других базисах, число которых разнится от системы к системе.

В этой главе даны общие формулы числа инвариантов и комитантов, входящих в алгебраический базис для любой системы вида (1.1)–(1.2).

Глава 3. Производящие функции и ряды Гильберта для градуированных алгебр Сибирского комитантов и инвариантов дифференциальных систем

§14. Формулы для весов центроаффинных комитантов и инвариантов заданого типа

Отметим, что индекс i над коэффициентами системы (1.1)–(1.2) указывает на то, что $\overset{i}{a}{}^{j}_{k}$ принадлежат однородностям $P_{m_i}(x,y)$ и $Q_{m_i}(x,y)$, а ℓ указывает на число однородностей, находящихся в правой части системы (1.2).

Определение 14.1. *Скажем, что центроаффинный комитант системы* (1.1)–(1.2) *имеет тип*

$$(d) = (\delta, d_1, d_2, ..., d_\ell), \tag{14.1}$$

если он является однородным многочленом степени d_i *относительно коэффициентов* $\overset{i}{a}{}^{j}_{k}$ *однородностей* $P_{m_i}(x,y)$ *и* $Q_{m_i}(x,y)$ *и степени* δ *относительно фазовых переменных* x, y. *При этом число* $d = \sum_{i=1}^{\ell} d_i$ (δ) *назовем степенью* (*порядком*) *комитанта типа* (14.1).

Замечание 14.1. *Из определения* 8.1 *центроаффинного инварианта как комитанта, в котором отсутствуют фазовые переменные* x *и* y, *следует, что для инварианта системы* (1.1)–(1.2) *типа* (14.1) *в этой записи* $\delta = 0$.

Если, например, рассмотреть тип (14.1) для центроаффинных комитантов системы (1.3), то он запишется в виде

$$(d) = (\delta, d_1, d_2), \tag{14.2}$$

так как в правой части этой системы имеются две однородности нулевой степени и линейной.

Пример 14.1. Рассмотрим типы центроаффинных инвариантов системы (1.3), приведенных в (8.12) из замечания 8.2:

1) инвариант i_1 имеет тип $(0,0,1)$;
2) инвариант i_2 имеет тип $(0,0,2)$;
3) инвариант i_3 имеет тип $(0,2,1)$;
4) комитант k_1 имеет тип $(1,1,0)$;
5) комитант k_2 имеет тип $(2,0,1)$;
6) комитант k_3 имеет тип $(1,1,1)$.

Пример 14.2. Центроаффинные инварианты I_7, I_8, I_9 и I_{15} из (12.7) являются соответственно инвариантами типа $(0,4)$ и $(0,6)$ для системы (1.7). Если рассмотреть центроаффинные инварианты (12.13) для системы (1.10), то J_1, J_2 являются инвариантами типа $(0,2)$, J_3, J_4–типа $(0,3)$, J_5–типа $(0,4)$, J_6–типа $(0,6)$.

Лемма 14.1. *Если центроаффинный комитант* $K(x,y,A)$ *системы* (1.1)–(1.2) *имеет тип* (14.1) *и вес* g, *то при* $\Gamma = \{m_i\}_{i=0}^{\ell}$ *справедливо равенство*

$$2g = \sum_{i=0}^{\ell} d_i(m_i - 1) - \delta. \tag{14.3}$$

Доказательство. Пусть задан центроаффинный комитант $K(x,y,A)$ в виде

$$K(x,y,A) = \sum C \prod_{i=0}^{\ell} (\overset{i}{a}{}^1_0)^{\overset{i}{\eta}_0} (\overset{i}{a}{}^1_1)^{\overset{i}{\eta}_1} ... (\overset{i}{a}{}^1_{m_i})^{\overset{i}{\eta}_{m_i}} (\overset{i}{a}{}^2_0)^{\overset{i}{\xi}_0} (\overset{i}{a}{}^2_1)^{\overset{i}{\xi}_1} ... (\overset{i}{a}{}^2_{m_i})^{\overset{i}{\xi}_{m_i}} \times$$
$$\times x^{\delta_1} y^{\delta_2}, \tag{14.4}$$

имеющий тип (14.1) и вес g, где C–численные коэффициенты. Следовательно, из (14.4) согласно определению 14.1 имеем

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta, \tag{14.5}$$

$$\overset{i}{\eta}_0 + \overset{i}{\eta}_1 + ... + \overset{i}{\eta}_{m_i} + \overset{i}{\xi}_0 + \overset{i}{\xi}_1 + \overset{i}{\xi}_2 + ... + \overset{i}{\xi}_{m_i} = d_i, \ (i = \overline{0,\ell}). \tag{14.6}$$

Осуществив в системе (1.1)–(1.2) центроаффинное преобразование

$$\overline{x} = \mu^{-1}x, \ \overline{y} = \mu^{-1}y, \ \Delta = \mu^{-2}, \ \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{14.7}$$

получаем систему (9.7), в которой новые коэффициенты имеют вид

$$\overset{i}{b}{}_k^j = \mu^{m_i-1}\overset{i}{a}{}_k^j \ (j=1,2,\ i=\overline{0,\ell},\ k=\overline{0,m_i}). \tag{14.8}$$

С другой стороны, если использовать тот факт, что $K(x,y,A)$ является центроаффинным комитантом системы (1.1)–(1.2) веса g, то согласно определению 8.1 и примечанию 8.1 для преобразования (14.7) с помощью (14.4) имеем

$$\sum C\prod_{i=0}^{\ell}(\overset{i}{b}{}_0^1)^{\overset{i}{\eta}_0}(\overset{i}{b}{}_1^1)^{\overset{i}{\eta}_1}...(\overset{i}{b}{}_{m_i}^1)^{\overset{i}{\eta}_{m_i}}(\overset{i}{b}{}_0^2)^{\overset{i}{\xi}_0}(\overset{i}{b}{}_1^2)^{\overset{i}{\xi}_1}...(\overset{i}{b}{}_{m_i}^2)^{\overset{i}{\xi}_{m_i}}x^{\delta_1}y^{\delta_2} =$$

$$= \mu^{2g}\sum C\prod_{i=0}^{\ell}(\overset{i}{a}{}_0^1)^{\overset{i}{\eta}_0}(\overset{i}{a}{}_1^1)^{\overset{i}{\eta}_1}...(\overset{i}{a}{}_{m_i}^1)^{\overset{i}{\eta}_{m_i}}(\overset{i}{a}{}_0^2)^{\overset{i}{\xi}_0}(\overset{i}{a}{}_1^2)^{\overset{i}{\xi}_1}...(\overset{i}{a}{}_{m_i}^2)^{\overset{i}{\xi}_{m_i}}x^{\delta_1}y^{\delta_2}.$$

Подставляя в левой части этого равенства (14.7) и (14.8), находим

$$\mu^{\sum_{i=0}^{\ell}(m_i-1)(\overset{i}{\eta}_0+\overset{i}{\eta}_1+...+\overset{i}{\eta}_{m_i}+\overset{i}{\xi}_0+\overset{i}{\xi}_1+...+\overset{i}{\xi}_{m_i})-(\delta_1+\delta_2)} = \mu^{2g},$$

откуда с учетом (14.5) и (14.6) получим равенство (14.3). Лемма 14.1 доказана.

Следствие 14.1. *Центроаффинные комитанты или инварианты системы* (1.1)–(1.2), *имеющие одинаковый тип* (14.1), *обладают одним и тем же весом.*

Доказательство следствия 14.1 следует непосредственно из равенства (14.3).

Замечание 14.2. *Равенство* (14.3) *для центроаффинных комитантов системы* (1.1)–(1.2) *известно из работы* [17].

§15. Первоначальная форма производящей функции для центроаффинных комитантов дифференциальных систем

Лемма 15.1. *Множество центроаффинных комитантов системы* (1.1)–(1.2) *одного и того же типа* (14.1) *образует конечномерное линейное пространство, то есть обладает конечной максимальной системой линейно-независимых комитантов* (*линейный базис*) *заданного типа, через которые выражаются линейно все остальные.*

Доказательство. Пусть существуют центроаффинные комитанты системы (1.1)–(1.2) типа (14.1). Тогда согласно свойству 8.2 и следствию

14.1 для любых двух таких комитантов K и k этого множества и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем $K + k$, и αK принадлежат этому множеству, и имеют место равенства $\alpha(K + k) = \alpha K + \alpha k$, $(\alpha + \beta)K = \alpha K + \beta K$, $(\alpha\beta)K = \alpha(\beta K)$, $1 \cdot K = K$. Для любого комитанта K существует обратный элемент $(-K)$. Сумма комитантов является коммутативной и ассоциативной, а нулевым элементом считается комитант, тождественно равный нулю, который можно считать комитантом любого веса и любого типа. Следовательно, это множество образует линейное пространство. Из монографий [16, стр. 18] и [17, стр. 29] следует, что такое пространство является конечномерным. Лемма 15.1 доказана.

Обозначим линейное пространство центроаффинных комитантов системы (1.1)–(1.2) типа (14.1) через

$$V_{\Gamma}^{(d)}, \tag{15.1}$$

а его размерность

$$dim_{\mathbb{R}} V_{\Gamma}^{(d)}. \tag{15.2}$$

В монографии [17, стр. 24–26] показано, что для пространств комитантов (15.1) имеет место известный классический результат (см., например, [18])

Теорема 15.1. *Размерность пространства* (15.1) *определяется равенством*

$$dim_{\mathbb{R}} V_{\Gamma}^{(d)} = N_g - N_{g-1}, \tag{15.3}$$

где N_g (N_{g-1}) *равно множеству всех различных систем целых неотрицательных чисел*

$$\overset{1}{\eta}_0, \overset{1}{\eta}_1, ..., \overset{1}{\eta}_{m_1}, \overset{1}{\xi}_0, \overset{1}{\xi}_1, ..., \overset{i}{\xi}_{m_1}, ..., \overset{\ell}{\eta}_0, \overset{\ell}{\eta}_1, ..., \overset{\ell}{\eta}_{m_\ell}, \overset{\ell}{\xi}_0, \overset{\ell}{\xi}_1, ..., \overset{\ell}{\xi}_{m_\ell},$$

среди которых допускаются и одинаковые, удовлетворяющие системе (14.6) *совместно с уравнением*

$$\sum_{i=0}^{\ell} \left[0\overset{i}{\eta}_0 + 1\overset{i}{\eta}_1 + ... + m_i\overset{i}{\eta}_{m_i} + (-1)\overset{i}{\xi}_0 + 0\overset{i}{\xi}_1 + ... + (m_i - 1)\overset{i}{\xi}_{m_i} \right] = g,$$
$$\left(\sum_{i=0}^{\ell} \left[\overset{i}{\eta}_0 + 1\overset{i}{\eta}_1 + ... + m_i\overset{i}{\eta}_{m_i} + (-1)\overset{i}{\xi}_0 + 0\overset{i}{\xi}_1 + ... + (m_i - 1)\overset{i}{\xi}_{m_i} \right] = g - 1 \right), \tag{15.4}$$

где g *является весом комитанта из пространства* (15.1).

Просуммировав уравнения (14.6) с первым из (15.4), получим эквивалентную систему

$$\overset{i}{\eta}_0+\overset{i}{\eta}_1+...+\overset{i}{\eta}_{m_i}+\overset{i}{\xi}_0+\overset{i}{\xi}_1+...+\overset{i}{\xi}_{m_i}=d_i,\ (i=\overline{0,\ell}),$$
$$\left(\sum_{i=0}^{\ell}\left[0\overset{i}{\eta}_0+2\overset{i}{\eta}_1+...+(m_i+1)\overset{i}{\eta}_{m_i}+\overset{i}{\xi}_1+2\overset{i}{\xi}_2+...+m_i\overset{i}{\xi}_{m_i}\right]=g+d\right), \tag{15.5}$$

где d взято из определения 14.1.

Рассмотрим сумму $\sum u^{g+d}z_0^{d_0}z_1^{d_1}...z_\ell^{d_\ell}$, которая с помощью (15.5) запишется как

$$\sum u^{\sum_{i=0}^{\ell}\left[\overset{i}{\eta}_0+2\overset{i}{\eta}_1+...+(m_i+1)\overset{i}{\eta}_{m_i}+\overset{i}{\xi}_1+2\overset{i}{\xi}_2+...+m_i\overset{i}{\xi}_{m_i}\right]}\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{\ell}z_i^{\overset{i}{\eta}_0+\overset{i}{\eta}_1+...+\overset{i}{\eta}_{m_i}+\overset{i}{\xi}_0+\overset{i}{\xi}_1+...+\overset{i}{\xi}_{m_i}}.$$

Представив эту сумму в виде

$$\prod_{i=0}^{\ell}\sum(uz_i)^{\overset{i}{\eta}_0}\sum(u^2z_i)^{\overset{i}{\eta}_1}...\sum(u^{m_i+1}z_i)^{\overset{i}{\eta}_{m_i}}\times$$
$$\times\sum z_i^{\overset{i}{\xi}_0}\sum(uz_i)^{\overset{i}{\xi}_1}...\sum(u^{m_i}z_i)^{\overset{i}{\xi}_{m_i}},$$

получим, что она эквивалентна произведению

$$\prod_{i=0}^{\ell}\frac{1}{\prod_{p=1}^{m_i+1}(1-u^pz_i)}\cdot\frac{1}{\prod_{q=0}^{m_i}(1-u^qz_i)}. \tag{15.6}$$

Более удобно для использования (15.6) можно записать в виде

$$\prod_{i=0}^{\ell}\Psi_{m_i}(u), \tag{15.7}$$

где

$$\Psi_{m_i}(u)=\begin{cases}\frac{1}{(1-z_i)(1-uz_i)} & \text{при } m_i=0,\\ \frac{1}{(1-z_i)(1-u^{m_i+1}z_i)\prod_{k=1}^{m_i}(1-u^kz_i)^2} & \text{при } m_i\neq 0\end{cases} \tag{15.8}$$

для каждого $i=0,1,2,...,\ell$. Из сказанного получаем, что число N_g равняется коэффициенту при $u^{g+d}z_0^{d_0}z_1^{d_1}z_2^{d_2}...z_\ell^{d_\ell}$ в разложении функции (15.7) с помощью (15.8) по степеням $u,z_0,z_1,z_2,...,z_\ell$.

Аналогично с учетом теоремы 15.1 можно показать, что число N_{g-1} равняется коэффициенту при $u^{g+d-1}z_0^{d_0}z_1^{d_1}...z_\ell^{d_\ell}$ в разложении по степеням $u, z_0, z_1, ..., z_\ell$ выражения (15.7) с учетом (15.8), или, что тоже самое, коэффициенту при $u^{g+d}z_0^{d_0}z_1^{d_1}...z_\ell^{d_\ell}$ в выражении $u\prod_{i=0}^{\ell}\Psi_{m_i}(u)$. Отсюда имеем, что разность $N_g - N_{g-1}$ при различных g и d является коэффициентом функции

$$\Psi_\Gamma(u) = (1-u)\prod_{i=0}^{\ell}\Psi_{m_i}(u), \tag{15.9}$$

которую назовем *производящей функцией* для центроаффинных комитантов системы (1.1)–(1.2) с $\Gamma = \{m_i\}_{i=0}^{\ell}$, где $\Psi_{m_i}(u)$ имеет вид (15.8).

Таким образом, приходим к тому, что справедлива

Теорема 15.2. *$dim_{\mathbb{R}}V_\Gamma^{(d)}$ равняется коэффициенту при мономе $u^{g+d}z_0^{d_0}z_1^{d_1}...z_\ell^{d_\ell}$ в разложении производящей функции* (15.9) *для центроаффинных комитантов системы* (1.1)–(1.2) *по положительным степеням $u, z_0, z_1, ..., z_\ell$.*

Следуя А. Кэли (см., например, [13]), запишем выражение (15.9), заменив в нем u на u^{-2} и z_i на $u^{m_i+1}z_i$, в виде

$$\varphi_\Gamma^{(0)}(u) = (1-u^{-2})\psi_{m_0}^{(0)}(u)\psi_{m_1}^{(0)}(u)...\psi_{m_\ell}^{(0)}(u), \tag{15.10}$$

где согласно (15.8) имеем

$$\psi_{m_i}^{(0)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{(1-uz_i)(1-u^{-1}z_i)} & \text{при } m_i = 0, \\ \frac{1}{(1-u^{m_i+1}z_i)(1-u^{-m_i-1}z_i)\prod_{k=1}^{m_i}(1-u^{m_i-2k+1}z_i)^2} & \text{при } m_i \neq 0 \end{cases} \tag{15.11}$$

для каждого $\Gamma = \{m_i\}_{i=0}^{\ell}$.

Следуя Сильвестру (см., например, [13]), выражение (15.10) будем называть *первоначальной формой производящей функции* для центроаффинных комитантов системы (1.1)–(1.2).

Отметим, что при указанных заменах А. Кэли моном $u^{g+d}z_0^{d_0}z_1^{d_1}...z_\ell^{d_\ell}$ с учетом равенства (14.3) переходит в моном $u^\delta z_0^{d_0}z_1^{d_1}...z_\ell^{d_\ell}$.

С учетом последнего утверждения, а также теоремы 15.2 и равенства (15.10)–(15.11) доказана

Теорема 15.3. *$dim_{\mathbb{R}}V_\Gamma^{(d)}$ равняется коэффициенту при мономе $u^\delta z_0^{d_0}z_1^{d_1}...z_\ell^{d_\ell}$ в разложении первоначальной формы производящей функции* (15.10)–(15.11) *для центроаффинных комитантов системы* (1.1)–(1.2) *по положительным степеням $u, z_0, z_1, ..., z_\ell$.*

Пример 15.1. Если в системе (1.1)–(1.2) принять $\Gamma = \{0, 1\}$, то получим $\ell = 1$, $m_0 = 0$, $m_1 = 1$. Тогда из (15.10)–(15.11) для центроаффинных комитантов системы (3.1) имеем первоначальную форму производящей функции вида

$$\varphi_{0,1}^{(0)}(u) = \frac{1-u^{-2}}{(1-uz_0)(1-u^{-1}z_0)(1-u^2z_1)(1-z_1)^2(1-u^{-2}z_1)}. \quad (15.12)$$

§16. Примеры приведенных форм производящих функций для центроаффинных комитантов дифференциальных систем

В работах А. Кэли (см., например, [13]) для бинарных форм показано, что если функцию (15.10)–(15.11) представить в виде

$$\varphi_\Gamma(u) - u^{-2}\varphi_\Gamma(u^{-1}) = \varphi_\Gamma^{(0)}(u), \quad (16.1)$$

то можно ограничиться изучением только рациональной функции $\varphi_\Gamma(u)$, так как второй член в левой части (16.1) содержит отрицательные степени u, а согласно теореме 15.3 нас интересуют только члены с положительными степенями в разложении функции $\varphi_\Gamma^{(0)}(u)$.

Отметим, что из теоремы 15.3 и равенства (16.1) следует

Предложение 16.1.

$$\varphi_\Gamma(u) = \sum_{(d)} dim_R V_\Gamma^{(d)} u^\delta z_0^{d_0} z_1^{d_1} ... z_\ell^{d_\ell}. \quad (16.2)$$

Пример 16.1. Для функции (15.12) находим

$$\varphi_{0,1}(u) - u^{-2}\varphi_{0,1}(u^{-1}) = \varphi_{0,1}^{(0)}(u), \quad (16.3)$$

где

$$\varphi_{0,1}(u) = \frac{1+uz_0z_1}{(1-uz_0)(1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_0^2z_1)(1-u^2z_1)}. \quad (16.4)$$

Однако возникает вопрос, как можно получить функцию $\varphi_\Gamma(u)$ из (16.1) для более сложных Г. Эта проблема решается применением усовершенствованного метода Сильвестра [13] разложения функции $\varphi_\Gamma^{(0)}(u)$ на элементарные дроби [19, 20]. Полученная функция $\varphi_\Gamma(u)$ по предложению Сильвестра названа *приведенной формой производящей функции.*

Проиллюстрируем этод метод на одном примере.

Пример 16.2. Предположим, что в системе (1.1)–(1.2) имеем $\Gamma = \{2\}$, то есть $\ell = 0$, $m_0 = 2$. Если в этом случае обозначить в (15.11) $z_0 = c$, то из (15.10) для комитантов этой системы получим первоначальную форму производящей функции вида

$$\varphi_2^{(0)}(u) = \frac{1 + u^{-2}}{(1 - u^3 c)(1 - uc)^2 (1 - u^{-1}c)^2 (1 - u^{-3}c)}. \tag{16.5}$$

Если записать правую часть (16.5) в виде элементарных дробей относительно u, то получим

$$\varphi_2^{(0)}(u) = \varphi_2(u) + \varphi_2^{(1)}(u), \tag{16.6}$$

где $\varphi_2(u)$ ($\varphi_2^{(1)}(u)$) есть сумма дробей, соответствующих факторам в знаменателе (16.5) с положительными (отрицательными) степенями u. Тогда в соответствии с этим имеем

$$\varphi_2(u) = A + B, \tag{16.7}$$

$$A = \sum_{i=0}^{2} \frac{A_i}{1 - \alpha_i u},\ B = \sum_{j=0}^{1} \frac{B_j}{(1 - uc)^{2-j}}, \tag{16.8}$$

а $\alpha_i = \varrho_i c^{1/3}$ $(i = 0, 1, 2)$ и ϱ_i являются корнями уравнения

$$\varrho^3 - 1 = 0. \tag{16.9}$$

Умножив обе части равенства (16.6) на $1 - u^3 c$ с учетом (16.7) и (16.8) получим

$$\varphi_2(u)(1 - u^3 c) = \sum_{i=0}^{2} \frac{A_i}{1 - \alpha_i u}(1 - u^3 c) + [B + \varphi_2^{(1)}(u)](1 - u^3 c). \tag{16.10}$$

Так как $1 - u^3 c = (1 - \alpha_0 u)(1 - \alpha_1 u)(1 - \alpha_2 u)$, то (16.10) можем записать как

$$\varphi_2^{(0)}(u)(1 - u^3 c) = \sum_{i=0}^{2} A_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} (1 - \alpha_j u) + [B + \varphi_2^{(1)}(u)](1 - u^3 c). \tag{16.11}$$

Подставляя в это равенство $u = \alpha_i^{-1}$, получаем

$$A_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} (1 - \alpha_j \alpha_i^{-1}) = \varphi_2^{(0)}(u)(1 - u^3 c)|_{u = \alpha_i^{-1}}\ (i = 0, 1, 2). \tag{16.12}$$

С учетом того что ϱ_i являются корнями уравнения (16.9) легко можно показать, что

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2}(1-\alpha_j\alpha_i^{-1}) = 3 \ (i=0,1,2).$$

Принимая во внимание последнее равенство, из (16.12) и (16.5) находим

$$3A_i = \frac{1-\alpha_i^2}{(1-\alpha_i^{-1}c)^2(1-\alpha_i c)(1-\alpha_i^3 c)} \ (i=0,1,2).$$

Отсюда с учетом того что $\alpha_i = \varrho_i c^{1/3}$ $(i=0,1,2)$ и $\varrho_i^3 = 1$, имеем

$$3A_i = \frac{1}{(1-c^2)(1-\alpha_i^2)(1-\alpha_i^4)^2} \ (i=0,1,2).$$

Так, как

$$1-\alpha_i^2 = \frac{1-\alpha_i^6}{1+\alpha_i^2+\alpha_i^4},\ 1-\alpha_i^4 = \frac{1-\alpha_i^{12}}{1+\alpha_i^4+\alpha_i^8},$$

то из последнего равенства получаем

$$A_i = \frac{(1+\alpha_i^2+\alpha_i^4)(1+\alpha_i^4+\alpha_i^8)^2}{3(1-c^2)^2(1-c^4)^2}. \tag{16.13}$$

Подставляя (16.13) в первое равенство (16.8), находим

$$A = \frac{1}{3(1-c^2)^2(1-c^4)^2}\left[\sum_{i=0}^{2}\frac{N_i}{1-\alpha_i u}\right], \tag{16.14}$$

где

$$N_i = (1+\alpha_i^2+\alpha_i^4)(1+\alpha_i^4+\alpha_i^8)^2 \quad (i=0,1,2). \tag{16.15}$$

Приведя к общему знаменателю выражение в квадратных скобках (16.14), с учетом того что

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 = c^{1/3}(\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2) = 0,$$

получим

$$A = \frac{\sum_{i=0}^{2} N_i + u\sum_{i=0}^{2}\alpha_i N_i + u^2(\alpha_1\alpha_2 N_0+\alpha_0\alpha_2 N_1+\alpha_0\alpha_1 N_2)}{3(1-c^2)^2(1-c^4)^2(1-u^3 c)}. \tag{16.16}$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i^m = \begin{cases} 3c^n & \text{при } m = 3n, \\ 0 & \text{при } m \neq 3n, \end{cases}$$

с учетом (16.15) находим

$$\sum_{i=0}^{2} N_i = 3 + 6c^2 + 15c^4 + 3c^6,$$

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i N_i = 3c + 15c^3 + 6c^5 + 3c^7,$$

$$\alpha_1\alpha_2 N_0 + \alpha_0\alpha_2 N_1 + \alpha_0\alpha_1 N_2 = 9c^2 + 9c^4 + 9c^6.$$

Из последних равенств и (16.16) после сокращения на 3 получаем

$$A = \frac{1}{(1-c^2)^2(1-c^4)^2(1-u^3c)}[1 + 2c^2 + 5c^4 + c^6 + u(c + 5c^3 + \\ + 2c^5 + c^7) + u^2(3c^2 + 3c^4 + 3c^6)]. \tag{16.17}$$

Если умножить обе части (16.6) на $(1-uc)^2$, то с учетом (16.5) и второго равенства (16.8) получим

$$B_0 + B_1(1-uc) + [A + \varphi_2^{(1)}(u)](1-uc)^2 = \frac{1-u^{-2}}{(1-u^3c)(1-u^{-1}c)^2(1-u^{-3}c)}. \tag{16.18}$$

Подставляя в это равенство $u = c^{-1}$, находим

$$B_0 = \frac{c^2}{(1-c^2)^2(1-c^4)}. \tag{16.19}$$

Теперь взяв производную по u от обеих частей (16.18) и приняв $u = c^{-1}$, имеем

$$-cB_1 = \frac{d}{du}\left[\frac{1-u^{-2}}{(1-u^3c)(1-u^{-1}c)^2(1-u^{-3}c)}\right]_{u=c^{-1}},$$

откуда получаем

$$B_1 = -\frac{3c^2(1+c^2+c^4)}{(1-c^2)^2(1-c^4)^2}. \tag{16.20}$$

Подставляя (16.19) в (16.20), во втором равенстве (16.8) имеем

$$B = \frac{1}{(1-c^2)^2(1-c^4)^2(1-uc)^2}[-4c^2 - 3c^4 - 2c^6 + u(3c^3 + 3c^5 + 3c^7)]. \tag{16.21}$$

Из (16.7) с помощью (16.20) и (16.21) после сокращения на $1 - c^2$ получаем следующую форму производящей функции:

$$\varphi_2(u) = \frac{N_2(u,c)}{D_2(u,c)}, \tag{16.22}$$

где

$$\begin{gathered} D_2(u,c) = (1-c^2)(1-c^4)^2(1-uc)^2(1-u^3c), \\ N_2(u,c) = 1 - c^2 + c^4 + u(-c + 3c^3 - 2c^5) + u^2(2c^2 - 3c^4 + \\ +c^6) + u^3(-c^3 + c^5 - c^7). \end{gathered} \tag{16.23}$$

Пример 16.3. Предположим, что в системе (1.1)–(1.2) имеем $\Gamma = \{3\}$, то есть $\ell = 0$, $m_0 = 3$. Если в этом случае обозначить в (15.11) $z_1 = d$, то из (15.10) для комитантов этой системы получим первоначальную форму производящей функции вида

$$\varphi_3^{(0)}(u) = \frac{1 - u^{-2}}{(1-u^4d)(1-u^2d)^2(1-d)^2(1-u^{-2}d)^2(1-u^{-4}d)}. \tag{16.24}$$

Аналогично примеру 16.2 с помощью этой функции получаем следующую приведенную форму производящей функции:

$$\varphi_3(u) = \frac{N_3(u,d)}{D_3(u,d)}, \tag{16.25}$$

где

$$\begin{gathered} D_3(u,d) = (1-d^2)^3(1-d^3)^2(1-u^2d)^2(1-u^4d), \\ N_3(u,d) = 1 - d^2 + d^4 + u^2(-d + d^2 + 3d^3 - 2d^5) + u^4(2d^2 - \\ -3d^4 - d^5 + d^6) + u^6(-d^3 + d^5 - d^7). \end{gathered} \tag{16.26}$$

Замечание 16.1. *В* [15], [20–22] *найдены приведенные формы производящих функций для комитантов дифференциальных систем* (1.1)–(1.2) *при* $\Gamma = \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{4\}, \{1,4\}, \{5\}, \{1,5\}$.

Замечание 16.2. *Приведенная форма производящей функции для инвариантов дифференциальной системы* (1.1)–(1.2) *при фиксированном* Γ *получается из приведенной формы производящей функции для комитантов* $\varphi_\Gamma(u)$ *той же системы при* $u = 0$.

§17. Ряды Гильберта для градуированных алгебр унимодулярных комитантов и инвариантов дифференциальных систем

Пусть $SL(2,\mathbb{R}) \subseteq GL(2,\mathbb{R})$ является подгруппой унимодулярных преобразований, то есть $SL(2,\mathbb{R})$ состоит из преобразований вида (3.10), для которых $\Delta = 1$.

Определение 17.1. *Скажем, что целая рациональная функция*

$$L(x, y, \overset{0}{a}{}^{1}_{0}, \overset{0}{a}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{a}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{a}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{m_\ell})$$

от фазовых переменных x, y и коэффициентов системы (1.1)–(1.2) *называется унимодулярным комитантом этой системы, если имеет место равенство*

$$L(\overline{x}, \overline{y}, \overset{0}{b}{}^{1}_{0}, \overset{0}{b}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{b}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{b}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{b}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{b}{}^{2}_{m_\ell}) = L(x, y, \overset{0}{a}{}^{1}_{0}, \overset{0}{a}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{a}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{a}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{m_\ell}),$$

для любых коэффициентов системы (1.1)–(1.2), *фазовых переменных x, y и преобразований $q \in SL(2,\mathbb{R})$ из* (3.10).

Аналогично (15.1) обозначим линейное пространство унимодулярных комитантов системы (1.1)–(1.2) типа (14.1) через

$$S_{\Gamma}^{(d)}. \tag{17.1}$$

Лемма 17.1. $V_{\Gamma}^{(d)} \cong S_{\Gamma}^{(d)}$.

Доказательство. Пусть комитант

$$K(x, y, \overset{0}{a}{}^{1}_{0}, \overset{0}{a}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{a}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{a}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{m_\ell})$$

принадлежит пространству (15.1). Тогда с учетом включения $SL(2,\mathbb{R}) \subseteq GL(2,\mathbb{R})$ указанный комитант будет элементом пространств (17.1), что указывает на однозначное соответствие между элементами пространств (15.1) и (17.1) в одном направлении.

Покажем, что такое соответствие существует и в обратном направлении. Для этого используем примечание 3.1. Если в системе (1.1)–(1.2) осуществить преобразование (3.11), то для коэффициентов системы (9.7) будем иметь $\overset{i}{b}{}^{j}_{k} = \Delta^{-\frac{1}{2}(m_i - 1)} \overset{i}{a}{}^{j}_{k}$. Тогда согласно тому, что комитант K является однородным типа (14.1) для унимодулярного комитанта L, принадлежащего пространству (17.1), при этом преобразовании будем иметь равенство

$$
\begin{gathered}
L(\Delta^{\frac{1}{2}}x, \Delta^{\frac{1}{2}}y, \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{1}_{0}, \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{1}_{1}, ..., \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{0}_{m_0}, \\
\Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{1}{a}{}^{2}_{0}, \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{2}_{1}, .., \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{2}_{m_0}, ..., \Delta^{-\frac{1}{2}(m_\ell-1)}\overset{\ell}{a}{}^{2}_{m_\ell}) = \\
= \Delta^{-g}K(x, y, \overset{0}{a}{}^{1}_{0}, \overset{0}{a}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{a}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{a}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{m_\ell}),
\end{gathered}
\tag{17.2}
$$

где для g имеем равенство (15.3).

Если в полученной системе после преобразования (3.11) осуществить унимодулярное преобразование (3.12), то для унимодулярного комитанта из левой части (17.2) имеем

$$
\begin{gathered}
L(\overline{x}, \overline{y}, \overset{0}{b}{}^{1}_{0}, \overset{0}{b}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{b}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{b}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{b}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{b}{}^{2}_{m_\ell}) = \\
= L(\Delta^{\frac{1}{2}}x, \Delta^{\frac{1}{2}}y, \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{1}_{0}, \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{1}_{1}, ..., \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{1}_{m_0}, \\
\Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{2}_{0}, \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{2}_{1}, .., \Delta^{-\frac{1}{2}(m_0-1)}\overset{0}{a}{}^{2}_{m_0}, ..., \Delta^{-\frac{1}{2}(m_\ell-1)}\overset{\ell}{a}{}^{2}_{m_\ell}).
\end{gathered}
$$

Тогда с помощью последнего равенства и с учетом (17.2) имеем тождество

$$
\begin{gathered}
L(\overline{x}, \overline{y}, \overset{0}{b}{}^{1}_{0}, \overset{0}{b}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{b}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{b}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{b}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{b}{}^{2}_{m_\ell}) = \\
= \Delta^{-g}K(x, y, \overset{0}{a}{}^{1}_{0}, \overset{0}{a}{}^{1}_{1}, ..., \overset{0}{a}{}^{1}_{m_0}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{0}, \overset{\ell}{a}{}^{2}_{1}, ..., \overset{\ell}{a}{}^{2}_{m_\ell})
\end{gathered}
$$

для любого преобразования (3.11), любых коэффициентов системы (1.1)–(1.2) и любых фазовых переменын x, y. Отметим, что g определяется с помощью (14.3) и согласно примечанию 8.1 является целым числом.

Тем самым установили, что унимодулярному комитанту типа (14.1) однозначно ставится в соответствие центроаффинный комитант системы (1.1)–(1.2), который совпадает с ним же. Лемма 17.1 доказана.

В доказательстве леммы 17.1 содержится критерий центроаффиной инвариантности любого однородного многочлена от коэффициентов системы (1.1)–(1.2) и фазовых переменын x, y, который формулируется как

Следствие 17.1. *Для того чтобы целая рациональная и однородная функция типа* (14.1) *от коэффициентов системы* (1.1)–(1.2) *являлась центроаффинным комитантом этой системы, необходимо и достаточно, чтобы она являлась унимодулярным комитантом того же типа* (14.1) *указанной системы.*

Следствие 17.2. *Имеет место равенство*

$$dim_{\mathbb{R}}V_{\Gamma}^{(d)} = dim_{\mathbb{R}}S_{\Gamma}^{(d)}.$$

Рассмотрим линейное пространство

$$S_\Gamma = \sum_{(d)} S_\Gamma^{(d)}, \tag{17.3}$$

являющееся градуированной алгеброй комитантов, в которой ее компоненты удовлетворяют включению $S_\Gamma^{(d)} S_\Gamma^{(e)} \subseteq S_\Gamma^{(d+e)}$.

Следуя работе [23], под обобщенным рядом Гильберта алгебры (17.3) будем понимать

$$H(S_\Gamma, u, z_0, z_1, ..., z_\ell) = \sum_{(d)} dim_{\mathbb{R}} S_\Gamma^{(d)} u^\delta z_0^{d_0} z_1^{d_1} ... z_\ell^{d_\ell}. \tag{17.4}$$

Из равенства (16.2) и (17.4) с помощью следствия 17.2 получаем

$$H(S_\Gamma, u, z_0, z_1, ..., z_\ell) = \varphi_\Gamma(u). \tag{17.5}$$

Отметим, что (согласно той же работе [23]) обычный ряд Гильберта очевидным образом получается из обобщенного

$$H_{S_\Gamma}(u) = H(S_\Gamma, u, u, u, ..., u). \tag{17.6}$$

Таким образом, с помощью (17.5) имеем

Заключение 17.1. *Приведенная форма производящей функции для комитантов системы* (1.1)–(1.2) *с заданным* Γ *является обобщенным рядом Гильберта для алгебры унимодулярных комитантов* (17.3) *с тем же* Γ.

Замечание 17.1. *Если обозначить алгебру инвариантов при фиксированном* Γ *для системы* (1.1)–(1.2) *через* SI_Γ, *то согласно замечанию* 16.2 *и равенству* (17.5) *для обобщенного ряда Гильберта этой алгебры имеем*

$$H(SI_\Gamma, z_0, z_1, ..., z_\ell) = H(S_\Gamma, 0, z_0, z_1, ..., z_\ell) = \varphi_\Gamma(0), \tag{17.7}$$

а для обычного ряда Гильберта получаем

$$H_{SI_\Gamma}(z) = H(SI_\Gamma, z, z, ..., z). \tag{17.8}$$

Важное примечание 17.1. *Отметим, что центроаффинные комитанты и инварианты систем вида* (1.1)–(1.2) *впервые были изучены в работах академика К. С. Сибирского* [16,24,25] *и получили дальнейшее развитие в работах его учеников. Так как в настоящем параграфе показано, что указанные комитанты и инварианты составляют основу градуированных алгебр комитантов* S_Γ *и инвариантов* SI_Γ, *то эти алгебры будем называть градуированными алгебрами Сибирского комитантов S_Γ и градуированными алгебрами Сибирского инвариантов SI_Γ для системы $s(\Gamma)$. В дальнейшем будем использовать сокращенное название "алгебры Сибирского" S_Γ и SI_Γ.*

§18. Комментарии к третьей главе

Отметим, что метод производящих функций является достаточно старым и насчитывает сотни лет. Он был использован в работах И. Ньютона (1642–1727), Д. Бернулли (1700–1782), Л. Эйлера (1707–1783), К. Гаусса (1777–1855), Р. Римана (1826–1866), А. Кэли (1821–1895), Дж. Сильвестра (1814–1897), Д. Гильберта (1862–1943) и других ученных для доказательства неожиданных результатов.

Наверное, первым проявлением этого метода является формула бинома Ньютона, которая говорит, что число

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

является коэффициентом при t^k в многочлене $(1+t)^n$, то есть

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

На современном языке можем сказать, что функция
$(1+t)^n$ является *производящей функцией* для чисел

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}.$$

Из этих соображений, такие числа называются еще и *биномиальными коэффициентами.*

Метод производящих функций в своей основе имеет очень простую идею. Некоторой последовательности действительных чисел $a_0, a_1, a_2, ...$ ставится в соответствие выражение вида

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...,$$

которое будем называть рядом, или *производящей функцией*, этой последовательности. Эту функцию мы можем себе представить как многочлен бесконечной степени. Такое выражение называется формальным степенным рядом, так как нас не интересует его сходимость.

Часто указанные ряды имеют простые формы, позволяющие сделать определенные выводы относительно последовательности $\{a_n\}_{n\geq 0}$, которые другим путем очень трудно получить.

Пусть V–векторное пространство, которое представимо в виде прямой суммы конечномерных подпространств

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n,\ V_n \bigcap_{(n\neq m)} V_m = \{0\}.$$

Такое разложение будем называть *градуировкой. Производящей функцией* для V, или последовательности $dim_{\mathbb{R}}V_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$, будем называть формальный ряд

$$\Phi_V(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(dim_{\mathbb{R}}V_n)t^n. \tag{18.1}$$

Примечательный эффект для производящих функций состоит в том, что соотвествующий формальный ряд может сходится в некоторой окрестности нуля к некоторой конкретной функции. Таким образом, изучив ее свойства (например, полюса, нули) мы можем получить дополнительную информацию о структуре пространства V, в частности об асимптотическом поведении последовательности $\{dim_{\mathbb{R}}V_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Если $V = A$ является градуированной алгеброй, то (18.1) называется рядом Гильберта для этой алгебры и обозначается через $H_A(t)$, который несет в себе содержательную информацию о характере асимптотического поведения алгебры A.

При изучении пространства V, или алгебры A, в некоторых случаях могут быть введены производящие функции, или ряды Гильберта, которые зависят от нескольких переменнных. Этот факт отражает более детальную градуировку этих обьектов. В результате эти функции получили соответственно название *обобщенных* производящих функций и рядов Гильберта, а те, которые имеют вид (18.1), называются *обычными.*

Проникновение производящих функций и рядов Гильберта в теорию двумерных автономных полиномиальных дифференциальных систем первого порядка имеет свое начало в работах [15, 20].

Отметим (см. [23]), что термин ряд Гильберта берет свое начало от классических результатов Гильберта, относящихся к коммутативному случаю. Иногда его также называют рядом Пуанкаре, но на сегодня устоявшимся следует считать именно этот термин, связывая имя Пуанкаре только с гомологическим рядом. Несмотря на то, что алгебры S_Γ и SI_Γ для системы вида (1.1)–(1.2) имеют свое начало и детально изучены в работах [15, 20], название "алгебры Сибирского" они получили лишь в статье [10]. Это было вызвано тем, что благодаря указанным алгебрам можно было дать ответ на один из важнейших вопросов качественной теории дифференциальных систем, связанным с числом алгебраически-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для любой дифференциальной системы вида (1.1)–(1.2) с полиномиальными нелинейностями.

Глава 4. Ряды Гильберта для алгебр Сибирского S_Γ (SI_Γ) и размерность Крулля для них

§19. Размерность Крулля для градуированных алгебр Сибирского

В дальнейшем ограничимся изучением систем вида $s(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$ из (1.1)–(1.2) и, следовательно, алгебр Сибирского $S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ и $SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$.

Из теории инвариантов дифференциальных систем [16] и тензоров [18] следует, что градуированные алгебры Сибирского $S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ и $SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ являются коммутативными и конечно определенными алгебрами. Если для этих алгебр ввести единое обозначение A, то последнее утверждение для них запишется в виде

$$A =< a_1, a_2, ..., a_m | f_1 = 0, f_2 = 0, ..., f_n = 0 > \ (m, n < \infty), \tag{19.1}$$

где a_i являются образующими этой алгебры, f_j–определяюшщими соотношениями (сизигиями) между этими образующими.

Известно, например из [20], что для самой простой дифференциальной системы $s(0, 1)$ из (1.3) вида

$$\dot{x} = a + cx + dy, \ \dot{y} = b + ex + fy$$

конечно определенные градуированные алгебры комитантов $S_{0,1}$ и инвариантов $SI_{0,1}$ запишутся соответственно

$$\begin{gathered} S_{0,1} =< i_1, i_2, i_3, k_1, k_2, k_3 | (i_1k_1 - k_3)^2 + k_3^2 - i_2k_1^2 - 2i_3k_2 = 0 >, \\ SI_{0,1} =< i_1, i_2, i_3 >, \end{gathered} \tag{19.2}$$

где согласно (8.12) имеем

$$i_1 = c + f,\ i_2 = c^2 + 2de + f^2,\ i_3 = -ea^2 + (c - f)ab + db^2,$$
$$k_1 = -bx + ay,\ k_2 = -ex^2 + (c - f)xy + dy^2,$$
$$k_3 = -(ea + fb)x + (ca + db)y.$$

Отметим, что в [26] на примере системы $s(0,1)$ из (1.3) набран определенный опыт приложения классических групп, алгебр Ли и теории инвариантов и комитантов в качественном исследовании автономных полиномиальных дифференциальных систем, накопленный в кишиневской школе по дифференциальным уравнениям.

В [20] также приведены примеры алгебр инвариантов Сибирского для систем (1.7) и (1.10), которые соответственно запишутся

$$SI_2 =< I_7, I_8, I_9, I_{15} | f_1 = 0 >,$$

где $I_7 - I_9,\ I_{15}$ из (12.7) и f_1 из (12.9), и

$$SI_3 =< J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 | \varphi_1 = 0 >,$$

где $J_1 - J_6$ из (12.13) и φ_1 из (12.15).

Определение 19.1. [27] *Элементы $a_1, a_2, ..., a_r$ алгебры A называются алгебраически-независимыми, если для любого нетривиального многочлена F от r переменных имеет место неравенство*

$$F(a_1, a_2, ..., a_r) \neq 0.$$

Определение 19.2. *Максимальное число алгебраически-независимых элементов градуированной алгебры A называется размерностью Крулля этой алгебры, которую обозначим через $\varrho(A)$.*

Известно, что для алгебры A, заданой в виде (19.1), справедливо равенство $n = m - \varrho(A)$. Однако это равенство мало эффективно, так как числа m и n для большинства алгебр инвариантов и комитантов систем вида (1.1)–(1.2) невозможно определить.

В классической теории инвариантов [13] множество элементов a_1, $a_2, ..., a_{\varrho(A)}$ из A, которые отражают размерность Крулля алгебры A называются *алгебраическим базисом* этого множества. Это означает (аналогично примечанию 11.1), что для $\forall a \in A$ $(a \neq a_j)$ существует такое натуральное число p, соответствующее a, что имеет место равенство

$$P_0 a^p + P_1 a^{p-1} + ... + P_p = 0, \tag{19.3}$$

где P_k ($k = \overline{0,p}$ являются многочленами от a_j ($j = \overline{1, \varrho(A)}$). Отметим, что вообще говоря $P_0 \not\equiv 1$.

Если для всех $a \in A$ в (19.3) имеем $P_0 \equiv 1$, то такой базис принято называть *целым алгебраическим.* Его существование показано Гильбертом (см., например [13]). Число его элементов обозначим через $\varrho'(A)$.

Отметим, что числа элементов в указанных базисах не всегда совпадают между собой. Так в [20] имеем, что для системы $s(4)$ размерность Крулля $\varrho(SI_4) = 7$, а в [28] для этой же системы получаем, что число элементов в целом алгебраическом базисе той же алгебры есть $\varrho'(SI_4) = 9$, то есть $\varrho(SI_4) < \varrho'(SI_4)$. Из [20] имеем, что для системы $s(0,1)$ справедливы равенства $\varrho(S_{0,1}) = \varrho'(S_{0,1}) = 5$ и $\varrho(SI_{0,1}) = \varrho'(SI_{0,1}) = 3$. Из работ [19], [20], [29] следует, что для систем $s(2)$ и $s(3)$ имеем $\varrho(SI_2) = \varrho'(SI_2) = 3$, $\varrho(SI_3) = \varrho'(SI_3) = 5$. В работах [20], [30] находим, что для системы $s(1,2)$ справедливы равенства $\varrho(SI_{1,2}) = \varrho'(SI_{1,2}) = 7$. Однако для системы $s(1,2,3)$ согласно [20] и [31] имеем, что $\varrho(SI_{1,2,3}) = 15$ а $\varrho'(SI_{1,2,3}) = 21$.

Указанные примеры, подводят нас к тому, что

$$\varrho(A) \leq \varrho'(A).$$

Это неравенство подчеркивает, что целый алгебраический базис содержит алгебраический базис алгебры A. Доказательство этого факта легко получается от противного.

Примечание 19.1. *Главным свойством целого алгебраического базиса алгебры инвариантов A состоит в том, что это наименьшее число элементов алгебры A, равенство нулю которых обращают в ноль все элементы алгебры A.*

В дальнейшем понадобятся очевидные утверждения

Предложение 19.1. *Если B является градуированной подалгеброй алгебры A, то тогда между размерностями Крулля этих алгебр имеет место неравенство*

$$\varrho_{(B)} \leq \varrho_{(A)}.$$

Предложение 19.2. *Если размерность Крулля алгебры A является $\varrho(A)$, то на любом многообразии $V = \{a = 0, b < 0\}$ при фиксированных $a, b \in A$ (b не влияет на указанном многообразии) в алгебре A найдется не больше $\varrho(A)$ алгебраически-независимых элементов (возможно и не больше $\varrho(A)$ элементов, которые образуют целый алгебраический базис) этой алгебры.*

Из теоремы 11.2, примечание 11.1, и определения 19.2 следует

Заключение 19.1. *Размерность Крулля для градуированных алгебр Сибирского $S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ и $SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ выражаются формулами*

$$\varrho(S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}) = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3, \tag{19.4}$$

$$\varrho(SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}) = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 1. \tag{19.5}$$

§20. Ряды Гильберта для градуированных алгебр Сибирского $S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$, $SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$

Согласно теореме 15.3 и следствию 17.2 получаем, что в алгебре Сибирского $S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ для ее пространств имеем $dim_{\mathbb{R}} S^{(d)}_{1,m_1,m_2,...,m_\ell} < \infty$. Тогда следуя (17.4), под *обобщенным рядом Гильберта* алгебры $S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ будем понимать формальный ряд

$$H(S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}, u, z_0, z_1, ..., z_\ell) = \sum_{(d)} dim_{\mathbb{R}} S^{(d)}_{1,m_1,m_2,...,m_\ell} u^\delta z_0^{d_0} z_1^{d_1} ... z_\ell^{d_\ell}, \tag{20.1}$$

о котором говорится, что он отражает u, z – градуировку указанной алгебры.

Согласно замечанию 17.1 для алгебры инвариантов $SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ получаем равенство

$$H(SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}, z_0, z_1, ..., z_\ell) = H(S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}, 0, z_0, z_1, ..., z_\ell), \tag{20.2}$$

а *обычные ряды Гильберта* запишутся соответственно

$$\begin{aligned} H_{S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}}(u) &= H(S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}, u, u, u, ..., u), \\ H_{SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}}(z) &= H(SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}, z, z, ..., z). \end{aligned} \tag{20.3}$$

Последние ряды несут содержательную информацию о характере асимптотического поведения указанных алгебр.

Метод построения обобщенных рядов Гильберта (20.1)–(20.3) для алгебр Сибирского $S_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ и $SI_{1,m_1,m_2,...,m_\ell}$ разработан в работах [15, 20] и показан на простых примерах из §16. Как было показано в этом параграфе, обобщенные ряды Гильберта для алгебр $S_{0,1}$ и $SI_{0,1}$

унимодулярных комитантов и инвариантов системы $s(0,1)$ имеют вид соответственно

$$H(S_{0,1},u,z_0,z_1)=\frac{1+uz_0z_1}{(1-uz_0)(1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_0^2z_1)(1-u^2z_1)},$$
$$H(SI_{0,1},z_0,z_1)=\frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_0^2z_1)}.$$

Тогда согласно (20.3) с их помощью обычные ряды Гильберта запишутся

$$H_{S_{0,1}}(u)=\frac{1-u+u^2}{(1-u)^2(1-u^2)(1-u^3)^2},\ H_{SI_{0,1}}(z)=\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}.$$

Примечание 20.1. *Следуя* [32], *отметим, что размерность Крулля $\varrho(S_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell})$ ($\varrho(SI_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell})$) для градуированных алгебр Сибирского $S_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell}$ ($SI_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell}$) равняется порядку полюса обычного ряда Гильберта $H_{S_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell}}(u)$ ($H_{SI_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell}}(z)$) в единице.*

Например, принимая во внимание вышеприведенные обычные ряды Гильберта $H_{S_{0,1}}(u)$ и $H_{SI_{0,1}}(z)$, получаем для размерности Крулля алгебр $S_{0,1}$ и $SI_{0,1}$ соответственно $\varrho(S_{0,1})=5$ и $\varrho(SI_{0,1})=3$.

В других случаях, когда отсутствует явный вид обычного ряда Гильберта, но известно разложение в степенной ряд, то можно использовать следующее

Примечание 20.2. *Условимся, что сравнение рядов с неотрицательными коэффициентами происходит покоэффициентно ($\sum a_nt^n\le\sum b_nt^n\Leftrightarrow a_n\le b_n,\ \forall n$). Принимая это во внимание, если для коммутативных градуированных алгебр A и B имеем*

$$H_A(t)\le H_B(t),\tag{20.4}$$

то для их размерностей Крулля также получаем $\varrho(A)\le\varrho(B)$.

Также понятно, что если для обычного ряда Гильберта коммутативной градуированной алгебры A имеем

$$H_A(t)\le\frac{C}{(1-t)^m},\tag{20.5}$$

где $C-$некоторая фиксированная постоянная, то получаем $\varrho(A)\le m$.

Доказательство примечания 20.2 получается с помощью теоремы Маколея из работы [33].

Следствие 20.1. *Отметим, что формулы* (19.4)–(19.5) *содержат явный вид размерностей Крулля для градуированных алгебр Сибирского $S_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell}$, $SI_{1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell}$ дифференциальной системы $s(1,m_1,m_2,\ldots,m_\ell)$.*

Однако, знание рядов Гильберта для этих алгебр дает дополнительную информацию об указанных алгебрах которая будет использована в дальнейшем. В одно и то же время с помощью этих рядов подтверждается еще раз информация о размерностей Крулля алгебр Сибирского для конкретных систем $s(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$.

§21. Ряды Гильберта для алгебр Сибирского $\boldsymbol{S_{1,2}}$, $\boldsymbol{SI_{1,2}}$ и их размерность Крулля

Из (15.10)–(15.11) при $\Gamma = \{1, 2\}$, положив $\ell = 1$ и $m_0 = 1$, $m_1 = 2$ и введя для удобства обозначения $z_0 = b$, $z_1 = c$, находим для комитантов дифференциальной системы с квадратичными нелинейностями $s(1, 2)$ первоначальную форму производящей функции

$$\varphi_{1,2}^{(0)}(u) = (1 - u^{-2})\psi_1^{(0)}(u)\psi_2^{(0)}(u), \tag{21.1}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^{(0)}(u) &= \frac{1}{(1 - u^2 b)(1 - b)^2(1 - u^{-2} b)}, \\ \psi_2^{(0)}(u) &= \frac{1}{(1 - u^3 c)(1 - uc)^2(1 - u^{-1} c)^2(1 - u^{-3} c)}. \end{aligned} \tag{21.2}$$

Используя усовершенствованный метод Сильвестра разложения функции $\varphi_{1,2}^{(0)}(u)$ на элементарные дроби по аналогии с примером 16.2 и принимая во внимание функциональное уравнения Кэли (16.1) и заключение 17.1, получаем, что справедлива

Теорема 21.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(S_{1,2}, u, b, c)$ для алгебры Сибирского $S_{1,2}$ системы $s(1, 2)$ из (1.5) является рациональной функцией от u, b, c и имеет вид*

$$H(S_{1,2}, u, b, c) = \frac{N_{1,2}(u, b, c)}{D_{1,2}(u, b, c)}, \tag{21.3}$$

где

$$\begin{aligned} D_{1,2}(u, b, c) = (1 - b)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - c^4)^2(1 - bc^2)^2(1 - b^3c^2)\cdot \\ \cdot(1 - u^2 b)(1 - uc)^2(1 - u^3 c), \end{aligned} \tag{21.4}$$

$$
\begin{gathered}
N_{1,2}(u,b,c) = 1 - c^2 + c^4 + b(c^2 + 2c^4 - 2c^6) + b^2(c^2 + c^4 - c^6 - c^8) + \\
+ b^3(2c^4 - 2c^6 - c^8) + b^4(-c^6 + c^8 - c^{10}) + u[-c + 3c^3 - 2c^5 + \\
+ b(2c - 5c^5 + 3c^7) + b^2(c - 2c^5 + c^9) + b^3(c^3 - 3c^5 + 2c^7) + b^4(c^7 - \\
- 3c^9 + 2c^{11})] + u^2[2c^2 - 3c^4 + c^6 + b(-3c^4 + 4c^6 - 2c^8) + b^2(-2c^4 + \\
+ c^{10}) + b^3(c^2 - 3c^4 + 2c^{10}) + b^4(-2c^4 + 2c^6 - c^8 + 3c^{10} - c^{12}) + \\
+ b^5(c^6 - c^8 + c^{10})] + u^3[-c^3 + c^5 - c^7 + b(c - 3c^3 + c^5 - 2c^7 + 2c^9) + \\
+ b^2(-2c^3 + 3c^9 - c^{11}) + b^3(-c^3 + 2c^9) + b^4(2c^5 - 4c^7 + 3c^9) + \\
+ b^5(-c^7 + 3c^9 - 2c^{11})] + u^4[b(-2c^2 + 3c^4 - c^6) + b^2(-2c^6 + 3c^8 - c^{10}) + \\
+ b^3(-c^4 + 2c^8 - c^{12}) + b^4(-3c^6 + 5c^8 - 2c^{12}) + b^5(2c^8 - 3c^{10} + c^{12})] + \\
+ u^5[b(c^3 - c^5 + c^7) + b^2(c^5 + 2c^7 - 2c^9) + b^3(c^5 + c^7 - c^9 - c^{11}) + \\
+ b^4(2c^7 - 2c^9 - c^{11}) + b^5(-c^9 + c^{11} - c^{13})].
\end{gathered} \tag{21.5}
$$

Доказательство теоремы 21.1 следует из справедливости функционального уравнения Кэли:

$$
H(S_{1,2}, u, b, c) - u^{-2} H(S_{1,2}, u^{-1}, b, c) = \varphi^{(0)}_{1,2}(u),
$$

где $H(S_{1,2}, u, b, c)$ из (21.3)–(21.5), а $\varphi^{(0)}_{1,2}(u)$ из (21.1)–(21.2).

Согласно замечанию 17.1 из теоремы 21.1 имеем

Следствие 21.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(SI_{1,2}, b, c)$ для алгебры Сибирского $SI_{1,2}$ имеет вид*

$$
H(SI_{1,2}, b, c) = \frac{NI_{1,2}(b,c)}{DI_{1,2}(b,c)}, \tag{21.6}
$$

где

$$
\begin{gathered}
DI_{1,2}(b,c) = (1-b)(1-b^2)(1-c^2)(1-c^4)^2(1-bc^2)^2(1-b^3c^2), \\
NI_{1,2}(b,c) = 1 - c^2 + c^4 + b(c^2 + 2c^4 - 2c^6) + b^2(c^2 + c^4 - c^6 - \\
- c^8) + b^3(2c^4 - 2c^6 - c^8) + b^4(-c^6 + c^8 - c^{10}).
\end{gathered} \tag{21.7}
$$

Используя равенства (17.6) и (17.8) из выражений (21.3)–(21.7), получаем, что имеет место

Теорема 21.2. *Обычные ряды Гильберта $H_{S_{1,2}}(u)$ и $H_{SI_{1,2}}(z)$ для* *алгебр Сибирского $S_{1,2}$ и $SI_{1,2}$ системы $s(1,2)$ из (1.5) имеют вид*

$$H_{S_{1,2}}(u) = \frac{1}{(1-u^2)^2(1-u^3)^3(1-u^4)^3(1-u^5)}(1+u+u^2+ \\ +4u^3+11u^4+20u^5+29u^6+33u^7+39u^8+41u^9+39u^{10}+ \\ +33u^{11}+29u^{12}+20u^{13}+11u^{14}+4u^{15}+u^{16}+u^{17}+u^{18}), \tag{21.8}$$

$$H_{SI_{1,2}}(z) = \frac{1+z^3+2z^4+3z^5+3z^6+3z^7+2z^8+z^9+z^{12}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)^2(1-z^5)}. \tag{21.9}$$

Теорема 21.3. *Размерность Крулля алгебр Сибирского $S_{1,2}$ и $SI_{1,2}$ равна соответственно $\varrho(S_{1,2}) = 9$ и $\varrho(SI_{1,2}) = 7$.*

Доказательство. Из работы [34] известно, что для того, чтобы точка $u = 1$ $(z = 1)$, была полюсом функции $H_{S_\Gamma}(u)$ $H_{SI_\Gamma}(z)$ кратности порядка k $(k \geq 1)$, необходимо и достаточно, чтобы она была нулем кратности k для функции $\frac{1}{H_{S_\Gamma}(u)}$ $\left(\frac{1}{H_{SI_\Gamma}(z)}\right)$.

Проиллюстрируем это на случае обычных рядов Гильберта $H_{S_{1,2}}(u)$ и $H_{SI_{1,2}}(z)$ из (21.8) и (21.9). Нетрудно заметить, что

$$\frac{1}{H_{S_{1,2}}(u)} = \frac{(1-u)^9}{(1+u)^{-2}(1+u+u^2)^{-3}(1+u+u^2+u^3)^{-3}}\cdot \\ \cdot\frac{1}{(1+u+u^2+u^3+u^4)^{-1}}(1+u+u^2+4u^3+11u^4+20u^5+29u^6+ \\ +33u^7+39u^8+41u^9+39u^{10}+33u^{11}+29u^{12}+20u^{13}+11u^{14}+4u^{15}+ \\ +u^{16}+u^{17}+u^{18})^{-1}$$

и

$$\frac{1}{H_{SI_{1,2}}(z)} = \frac{(1-z)^7}{(1+z)^{-1}(1+z+z^2)^{-2}(1+z+z^2+z^3)^{-2}}\cdot \\ \cdot\frac{1}{(1+z+z^2+z^3+z^4)^{-1}}(1+z^3+2z^4+3z^5+3z^6+3z^7+2z^8+ \\ +z^9+z^{12})^{-1},$$

откуда находим, что $lim_{u\to 1}(1-u)^9 H_{S_{1,2}}(u) \neq 0$ и $lim_{z\to 1}(1-z)^7\cdot$ $\cdot H_{SI_{1,2}}(z) \neq 0$. Отсюда имеем, что в точке $u = 1$ $(z = 1)$ функция $H_{S_{1,2}}(u)$ $(H_{SI_{1,2}}(z))$ имеет полюс кратности 9 (7). Согласно примечанию 20.1 теорема 21.3 доказана.

§22. Ряды Гильберта для алгебр Сибирского $S_{1,3}$, $SI_{1,3}$ и их размерность Крулля

Из (15.10)–(15.11) при $\Gamma = \{1, 3\}$, приняв $\ell = 1$ и $m_0 = 1$, $m_1 = 3$ и введя для удобства обозначения $z_0 = b$, $z_1 = d$, находим для комитантов дифференциальной системы $s(1, 3)$ первоначальную форму производящей функции

$$\varphi_{1,3}^{(0)}(u) = (1 - u^{-2})\psi_1^{(0)}(u)\psi_3^{(0)}(u), \tag{22.1}$$

где

$$\begin{gathered}\psi_1^{(0)}(u) = \frac{1}{(1 - u^2 b)(1 - b)^2(1 - u^{-2}b)},\\ \psi_3^{(0)}(u) = \frac{1}{(1 - u^4 d)(1 - u^2 d)^2(1 - d)^2(1 - u^{-2}d)^2(1 - u^{-4}d)}.\end{gathered} \tag{22.2}$$

Используя усовершенствованный метод Сильвестра разложения функции $\varphi_{1,3}^{(0)}(u)$ на элементарные дроби по аналогии с примером 16.2 и принимая во внимание функциональное уравнения Кэли (16.1) и заключение 17.1, получаем, что справедлива

Теорема 22.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(S_{1,3}, u, b, d)$ для алгебры Сибирского $S_{1,3}$ системы $s(1, 3)$ из (1.8) является рациональной функцией от u, b, d и имеет вид*

$$H(S_{1,3}, u, b, d) = \frac{N_{1,3}(u, b, d)}{D_{1,3}(u, b, d)}, \tag{22.3}$$

где

$$\begin{gathered}D_{1,3}(u, b, d) = (1 - b)(1 - b^2)(1 - u^2 b)(1 - bd)^2(1 - b^2 d)(1 - d^2)^3\cdot\\ \cdot(1 - d^3)^2(1 - u^2 d)^2(1 - u^4 d),\end{gathered} \tag{22.4}$$

$$N_{1,3}(u, b, d) = \sum_{k=0}^{4} R_{2k}(b, d)u^{2k},$$

а

$$R_0(b,d) = 1 + b(-d + d^2 + 3d^3 - 2d^5) + b^2(2d^2 - 3d^4 - d^5 + d^6) +$$
$$+ b^3(-d^3 + d^5 - d^7) - d^2 + d^4,$$
$$R_2(b,d) = b(2d + 4d^2 - 2d^3 - 8d^4 + 4d^6) + b^2(d - d^2 - 6d^3 + 7d^5 - 3d^7) +$$
$$+ b^3(-2d^2 + 4d^4 - 4d^6 + 2d^8) + b^4(d^3 - d^5 + d^7) - d + d^2 + 3d^3 - 2d^5,$$
$$R_4(b,d) = b(d - d^2 - 6d^3 + 7d^5 - 3d^7) + b^2(-3d^2 - 2d^3 + 6d^4 - 6d^6 +$$
$$+ 2d^7 + 3d^8) + b^3(3d^3 - 7d^5 + 6d^7 + d^8 - d^9) + b^4(-d^4 + d^5 + 3d^6 - 2d^8) +$$
$$+ 2d^2 - 3d^4 - d^5 + d^6,$$
$$R_{8-2k}(b,d) = -b^4 d^{10} R_{2k}(b^{-1}, d^{-1}) \ (k = 0, 1). \tag{22.5}$$

Согласно замечанию 17.1 из теоремы 22.1 имеем

Следствие 22.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(SI_{1,3}, b, d)$ для алгебры Сибирского $SI_{1,3}$ имеет вид*

$$H(SI_{1,3}, b, d) = \frac{NI_{1,3}(b,d)}{DI_{1,3}(b,d)}, \tag{22.6}$$

где

$$DI_{1,3}(b,d) = (1-b)(1-b^2)(1-bd)^2(1-b^2d)(1-d^2)^3(1-d^3)^2,$$
$$NI_{1,3}(b,d) = 1 - d^2 + d^4 + b(-d + d^2 + 3d^3 - 2d^5) + \tag{22.7}$$
$$+ b^2(2d^2 - 3d^4 - d^5 + d^6) + b^3(-d^3 + d^5 - d^7).$$

Используя равенства (17.6) и (17.8) из выражений (22.3)–(22.7), получаем, что имеет место

Теорема 22.2. *Обычные ряды Гильберта $H_{S_{1,3}}(u)$ и $H_{SI_{1,3}}(z)$ для алгебр Сибирского $S_{1,3}$ и $SI_{1,3}$ системы $s(1,3)$ из (1.8) имеют вид*

$$H_{S_{1,3}}(u) = \frac{1}{(1-u^2)^5(1-u^3)^5(1-u^5)}(1 + u + u^3 + 9u^4 + 16u^5 +$$
$$+ 19u^6 + 15u^7 + 14u^8 + 15u^9 + 19u^{10} + 16u^{11} + 9u^{12} + u^{13} + \tag{22.8}$$
$$+ u^{15} + u^{16}),$$

$$H_{SI_{1,3}}(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)^5(1-z^3)^3}(1 - z^2 + z^3 + 5z^4 + z^5 - \tag{22.9}$$
$$- z^6 + z^8).$$

Теорема 22.3. *Размерность Крулля алгебр Сибирского $S_{1,3}$ и $SI_{1,3}$ равна соответственно $\varrho(S_{1,3}) = 11$ и $\varrho(SI_{1,3}) = 9$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству из теоремы 21.3.

§23. Ряды Гильберта для алгебр Сибирского $\boldsymbol{S_{1,4}}$, $\boldsymbol{SI_{1,4}}$ и их размерность Крулля

Из (15.10)–(15.11) при $\Gamma = \{1, 4\}$, приняв $\ell = 1$ и $m_0 = 1$, $m_1 = 4$ и введя обозначения $z_0 = b$, $z_1 = e$, находим для комитантов дифференциальной системы $s(1,4)$ первоначальную форму производящей функции

$$\varphi_{1,4}^{(0)}(u) = (1 - u^{-2})\psi_1^{(0)}(u)\psi_4^{(0)}(u), \tag{23.1}$$

где

$$\psi_1^{(0)}(u) = \frac{1}{(1-u^2b)(1-b)^2(1-u^{-2}b)},$$

$$\psi_4^{(0)}(u) = \frac{1}{(1-u^5e)(1-u^3e)^2(1-ue)^2(1-u^{-1}e)^2(1-u^{-3}e)^2(1-u^{-5}e)}. \tag{23.2}$$

Используя усовершенствованный метод Сильвестра разложения функции $\varphi_{1,4}^{(0)}(u)$ на элементарные дроби по аналогии с примером 16.2 и принимая во внимание функциональное уравнения Кэли (16.1) и заключение 17.1, получаем, что справедлива

Теорема 23.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(S_{1,4}, u, b, e)$ для алгебры Сибирского $S_{1,4}$ системы $s(1,4)$ является рациональной функцией от u, b, e и имеет вид*

$$H(S_{1,4}, u, b, e) = \frac{N_{1,4}(u, b, e)}{D_{1,4}(u, b, e)}, \tag{23.3}$$

где

$$D_{1,4}(u,b,e) = (1-b)(1-b^2)(1-bu^2)(1-be^2)^2(1-b^3e^2)^2(1-b^5e^2)\cdot$$
$$\cdot(1-e^2)(1-e^4)^2(1-e^6)^2(1-e^8)^2(1-eu)^2(1-eu^3)^2(1-eu^5), \tag{23.4}$$

$$N_{1,4}(u,b,e) = \sum_{k=0}^{13} R_k(b,e)u^k,$$

а R_k из приложения 1.

Согласно замечанию 17.1 из теоремы 23.1 имеем

Следствие 23.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(SI_{1,4}, b, e)$ для алгебры Сибирского $SI_{1,4}$ имеет вид*

$$H(SI_{1,4}, b, e) = \frac{NI_{1,4}(b,e)}{DI_{1,4}(b,e)}, \tag{23.5}$$

где

$$DI_{1,4}(b,e) = (1-b)(1-b^2)(1-be^2)^2(1-b^3e^2)^2(1-b^5e^2)(1-e^2)(1-e^4)^2\cdot$$
$$\cdot(1-e^6)^2(1-e^8)^2,$$
$$NI_{1,4}(b,e) = R_0(b,e), \tag{23.6}$$

а $R_0(b,e)$ из приложения 1.

Используя равенства (17.6) и (17.8) из выражений (23.3)–(23.6), получаем, что имеет место

Теорема 23.2. *Обычные ряды Гильберта $H_{S_{1,4}}(u)$ и $H_{SI_{1,4}}(z)$ для алгебр Сибирского $S_{1,4}$ и $SI_{1,4}$ системы $s(1,4)$ имеют вид*

$$H_{S_{1,4}}(u) = \frac{N_{1,4}(u)}{D_{1,4}(u)}, \tag{23.7}$$

где

$$D_{1,4}(u) = (1-u^2)(1-u^3)(1-u^4)^3(1-u^5)^2(1-u^6)^3(1-u^7)(1-u^8)^2, \tag{23.8}$$

$$N_{1,4}(u) = 1+u+u^2+5u^3+17u^4+39u^5+100u^6+218u^7+467u^8+$$
$$+865u^9+1586u^{10}+2685u^{11}+4467u^{12}+6889u^{13}+10423u^{14}+$$
$$+14934u^{15}+20921u^{16}+27849u^{17}+36293u^{18}+45278u^{19}+55254u^{20}+$$
$$+64697u^{21}+74134u^{22}+81782u^{23}+88328u^{24}+91866u^{25}+93539u^{26}+$$
$$+91866u^{27}+88328u^{28}+81782u^{29}+74134u^{30}+64697u^{31}+55254u^{32}+$$
$$+45278u^{33}+36293u^{34}+27849u^{35}+20921u^{36}+14934u^{37}+10423u^{38}+$$
$$+6889u^{39}+4467u^{40}+2685u^{41}+1586u^{42}+865u^{43}+467u^{44}+218u^{45}+$$
$$+100u^{46}+39u^{47}+17u^{48}+5u^{49}+u^{50}+u^{51}+u^{52}. \tag{23.9}$$

$$H_{SI_{1,4}}(z) = \frac{NI_{1,4}(z)}{DI_{1,4}(z)}, \tag{23.10}$$

где

$$DI_{1,4}(z) = (1-z^3)(1-z^4)^3(1-z^5)^2(1-z^6)^2(1-z^7)(1-z^8)^2,$$

$$NI_{1,4}(z) = 1 + z + z^2 + 3z^3 + 8z^4 + 15z^5 + 32z^6 + 67z^7 + 129z^8 + 217z^9 +$$
$$+355z^{10} + 546z^{11} + 812z^{12} + 1122z^{13} + 1511z^{14} + 1948z^{15} + 2447z^{16} +$$
$$+2923z^{17} + 3410z^{18} + 3827z^{19} + 4183z^{20} + 4375z^{21} + 4461z^{22} + 4375z^{23} +$$
$$+4183z^{24} + 3827z^{25} + 3410z^{26} + 2923z^{27} + 2447z^{28} + 1948z^{29} + 1511z^{30} +$$
$$+1122z^{31} + 812z^{32} + 546z^{33} + 355z^{34} + 217z^{35} + 129z^{36} + 67z^{37} + 32z^{38} +$$
$$+15z^{39} + 8z^{40} + 3z^{41} + z^{42} + z^{43} + z^{44}. \tag{23.11}$$

Теорема 23.3. *Размерность Крулля алгебр Сибирского $S_{1,4}$ и $SI_{1,4}$ равна соответственно $\varrho(S_{1,4}) = 13$ и $\varrho(SI_{1,4}) = 11$.*

§24. Ряды Гильберта для алгебр Сибирского $S_{1,5}$, $SI_{1,5}$ и их размерность Крулля

Из (15.10)–(15.11) при $\Gamma = \{1, 5\}$, приняв $\ell = 1$ и $m_0 = 1$, $m_1 = 5$ и введя обозначения $z_0 = b$, $z_1 = f$, находим для комитантов дифференциальной системы $s(1,5)$ первоначальную форму производящей функции
$$\varphi^{(0)}_{1,5}(u) = (1 - u^{-2})\psi^{(0)}_1(u)\psi^{(0)}_5(u), \tag{24.1}$$
где
$$\psi^{(0)}_1(u) = \frac{1}{(1 - u^2 b)(1 - b)^2(1 - u^{-2} b)},$$
$$\psi^{(0)}_5(u) = \frac{1}{(1 - u^6 f)(1 - u^4 f)^2(1 - u^2 f)(1 - f^2)^2(1 - u^{-2} f)^2}\cdot \tag{24.2}$$
$$\cdot\frac{1}{(1 - u^{-4} f)^2(1 - u^{-6} f)}.$$

Используя усовершенствованный метод Сильвестра разложения функции $\varphi^{(0)}_{1,5}(u)$ на элементарные дроби по аналогии с примером 16.2 и принимая во внимания функциональное уравнения Кэли (16.1) и заключение 17.1, получаем, что справедлива

Теорема 24.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(S_{1,5}, u, b, f)$ для алгебры Сибирского $S_{1,5}$ системы $s(1,5)$ является рациональной функцией от u, b, f и имеет вид*
$$H(S_{1,5}, u, b, f) = \frac{N_{1,5}(u, b, f)}{D_{1,5}(u, b, f)}, \tag{24.3}$$

где

$$D_{1,5}(u,b,f) = (1-b)(1-b^2)(1-bu^2)(1-bf)^2(1-b^2f)^2(1-b^3f)(1+f)\cdot$$
$$\cdot(1-f^2)^2(1-f^3)^3(1-f^4)^2(1-f^5)^2(1-fu^2)^2(1-fu^4)^2(1-fu^6), \tag{24.4}$$
$$N_{1,5}(u,b,f) = \sum_{k=0}^{8} R_{2k}(b,f)u^{2k},$$

а $R_{2k}(b,f)$ из приложения 2.

Согласно замечанию 17.1 из теоремы 24.1 имеем

Следствие 24.1. *Обобщенный ряд Гильберта $H(SI_{1,5},b,f)$ для алгебры Сибирского $SI_{1,5}$ имеет вид*

$$H(SI_{1,5},b,f) = \frac{NI_{1,5}(b,f)}{DI_{1,5}(b,f)}, \tag{24.5}$$

где

$$DI_{1,5}(b,f) = (1-b)(1-b^2)(1-bf)^2(1-b^2f)^2(1-b^3f)(1+f)\cdot$$
$$\cdot(1-f^2)^2(1-f^3)^3(1-f^4)^2(1-f^5)^2, \tag{24.6}$$
$$NI_{1,5}(b,f) = R_0(b,f),$$

а $R_0(b,e)$ из приложения 2.

Используя равенства (17.6) и (17.8) из выражений (24.3)–(24.6), получаем, что имеет место

Теорема 24.2. *Обычные ряды Гильберта $H_{S_{1,5}}(u)$ и $H_{SI_{1,5}}(z)$ для алгебр Сибирского $S_{1,5}$ и $SI_{1,5}$ системы $s(1,5)$ из (1.5) имеют вид*

$$H(S_{1,5},u) = \frac{N_{1,5}(u)}{D_{1,5}(u)}, \tag{24.7}$$

где

$$D_{1,5}(u) = (1-u^4)^4(1-u^6)^5(1-u^8)^4(1-u^{10})^2, \tag{24.8}$$

$$\begin{gathered} N_{1,5}(u) = 1+u^2+u^4+3u^6+27u^8+70u^{10}+177u^{12}+338u^{14}+ \\ +644u^{16}+1090u^{18}+1800u^{20}+2640u^{22}+3689u^{24}+4658u^{26}+ \\ +5555u^{28}+6063u^{30}+6317u^{32}+6063u^{34}+5555u^{36}+4658u^{38}+ \\ +3689u^{40}+2640u^{42}+1800u^{44}+1090u^{46}+644u^{48}+338u^{50}+ \\ +177u^{52}+70u^{54}+27u^{56}+3u^{58}+u^{60}+u^{62}+u^{64}. \end{gathered} \tag{24.9}$$

$$H_{SI_{1,5}}(z) = \frac{NI_{1,5}(z)}{DI_{1,5}(z)}, \tag{24.10}$$

где

$$\begin{gathered}
DI_{1,5}(z) = (1-z^2)^4(1-z^3)^4(1-z^4)^3(1-z^5)^2, \\
NI_{1,5}(z) = 1 + z + 9z^4 + 22z^5 + 50z^6 + 79z^7 + 120z^8 + 160z^9 + \\
+221z^{10} + 269z^{11} + 325z^{12} + 339z^{13} + 325z^{14} + 269z^{15} + \\
+221z^{16} + 160z^{17} + 120z^{18} + 79z^{19} + 50z^{20} + 22z^{21} + 9z^{22} + \\
+z^{25} + z^{26}.
\end{gathered} \tag{24.11}$$

Теорема 24.3. *Размерность Крулля алгебр Сибирского* $S_{1,5}$ *и* $SI_{1,5}$ *равна соответственно* $\varrho(S_{1,5}) = 15$ *и* $\varrho(SI_{1,5}) = 13$.

§25. Получение обычных рядов Гильберта для алгебр Сибирского $S_{1,2,3}$, $SI_{1,2,3}$ с помощью вычетов и вычисление размерностей Крулля для них

Пусть G–линейная редуктивная группа на алгебраически закрытом поле K и V n-мерное рациональное представление. Через $H(K[V]^G, t)$ обозначается ряд Гильберта кольца инвариантов $K[V]^G$ [35].

Теорема 25.1. (**Формула Мольена** [35]). Пусть G конечная группа, действующая на конечномерном векторном пространстве V над полем K характеристики не делящемся на $|G|$. Тогда

$$H(K[V]^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{det_V^0(1 - t\sigma)}.$$

Если K имеет характеристику 0, то $det_V^0(1 - t\sigma)$ может быть принят как $det_V(1 - t\sigma)$.

Предположим, что $char(K) = 0$. Из теоремы 25.1 следует, что для конечной группы ряд Гильберта кольца инвариантов можно легко вычислить. Если G является конечной группой, а V конечномерным представлением, то согласно [35] имеем

$$H(K[V]^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{det_V(1 - t\sigma)}. \tag{25.1}$$

Эта идея может быть обобщена на произвольных редуктивных группах. Предположим, что K–поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда можно выбрать меру Хаара $d\mu$ на C с нормой $\int\limits_C d\mu = 1$. Пусть V–конечномерное рациональное представление для G. Тогда согласно [35] обобщением (25.1) является выражение

$$H(\mathbb{C}[V]^G, t) = \int_C \frac{d\mu}{det_V(1 - t\sigma)}. \qquad (25.2)$$

Отметим, что ряд Гильберта $H(\mathbb{C}[V]^G, t)$ сходится для $|t| < 1$, потому что этот ряд является рациональной функцией с полюсами только в $t = 1$. Поскольку C компактно, то существует такая постоянная $A > 0$, что для каждого $\sigma \in C$ и каждого собственного значения λ для σ имеем $|\lambda| \leq A$. Поскольку λ^ℓ является собственным значением для σ^ℓ, то следует, что $|\lambda^\ell| \leq A$ для любых ℓ. Это означает, что $|\lambda| \leq 1$. Очевидно, что интеграл от правой части (25.2) также определяется для $|t| < 1$.

Предположим, что G является связанной группой. Пусть T–максимальный тор для G, а D–максимальная компактная подгруппа для T. Предположим, что C содержит D. Тор можно отождествить с $(\mathbb{C}^*)^r$, где r–это ранг G, а D может быть идентифицирован с подгруппой $(S^1)^r$ для $(\mathbb{C}^*)^r$, где $\mathbb{C}^* \supset S^1$–единичный круг. Можно выбрать меру Хаара $d\nu$ на D так, что имеет место равенство $\int\limits_D d\nu = 1$.

Предположим, что f является непрерывным классом функций на C. Интеграл вида $\int\limits_C f(\sigma)d\mu$ можно рассматривать как интеграл по D, поскольку f постоянна на классах сопряженности. Точнее, существует такая функция веса $\varphi : D \to \mathbb{R}$, что для любого непрерывного класса функции f имеем

$$\int\limits_C f(\sigma)d\mu = \int\limits_D \varphi(\sigma)f(\sigma)d\nu.$$

Тогда согласно [35] получаем

$$H(\mathbb{C}[V]^G, t) = \int_C \frac{d\mu}{det_V(1 - t\sigma)} = \int_D \frac{\varphi(\sigma)d\nu}{det_V(1 - t\sigma)}. \qquad (25.3)$$

Подбирая соотвествующие базисы в V и его сопряженное пространство V^*, можно добится, чтобы компактный тор D действовал диагонально на V и V^*. Тогда действие $(z_1, ..., z_r) \in D$ на V^* задается матрицей

$$\begin{pmatrix} m_1(z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n(z) \end{pmatrix},$$

где $m_1, m_2, ..., m_n$ являются мономами Лорана от $z_1, ..., z_r$.

В этих обозначениях имеем $det_V(1 - t \cdot (z_1, ..., z_n)) = (1 - m_1(z)t) \cdot \cdot (1 - m_2(z)t) \cdots (1 - m_n(z)t)$. Отсюда имеем, что согласно [35] получаем

$$H(\mathbb{C}[V]^G, t) = \int_D \frac{\varphi(z) d\nu}{(1 - m_1(z)t)(1 - m_2(z)t) \cdots (1 - m_n(z)t)}. \tag{25.4}$$

Следует, что $H(K[V]^G, t)$ является коэффициентом z^ρ (в виде рядов по $z_1, ..., z_r$ с коэффициентами в $K(t)$) в выражении

$$\frac{\sum_{w \in W} sgn(w) z^{w(\rho)}}{(1 - m_1(z)t)(1 - m_2(z)t) \cdots (1 - m_n(z)t)},$$

или коэффициентом $z^0 = 1$ в

$$\frac{z^{-\rho} \sum_{w \in W} sgn(w) z^{w(\rho)}}{(1 - m_1(z)t)(1 - m_2(z)t) \cdots (1 - m_n(z)t)}.$$

Напомним теорему вычетов из теории функций комплексного переменного, которая может быть применена для вычисления рядов Гильберта для колец инвариантов.

Предположим, что $f(z)$ является мероморфной функцией на $\mathbb{C}$. Если $a \in \mathbb{C}$, то f можно записать в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-d}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

в точке $z = a$.

Если $d > 0$ и $c_{-d} \neq 0$, то f имеет полюс в $z = a$ порядка d.

Вычет функции f в $z = a$ обозначается через $Res(f, a)$ и определяется равенством

$$Res(f, a) = c_{-1}.$$

Если порядок k полюса $z = a$ функции f удовлетворяет неравенству $k \geq 1$, то вычет может быть вычислен из формулы

$$Res(f, a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - a)^k f(z)).$$

Выбираем D таким образом, что $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ есть гладкая кривая. Тогда интеграл по кривой γ определяется равенством

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Теорема 25.2. (**Теорема о вычетах** [35]). Предположим, что D–замкнутая, односвязаная компактная область в $\mathbb{C}$, чья граница является ∂D, и $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$–такая гладкая кривая, что $\gamma([0,1]) = \partial D$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, окружающая D ровно один раз против часовой стрелки. Предположим, что f является мероморфной функцией на $\mathbb{C}$ без полюсов в ∂D. Тогда имеем формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in D} Res(f,a).$$

Отметим, что в D существует конечное число точек в которых f имеет ненулевой вычет.

Пример 25.1 [35]. Пусть $T = \mathbb{G}_m$ является одномерным тором, действуйщим на 3-мерное пространство V с матрицей

$$\varrho = \left(\begin{array}{ccc} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z^{-2} \end{array}\right).$$

Действие $\mathbb{G}_m$ на V^* задано матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc} z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{2} \end{array}\right).$$

Таким образом, получаем равенство

$$H_T(K[V],z,t) = \frac{1}{(1-z^{-1}t)^2(1-z^2t)}. \qquad (25.5)$$

Для того чтобы ряд Гильберта сходился, нужно чтобы $|z^{-1}t| < 1$ и $|z^2t| < 1$. Предположим, что $|z| = 1$ и $|t| < 1$. Чтобы найти коэффициент при z^0, разделим (25.5) на $2\pi iz$ и проинтегрируем на единичной окружности S^1 в $\mathbb{C}$. Тогда имеем

$$H(K[V]^{G_m},t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{dz}{z(1-z^{-1}t)^2(1-z^2t)}. \qquad (25.6)$$

Согласно теореме о вычетах 25.2 выражение из (25.6) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} f(z)dz = \sum_{a\in D^1} Res(f(z),a),$$

где D^1–единичный диск и $f(z) = z^{-1}(1-z^{-1}t)^{-2}(1-z^2t)^{-1}$. Полюсами функции $f(z)$ являются только $z = t$ и $z = \pm t^{-1/2}$. Так как $|t| < 1$, то единственным полюсом в единичном круге является $z = t$. Вычисляя вычет, имеем

$$\frac{1}{z(1-z^{-1}t)^2(1-z^2t)} = \frac{1}{(z-t)^2}\frac{z}{1-z^2t}.$$

Степенной ряд для $g(z) = \frac{z}{1-z^2t}$ в окрестности $z = t$ задается равенством

$$\begin{aligned} g(z) &= g(t) + g'(t)(z-t) + \frac{g''(t)(z-t)^2}{2} + ... = \\ &= \frac{t}{1-t^3} + \frac{1+t^3}{(1-t^3)^2}(z-t) + ... \; . \end{aligned} \tag{25.7}$$

Ряд Гильберта $H(K[V]^{G_m}, t)$ является вычетом функции

$$\frac{1}{z(1-z^{-1}t)^2(1-z^2t)} = \frac{g(z)}{(z-t)^2}$$

в $z = t$. Тогда из (25.7) следует, что указанный ряд имеет вид

$$\frac{1+t^3}{(1-t^3)^2}.$$

Из [36] известна

Теорема 25.3.

$$H(K[V]^G, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S^1} \frac{1}{det(I - t_{\rho_V}(z))}\frac{dz}{z}$$

где $S^1 \subset \mathbb{C}$ является единичным кругом $\{z : |z| = 1\}$.

Используя теорему о вычетах и соответствующую производящую функцию (15.10)–(15.11), приходим к выводу, что последняя теорема может быть адаптирована для вычисления обычного ряда Гильберта для алгебры комитантов и инвариантов дифференциальных систем.

Теорема 25.4.

$$H_{SI_\Gamma}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S^1} \frac{\varphi_\Gamma^{(0)}(z)}{z}dz,$$

где $S^1 \subset \mathbb{C}$ является единичным кругом $\{z : |z| = 1\}$, $\varphi_\Gamma^{(0)}(z)$–соответствующяя производящая функция (15.10)–(15.11).

С помощью Теоремы 25.4 получена

Теорема 25.5. *Для кубической дифференциальной системы $s(1,2,3)$ обычные ряды Гильберта для алгебр Сибирского $S(1,2,3)$ и $SI(1,2,3)$ комитантов и инвариантов являются следующими:*

$$H_{S_{1,2,3}}(t)=\frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)^2(1-t^3)^6(1-t^4)^3(1-t^5)^3(1-t^7)}(1-t+$$
$$+3t^2+9t^3+36t^4+90t^5+220t^6+459t^7+946t^8+1748t^9+$$
$$+3032t^{10}+4845t^{11}+7302t^{12}+10268t^{13}+13749t^{14}+$$
$$+17327t^{15}+20781t^{16}+23565t^{17}+25460t^{18}+26051t^{19}+$$
$$+25460t^{20}+23565t^{21}+20781t^{22}+17327t^{23}+13749t^{24}+$$
$$+10268t^{25}+7302t^{26}+4845t^{27}+3032t^{28}+1748t^{29}+$$
$$+946t^{30}+459t^{31}+220t^{32}+90t^{33}+36t^{34}+9t^{35}+$$
$$+3t^{36}-t^{37}+t^{38}),$$
$$H_{SI_{1,2,3}}(t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)^3(1-t^3)^5(1-t^4)^2(1-t^5)^3(1-t^7)}(1+$$
$$+t^2+6t^3+24t^4+57t^5+128t^6+244t^7+447t^8+756t^9+1203t^{10}+$$
$$+1760t^{11}+2433t^{12}+3124t^{13}+3800t^{14}+4351t^{15}+4736t^{16}+$$
$$+4854t^{17}+4736t^{18}+4351t^{19}+3800t^{20}+3124t^{21}+2433t^{22}+$$
$$+1760t^{23}+1203t^{24}+756t^{25}+447t^{26}+244t^{27}+$$
$$+128t^{28}+57t^{29}+24t^{30}+6t^{31}+t^{32}+t^{34}).$$

Из этой теоремы следует, что размерность Крулля градуированной алгебры Сибирского $S_{1,2,3}$ ($SI_{1,2,3}$) равна 17 (15).

Отметим, что метод вычисления обычного ряда Гильберта с помощью теоремы 25.4 для алгебр Сибирского различных дифференциальных систем был подтвержден на следующих рядах Гильберта: H_{SI_1}, H_{S_2}, H_{SI_2}, $H_{SI_{0,2}}$, $H_{SI_{1,2}}$, $H_{SI_{1,3}}$, $H_{SI_{2,3}}$, H_{S_5}, H_{SI_5}, известных из [15,20].

Примечание 25.1. *Отметим, что для ряда Гильберта градуированной алгебры Сибирского комитантов системы $s(\Gamma)$, где $\Gamma \not\ni 0$, имеет место равенство $H_{S_\Gamma}(t)=H_{SI_{\Gamma\cup\{0\}}}(t)$.*

§26. Комментарии к четвертой главе

Как следует из работ [15,20], обобщенные и обычные ряды Гильберта для алгебр Сибирского дифференциальных систем вида (1.1)–(1.2) играют важную роль в изучении структур этих алгебр. С помощью указанных рядов можно составить себе представление о верхней границе степеней образующих этих алгебр. Известно [32], что если обычный ряд Гильберта для коммутативных алгебр имеет вид $H(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$, где $D(t)$ и $N(t)$–полиномы от t, то $degD(t) > degN(t)$. В нашем случае для алгебр Сибирского это неравенство также имеет место. Тогда если эти алгебры записать в виде (19.1) а их обычный ряд Гильберта в виде $H_A(t) = \frac{N_A(t)}{D_A(t)}$, то из всех примеров построения образующих алгебр A в кишиневской школе дифференциальных уравнений замечено, что $\underset{1\leq i\leq m}{deg\ a_i} \leq degD_A(t)$, где через $deg\ a_i$ обозначена степень образующих этих алгебр относительно коэффициентов и фазовых переменных соответствующих дифференциальных систем. Кроме того, обычный ряд Гильберта для алгебры Сибирского позволяет вычислить размерность Крулля данной алгебры и в то же время оценить верхнюю границу этих размерностей их подалгебр, для которых эти ряды неизвестны.

Глава 5. О проблеме центра и фокуса

§27. О новой формулировке проблемы центра и фокуса для дифференциальных систем $s(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$

Рассмотрим систему $s(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$ вида (1.1)–(1.2). Предположим, что корни характеристического уравнения указанной системы являются чисто мнимыми, то есть особая точка $O(0, 0)$ этой системы является для нее либо центром (окружена замкнутыми траекториями), либо фокусом (окружена спиралями) [1], [3].

Проблема центра и фокуса может быть сформулирована следующим образом: *Если для системы* $s(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$ *из* (1.1)–(1.2) *имеем в начале координат особую точку второй группы* (*центр или фокус*), *то какие будут условия отличающие центр от фокуса*? Эта проблема была поставлена Пуанкаре [4]. Основопологающие результаты получены Ляпуновым [3] который показал, что условия центра представляют собой равенство нулю бесконечной последовательности многочленов (фокусные величины)

$$L_1, L_2, ..., L_k, ... \tag{27.1}$$

от коэффициентов правой части системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ вида (1.1)–(1.2). Если хотя бы одна из величин (27.1) отлична от нуля, то начало координат для системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ вида (1.1)–(1.2) является фокусом. Указанные условия являются небходимыми и достаточными.

В случае системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ из теоремы Гильберта о конечности базиса полиномиальных идеалов следует, что *существенных условий центра* в указанной последовательности - лишь конечное число, а остальные являются их следствиями. Тогда проблема центра и фокуса для системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ вида (1.1)–(1.2) приобретает следующую постановку: *какое конечное число полиномов* ω (*существенных условий* *центра*)

$$L_{n_1}, L_{n_2}, ..., L_{n_\omega}, ...\ (n_i \in \{1, 2, ..., k, ...\};\ i = \overline{1, \omega};\ \omega < \infty) \qquad (27.2)$$

из (27.1) *необходимо привлечь, чтобы равенство их нулю аннулировало все остальные многочлены* (27.1)?

В работах академика К. С. Сибирского [16, 24, 25] и его учеников [37]– [40] было показано, что для некоторых систем вида (1.1)–(1.2) существенные условия центра (27.2) выражаются через центроаффинные комитанты указанных систем. Это и побудило авторов не искать явный вид условий центра, а определить связь числа фокусных величин (27.2) с некоторыми характеристиками множества центроаффинных комитантов и инвариантов. Отсюда и возникла *обобщенная проблема центра и фокуса* в следующей формулировке: *определить верхнюю границу числа алгебраически-независимых существенных фокусных величин принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для любой системы* $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ *вида* (1.1)–(1.2).

§28. Инвариантное многообразие Сибирского центра и фокуса

Проблема центра и фокуса для дифференциальных систем $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ вида (1.1)–(1.2) имеет следующую классическую формулировку: *для бесконечной системы многочленов*

$$\{(x^2 + y^2)^k\}_{k=1}^{\infty} \qquad (28.1)$$

существует такая функция

$$U(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} f_k(x, y), \qquad (28.2)$$

где $f_k(x, y)$ *являются однородными многочленами степени* k *относительно переменных* x, y *и такие постоянные*

$$L_1, L_2, ..., L_k, ..., \qquad (27.1)$$

что имеет место тождество

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} L_k (x^2 + y^2)^{k+1} \qquad (28.3)$$

(*относительно* x *и* y) *вдоль траекторий системы Ляпунова* [3]

$$\dot{x} = y + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x, y), \;\; \dot{y} = -x + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x, y), \tag{28.4}$$

которую обозначим через $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Как следует из теории инвариантов и комитантов дифференциальных систем [16, 17, 20], алгебра $S_{1,m_1,...,m_\ell}$ для любой дифференциальной системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$, записанной в виде

$$\dot{x} = cx + dy + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x, y), \;\; \dot{y} = ex + fy + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x, y) \tag{28.5}$$

содержит среди своих образующих многочлены

$$i_1 = c + f, \;\; i_2 = c^2 + 2de + f^2, \;\; k_2 = -ex^2 + (c - f)xy + dy^2, \tag{28.6}$$

приведенные ранее в (8.12).

Замечание 28.1. *Отметим, что множество*

$$\mathcal{V} = \{i_1 = c + f = 0, \;\; Discr(k_2) = 2i_2 - i_1^2 < 0\} \tag{28.7}$$

будем называть инвариатным многообразием Сибирского центра и фокуса для дифференциальной системы (28.5), *так как комитант* k_2 *из* (28.6) *с помощью действительного центроаффинного преобразования плоскости* xOy *на многообразии* $\mathcal{V}$ *может быть приведен к виду*

$$x^2 + y^2, \tag{28.8}$$

а система (28.5) (*здесь допускается скалярное изменение времени* t) *может быть приведена к виду* (28.4) [16], *для которой корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми, то есть начало координат для этой системы является особой точкой второй группы* (*центр или фокус*).

Согласно замечанию 28.1 получаем

Замечание 28.2. *Если принять во внимание выражение комитанта* k_2 *из* (28.6) *и то, что с помощью действительного центроаффинного преобразования на инвариатном многообразии Сибирского* $\mathcal{V}$ *его выражение может быть приведено к виду* (28.8), *то формально это многообразие для дифференциальной системы* (28.5) *можно записать в виде*

$$\mathcal{V} = \{f = -c\} \cup \{c = 0, \;\; d = -e = 1\}. \tag{28.9}$$

§29. Фокусные величины L_k и постоянные G_k на инвариантном многообразии Сибирского системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ и нулевая фокусная псевдовеличина

Рассмотрим проблему центра и фокуса для дифференциальной системы (28.5). Тогда для этой системы запишем тождество

$$\left[cx + dy + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x,y)\right] \frac{\partial U}{\partial x} + \left[ex + fy + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x,y)\right] \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{k=1}^{\infty} G_k k_2^{k+1}, \tag{29.1}$$

где

$$U(x,y) = k_2 + \sum_{r=3}^{\infty} F_r(x,y), \tag{29.2}$$

а $k_2 \not\equiv 0$ из (28.6) и $F_r(x,y)$–однородные многочлены степени r относительно x, y. Равенство (29.1) расщепляется по степеням x и y в бесконечное число алгебраических уравнений, где неизвестными являются величины $G_1, G_2, ..., G_k, ...$, а также коэффициенты полиномов $F_r(x,y)$.

Для любой дифференциальной системы (28.5) из тождества (29.1) с k_2 из (28.6) находим, что первые 3 уравнения имеют вид

$$x^2: \ e(c+f) = 0, \ xy: \ (c-f)(c+f) = 0, \ y^2: \ d(c+f) = 0.$$

Эти уравнения эквивалентны одному из двух серий условий: 1) $c + f = 0$; 2) $e = c - f = d = 0$. Так как $k_2 \not\equiv 0$, то согласно (28.6), эти условия эквивалентны с первым равенством $c + f = 0$, которое содержится в многообразии $\mathcal{V}$ из (28.7).

Следуя за вышесказанным, согласно замечанию 28.1 и сформулированной проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы (28.4), приходим к выводу *что для фокусных величин L_k из* (27.1) *и постоянных G_k из* (29.1) имеют место следующие равенства:

$$L_k = G_k|_{\mathcal{V}} \, (k = 1, 2, ...), \tag{29.3}$$

где $\mathcal{V}$ взято из (28.7).

Из сказанного выше следует

Замечание 29.1. *Тождество* (29.1) *с функцией* (29.2) *на многообразии $\mathcal{V}$ из* (28.7) *позволяет утверждать, что дифференциальная система* (28.5) *при этих условиях имеет в начале координат особую точку второй группы* (*центр или фокус*).

Обозначим выражение $c + f = 0$, которое содержится в многообразии $\mathcal{V}$ из (28.7), через

$$G_0 \equiv c + f = 0, \tag{29.4}$$

и будем называть его *нулевой фокусной псевдовеличиной*. Отметим что G_0 из (29.4) является центроаффинным (унимодулярным) инвариантом дифференциальной системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ типа

$$(0, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{\ell}).$$

Для того чтобы иметь более прозрачную информацию о постоянных $G_1, G_2, ..., G_k, ...$ из тождества (29.1) с функцией (29.2), исследуем в следующей главе оставшиеся уравнения из разложения этого тождество по степеням $x^3, x^2y, xy^2, y^3, ...$ для различных дифференциальных систем $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ без учета равенства (29.4).

§30. Многочлены от коэффициентов дифференциальных систем, которые имеют изобарность веса (h, g)

Рассмотрим частный случай дифференциальной системы (28.5) ($\ell = 1$, $m_1 = 2$; $s(1, 2)$) записанной в тензорном виде (такая форма записи дифференциальных систем вида (1.1)–(1.2) была введена академиком К. С. Сибирский [24] в 60-ые годы прошлого столетия):

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \, (j, \alpha, \beta = 1, 2), \tag{30.1}$$

где тензорный коэффициент $a^j_{\alpha\beta}$ симметричен по нижним индексам, по которым здесь производится полное свертывание.

Дифференциальная система (30.1) в развернутом виде записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_{11}(x^1)^2 + 2a^1_{12} x^1 x^2 + a^1_{22}(x^2)^2, \\ \dot{x}^2 &= a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_{11}(x^1)^2 + 2a^2_{12} x^1 x^2 + a^2_{22}(x^2)^2. \end{aligned} \tag{30.2}$$

Отметим, что если ввести обозначения

$$\begin{aligned} &x = x^1, \; c = a^1_1, \; d = a^1_2, \; g = a^1_{11}, \; h = a^1_{12}, \; k = a^1_{22}, \\ &y = x^2, \; e = a^2_1, \; f = a^2_2, \; l = a^2_{11}, \; m = a^2_{12}, \; n = a^2_{22}, \end{aligned} \tag{30.3}$$

то получаем ранее встречающую систему (1.5) и наоборот.

Из теории инвариантов дифференциальных систем (1.1)–(1.2) [17], разность между числом нижних и верхних индексов, которые равны 1 (2), будем называть *весом любой координаты тензорного коэффициента* a^j_α или $a^j_{\alpha\beta}$ относительно координаты x^1 (x^2). Например:

1) Вес a^1_2 относительно x^1 равен -1, а относительно x^2 равен 1;
2) Вес a^1_1 относительно x^1 равен 0, а относительно x^2 равен 0;
3) Вес a^2_1 относительно x^1 равен 1, а относительно x^2 равен -1;
4) Вес a^1_{11} относительно x^1 равен 1, а относительно x^2 равен 0;
5) Вес a^1_{12} относительно x^1 равен 0, а относительно x^2 равен 1 и т.д.

Если рассматривается многочлен S, который зависит от коэффициентов дифференциальной системы (30.2) типа

$$(0, d_1, d_2), \tag{30.4}$$

то есть однородной степени d_1 относительно координат тензора a^j_α и степени d_2 относительно координат тензора $a^j_{\alpha\beta}$, то вес каждого члена этого многочлена относительно x^1 или x^2 равен сумме весов, соответствующих для каждого фактора этого члена относительно x^1 или x^2. Ноль в (30.4) показывает, что выражение S не содержит фазовых переменных x^1, x^2. Например, одночлен $a^1_1 a^2_1 a^1_{22}$ имеет тип $(0, 2, 1)$ и вес равен 0 относительно x^1, и вес равен 1 относительно x^2.

Если все члены многочлена S типа (30.4) имеют вес h относительно x^1 и вес g относительно x^2, то говорим, что многочлен S имеет *изобарность веса* (h, g) [17].

Свойство изобарности многочленов имеет большое значение в теории инвариантов. Например, если хотим проверить, может ли любой многочлен S от коэффициентов системы (30.2) являтся коэффициентом в каком-то комитанте типа (δ, d_1, d_2) этой системы, то необходимо, чтобы многочлен S имел изобарность некоторого веса (h, g).

Известно из работы [16], что комитант системы (30.2) K_{11} имеет тип $(3, 1, 1)$ и выражение

$$K_{11} = A_0(x^1)^3 + A_1(x^1)^2x^2 + A_2x^1(x^2)^2 + A_3(x^3)^3, \tag{30.5}$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = -a^2_1a^1_{11} - a^2_2a^2_{11},\ A_1 = a^1_1a^1_{11} + a^1_2a^2_{11} - 2a^2_1a^1_{12} - 2a^2_2a^2_{12}, \\ A_2 = 2a^1_1a^1_{12} + 2a^1_2a^2_{12} - a^2_1a^1_{22} - a^2_2a^2_{22},\ A_3 = a^1_1a^1_{22} + a^1_2a^2_{22}. \end{gathered} \tag{30.6}$$

Отметим, что в A_0 все члены имеют изобарность веса $(2, -1)$, в A_1–веса $(1, 0)$, в A_2–веса $(0, 1)$ и в A_3–веса $(-1, 2)$.

В приведенном примере выражение A_0 из (30.6) является *полуинвариантом* комитанта K_{11} из (30.5).

В дальнейшем увидим что *полуинвариант* любого комитанта имеет особое значение.

Отметим, что для полуинварианта *изобарного веса* (h, g) в любом комитанте число g совпадает с *весом* этого комитанта.

§31. Комментарии к пятой главе

В настоящей главе приводится формулировка обобщенной проблемы центра и фокуса и те аргументы, которые побудили авторов к такой постановке. Рассмотрено инвариантное многообразие Сибирского центра и фокуса, которое тесно связано с центроаффинной классификацией квадратичной формы (комитанта) k_2 (см. [16], с. 31) системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Обьясняются понятия изобарности и полуинварианта, котрые играют важную роль в построении центроаффинных комитантов и инвариантов.

Глава 6. О верхней границе числа алгебраически-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$

§32. Приложения производящих функций и рядов Гильберта к проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы $s(1,2)$

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,2)$, которую запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= cx + dy + gx^2 + 2hxy + ky^2,\\ \dot{y} &= ex + fy + lx^2 + 2mxy + ny^2\end{aligned} \tag{32.1}$$

с конечно-определенной градуированной алгеброй унимодулярных комитантов $S_{1,2}$ [20]. Для этой системы запишем функцию (29.2) в виде

$$\begin{gathered}U = k_2 + a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 + b_0x^4 + 4b_1x^3y + 6b_2x^2y^2 +\\ +4b_3xy^3 + b_4y^4 + c_0x^5 + 5c_1x^4y + 10c_2x^3y^2 + 10c_3x^2y^3 + 5c_4xy^4 +\\ +c_5y^5 + d_0x^6 + 6d_1x^5y + 15d_2x^4y^2 + 20d_3x^3y^3 + 15d_4x^2y^4 + 6d_5xy^5 +\\ +d_6y^6 + e_0x^7 + 7e_1x^6y + 21e_2x^5y^2 + 35e_3x^4y^3 + 21e_5x^2y^5 + 7e_6xy^6 +\end{gathered}$$

$$+e_7y^7+f_0x^8+8f_1x^7y+28f_2x^6y^2+56f_3x^5y^3+70f_4y^4+ \\ +56f_5x^3y^5+28f_6x^2y^6+8f_7xy^7+f_8y^8+..., \tag{32.2}$$

где $k_2 \not\equiv 0$ из (28.6), а $a_0, a_1, ..., f_7, f_8, ...$–неизвестные коэффициенты.

Тождество (29.1) вдоль траекторий дифференциальной системы (32.1) с функцией (32.2) разлагается на следующие системы уравнений (равенство (29.4) опущено):

$$\begin{aligned} x^3 &: 3ca_0+3ea_1=2eg-(c-f)l, \\ x^2y &: 3da_0+3(2c+f)a_1+6ea_2=(f-c)(g+2m)-2dl+4eh, \\ xy^2 &: 6da_1+3(2f+c)a_2+3ea_3=(f-c)(2h+n)+2ek-4dm, \\ y^3 &: 3da_2+3fa_3=(f-c)k-2dn; \end{aligned} \tag{32.3}$$

$$\begin{aligned} x^4 &: 4cb_0+4eb_1-e^2G_1=-3ga_0-3la_1, \\ x^3y &: 4db_0+4(f+3c)b_1+12eb_2+2e(c-f)G_1=-6ha_0- \\ &\quad -6(g+m)a_1-6la_2, \\ x^2y^2 &: 12db_1+12(c+f)b_2+12eb_3+[2de-(c-f)^2]G_1= \\ &\quad =-3ka_0-3(4h+n)a_1-3(g+4m)a_2-3la_3, \\ xy^3 &: 12bd_2+4(3f+c)b_3+4eb_4+2d(f-c)G_1=-6ka_1- \\ &\quad -6(h+n)a_2-6ma_3, \\ y^4 &: 4db_3+4fb_4-d^2G_1=-3ka_2-3na_3; \end{aligned} \tag{32.4}$$

$$\begin{aligned} x^5 &: 5cc_0+5ec_1=-4gb_0-4lb_1, \\ x^4y &: 5dc_0+5(4c+f)c_1+20ec_2=-8hb_0-4(3g+2m)b_1- \\ &\quad -12lb_2, \\ x^3y^2 &: 20dc_1+10(3c+2f)c_2+30ec_3=-4kb_0-4(6h+n)b_1- \\ &\quad -12(g+2m)b_2-12lb_3, \\ x^2y^3 &: 30dc_2+10(2c+3f)c_3+20ec_4=-12kb_1-12(2h+ \\ &\quad +n)b_2-4(g+6m)b_3-4lb_4, \\ xy^4 &: 20dc_3+5(c+4f)c_4+5ec_5=-12kb_2-4(2h+3n)b_3- \\ &\quad -8mb_4, \\ y^5 &: 5dc_4+5fc_5=-4kb_3-4nb_4; \end{aligned} \tag{32.5}$$

$$
\begin{aligned}
x^6 &: 6cd_0 + 6ed_1 + e^3G_2 = -5gc_0 - 5lc_1,\\
x^5y &: 6dd_0 + 6(5c+f)d_1 + 30ed_2 + 3e^2(f-c)G_2 = -10hc_0-\\
&\quad - 10(2g+m)c_1 - 20lc_2,\\
x^4y^2 &: 30dd_1 + 30(2c+f)d_2 + 60ed_3 + 3e[(c-f)^2 - de]G_2 =\\
&\quad = -5kc_0 - 5(8h+n)c_1 - 10(3g+4m)c_2 - 30lc_3,\\
x^3y^3 &: 60dd_2 + 60(c+f)d_3 + 60ed_4 + (f-c)[(c-f)^2-\\
&\quad - 6de]G_2 = -20kc_1 - 20(3h+n)c_2 - 20(g+3m)c_3 - 20lc_4,\\
x^2y^4 &: 60dd_3 + 30(c+2f)d_4 + 30ed_5 + 3d[de-(c-f)^2]G_2 =\\
&\quad = -30kc_2 - 10(4h+3n)c_3 - 5(g+8m)c_4 - 5lc_5,\\
xy^5 &: 30dd_4 + 6(c+5f)d_5 + 6ed_6 + 3d^2(f-c)G_2 = -20kc_3-\\
&\quad - 10(h+2n)c_4 - 10mc_5,\\
y^6 &: 6dd_5 + 6fd_6 - d^3G_2 = -5kc_4 - 5nc_5;
\end{aligned}
\tag{32.6}
$$

$$
\begin{aligned}
x^7 &: 7ce_0 + 7ee_1 = -6gd_0 - 6ld_1,\\
x^6y &: 7de_0 + 7(6c+f)e_1 + 42ee_2 = -12hd_0 - 6(5g+2m)d_1-\\
&\quad - 30ld_2,\\
x^5y^2 &: 42de_1 + 7(15c+6f)e_2 + 105ee_3 = -6kd_0 - 6(10h+\\
&\quad + n)d_1 - 60(g+m)d_2 - 60ld_3,\\
x^4y^3 &: 105de_2 + 5(28c+21f)e_3 + 140ee_4 = -30kd_1 - 30(4h+\\
&\quad + n)d_2 - 60(g+2m)d_3 - 60ld_4,\\
x^3y^4 &: 140de_3 + 35(3c+4f)e_4 + 105ee_5 = -60kd_2 - 60(2h+\\
&\quad + n)d_3 - 30(g+4m)d_4 - 30ld_5,\\
x^2y^5 &: 105de_4 + 7(6c+15f)e_5 + 42ee_6 = -60kd_3 - 60(h+n)d_4-\\
&\quad - 6(g+10m)d_5 - 6ld_6,\\
xy^6 &: 42de_5 + 7(c+6f)e_6 + 7ee_7 = -30kd_4 - 6(2h+5n)d_5-\\
&\quad - 12md_6,\\
y^7 &: 7de_6 + 7fe_7 = -6kd_5 - 6nd_6;
\end{aligned}
\tag{32.7}
$$

$$
\begin{aligned}
x^8 &: 8cf_0 + 8ef_1 - e^4G_3 = -7ge_0 - 7le_1,\\
x^7y &: 8df_0 + 8(7c+f)f_1 + 56ef_2 + 4e^3(c-f)G_3 =\\
&\quad = -14he_0 - 14(3g+m)e_1 - 42le_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^6y^2 &: 56df_1 + 56(3c+f)f_2 + 168ef_3 + 2e^2[2de - 3(c-f)^2]G_3 = \\
&= -7ke_0 - 7(12h+n)e_1 - 21(5g+4m)e_2 - 105le_3, \\
x^5y^3 &: 168df_2 + 56(5c+3f)f_3 + 280ef_4 + 4e(f-c)[3de - (c- \\
&- f)^2]G_3 = -42ke_1 - 42(5h+n)e_2 - 70(2g+3m)e_3 - \\
&- 140le_4, \\
x^4y^4 &: 280df_3 + 280(c+f)f_4 + 280ef_5 + [12de(c-f)^2 - 6d^2e^2 - \\
&- (c-f)^4]G_3 = -105ke_2 - 35(8h+3n)e_3 - 35(3g+ \\
&+ 8m)e_4 - 105le_5, \\
x^3y^5 &: 280df_4 + 56(3c+5f)f_5 + 168ef_6 + 4d(f-c)[(c-f)^2 - \\
&- 3de]G_3 = -140ke_3 - 70(3h+2n)e_4 - 42(g+5m)e_5 - \\
&- 42le_6, \\
x^2y^6 &: 168df_5 + 56(c+3f)f_6 + 56ef_7 + 2d^2[2de - 3(c-f)^2]G_3 = \\
&= -105ke_4 - 21(4h+5n)e_5 - 7(g+12m)e_6 - 7le_7, \\
xy^7 &: 56df_6 + 8(c+7f)f_7 + 8ef_8 + 4d^3(f-c)G_3 = -42ke_5 - \\
&- 14(h+3n)e_6 - 14me_7, \\
y^8 &: 78df_7 + 8ff_8 - d^4G_3 = -7ke_6 - 7ne_7.
\end{aligned}
\tag{32.8}
$$

Очевидно, что системы линейных уравнений (32.3)–(32.8) относительно неизвестных a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, $b_1,\ldots,b_4$, c_0, $c_1,\ldots,c_5$, d_0, $d_1,\ldots,d_6$, e_0, $e_1,\ldots,e_7$, f_0, $f_1,\ldots,f_8,\ldots$, G_1, G_2, $G_3,\ldots$ могут быть продолжены присоединением после последнего уравнения из (32.8) бесконечного числа уравнений, которые получаются вследствие равенства коэффициентов при $x^\alpha y^\beta$ для $\alpha+\beta>8$ в тождестве (29.1).

Для более наглядного отражения процесса получения G_1 запишем системы (32.3), (32.4) в матричной форме

$$A_1B_1 = C_1, \tag{32.9}$$

где

$$
A_1 = \left(\begin{array}{ccccccc}
3c & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3d & 3(2c+f) & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6d & 3(2c+f) & 3e & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3d & 3f & 0 & 0 & 0 \\
3g & 3l & 0 & 0 & 4c & 4e & 0 \\
6h & 6(g+m) & 6l & 0 & 4d & 4(f+3c) & 12e \\
3k & 3(4h+n) & 3(g+4m) & 3l & 0 & 12d & 12(c+f) \\
0 & 6k & 6(h+n) & 6m & 0 & 0 & 12d \\
0 & 0 & 3k & 3n & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^2 \\ 0 & 0 & 2e(c-f) \\ 12e & 0 & 2de-(c-f)^2 \\ 4(3f+c) & 4l & 2d(f-c) \\ 4d & 4f & -d^2 \end{matrix}\right),$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 2eg+(f-c)l \\ (f-c)(g+2m)-2dl+4eh \\ (f-c)(2h+n)+3ek-4dm \\ (f-c)k-2dn \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32.10}$$

Так как размерность матрицы A_1 равна 9×10, то очевидно, что имеем одну свободную неизвестную. Как слествие, принимая в качестве свободной неизвестной одну из переменных b_i $(i \in \{0, ..., 4\})$ и используя правило Крамера для системы (32.9), для любого фиксированного i получаем

$$G_1 = \frac{G_{1,i} + B_{1,i} b_i}{\sigma_{1,i}}, \tag{32.11}$$

где $G_{1,i}, B_{1,i}, \sigma_{1,i}$ (см. приложения 3) являются многочленами от коэффициентов системы (32.1), а b_i–неопределенные коэффициенты функции $U(x, y)$ из (32.8).

В дальнейшем будет нужен явный вид операторов $X_1, ..., X_4$ алгебры Ли L_4 для системы (32.1), выражения которых получаются из §5:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + D_1,\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + D_2,\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} + D_3,\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} + D_4, \tag{32.12}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1 &= d\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial e} - g\frac{\partial}{\partial g} + k\frac{\partial}{\partial k} - 2l\frac{\partial}{\partial l} - m\frac{\partial}{\partial m},\\
D_2 &= e\frac{\partial}{\partial c} + (f-c)\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial f} + l\frac{\partial}{\partial g} + (m-g)\frac{\partial}{\partial h} +\\
&\quad + (n-2h)\frac{\partial}{\partial k} - l\frac{\partial}{\partial m} - 2m\frac{\partial}{\partial n},\\
D_3 &= -d\frac{\partial}{\partial c} + (c-f)\frac{\partial}{\partial e} + d\frac{\partial}{\partial f} - 2h\frac{\partial}{\partial g} - k\frac{\partial}{\partial h} +\\
&\quad + (g-2m)\frac{\partial}{\partial l} + (h-n)\frac{\partial}{\partial m} + k\frac{\partial}{\partial n},\\
D_4 &= -d\frac{\partial}{\partial d} + e\frac{\partial}{\partial e} - h\frac{\partial}{\partial h} - 2k\frac{\partial}{\partial k} + l\frac{\partial}{\partial l} - n\frac{\partial}{\partial n}.
\end{aligned} \tag{32.13}$$

Изучая матрицы (32.10) системы (32.9), заключаем, что $G_{1,i}$ из (32.11) являются однородными многочленами степени 8 относительно коэффициентов линейной части и степени 2 относительно коэффициентов квадратичной части системы (32.1).

Отметим, что $G_{1,i}$ из (32.11) для $i = 0, 1, 2, 3, 4$ соответственно являются многочленами изобарности веса (см. приложение 3):

$$(3,-1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (-1,3). \tag{32.14}$$

Из формулы (14.3) для дифференциальной системы (32.1) и теории инвариантов дифференциальных систем [16, 17] следует что, числители дробей (32.11) могут быть коэффициентами в комитантах веса -1 типа $(4, 8, 2)$. Это означает, что согласно (11.7) с помощью дифференциального оператора Ли D_3 из (32.13) для дифференциальной системы (32.1) и знаменателя дробей (32.11) получаем систему из 4-х линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{gathered}
D_3(G_{1,0} + B_{1,0}b_0) = G_{1,1} + B_{1,1}b_1,\ D_3(G_{1,1} + B_{1,1}b_1) = -G_{1,2} - B_{1,2}b_2,\\
-D_3(G_{1,2} + B_{1,2}b_2) = G_{1,3} + B_{1,3}b_3,\ D_3(G_{1,3} + B_{1,3}b_3) = -G_{1,4} - B_{1,4}b_4,
\end{gathered} \tag{32.15}$$

с 5-ю неизвестными b_0, b_1, b_2, b_3, b_4. Согласно лемме 11.3 система (32.15) имеет бесконечное множество решений. Отметим, что частным решением этой системы является $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = = b_4 = 0$, для которой многочлен

$$f_4'(x,y) = G_{1,0}x^4 + 4G_{1,1}x^3y + 2G_{1,2}x^2y^2 + 4G_{1,3}xy^3 + G_{1,4}y^4 \tag{32.16}$$

является центроаффинным комитантом дифференциальной системы (32.1). Это подверждается и теоремой 10.2 с операторами $X_1 - X_4$

из (32.12)–(32.13) для дифференциальной системы (32.1), для которой имеем равенства

$$X_1(f_4') = X_4(f_4') = f_4',\ X_2(f_4') = X_3(f_4') = 0.$$

Другим частным решением системы (32.15) являются выражения

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{-e(g^2+2hl+m^2)}{3c^2-4de+10cf+3f^2},\\
b_1 &= \frac{(c-f)(g^2+2hl+m^2)-2e(gh+kl+hm+mn)}{4(3c^2-4de+10cf+3f^2)},\\
b_2 &= \frac{2(c-f)(gh+kl+hm+mn)-e(h^2+2km+n^2)+d(g^2+2hl+m^2)}{6(3c^2-4de+10cf+3f^2)},\\
b_3 &= \frac{(c-f)(h^2+2km+n^2)+2d(gh+kl+hm+mn)}{4(3c^2-4de+10cf+3f^2)},\\
b_4 &= \frac{d(h^2+2km+n^2)}{3c^2-4de+10cf+3f^2},
\end{aligned}$$

знаменатели которых отличаются от нуля на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$ из (28.9). Это решение определяет центроаффинный комитант

$$\begin{gathered}
f_4''(x,y) = (G_{1,0}+B_{1,0}b_0)x^4 + 4(G_{1,1}+B_{1,1}b_1)x^3y + 2(G_{1,2}+\\
+B_{1,2}b_2)x^2y^2 + 4(G_{1,3}+B_{1,3}b_3)xy^3 + (G_{1,4}+B_{1,4}b_4)y^4.
\end{gathered} \tag{32.17}$$

Очевидно, что дифференциальная система (32.15) имеет бесконечное множество решений b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, которые определяют центроаффинные комитанты типа $(4, 8, 2)$.

Согласно сказанному выше комитанты (32.16), (32.17) принадлежат к линейному пространству

$$S_{1,2}^{(4,8,2)}, \tag{32.18}$$

алгебры Сибирского $S_{1,2}$.

Отметим, что комитанты (32.16), (32.17) на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$ из (28.9) для дифференциальной системы (32.1) имеют вид

$$f_4'(x,y)|_{\mathcal{V}} = f_4''(x,y)|_{\mathcal{V}} = -8L_1(x^2+y^2)^2\ \ (G_1|_{\mathcal{V}} = -8L_1), \tag{32.19}$$

где

$$L_1 = \frac{1}{2}\left[g(l-h) - k(h+n) + m(l+n)\right]$$

является первой фокусной величиной дифференциальной системы (32.1) на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$ и совпадает с фокусной величиной из

[41 стр. 110] для системы (32.1), полученной после замены $f=-c=0,\ d=-e=1$.

Аналогично предыдущему случаю для получения постоянной G_2 запишем систему уравнений (32.3)–(32.6) в матричной форме (см. приложение 4)

$$A_2B_2=C_2, \tag{32.20}$$

откуда получаем

$$G_2=\frac{G_{2,i,j}+B_{2,i,j}b_i+D_{2,i,j}d_j}{\sigma_{2,i,j}},\ (i=\overline{0,4},\ j=\overline{0,6}). \tag{32.21}$$

Изучая матричное равенство (32.20), получаем, что $degG_{2,i,j}=24$, а используя систему (32.3)–(32.6), получаем, что $G_{2,i,j}$ из (32.21) имеет тип $(0,20,4)$, то есть $G_{2,i,j}$ являются однородными многочленами степени 20 относительно коэффициентов линейной части и степени 4 относительно коэффициентов квадратичной части дифференциальной системы $s(1,2)$ из (32.1).

Вычисляя выражения $G_{2,i,j}$ для каждого $i=\overline{0,4}$ и $j=\overline{0,6}$, получаем для их изобарностей следующую таблицу (см. приложение 4):
Таблица 32.1. *Вес изобарностей многочленов* $G_{2,i,j}$ *для системы* $s(1,2)$

$G_{2,i,j}$	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
b_0	(7,-3)	(6,-2)	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)
b_1	(6,-2)	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)
b_2	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)
b_3	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)	(-2,6)
b_4	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)	(-2,6)	(-3,7)

Отметим, что для $j=\overline{0,6}$ имеем

$$\begin{gathered}\frac{G_{2,0,j}}{\sigma_{2,0,j}}|_{\mathcal{V}}=\frac{1}{24}(38g^3h+46gh^3+71g^2hk+46h^3k+38ghk^2+5hk^3-\\ -38g^3l+3gh^2l-39g^2kl+53h^2kl-15gk^2l-32ghl^2+15hkl^2-5gl^3+\\ +29g^2hm+42ghkm+13hk^2m-79g^2lm-54h^2lm-68gklm-15k^2lm-\\ -37hl^2m-5l^3m+6ghm^2+6hkm^2-39glm^2-29klm^2+2lm^3+6g^3n+\\ +109gh^2n+48g^2kn+159h^2kn+33gk^2n+5k^3n-34ghln+116hkln-\\ -57gl^2n+15kl^2n-48g^2mn-54h^2mn-14gkmn+8k^2mn-138hlmn-\\ -62l^2mn-37gm^2n-27km^2n+2m^3n+72ghn^2+175hkn^2-72gln^2+\\ +63kln^2-101hmn^2-119lmn^2-6gn^3+62kn^3-62mn^3),\end{gathered} \tag{32.22}$$

$$\frac{G_{2,2,j}}{\sigma_{2,2,j}}|_{\mathcal{V}} = \frac{1}{24}(62g^3h - 2gh^3 + 95g^2hk - 2h^3k + 38ghk^2 + 5hk^3 - 62g^3l+$$
$$+27gh^2l - 39g^2kl + 29h^2kl - 15gk^2l - 8ghl^2 + 15hkl^2 - 5gl^3 + 53g^2hm+$$
$$+66ghkm + 13hk^2m - 127g^2lm - 6h^2lm - 68gklm - 15k^2lm - 13hl^2m-$$
$$-5l^3m + 6ghm^2 + 6hkm^2 - 63glm^2 - 29klm^2 + 2lm^3 + 6g^3n+$$
$$+61gh^2n + 72g^2kn + 63h^2kn + 33gk^2n + 5k^3n - 10ghln + 68hkln-$$
$$-33gl^2n + 15kl^2n - 72g^2mn - 6h^2mn + 10gkmn + 8k^2mn - 66hlmn-$$
$$-38l^2mn - 61gm^2n - 27km^2n + 2m^3n + 72ghn^2 + 127hkn^2 - 72gln^2+$$
$$+39kln^2 - 53hmn^2 - 95lmn^2 - 6gn^3 + 62kn^3 - 62mn^3), \tag{32.23}$$

$$\frac{G_{2,4,j}}{\sigma_{2,4,j}}|_{\mathcal{V}} = \frac{1}{24}(62g^3h - 2gh^3 + 119g^2hk - 2h^3k + 62ghk^2 + 5hk^3 - 62g^3l+$$
$$+27gh^2l - 63g^2kl + 29h^2kl - 15gk^2l - 8ghl^2 + 15hkl^2 - 5gl^3 + 101g^2hm+$$
$$+138ghkm + 37hk^2m - 175g^2lm - 6h^2lm - 116gklm - 15k^2lm - 13hl^2m-$$
$$-5l^3m + 54ghm^2 + 54hkm^2 - 159glm^2 - 53klm^2 - 46lm^3 + 6g^3n+$$
$$+37gh^2n + 72g^2kn + 39h^2kn + 57gk^2n + 5k^3n + 14ghln + 68hkln-$$
$$-33gl^2n + 15kl^2n - 72g^2mn - 6h^2mn + 34gkmn + 32k^2mn - 42hlmn-$$
$$-38l^2mn - 109gm^2n - 3km^2n - 46m^3n + 48ghn^2 + 79hkn^2 - 48gln^2+$$
$$+39kln^2 - 29hmn^2 - 71lmn^2 - 6gn^3 + 38kn^3 - 38mn^3) \tag{32.24}$$

а $\dfrac{G_{2,1,j}}{\sigma_{2,1,j}}$ и $\dfrac{G_{2,3,j}}{\sigma_{2,3,j}}$ на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$ дают неопределенности.

Изучая изобарности $G_{2,i,j}$ сверху вниз, для каждой строки из таблицы 32.1, согласно теории инвариантов дифференциальных систем [16, 17], находим, что числители фракций (32.21) могут быть коэффициентами в центроаффиных комитантах с соответствующими весами -3, -2, -1, 0, 1. Используя эти весы и формулу (14.3) для дифференциальной системы (32.1), а также факт, что $G_{2,i,j}$ имеют тип $(0, 20, 4)$, получаем, что упомянутые комитанты имеют типы

$$(10, 20, 4),\ (8, 20, 4),\ (6, 20, 4),\ (4, 20, 4),\ (2, 20, 4). \tag{32.25}$$

Так как G_2 в (29.1) является коэффициентом однородности степени 6 относительно фазовых переменных x и y, тогда логично выбрать из (32.25) тип

$$(6, 20, 4), \tag{32.26}$$

что соответствует выражениям $G_{2,2,j}$ $(j = \overline{0,6})$ из таблицы 32.1. Это означает что согласно (11.7), используя дифференциальный оператор Ли D_3 из (32.13) для дифференциальной системы (32.1) и числитель дроби (32.21) для фиксированного $i = 2$, получаем систему из 6-ти неоднородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
D_3(G_{2,2,0} + B_{2,2,0}b_0 + D_{2,2,0}d_0) = -(G_{2,2,1} + B_{2,2,1}b_1 + D_{2,2,1}d_1),\\
-D_3(G_{2,2,1} + B_{2,2,1}b_1 + D_{2,2,1}d_1) = G_{2,2,2} + B_{2,2,2}b_2 + D_{2,2,2}d_2,\\
D_3(G_{2,2,2} + B_{2,2,2}b_2 + D_{2,2,2}d_2) = -(G_{2,2,3} + B_{2,2,3}b_3 + D_{2,2,3}d_3),\\
-D_3(G_{2,2,3} + B_{2,2,3}b_3 + D_{2,2,3}d_3) = G_{2,2,4} + B_{2,2,4}b_4 + D_{2,2,4}d_4,\\
D_3(G_{2,2,4} + B_{2,2,4}b_4 + D_{2,2,4}d_4) = -(G_{2,2,5} + B_{2,2,5}b_5 + D_{2,2,5}d_5),\\
-D_3(G_{2,2,5} + B_{2,2,5}b_5 + D_{2,2,5}d_5) = G_{2,2,6} + B_{2,2,6}b_6 + D_{2,2,6}d_6,
\end{gathered} \tag{32.27}$$

с 7-ю неизвестными $d_0, d_1, ..., d_6$, где b_i $(i = \overline{0,4})$ определены из системы (32.15). Согласно лемме 11.3 система (32.27) имеет бесконечное множество решений, которые определяют комитанты типа $(6, 20, 4)$. Отметим, что получение явных решений системы (32.27) является достаточно сложной процедурой. Мы будем показывать важность однородностей выражений $G_{2,2,j}$ из (32.21) в получении фокусных величин дифференциальной системы (32.1) на инвариантном многообразии центра и фокуса $\mathcal{V}$ из (28.9). Согласно (32.26) система (32.27) определяет центроаффинные комитанты, которые принадлежат линейному пространству

$$S_{1,2}^{(6,20,4)} \tag{32.28}$$

алгебры Сибирского $S_{1,2}$.

Согласно (11.7) и (32.27) каждый комитант, который принадлежит этому пространству, может быть записан в виде

$$\begin{gathered}
f_6'(x,y) = (G_{2,2,0} + B_{2,2,0}b_2 + D_{2,2,0}d_0)x^6 - (G_{2,2,1} + B_{2,2,1}b_2 +\\
+ D_{2,2,1}d_1)x^5y + \frac{1}{2!}(G_{2,2,2} + B_{2,2,2}b_2 + D_{2,2,2}d_2)x^4y^2 - \frac{1}{3!}(G_{2,2,3} +\\
+ B_{2,2,3}b_2 + D_{2,2,3}d_3)x^3y^3 + \frac{1}{4!}(G_{2,2,4} + B_{2,2,4}b_2 + D_{2,2,4}d_4)x^2y^4 -\\
-\frac{1}{5!}(G_{2,2,5} + B_{2,2,5}b_2 + D_{2,2,5}d_5)xy^5 + \frac{1}{6!}(G_{2,2,6} + B_{2,2,6}b_2 + D_{2,2,6}d_6)y^6.
\end{gathered}$$

Отметим, что на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$ из (28.9) для дифференциальной системы (32.1) выражения $G_{2,2,j}$ $(j = \overline{0,6})$ получают вид

$$\begin{gathered}
G_{2,2,0}|_{\mathcal{V}} = G_{2,2,2}|_{\mathcal{V}} = G_{2,2,4}|_{\mathcal{V}} = G_{2,2,6}|_{\mathcal{V}} = -2304L_2,\\
G_{2,2,1}|_{\mathcal{V}} = G_{2,2,3}|_{\mathcal{V}} = G_{2,2,5}|_{\mathcal{V}} = 0,
\end{gathered} \tag{32.29}$$

где

$$
\begin{gathered}
24L_2 = 62g^3h - 2gh^3 + 95g^2hk - 2h^3k + 38ghk^2 + 5hk^3 - 62g^3l+ \\
+27gh^2l - 39g^2kl + 29h^2kl - 15gk^2l - 8ghl^2 + 15hkl^2 - 5gl^3+ \\
+53g^2hm + 66ghkm + 13hk^2m - 127g^2lm - 6h^2lm - 68gklm- \\
-15k^2lm - 13hl^2m - 5l^3m + 6ghm^2 + 6hkm^2 - 63glm^2 - 29klm^2+ \\
+2lm^3 + 6g^3n + 61gh^2n + 72g^2kn + 63h^2kn + 33gk^2n + 5k^3n- \\
-10ghln + 68hkln - 33gl^2n + 15kl^2n - 72g^2mn - 6h^2mn+ \\
+10gkmn + 8k^2mn - 66hlmn - 38l^2mn - 61gm^2n - 27km^2n+ \\
+2m^3n + 72ghn^2 + 127hkn^2 - 72gln^2 + 39kln^2 - 53hmn^2- \\
-95lmn^2 - 6gn^3 + 62kn^3 - 62mn^3
\end{gathered}
$$

является второй фокусной величиной дифференциальной системы (32.1) на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$.

А для второй фокусной величины, с соответствующей $G_{2,4,j}$ получаем

$$
\begin{gathered}
G_{2,4,0}|_{\mathcal{V}} = G_{2,4,2}|_{\mathcal{V}} = G_{2,4,4}|_{\mathcal{V}} = G_{2,4,6}|_{\mathcal{V}} = -2304LS_2, \\
G_{2,4,1}|_{\mathcal{V}} = G_{2,4,3}|_{\mathcal{V}} = G_{2,4,5}|_{\mathcal{V}} = 0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
24LS_2 = 62g^3h - 2gh^3 + 119g^2hk - 2h^3k + 62ghk^2 + 5hk^3 - 62g^3l+ \\
+27gh^2l - 63g^2kl + 29h^2kl - 15gk^2l - 8ghl^2 + 15hkl^2 - 5gl^3 + 101g^2hm+ \\
+138ghkm + 37hk^2m - 175g^2lm - 6h^2lm - 116gklm - 15k^2lm- \\
-13hl^2m - 5l^3m + 54ghm^2 + 54hkm^2 - 159glm^2 - 53klm^2 - 46lm^3+ \\
+6g^3n + 37gh^2n + 72g^2kn + 39h^2kn + 57gk^2n + 5k^3n + 14ghln+ \\
+68hkln - 33gl^2n + 15kl^2n - 72g^2mn - 6h^2mn + 34gkmn + 32k^2mn- \\
-42hlmn - 38l^2mn - 109gm^2n - 3km^2n - 46m^3n + 48ghn^2 + 79hkn^2- \\
-48gln^2 + 39kln^2 - 29hmn^2 - 71lmn^2 - 6gn^3 + 38kn^3 - 38mn^3.
\end{gathered}
$$

Это выражение совпадает с фокусной величиной из [41 стр. 110] для системы (32.1), полученной после замены $f = -c = 0,\ d = -e = 1$.

Рассмотрим определение величины G_3 однородности степени 8 относительно фазовых переменных x и y в (32.21). Записывая систему (32.3)–(32.8) в матричной форме

$$
A_3B_3 = C_3,
$$

получаем

$$G_3 = \frac{G_{3,i,j,k} + B_{3,i,j,k}b_i + D_{3,i,j,k}d_j + F_{3,i,j,k}f_k}{\sigma_{3,i,j,k}} \tag{32.30}$$
$$(i = \overline{0,4};\ j = \overline{0,6};\ k = \overline{0,8}).$$

Аналогично предыдущему случаю выбираем комитант веса -1 дифференциальной системы $s(1,2)$ из (32.1), который содержит в качестве полуинварианта выражение $G_{3,2,j,k} + B_{3,2,j,k}b_2 + D_{3,2,j,k}d_j + F_{3,2,j,k}f_k$ $(k = \overline{0,8})$, и находим, что он принадлежит линейному пространству

$$S_{1,2}^{(8,37,6)} \tag{32.31}$$

алгебры Сибирского $S_{1,2}$.

Рассмотрим продолжение системы (32.3)–(32.8), которая получается из тождества (29.1) для дифференциальной системы (32.1) и функции (32.2), содержащего величину G_k, которую запишем в матричной форме $A_kB_k = C_k$. Обозначим через m_{G_k} число уравнений, а через n_{G_k}– число неизвестных этой системы. Отметим, что эти числа записываются в виде

$$m_{G_k} = \underbrace{4+5}_{G_1} + \underbrace{6+7}_{G_2} + \underbrace{8+9}_{G_3} + \cdots + \underbrace{(2k+2)+(2k+3)}_{G_k},\ (k = 1,2,3,...),$$
$$n_{G_k} = \underbrace{4+6}_{G_1} + \underbrace{6+8}_{G_2} + \underbrace{8+10}_{G_3} + \cdots + \underbrace{(2k+2)+(2k+4)}_{G_k}.$$

Отсюда следует

$$m_{G_k} = k(2k+7), n_{G_k} = m_{G_k} + k > m_{G_k}. \tag{32.32}$$

Аналогично предыдущим случаям из этой системы получаем

$$G_k = \frac{G_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}}{\sigma_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}}. \tag{32.33}$$

Важно, определить степень многочленов $G_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (32.1).

Отметим, что степени ненулевых коэффициентов многочлена при G_i $(i = \overline{1,k})$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (32.1) в определителе Крамера порядка m_{G_k}, когда коэффициенты при G_k заменяются свободными членами указанной системы, составляют диаграмму (коэффициенты последней величины G_k имеют порядок 2 согласно замене):

$$\begin{array}{ccccccc} G_1, & G_2, & G_3, & ..., & G_{k-1}, & G_k. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & & k & 2 \end{array}$$

Тогда степень многочленов $G_{k,i_1,i_2,...,i_k}+B_{k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1}+\cdots+Z_{k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (32.1), обозначенная через N_{G_k}, запишется в виде

$$N_{G_k} = m_{G_k} - k + \frac{k(k+1)}{2} + 1,$$

откуда, принимая во внимание (32.32), получаем

$$N_{G_k} = \frac{1}{2}(5k^2 + 13k + 2). \qquad (32.34)$$

Это и есть степень однородности многочленов $G_{k,i_1,i_2,...,i_k}+B_{k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1}+\cdots+Z_{k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$ относительно коэффициентов линейной и квадратичной частей дифференциальной системы (32.1), которые содержатся в многочлене типа $(d) = (\delta, d_1, d_2)$. Так как $\delta = 2(k+1)$, а $d_2 = 2k$, то $d_1 = N_{G_k} - 2k$. Так находим, что комитант веса -1 дифференциальной системы $s(1,2)$ из (32.1), который содержит в качестве полуинварианта $G_{k,i_1,i_2,...,i_k} + B_{k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$ и соответствует величине G_k для $k = 1,2,3,...$, принадлежит типу

$$\left(2(k+1), \frac{1}{2}(5k^2 + 9k + 2), 2k\right), \qquad (32.35)$$

где $2(k+1)$–степень однородности комитанта относительно фазовых переменных x, y, $\dfrac{1}{2}(5k^2+9k+2)$–степень однородности комитанта относительно коэффициентов линейной части, а $2k$–степень однородности комитанта относительно коэффициентов квадратичной части дифференциальной системы $s(1,2)$ из (32.1).

В дальнейщем выражения $G_{k,i_1,i_2,\ ...,\ i_k} + B_{k,i_1,i_2,\ ...,\ i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$, которые определяют комитанты типа (32.35), соответствующие величинам G_k $(k = 1,2,3,...)$, будем называть *обобщенными фокусными псевдовеличинами*, а комитанты типа (32.35) для $k = 1,2,3,...$ будем называть *комитантами, которые содержат в качестве коэффициентов обобщенные фокусные псевдовеличины* $G_{k,i_1,i_2,...,i_k} + B_{k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$.

Отметим, что пространства $S^{(2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2),2k)}$ являются обобщенными записями пространств (32.18), (32.28), (32.31) для $k = 1, 2, 3, ...$ алгебры Сибирского $S_{1,2}$.

Согласно работе [20] с помошью теоремы 21.1 имеет место

Теорема 32.1. *Размерность линейного пространства центроаффинных комитантов типа* $(d) = (\delta, d_1, d_2)$ *для дифференциальной системы* $s(1,2)$ *из* (32.1)*, обозначенная через* $dim_{\mathbb{R}} V_{1,2}^{(d)}$*, равна коэффициенту при одночлене* $u^{\delta} b^{d_1} c^{d_2}$ *в разложении обобщенного ряда Гильберта из* (21.3)–(21.5) *для алгебры Сибирского* $S_{1,2}$ *комитантов рассмотренной системы.*

Рассмотрим подалгебру $S'_{1,2} \subset S_{1,2}$, которую запишем в виде

$$S'_{1,2} = \bigoplus_{(d)} S_{1,2}^{(d')}, \tag{32.36}$$

где через $S_{1,2}^{(d')}$ обозначены линейные пространства

$$S_{1,2}^{(0,0,0)} = \mathbb{R},\ S_{1,2}^{(0,1,0)}, ..., S_{1,2}^{(2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2),2k)},\ k = 1, 2, ..., \tag{32.37}$$

а также пространства из $S_{1,2}$, которые содержат всевозможные их произведения.

Так как алгебра $S'_{1,2}$ является градуированной подалгеброй в конечно-определенной алгебре $S_{1,2}$, то согласно предложению 19.1 получаем $\varrho(S'_{1,2}) \leq \varrho(S_{1,2})$. Из этого неравенства и из того, что $\varrho(S_{1,2}) = 9$ [20], согласно примечанию 11.2 о полуинвариантах и тому, что обобщенные фокусные псевдовеличины являются коэффициентами некоторых комитантов, имеет место

Теорема 32.2. *Максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин в проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы* (32.1) *не превышает* 9.

Согласно предложению 19.2, замечанию 28.1 и равенству (29.3) следует, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин L_k $(k = \overline{1, \infty})$ не может превысить максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин $G_{k,i_1,i_2,...,i_k} + B_{k,i_1,i_2,...,i_k} b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,...,i_k} z_{i_k}$. Отсюда согласно равенствам (28.3) имеем

Следствие 32.1. *Верхняя граница числа алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы* (32.1)*, не превышает* 9.

Рассмотрим типы пространства $S_{1,2}^{(d')}$ из (32.37) для $d' = \delta' + d'_1 + d'_2 \leq 60$, которые получаются из разложения в степенной ряд дроби

$$\frac{1}{(1-b)(1-u^4b^8c^2)(1-u^6b^{20}c^4)(1-u^8b^{37}c^6)}, \qquad (32.38)$$

где $u^{\delta'}b^{d_1'}c^{d_2'}$ показывает тип пространства $S_{1,2}^{(d')}$ для $(d') = (\delta', d_1', d_2')$. Принимая во внимание эти типы и обобщенный ряд Гильберта (21.3)–(21.5) алгебры $S_{1,2}$, можем записать разложение ряда Гильберта алгебры $S_{1,2}^{'}$ для $d' = \delta' + d_1' + d_2' \leq 60$, которое имеет вид

$$H(S_{1,2}', u, b, c) = 1 + b + 2b^2 + 2b^3 + 3b^4 + 3b^5 + 4b^6 + 4b^7 + 5b^8 + 5b^9+$$
$$+6b^{10} + 6b^{11} + 7b^{12} + 7b^{13} + 8b^{14} + 8b^{15} + 9b^{16} + 9b^{17} + 10b^{18} + 10b^{19}+$$
$$+11b^{20} + 11b^{21} + 12b^{22} + 12b^{23} + 13b^{24} + 13b^{25} + 14b^{26} + 14b^{27} + 15b^{28}+$$
$$+15b^{29} + 16b^{30} + 16b^{31} + 17b^{32} + 17b^{33} + 18b^{34} + 18b^{35} + 19b^{36} + 19b^{37}+$$
$$+20b^{38} + 20b^{39} + 21b^{40} + 21b^{41} + 22b^{42} + 22b^{43} + 23b^{44} + 23b^{45} + 24b^{46}+$$
$$+24b^{47} + 25b^{48} + 25b^{49} + 26b^{50} + 26b^{51} + 27b^{52} + 27b^{53} + 28b^{54} + 28b^{55}+$$
$$+29b^{56} + 29b^{57} + 30b^{58} + 30b^{59} + 31b^{60} + u^4(68b^8c^2 + 79b^9c^2 + 87b^{10}c^2+$$
$$+98b^{11}c^2 + 106b^{12}c^2 + 117b^{13}c^2 + 125b^{14}c^2 + 136b^{15}c^2 + 144b^{16}c^2+$$
$$+155b^{17}c^2 + 163b^{18}c^2 + 174b^{19}c^2 + 182b^{20}c^2 + 193b^{21}c^2 + 201b^{22}c^2+$$
$$+212b^{23}c^2 + 220b^{24}c^2 231b^{25}c^2 + 239b^{26}c^2 + 250b^{27}c^2 + 258b^{28}c^2+$$
$$+269b^{29}c^2 + 277b^{30}c^2 + 288b^{31}c^2 + 296b^{32}c^2 + 307b^{33}c^2 + 315b^{34}c^2+$$
$$+326b^{35}c^2 + 334b^{36}c^2 + 345b^{37}c^2 + 353b^{38}c^2 + 364b^{39}c^2 + 372b^{40}c^2+$$
$$+383b^{41}c^2 + 391b^{42}c^2 + 402b^{43}c^2 + 410b^{44}c^2 + 421b^{45}c^2 + 429b^{46}c^2+$$
$$+440b^{47}c^2 + 448b^{48}c^2 + 459b^{49}c^2 + 467b^{50}c^2 + 478b^{51}c^2 + 486b^{52}c^2+$$
$$+497b^{53}c^2 + 505b^{54}c^2) + u^6(988b^{20}c^4 + 1046b^{21}c^4u^6 + 1098b^{22}c^4+$$
$$+1156b^{23}c^4 + 1208b^{24}c^4 + 1266b^{25}c^4 + 1318b^{26}c^4 + 1376b^{27}c^4 + 1428b^{28}c^4+$$
$$+1486b^{29}c^4 + 1538b^{30}c^4 + 1596b^{31}c^4 + 1648b^{32}c^4 + 1706b^{33}c^4 + 1758b^{34}c^4+$$
$$+1816b^{35}c^4 + 1868b^{36}c^4 + 1926b^{37}c^4 + 1978b^{38}c^4 + 2036b^{39}c^4 + 2088b^{40}c^4+$$
$$+2146b^{41}c^4 + 2198b^{42}c^4 + 2256b^{43}c^4 + 2308b^{44}c^4 + 2366b^{45}c^4 + 2418b^{46}c^4+$$
$$+2476b^{47}c^4 + 2528b^{48}c^4 + 2586b^{49}c^4 + 2638b^{50}c^4) + u^8(798b^{16}c^4+$$
$$+855b^{17}c^4u^8 + 918b^{18}c^4 + 975b^{19}c^4 + 1038b^{20}c^4 + 1095b^{21}c^4 + 1158b^{22}c^4+$$
$$+1215b^{23}c^4 + 1278b^{24}c^4 + 1335b^{25}c^4 + 1398b^{26}c^4 + 1455b^{27}c^4 + 1518b^{28}c^4+$$
$$+1575b^{29}c^4 + 1638b^{30}c^4 + 1695b^{31}c^4 + 1758b^{32}c^4 + 1815b^{33}c^4 + 1878b^{34}c^4+$$
$$+1935b^{35}c^4 + 1998b^{36}c^4 + 2055b^{37}c^4 + 2118b^{38}c^4 + 2175b^{39}c^4 + 2238b^{40}c^4+$$

$$+2295b^{41}c^4+2358b^{42}c^4+2415b^{43}c^4+2478b^{44}c^4+2535b^{45}c^4+2598b^{46}c^4+$$
$$+2655b^{47}c^4+2718b^{48}c^4+6685b^{37}c^6+6878b^{38}c^6+7081b^{39}c^6+7274b^{40}c^6+$$
$$+7477b^{41}c^6+7670b^{42}c^6+7873b^{43}c^6+8066b^{44}c^6+8269b^{45}c^6+8462b^{46}c^6)+$$
$$+u^{10}(5152b^{28}c^6+5361b^{29}c^6u^{10}+5580b^{30}c^6+5789b^{31}c^6+6008b^{32}c^6+$$
$$+6217b^{33}c^6+6436b^{34}c^6+6645b^{35}c^6+6864b^{36}c^6+7073b^{37}c^6+7292b^{38}c^6+$$
$$+7501b^{39}c^6+7720b^{40}c^6+7929b^{41}c^6+8148b^{42}c^6+8357b^{43}c^6+$$
$$+8576b^{44}c^6)+u^{12}(4294b^{24}c^6+4522b^{25}c^6u^{12}+4740b^{26}c^6+$$
$$+4968b^{27}c^6+5186b^{28}c^6+5414b^{29}c^6+5632b^{30}c^6+5860b^{31}c^6+$$
$$+6078b^{32}c^6+\ b^{33}c^6+6524b^{34}c^6+6752b^35c^6+6970b^{36}c^6+$$
$$+7198b^{37}c^6+7416b^{38}c^6+7644b^{39}c^6+7862b^{40}c^6+8090b^{41}c^6+$$
$$+8308b^{42}c^6+20412b^{40}c^8)+u^{14}(18369b^{36}c^8+18987b^{37}c^8+$$
$$+19590b^{38}c^8)+u^{16}(15835b^{32}c^8+16454b^{33}c^8+17088b^{34}c^8+$$
$$+17707b^{35}c^8+18341b^{36}c^8)+\cdots \tag{32.39}$$

Отсюда обычный ряд Гильберта алгебры $S'_{1,2}$ имеет вид (первые 61 слагаемых):

$$\begin{gathered}
H_{S'_{1,2}}(t)=H(S'_{1,2},t,t,t)=1+t+2t^2+2t^3+3t^4+3t^5+\\
+4t^6+4t^7+5t^8+5t^9+6t^{10}+6t^{11}+7t^{12}+7t^{13}+76t^{14}+\\
+87t^{15}+96t^{16}+107t^{17}+116t^{18}+127t^{19}+136t^{20}+147t^{21}+\\
+156t^{22}+167t^{23}+176t^{24}+187t^{25}+196t^{26}+207t^{27}+\\
+1014t^{28}+1082t^{29}+2142t^{30}+2268t^{31}+2392t^{32}+2518t^{33}+\\
+2642t^{34}+2768t^{35}+2892t^{36}+3018t^{37}+3142t^{38}+3268t^{39}+\\
+3392t^{40}+3518t^{41}+7936t^{42}+8290t^{43}+13784t^{44}+\\
+14347t^{45}+14908t^{46}+15471t^{47}+16032t^{48}+16595t^{49}+\\
+17156t^{50}+24404t^{51}+25158t^{52}+25924t^{53}+26678t^{54}+\\
+27444t^{55}+44033t^{56}+45418t^{57}+65175t^{58}+\\
+67178t^{59}+89581t^{60}+\cdots
\end{gathered} \tag{32.40}$$

Рассмотрим первые 61 слагаемых в разложении ряда Гильберта алгебры $SI_{1,2}$, которые согласно [20] получаются из (21.3)–(21.5) следующим образом:

$$H_{SI_{1,2}}(t)=H(S_{1,2},0,t,t)=1+t+2t^2+5t^3+10t^4+17t^5+30t^6+50t^7+$$
$$+81t^8+125t^9+188t^{10}+276t^{11}+399t^{12}+559t^{13}+772t^{14}+1051t^{15}+$$

$$+1409t^{16}+1859t^{17}+2428t^{18}+3133t^{19}+4004t^{20}+5064t^{21}+6350t^{22}+$$
$$+7897t^{23}+9752t^{24}+11947t^{25}+14544t^{26}+17597t^{27}+21168t^{28}+$$
$$+25315t^{29}+30127t^{30}+35673t^{31}+42051t^{32}+49345t^{33}+57668t^{34}+$$
$$+67127t^{35}+77855t^{36}+89960t^{37}+103603t^{38}+118928t^{39}+136102t^{40}+$$
$$+155281t^{41}+176675t^{42}+200462t^{43}+226870t^{44}+256104t^{45}+$$
$$+288419t^{46}+324057t^{47}+363307t^{48}+406419t^{49}+453726t^{50}+$$
$$+505532t^{51}+562185t^{52}+624013t^{53}+691426t^{54}+764788t^{55}+$$
$$+844540t^{56}+931088t^{57}+1024916t^{58}+1126484t^{59}+$$
$$+1236327t^{60}+\cdots \tag{32.41}$$

Так как для рядов (32.40) и (32.41) имеет место неравенство

$$H_{S'_{1,2}}(t) \leq H_{SI_{1,2}}(t),$$

то в предположении, что это неравенство имеет место и для остальных слагаемых рассмотренных рядов, получаем неравенство

$$\varrho(S'_{1,2}) \leq \varrho(SI_{1,2}).$$

Отметим, что $S'_{1,2}$ не является подалгеброй в $SI_{1,2}$.

Так как из [20] имеем $\varrho(SI_{1,2}) = 7$, то согласно последнему неравенству получаем

Примечание 32.1. *Один из путей улучшения верхней границы числа алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин (а также фокусных величин) для дифференциальной системы* (32.1), *которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для данной дифференциальной системы, находится в предполагаемом неравенстве* $\varrho(S'_{1,2}) \leq 7$.

Но, с другой стороны, легко можно проверить с помощью (32.40), что для первых 61 слагаемых из (32.40) имеем

$$H_{S'_{1,2}}(t) < \frac{1}{(1-t)^5}.$$

Если предположим, что это неравенство верно для всех слагаемых рядов $H_{S'_{1,2}}(t)$ и $(1-t)^{-5}$, то возможно существует улучшение мажорантной оценки максимального числа алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы $s(1,2)$ из (32.1), которое выражается неравенством $\varrho(S'_{1,2}) < 5$.

§33. Тип обобщенных фокусных псевдовеличин для дифференциальной системы $s(1,3)$

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,3)$, которую запишем в виде

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= cx + dy + px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3, \\
\dot{y} &= ex + fy + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3
\end{aligned}
\tag{33.1}
$$

с конечно-определенной градуированной алгеброй унимодулярных комитантов $S_{1,3}$ [20]. Для этой системы запишем функцию (29.2) в виде

$$
\begin{gathered}
U = k_2 + a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 + b_0x^4 + 4b_1x^3y + \\
+6b_2x^2y^2 + 4b_3xy^3 + b_4y^4 + c_0x^5 + 5c_1x^4y + 10c_2x^3y^2 + \\
+10c_3x^2y^3 + 5c_4xy^4 + c_5y^5 + d_0x^6 + 6d_1x^5y + 15d_2x^4y^2 + \\
+20d_3x^3y^3 + 15d_4x^2y^4 + 6d_5xy^5 + d_6y^6 + e_0x^7 + 7e_1x^6y + \\
+21e_2x^5y^2 + 35e_3x^4y^3 + 21e_5x^2y^5 + 7e_6xy^6 + e_7y^7 + f_0x^8 + \\
+8f_1x^7y + 28f_2x^6y^2 + 56f_3x^5y^3 + 70f_4y^4 + 56f_5x^3y^5 + \\
+28f_6x^2y^6 + 8f_7xy^7 + f_8y^8 + ...,
\end{gathered}
\tag{33.2}
$$

где $k_2 \not\equiv 0$ из (28.6), а $a_0, a_1, ..., f_7, f_8, ...$–неизвестные коэффициенты.

Тождество (29.1) вдоль траекторий дифференциальной системы (33.1) с функцией (33.2) разлагается на следующие системы уравнений (равенство (29.4) опущено):

$$
\begin{aligned}
x^3 &: 3a_0c + 3a_1e = 0, \\
x^2y &: 6a_1c + 3a_0d + 6a_2e + 3a_1f = 0, \\
xy^2 &: 3a_2c + 6a_1d + 3a_3e + 6a_2f = 0, \\
y^3 &: 3a_2d + 3a_3f = 0;
\end{aligned}
\tag{33.3}
$$

$$
\begin{aligned}
x^4 &: 4b_0c + 4b_1e - e^2G_1 = 2ep - ct + ft, \\
x^3y &: 12b_1c + 4b_0d + 12b_2e + 4b_1f + 2ceG_1 - 2efG_1 = -cp+ \\
&\quad + fp + 6eq - 2dt - 3cu + 3fu, \\
x^2y^2 &: 12b_2c + 12b_1d + 12b_3e + 12b_2f - c^2G_1 + 2deG_1+ \\
&\quad + 2cfG_1 - f^2G_1 = -3cq + 3fq + 6er - 6du - 3cv + 3fv, \\
xy^3 &: 4b_3c + 12b_2d + 4b_4e + 12b_3f - 2cdG_1 + 2dfG_1 = -3cr+ \\
&\quad + 3fr + 2es - 6dv - cw + fw, \\
y^4 &: 4b_3d + 4b_4f - d^2G_1 = -cs + fs - 2dw;
\end{aligned}
\tag{33.4}
$$

$$
\begin{aligned}
x^5 &: 5cc_0 + 5c_1e + 3a_0p + 3a_1t = 0, \\
x^4y &: 20cc_1 + 5c_0d + 20c_2e + 5c_1f + 6a_1p + 9a_0q + 6a_2t+ \\
&\quad + 9a_1u = 0, \\
x^3y^2 &: 30cc_2 + 20c_1d + 30c_3e + 20c_2f + 3a_2p + 18a_1q + 9a_0r+ \\
&\quad + 3a_3t + 18a_2u + 9a_1v = 0, \\
x^2y^3 &: 20cc_3 + 30c_2d + 20c_4e + 30c_3f + 9a_2q + 18a_1r + 3a_0s+ \\
&\quad + 9a_3u + 18a_2v + 3a_1w = 0, \\
xy^4 &: 5cc_4 + 20c_3d + 5c_5e + 20c_4f + 9a_2r + 6a_1s + 9a_3v+ \\
&\quad + 6a_2w = 0, \\
y^5 &: 5c_4d + 5c_5f + 3a_2s + 3a_3w = 0;
\end{aligned}
\tag{33.5}
$$

$$
\begin{aligned}
x^6 &: 6cd_0 + 6d_1e + 4b_0p + 4b_1t + e^3G_2 = 0, \\
x^5y &: 6dd_0 + 30cd_1 + 30d_2e + 6d_1f + 12b_1p + 12b_0q+ \\
&\quad + 12b_2t + 12b_1u - 3ce^2G_2 + 3e^2fG_2 = 0, \\
x^4y^2 &: 30dd_1 + 60cd_2 + 60d_3e + 30d_2f + 12b_2p + 36b_1q + 12b_0r+ \\
&\quad + 12b_3t + 36b_2u + 12b_1v + 3c^2eG_2 - 3de^2G_2 - 6cefG_2+ \\
&\quad + 3ef^2G_2 = 0, \\
x^3y^3 &: 60dd_2 + 60cd_3 + 60d_4e + 60d_3f + 4b_3p + 36b_2q + 36b_1r+ \\
&\quad + 4b_0s + 4b_4t + 36b_3u + 36b_2v + 4b_1w - c^3G_2 + 6cdeG_2+ \\
&\quad + 3c^2fG_2 - 6defG_2 - 3cf^2G_2 + f^3G_2 = 0, \\
x^2y^4 &: 60dd_3 + 30cd_4 + 30d_5e + 60d_4f + 12b_3q + 36b_2r + 12b_1s+ \\
&\quad + 12b4u + 36b3v + 12b2w - 3c^2dG_2 + 3d^2eG_2 + 6cdfG_2-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 3df^2G_2 = 0,\\
xy^5 &: 30dd_4 + 6cd_5 + 6d_6e + 30d_5f + 12b_3r + 12b_2s+\\
&\quad + 12b_4v + 12b_3w - 3cd^2G_2 + 3d^2fG_2 = 0,\\
y^6 &: 6dd_5 + 6d_6f + 4b_3s + 4b_4w - d^3G_2 = 0;
\end{aligned}
\tag{33.6}
$$

$$
\begin{aligned}
x^7 &: 7ce_0 + 7ee_1 + 5c_0p + 5c_1t = 0,\\
x^6y &: 7de_0 + 42ce_1 + 42ee_2 + 7e_1f + 20c_1p + 15c_0q + 20c_2t+\\
&\quad + 15c_1u = 0,\\
x^5y^2 &: 42de_1 + 105ce_2 + 105ee_3 + 42e_2f + 30c_2p + 60c_1q+\\
&\quad + 15c_0r + 30c_3t + 60c_2u + 15c_1v = 0,\\
x^4y^3 &: 105de_2 + 140ce_3 + 140ee_4 + 105e_3f + 20c_3p + 90c_2q+\\
&\quad + 60c_1r + 5c_0s + 20c_4t + 90c_3u + 60c_2v + 5c_1w = 0,\\
x^3y^4 &: 140de_3 + 105ce_4 + 105ee_5 + 140e_4f + 5c_4p + 60c_3q+\\
&\quad + 90c_2r + 20c_1s + 5c_5t + 60c_4u + 90c_3v + 20c_2w = 0,\\
x^2y^5 &: 105de_4 + 42ce_5 + 42ee_6 + 105e_5f + 15c_4q + 60c_3r+\\
&\quad + 30c_2s + 15c_5u + 60c_4v + 30c_3w = 0,\\
xy^6 &: 42de_5 + 7ce_6 + 7ee_7 + 42e_6f + 15c_4r + 20c_3s + 15c_5v+\\
&\quad + 20c_4w = 0,\\
y^7 &: 7de_6 + 7e_7f + 5c_4s + 5c_5w = 0;
\end{aligned}
\tag{33.7}
$$

$$
\begin{aligned}
x^8 &: 8cf_0 + 8ef_1 + 6d_0p + 6d_1t - e^4G_3 = 0,\\
x^7y &: 8df_0 + 56cf_1 + 8ff_1 + 56ef_2 + 30d_1p + 18d_0q + 30d_2t+\\
&\quad + 18d_1u + 4ce^3G_3 - 4e^3fG_3 = 0,\\
x^6y^2 &: 56df_1 + 168cf_2 + 56ff_2 + 168ef_3 + 60d_2p + 90d_1q + 18d_0r+\\
&\quad + 60d_3t + 90d_2u + 18d_1v - 6c^2e^2G_3 + 4de^3G_3+\\
&\quad + 12ce^2fG_3 - 6e^2f^2G_3 = 0,\\
x^5y^3 &: 168df_2 + 280cf_3 + 168ff_3 + 280ef_4 + 60d_3p + 180d_2q + 90d_1r+\\
&\quad + 6d_0s + 60d_4t + 180d_3u + 90d_2v + 6d_1w + 4c^3eG_3-\\
&\quad - 12cde^2G_3 - 12c^2efG_3 + 12de^2fG_3 + 12cef^2G_3 - 4ef^3G_3 = 0,\\
x^4y^4 &: 280df_3 + 280cf_4 + 280ff_4 + 280ef_5 + 30d_4p + 180d_3q + 180d_2r+\\
&\quad + 30d_1s + 30d_5t + 180d_4u + 180d_3v + 30d_2w - c^4G_3+\\
&\quad + 12c^2deG_3 - 6d^2e^2G_3 + 4c^3fG_3 - 24cdefG_3 - 6c^2f^2G_3+\\
&\quad + 12def^2G_3 + 4cf^3G_3 - f^4G_3 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3y^5 : \; & 280df_4 + 168cf_5 + 280ff_5 + 168ef_6 + 6d_5p + 90d_4q + 180d_3r + \\
& + 60d_2s + 6d_6t + 90d_5u + 180d_4v + 60d_3w - 4c^3dG_3 + \\
& + 12cd^2eG_3 + 12c^2dfG_3 - 12d^2efG_3 - 12cdf^2G_3 + 4df^3G_3 = 0, \\
x^2y^6 : \; & 168df_5 + 56cf_6 + 168ff_6 + 56ef_7 + 18d_5q + 90d_4r + 60d_3s + \\
& + 18d_6u + 90d_5v + 60d_4w - 6c^2d^2G_3 + 4d^3eG_3 + 12cd^2fG_3 - \\
& - 6d^2f^2G_3 = 0, \\
xy^7 : \; & 56df_6 + 8cf_7 + 56ff_7 + 8ef_8 + 18d_5r + 30d_4s + 18d_6v + \\
& + 30d_5w - 4cd^3G_3 + 4d^3fG_3 = 0, \\
y^8 : \; & 8df_7 + 8ff_8 + 6d_5s + 6d_6w - d^4G_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{33.8}
$$

Очевидно, что системы линейных уравнений (33.3)–(33.8) относительно неизвестных a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1,...,b_4, c_0, c_1,...,c_5, d_0, d_1,...,d_6, e_0, e_1,...,e_7, f_0, f_1,...,f_8,..., G_1, G_2, G_3, ... можно рассматривать как единую систему, которая может быть продолжена присоединением после последнего уравнения из (33.8) бесконечного числа уравнений, которые получаются вследствие равенства коэффициентов при $x^\alpha y^\beta$ для $\alpha + \beta > 8$ в тождестве (29.1).

Для получения постоянной G_1 запишем систему (33.4) в матричной форме

$$
A_1 B_1 = C_1, \tag{33.9}
$$

где

$$
A_1 = \begin{pmatrix}
4c & 4e & 0 & 0 & 0 & -e^2 \\
4d & 12c + 4f & 12e & 0 & 0 & 2ce - 2ef \\
0 & 12d & 12c + 12f & 12e & 0 & -c^2 + 2de + 2cf - f^2 \\
0 & 0 & 12d & 4c + 12f & 4e & -2cd + 2df \\
0 & 0 & 0 & 4d & 4f & -d^2
\end{pmatrix},
$$

$$
B_1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix}
2ep - ct + ft \\
cp + fp + 6eq - 2dt - 3cu + 3fu \\
-3cq + 3fq + 6er - 6du - 3cv + 3fv \\
-3cr + 3fr + 2es - 6dv - cw + fw \\
-cs + fs - 2dw
\end{pmatrix}. \tag{33.10}
$$

Так как размерность матрицы A_1 равна 5×6, то очевидно, что имеем одну свободную неизвестную. Как следствие, принимая в качестве свободной неизвестной одну из переменных b_i ($i \in \{0, , 1, ..., 4\}$), с помощью правила Крамера для системы (33.9) для любого фиксированного

i получаем

$$G_1 = \frac{G_{1,i} + B_{1,i} b_i}{\sigma_{1,i}}, \tag{33.11}$$

где $G_{1,i}, B_{1,i}, \sigma_{1,i}$ (см. приложение 5) являются многочленами от коэффициентов системы (33.1), а b_i–неопределенные коэффициенты функции $U(x, y)$ из (33.8).

В дальнейшем будет нужен явный вид операторов $X_1, ..., X_4$ алгебры Ли L_4 для системы (33.1), выражения которых получаются из §5:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + D_1,\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + D_2,\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} + D_3,\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} + D_4, \tag{33.12}$$

где

$$\begin{gathered}
D_1 = d\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial e} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} + s\frac{\partial}{\partial s} - 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v},\\
D_2 = e\frac{\partial}{\partial c} + (f-c)\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial f} + t\frac{\partial}{\partial p} + (u-p)\frac{\partial}{\partial q} + (v-2q)\frac{\partial}{\partial r} +\\
+(w-3r)\frac{\partial}{\partial s} - t\frac{\partial}{\partial u} - 2u\frac{\partial}{\partial v} - 3v\frac{\partial}{\partial w},\\
D_3 = -d\frac{\partial}{\partial c} + (c-f)\frac{\partial}{\partial e} + d\frac{\partial}{\partial f} - 3q\frac{\partial}{\partial p} - 2r\frac{\partial}{\partial q} - s\frac{\partial}{\partial r} + (p-3u)\frac{\partial}{\partial t} +\\
+(q-2v)\frac{\partial}{\partial u} + (r-w)\frac{\partial}{\partial v} + s\frac{\partial}{\partial w},\\
D_4 = -d\frac{\partial}{\partial d} + e\frac{\partial}{\partial e} - q\frac{\partial}{\partial q} - 2r\frac{\partial}{\partial r} - 3s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2w\frac{\partial}{\partial w}.
\end{gathered} \tag{33.13}$$

Изучая матрицы (33.10) системы (33.9) заключаем, что $G_{1,i}$ из (33.11) являются однородными многочленами степени 5 относительно коэффициентов линейной части и степени 1 относительно коэффициентов кубической части системы (33.1).

Отметим, что $G_{1,i}$ из (33.11) являются однородными многочленами относительно коэффициентов системы (33.1), где для $i = 0, 1, 2, 3, 4$ соответственно являются многочленами изобарности веса (см. приложение 5)

$$(3, -1),\ (2, 0),\ (1, 1),\ (0, 2),\ (-1, 3). \tag{33.14}$$

Из формулы (14.3) (для дифференциальной системы (33.1) и теории инвариантов дифференциальных систем [16, 17]), следует что числители дробей (33.11) могут быть коэффициентами в комитантах веса

-1 типа $(4,5,1)$. Это означает, что согласно (11.7) с помощью дифференциального оператора Ли D_3 из (33.13) для дифференциальной системы (33.1) и знаменателей дробей (33.11) получаем систему из 4-х линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$D_3(G_{1,0}+B_{1,0}b_0)=G_{1,1}+B_{1,1}b_1,\ D_3(G_{1,1}+B_{1,1}b_1)=-G_{1,2}-B_{1,2}b_2,$$
$$-D_3(G_{1,2}+B_{1,2}b_2)=G_{1,3}+B_{1,3}b_3,\ D_3(G_{1,3}+B_{1,3}b_3)=-G_{1,4}-B_{1,4}b_4, \tag{33.15}$$

с 5-ю неизвестными b_0, b_1, b_2, b_3, b_4. Согласно лемме 11.3 система (33.15) имеет бесконечное множество решений. Отметим, что частным решением этой системы является $b_0=b_1=b_2=b_3=b_4=0$, для которой многочлен

$$f_4'(x,y)=G_{1,0}x^4+4G_{1,1}x^3y+2G_{1,2}x^2y^2+4G_{1,3}xy^3+G_{1,4}y^4 \tag{33.16}$$

является центроаффинным комитантом дифференциальной системы (33.1). Это подверждается и теоремой 10.2 с операторами X_1-X_4 из (33.13) для дифференциальной системы (33.1), для которой имеем равенства

$$X_1(f_4')=X_4(f_4')=f_4',\ X_2(f_4')=X_3(f_4')=0.$$

Очевидно, что дифференциальная система (33.15) имеет бесконечное множество решений b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, которые определяют центроаффинные комитанты типа

$$\begin{gathered} f_4''(x,y)=(G_{1,0}+B_{1,0}b_0)x^4+4(G_{1,1}+B_{1,1}b_1)x^3y+2(G_{1,2}+ \\ +B_{1,2}b_2)x^2y^2+4(G_{1,3}+B_{1,3}b_3)xy^3+(G_{1,4}+B_{1,4}b_4)y^4. \end{gathered} \tag{33.17}$$

Согласно сказанному выше комитант (33.16) или (33.17) принадлежит линейному пространству

$$S_{1,3}^{(4,5,1)}, \tag{33.18}$$

алгебры Сибирского $S_{1,3}$.

Отметим, что комитант (33.16) на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$ из (28.9) для дифференциальной системы (33.1) имеет вид

$$f_4'(x,y)|_{\mathcal{V}}=6(p+r+u+w)(x^2+y^2)^2\ \ (G_1|_{\mathcal{V}}=6(p+r+u+w)). \tag{33.19}$$

Аналогично предыдущему случаю для получения постоянной G_2 запишем систему уравнений (33.4), (33.6) в матричной форме (см. приложение 6):

$$A_2B_2=C_2, \tag{33.20}$$

откуда получаем

$$G_2 = \frac{G_{2,i,j} + B_{2,i,j}b_i + D_{2,i,j}d_j}{\sigma_{2,i,j}}, \ (i = \overline{0,4}, \ j = \overline{0,6}). \tag{33.21}$$

Изучая матричное равенство (33.20), получаем что $degG_{2,i,j} = 14$, а используя систему (33.4), (33.6), получаем, что $G_{2,i,j}$ из (33.21) имеет тип $(0,12,2)$, то есть $G_{2,i,j}$ являются однородными многочленами степени 12 относительно коэффициентов линейной части и степени 2 относительно коэффициентов кубической части дифференциальной системы $s(1,3)$ из (33.1).

Вычисляя выражения $G_{2,i,j}$ для каждого $i = \overline{0,4}$ и $j = \overline{0,6}$, получаем для веса изобарностей следующую таблицу (см. приложение 6).
Таблица 33.1. *Вес изобарностей многочленов $G_{2,i,j}$ для системы $s(1,3)$*

$G_{2,i,j}$	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
b_0	(7,-3)	(6,-2)	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)
b_1	(6,-2)	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)
b_2	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)
b_3	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)	(-2,6)
b_4	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)	(-2,6)	(-3,7)

Отметим, что для $j = \overline{0,6}$ имеем

$$\begin{gathered} G_2 \equiv \frac{G_{2,2,j}}{\sigma_{2,2,j}}|_{\mathcal{V}} = \frac{3}{32}(-11pq - 15qr + 5ps + rs - pt - 5rt - 3qu + \\ +5su - tu + 7pv + 3rv + 15uv - 7qw + sw - 5tw + 11vw). \end{gathered} \tag{33.22}$$

Из множества $G_{2,2,j}$ выбираем в качестве полуинварианта выражение $G_{2,2,0}$, которое согласно таблицы 33.1 имеет вес -1. Отсюда с помощью (11.7) и (33.21) получаем, что комитант, соответствующий постояной G_2, принадлежит типу $(6,12,2)$.

Аналогично предыдущему случаю выбираем комитант веса -1 дифференциальной системы $s(1,3)$ из (33.1), который содержит в качестве полуинварианта выражение $G_{2,2,j} + B_{2,2,j}b_2 + D_{2,2,j}d_j$ $(j = \overline{0,6})$, и находим, что он принадлежит линейному пространству

$$S_{1,3}^{(6,12,2)}, \tag{33.23}$$

алгебры Сибирского $S_{1,3}$.

Рассмотрим получение постоянной G_3 при однородности степени 8 относительно фазовых переменных x и y в (33.21). Записывая систему (33.4), (33.6), (33.8) в матричной форме

$$A_3B_3 = C_3,$$

получаем

$$G_3 = \frac{G_{3,i,j,k} + B_{3,i,j,k}b_i + D_{3,i,j,k}d_j + F_{3,i,j,k}f_k}{\sigma_{3,i,j,k}} \tag{33.24}$$
$$(i = \overline{0,4};\ j = \overline{0,6};\ k = \overline{0,8}).$$

Аналогично предыдущему случаю выбираем комитант веса -1 дифференциальной системы $s(1,3)$ из (33.1), который содержит в качестве полуинварианта выражение $G_{3,2,j,k} + B_{3,2,j,k}b_2 + D_{3,2,j,k}d_j + F_{3,2,j,k}f_k$ $(k = \overline{0,8})$, и находим, что он принадлежит линейному пространству

$$S_{1,3}^{(8,22,3)} \tag{33.25}$$

алгебры Сибирского $S_{1,3}$.

Рассмотрим продолжение системы (33.3)–(33.8), содержащей постоянную G_k, которая получается из тождества (29.1) для дифференциальной системы (33.1) и функции (33.2). Запишем систему (33.3)–(33.8) в матричной форме $A_kB_k = C_k$. Обозначим через m_{G_k} число уравнений этой системы, а через n_{G_k}–число неизвестных. Отметим, что эти числа записываются в виде:

$$m_{G_k} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{5}_{G_1} +7}_{G_2} +9}_{G_3} \ldots +\ldots + 2k+3}_{G_k},$$

$$n_{G_k} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{6}_{G_1} +9}_{G_2} +12}_{G_3} \ldots +\ldots + (2k+3)+k}_{G_k},$$

для $k = 1, 2, 3, \ldots$. Отсюда получается

$$m_{G_k} = k(k+4), \tag{33.26}$$

а

$$n_{G_k} = m_{G_k} + k.$$

Из этих систем получается

$$G_k = \frac{G_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}}{\sigma_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}}. \tag{33.27}$$

Важно, определить степень многочленов $G_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \dots + Z_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (33.1).

Отметим, что степень ненулевого коэффициента многочлена при G_i $(i = \overline{1,k})$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (33.1) в определителе Крамера порядка m_{G_k}, когда коэффициенты при G_k заменяются свободными членами указанной системы составляют следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} G_1, & G_2, & G_3, \dots, & G_{k-1}, & G_k. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & k & 2 \end{array}$$

Тогда степень многочленов $G_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \dots + Z_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$ относительно коэффициентов системы (33.1), обозначенная через N_{G_k}, запишется в виде

$$N_{G_k} = m_{G_k} + \frac{k(k-1)}{2} + 1,$$

откуда получаем

$$N_{G_k} = \frac{1}{2}(3k^2 + 7k + 2). \tag{33.28}$$

Это и есть степень однородности многочленов $G_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \dots + Z_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$ относительно коэффициентов системы (33.1), которые содержатся в многочлене типа (δ, d_1, d_2), где δ–степень однородности многочлена относительно x и y, d_1–степень однородности многочлена относительно коэффициентов линейной части, а d_2–степень однородности многочлена относительно коэффициентов кубической части системы $s(1,3)$ из (33.1). Так как $\delta = 2(k+1)$ и $d_2 = k$, то $d_1 = N_{G_k} - 2k$.

Исходя из этого находим, что комитант веса -1 дифференциальной системы $s(1,3)$ из (33.1), который содержит в качестве полуинварианта $G_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \dots + Z_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$ и соответствует величине G_k для $k = 1, 2, 3, \dots$, принадлежит типу

$$\left(2(k+1), \frac{1}{2}(3k^2 + 5k + 2), k\right), \tag{33.29}$$

где $2(k+1)$–степень однородности комитанта относительно фазовых переменных x, y, $\dfrac{1}{2}(3k^2 + 5k + 2)$ степень однородности комитанта относительно коэффициентов линейной части c, d, e, f, а k–степень однородности комитанта относительно коэффициентов кубической части p, q, r, s, t, u, v, w дифференциальной системы $s(1,3)$ из (33.1).

Следовательно, выражения $G_{k,i_1,i_2,...,i_k} + B_{k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$, которые определяют комитанты типа (33.29), соответствующие величинам G_k $(k = 1, 2, 3, ...)$, будем называть *обобщенными фокусными псевдовеличинами*, а комитанты типа (33.29) для $k = 1, 2, 3, ...$ будем называть *комитантами, которые содержат в качестве коэффициентов обобщенные фокусные псевдовеличины* $G_{k,i_1,i_2,...,i_k} + B_{k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$.

Отметим, что пространства $S^{(2(k+1),\frac{1}{2}(3k^2+5k+2),k)}$ являются обобщенными записями пространств (33.18), (33.23), (33.25) для $k = 1, 2, 3, ...$ алгебры Сибирского $S_{1,3}$.

§34. О максимальном числе алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы $s(1,3)$

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,3)$ из (33.1). В этом случае согласно работе [20] с помощью теоремы 22.1 имеет место

Теорема 34.1. *Размерность линейного пространства центро-аффинных комитантов типа* $(d) = (\delta, d_1, d_2)$ *для дифференциальной системы* $s(1,3)$ *из* (33.1), *обозначенная через* $dim_{\mathbb{R}}V_{1,3}^{(d)}$, *равна коэффициентам при одночлене* $u^{\delta}b^{d_1}d^{d_2}$ *в разложении обобщенного ряда Гильберта из* (22.3)– (22.5) *для алгебры Сибирского* $S_{1,3}$ *комитантов рассмотренной системы.*

Рассмотрим подалгебру $S'_{1,3} \subset S_{1,3}$, которую запишем в виде

$$S'_{1,3} = \bigoplus_{(d)} S_{1,3}^{(d')}, \tag{34.1}$$

где через $S_{1,3}^{(d')}$ обозначены линейные пространства

$$S_{1,3}^{(0,0,0)} = \mathbb{R},\ S_{1,3}^{(0,1,0)}, ..., S_{1,3}^{(2(k+1),\frac{1}{2}(3k^2+5k+2),k)},\ k = 1, 2, ..., \tag{34.2}$$

а также пространства из $S_{1,3}$, которые содержат всевозможные их произведения.

Так как алгебра $S'_{1,3}$ является градуированной подалгеброй в конечно-определенной алгебре $S_{1,3}$, то согласно предложению 19.1 получаем

$\varrho(S'_{1,3}) \le \varrho(S_{1,3})$. Из этого неравенства и из того что согласно теореме 22.2 имеем $\varrho(S_{1,3}) = 11$, то согласно примечанию 11.2 о полуинвариантах и того что обобщенные фокусные псевдовеличины являются коэффициентами некоторых комитантов, справедлива

Теорема 34.2. *Максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин в проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы* (33.1), *не превышает* 11.

Согласно предложению 19.2, замечанию 29.1 и равенству (29.3) следует, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин L_k $(k = \overline{1, \infty})$ не может превысить максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин $G_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} + B_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \dots + Z_{k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$.

Отсюда с помощью теоремы 34.2 получаем

Следствие 34.1. *Верхняя граница числа алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы* (33.1), *не превышает* 11.

Рассмотрим типы пространства $S_{1,3}^{(d')}$ из (34.2) для $d' = \delta' + d'_1 + d'_2 \le 50$, которые получаются из разложении в степенной ряд дроби

$$\frac{1}{(1-b)(1-u^4b^5d)(1-u^6b^{12}d^2)(1-u^8b^{22}d^3)(1-u^{10}b^{35}d^4)}, \qquad (34.3)$$

где $u^{\delta'} b^{d'_1} d^{d'_2}$ показывает тип пространства $S_{1,3}^{(d')}$ для $(d') = (\delta', d'_1, d'_2)$. Принимая во внимание эти типы и обобщенный ряд Гильберта (22.3)–(22.5) алгебры $S_{1,3}$ можем записать разложение ряда Гильберта алгебры $S'_{1,3}$ для $d' = \delta' + d'_1 + d'_2 \le 50$, которое имеет вид

$$H(S'_{1,3}, u, b, d) = 1 + b + 2b^2 + 2b^3 + 3b^4 + 3b^5 + 4b^6 + 4b^7 + 5b^8 + 5b^9 +$$
$$+6b^{10} + 6b^{11} + 7b^{12} + 7b^{13} + 8b^{14} + 8b^{15} + 9b^{16} + 9b^{17} + 10b^{18} + 10b^{19} +$$
$$+11b^{20} + 11b^{21} + 12b^{22} + 12b^{23} + 13b^{24} + 13b^{25} + 14b^{26} + 14b^{27} + 15b^{28} +$$
$$+15b^{29} + 16b^{30} + 16b^{31} + 17b^{32} + 17b^{33} + 18b^{34} + 18b^{35} + 19b^{36} + 19b^{37} +$$
$$+20b^{38} + 20b^{39} + 21b^{40} + 21b^{41} + 22b^{42} + 22b^{43} + 23b^{44} + 23b^{45} + 24b^{46} +$$
$$+24b^{47} + 25b^{48} + 25b^{49} + 26b^{50} + (18b^5d + 22b^6d + 26b^7d + 30b^8d + 34b^9d +$$
$$+38b^{10}d + 42b^{11}d + 46b^{12}d + 50b^{13}d + 54b^{14}d + 58b^{15}d + 62b^{16}d +$$
$$+66b^{17}d + 70b^{18}d + 74b^{19}d + 78b^{20}d + 82b^{21}d + 86b^{22}d + 90b^{23}d +$$
$$+94b^{24}d + 98b^{25}d + 102b^{26}d + 106b^{27}d + 110b^{28}d + 114b^{29}d +$$
$$+118b^{30}d + 122b^{31}d + 126b^{32}d + 130b^{33}d + 134b^{34}d + 138b^{35}d +$$

$$+142b^{36}d+146b^{37}d+150b^{38}d+154b^{39}d+158b^{40}d+162b^{41}d+166b^{42}d+$$
$$+170b^{43}d+174b^{44}d+178b^{45}d)u^4+(174b^{12}d^2+193b^{13}d^2+208b^{14}d^2+$$
$$+227b^{15}d^2+242b^{16}d^2+261b^{17}d^2+276b^{18}d^2+295b^{19}d^2+310b^{20}d^2+$$
$$+329b^{21}d^2+344b^{22}d^2+363b^{23}d^2+378b^{24}d^2+397b^{25}d^2+412b^{26}d^2+$$
$$+431b^{27}d^2+446b^{28}d^2+465b^{29}d^2+480b^{30}d^2+499b^{31}d^2+$$
$$+514b^{32}d^2+533b^{33}d^2+548b^{34}d^2+567b^{35}d^2+582b^{36}d^2+$$
$$601b^{37}d^2+616b^{38}d^2+635b^{39}d^2+650b^{40}d^2+669b^{41}d^2+$$
$$+684b^{42}d^2)u^6+(136b^{10}d^2+152b^{11}d^2+172b^{12}d^2+188b^{13}d^2+$$
$$+208b^{14}d^2+224b^{15}d^2+244b^{16}d^2+260b^{17}d^2+280b^{18}d^2+$$
$$+296b^{19}d^2+316b^{20}d^2+332b^{21}d^2+352b^{22}d^2+368b^{23}d^2+$$
$$+388b^{24}d^2+404b^{25}d^2+424b^{26}d^2+440b^{27}d^2+460b^{28}d^2+$$
$$+476b^{29}d^2+496b^{30}d^2+512b^{31}d^2+532b^{32}d^2+548b^{33}d^2+$$
$$+568b^{34}d^2+584b^{35}d^2+604b^{36}d^2+620b^{37}d^2+640b^{38}d^2+$$
$$+656b^{39}d^2+676b^{40}d^2+1098b^{22}d^3+1155b^{23}d^3+1212b^{24}d^3+$$
$$+1269b^{25}d^3+1326b^{26}d^3+1383b^{27}d^3+1440b^{28}d^3+1497b^{29}d^3+$$
$$+1554b^{30}d^3+1611b^{31}d^3+1668b^{32}d^3+1725b^{33}d^3+1782b^{34}d^3+$$
$$+1839b^{35}d^3+1896b^{36}d^3+1953b^{37}d^3+2010b^{38}d^3+2067b^{39}d^3)u^8+$$
$$+(791b^{17}d^3+850b^{18}d^3+909b^{19}d^3+968b^{20}d^3+1027b^{21}d^3+$$
$$+1086b^{22}d^3+1145b^{23}d^3+1204b^{24}d^3+1263b^{25}d^3+1322b^{26}d^3+$$
$$+1381b^{27}d^3+1440b^{28}d^3+1499b^{29}d^3+1558b^{30}d^3+1617b^{31}d^3+$$
$$+1676b^{32}d^3+1735b^{33}d^3+1794b^{34}d^3+1853b^{35}d^3+1912b^{36}d^3+$$
$$+1971b^{37}d^3+4904b^{35}d^4+5056b^{36}d^4)u^{10}+(630b^{15}d^3+690b^{16}d^3+$$
$$+750b^{17}d^3+810b^{18}d^3+870b^{19}d^3+930b^{20}d^3+990b^{21}d^3+1050b^{22}d^3+$$
$$+1110b^{23}d^3+1170b^{24}d^3+1230b^{25}d^3+1290b^{26}d^3+1350b^{27}d^3+$$
$$+1410b^{28}d^3+1470b^{29}d^3+1530b^{30}d^3+1590b^{31}d^3+1650b^{32}d^3+$$
$$+1710b^{33}d^3+1770b^{34}d^3+1830b^{35}d^3+3142b^{24}d^4+3299b^{25}d^4+$$
$$+3466b^{26}d^4+3623b^{27}d^4+3790b^{28}d^4+3947b^{29}d^4+4114b^{30}d^4+$$
$$+4271b^{31}d^4+4438b^{32}d^4+4595b^{33}d^4+4762b^{34}d^4)u^{12}+(2696b^{22}d^4+$$
$$+2865b^{23}d^4+3024b^{24}d^4+3193b^{25}d^4+3352b^{26}d^4+3521b^{27}d^4+$$
$$+3680b^{28}d^4+3849b^{29}d^4+4008b^{30}d^4+4177b^{31}d^4+4336b^{32}d^4)u^{14}+$$
$$+(2230b^{20}d^4+2390b^{21}d^4+2560b^{22}d^4+2720b^{23}d^4+2890b^{24}d^4+$$

$$
\begin{gathered}
+3050b^{25}d^4+3220b^{26}d^4+3380b^{27}d^4+3550b^{28}d^4+3710b^{29}d^4+\\
+3880b^{30}d^4+8817b^{29}d^5)u^{16}+7693b^{27}d^5u^{18}+6534b^{25}d^5u^{20}+\ldots
\end{gathered}
\tag{34.4}
$$

Отсюда обычный ряд Гильберта алгебры $S'_{1,3}$ имеет вид (первые 51 слагаемых):

$$
\begin{gathered}
H_{S'_{1,3}}(t)=H(S'_{1,3},t,t,t)=1+t+2t^2+2t^3+3t^4+3t^5+4t^6+\\
+4t^7+5t^8+5t^9+24t^{10}+28t^{11}+33t^{12}+37t^{13}+42t^{14}+46t^{15}+\\
+51t^{16}+55t^{17}+60t^{18}+64t^{19}+379t^{20}+418t^{21}+458t^{22}+\\
+497t^{23}+537t^{24}+576t^{25}+616t^{26}+655t^{27}+695t^{28}+734t^{29}+\\
+2195t^{30}+2353t^{31}+2512t^{32}+3768t^{33}+3984t^{34}+4199t^{35}+\\
+4415t^{36}+4630t^{37}+4846t^{38}+5061t^{39}+13345t^{40}+14046t^{41}+\\
+14758t^{42}+15459t^{43}+16171t^{44}+16872t^{45}+17584t^{46}+\\
+18285t^{47}+18997t^{48}+24602t^{49}+48510t^{50}+\ldots
\end{gathered}
\tag{34.5}
$$

Рассмотрим первые 51 слагаемых в разложении ряда Гильберта алгебры $SI_{1,3}$, которое согласно [20] получается из (22.3)–(22.5) следующим образом:

$$
\begin{gathered}
H_{SI_{1,3}}(t)=H(S_{1,3},0,t,t)=1+t+5t^2+9t^3+24t^4+42t^5+95t^6+160t^7+\\
+308t^8+506t^9+877t^{10}+1376t^{11}+2229t^{12}+3358t^{13}+5144t^{14}+\\
+7498t^{15}+10996t^{16}+15545t^{17}+22032t^{18}+30335t^{19}+41764t^{20}+\\
+56226t^{21}+75544t^{22}+99686t^{23}+131205t^{24}+170114t^{25}+219901t^{26}+\\
+280744t^{27}+357236t^{28}+449800t^{29}+564495t^{30}+702002t^{31}+870184t^{32}+\\
+1070195t^{33}+1311989t^{34}+1597351t^{35}+1938881t^{36}+2339064t^{37}+\\
+2813664t^{38}+3366216t^{39}+4016096t^{40}+4768162t^{41}+5646208t^{42}+\\
+6656574t^{43}+7828224t^{44}+9169512t^{45}+10715232t^{46}+12476184t^{47}+\\
+14494113t^{48}+16782555t^{49}+19391253t^{50}+\ldots
\end{gathered}
\tag{34.6}
$$

Так как для рядов (34.5) и (34.6) имеет место неравенство

$$H_{S'_{1,3}}(t)\le H_{SI_{1,3}}(t),$$

то в предположении, что это неравенство имеет место и для остальных слагаемых рассмотренных рядов, получаем неравенство

$$\varrho(S'_{1,3})\le\varrho(SI_{1,3}).$$

Отметим, что $S'_{1,3}$ не является подалгеброй в $SI_{1,3}$.

Так как из теоремы 22.2 имеем $\varrho(SI_{1,3}) = 9$, то согласно последнему неравенству получаем

Примечание 34.1. *Однин из путей улучшения верхней границы числа алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин (а также фокусных величин) для дифференциальной системы* (33.1), *которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для данной дифференциальной системы, находится в предполагаемом неравенстве* $\varrho(S'_{1,3}) \leq 9$.

Но, с другой стороны, легко можно проверить с помощью (34.5), что для первых 51 слагаемых имеем

$$H_{S'_{1,3}}(t) < \frac{1}{(1-t)^7}.$$

Если предположим, что это неравенство верно для всех слагаемых рядов $H_{S'_{1,3}}(t)$ и $(1-t)^{-7}$, то возможно существует улучшение верхней границы числа алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы $s(1,3)$ из (33.1), которое выражается неравенством $\varrho(S'_{1,3}) < 7$.

§35. Дифференциальная система $s(1,4)$ и алгебраически-независимые обобщенные фокусные псевдовеличины

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,4)$, которую запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + dy + gx^4 + 4hx^3y + 6ix^2y^2 + 4jxy^3 + ky^4, \\ \dot{y} &= ex + fy + lx^4 + 4mx^3y + 6nx^2y^2 + 4oxy^3 + py^4 \end{aligned} \tag{35.1}$$

с конечно-определенной градуированной алгеброй унимодулярных коmитантов $S_{1,4}$ [20]. Для этой системы запишем фунцию (29.2) в виде

$$\begin{gathered} U = k_2 + a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 + b_0x^4 + 4b_1x^3y + 6b_2x^2y^2 + \\ +4b_3xy^3 + b_4y^4 + c_0x^5 + 5c_1x^4y + 10c_2x^3y^2 + 10c_3x^2y^3 + 5c_4xy^4 + \\ +c_5y^5 + d_0x^6 + 6d_1x^5y + 15d_2x^4y^2 + 20d_3x^3y^3 + 15d_4x^2y^4 + 6d_5xy^5 + \\ +d_6y^6 + e_0x^7 + 7e_1x^6y + 21e_2x^5y^2 + 35e_3x^4y^3 + 21e_5x^2y^5 + 7e_6xy^6 + \\ +e_7y^7 + f_0x^8 + 8f_1x^7y + 28f_2x^6y^2 + 56f_3x^5y^3 + 70f_4y^4 + 56f_5x^3y^5 + \\ +28f_6x^2y^6 + 8f_7xy^7 + f_8y^8 + g_0x^9 + 9g_1x^8y + 36g_2x^7y^2 + 84g_3x^6y^3 + \end{gathered}$$

$$+126g_4x^5y^4+126g_5x^4y^5+84g_6x^3y^6+36g_7x^2y^7+9g_8xy^8+g_9y^9+$$
$$+h_0x^{10}+10h_1x^9y+45h_2x^8y^2+120h_3x^7y^3+210h_4x^6y^4+252h_5x^5y^5+$$
$$+210h_6x^4y^6+120h_7x^3y^7+45h_8x^2y^8+10h_9xy^9+h_{10}y^{10}+i_0x^{11}+$$
$$+11i_1x^{10}y+55i_2x^9y^2+165i_3x^8y^3+330i_4x^7y^4+462i_5x^6y^5+462i_6x^5y^6+$$
$$+330i_7x^4y^7+55i_9x^2y^9+11i_{10}xy^{10}+i_{11}y^{11}+j_0x^{12}+12j_1x^{11}y+$$
$$+165i_8x^3y^8+66j_2x^{10}y^2+220j_3x^9y^3+495j_4x^8y^4+792j_5x^7y^5+$$
$$+924j_6x^6y^6+792j_7x^5y^7+495j_8x^4y^8+220j_9x^3y^9+66j_{10}x^2y^{10}+$$
$$+12j_{11}xy^{11}+j_{12}y^{12}+k_0x^{13}+13k_1x^{12}y+78k_2x^{11}y^2+286k_3x^{10}y^3+$$
$$+715k_4x^9y^4+1287k_5x^8y^5+1716k_6x^7y^6+1716k_7x^6y^7+1287k_8x^5y^8+$$
$$+715k_9x^4y^9+286k_{10}x^3y^{10}+78k_{11}x^2y^{11}+13k_{12}xy^{12}+k_{13}y^{13}+$$
$$+l_0x^{14}+14l_1x^{13}y+91l_2x^{12}y^2+364l_3x^{11}y^3+1001l_4x^{10}y^4+$$
$$+2002l_5x^9y^5+3003l_6x^8y^6+3432l_7x^7y^7+3003l_8x^6y^8+$$
$$+2002l_9x^5y^9+1001l_{10}x^4y^{10}+364l_{11}x^3y^{11}+91l_{12}x^2y^{12}+$$
$$+14l_{13}xy^{13}+l_{14}y^{14}+...,\tag{35.2}$$

где $k_2\not\equiv 0$ из (28.6), а $a_0,a_1,...,l_{13},l_{14},...$–неизвестные коэффициенты.

Тождество (29.1) вдоль траекторий дифференциальной системы (35.1) с функцией (35.2) разлагается на следующие системы уравнений (равенство (29.4) опущено):

$$\begin{aligned}
x^3 &: 3a_0c+3a_1e=0,\\
x^2y &: 6a_1c+3a_0d+6a_2e+3a_1f=0,\\
xy^2 &: 3a_2c+6a_1d+3a_3e+6a_2f=0,\\
y^3 &: 3a_2d+3a_3f=0;
\end{aligned}\tag{35.3}$$

$$\begin{aligned}
x^4 &: 4b_0c+4b_1e-e^2G_1=0,\\
x^3y &: 12b_1c+4b_0d+12b_2e+4b_1f+2ceG_1-2efG_1=0,\\
x^2y^2 &: 12b_2c+12b_1d+12b_3e+12b_2f-c^2G_1+2deG_1+\\
&\quad +2cfG_1-f^2G_1=0,\\
xy^3 &: 4b_3c+12b_2d+4b_4e+12b_3f-2cdG_1+2dfG_1=0,\\
y^4 &: 4b_3d+4b_4f-d^2G_1=0;
\end{aligned}\tag{35.4}$$

$$x^5: 5cc_0+5c_1e-2eg+cl-fl=0,$$

$$
\begin{aligned}
x^4y &: 20cc_1 + 5c_0d + 20c_2e + 5c_1f + cg - fg - 8eh + 2dl+\\
&\quad + 4cm - 4fm = 0,\\
x^3y^2 &: 30cc_2 + 20c_1d + 30c_3e + 20c_2f + 4ch - 4fh - 12ei+\\
&\quad + 8dm + 6cn - 6fn = 0,\\
x^2y^3 &: 20cc_3 + 30c_2d + 20c_4e + 30c_3f + 6ci - 6fi - 8ej + 12dn+\\
&\quad + 4co - 4fo = 0,\\
xy^4 &: 5cc_4 + 20c_3d + 5c_5e + 20c_4f + 4cj - 4fj - 2ek + 8do+\\
&\quad + cp - fp = 0,\\
y^5 &: 5c_4d + 5c_5f + ck - fk + 2dp = 0;
\end{aligned}
\tag{35.5}
$$

$$
\begin{aligned}
x^6 &: 6cd_0 + 6d_1e + 3a_0g + 3a_1l = -e^3G_2,\\
x^5y &: 6dd_0 + 30cd_1 + 30d_2e + 6d_1f + 6a_1g + 12a_0h + 6a_2l+\\
&\quad + 12a_1m = 3ce^2G_2 - 3e^2fG_2,\\
x^4y^2 &: 30dd_1 + 60cd_2 + 60d_3e + 30d_2f + 3a_2g + 24a_1h + 18a_0i+\\
&\quad + 3a_3l + 24a_2m + 18a_1n = -3c^2eG_2 + 3de^2G_2+\\
&\quad + 6cefG_2 - 3ef^2G_2,\\
x^3y^3 &: 60dd_2 + 60cd_3 + 60d_4e + 60d_3f + 12a_2h + 36a_1i + 12a_0j+\\
&\quad + 12a_3m + 36a_2n + 12a_1o = c^3G_2 - 6cdeG_2 - 3c^2fG_2+\\
&\quad + 6defG_2 + 3cf^2G_2 - f^3G_2,\\
x^2y^4 &: 60dd_3 + 30cd_4 + 30d_5e + 60d_4f + 18a_2i + 24a_1j + 3a_0k+\\
&\quad + 18a_3n + 24a_2o + 3a_1p = 3c^2dG_2 - 3d^2eG_2 - 6cdfG_2+\\
&\quad + 3df^2G_2,\\
xy^5 &: 30dd_4 + 6cd_5 + 6d_6e + 30d_5f + 12a_2j + 6a_1k + 12a_3o+\\
&\quad + 6a_2p = 3cd^2G_2 - 3d^2fG_2,\\
y^6 &: 6dd_5 + 6d_6f + 3a_2k + 3a_3p = d^3G_2;
\end{aligned}
\tag{35.6}
$$

$$
\begin{aligned}
x^7 &: 7ce_0 + 7ee_1 + 4b_0g + 4b_1l = 0,\\
x^6y &: 7de_0 + 42ce_1 + 42ee_2 + 7e_1f + 12b_1g + 16b_0h + 12b_2l+\\
&\quad + 16b_1m = 0,\\
x^5y^2 &: 42de_1 + 105ce_2 + 105ee_3 + 42e_2f + 12b_2g + 48b_1h+\\
&\quad + 24b_0i + 12b_3l + 48b_2m + 24b_1n = 0,\\
x^4y^3 &: 105de_2 + 140ce_3 + 140ee_4 + 105e_3f + 4b_3g + 48b_2h+\\
&\quad + 72b_1i + 16b_0j + 4b_4l + 48b_3m + 72b_2n + 16b_1o = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3y^4 &: 140de_3 + 105ce_4 + 105ee_5 + 140e_4f + 16b_3h + 72b_2i+\\
&\quad + 48b_1j + 4b_0k + 16b_4m + 72b_3n + 48b_2o + 4b_1p = 0,\\
x^2y^5 &: 105de_4 + 42ce_5 + 42ee_6 + 105e_5f + 24b_3i + 48b_2j+\\
&\quad + 12b_1k + 24b_4n + 48b_3o + 12b_2p = 0,\\
xy^6 &: 42de_5 + 7ce_6 + 7ee_7 + 42e_6f + 16b_3j + 12b_2k + 16b_4o+\\
&\quad + 12b_3p = 0,\\
y^7 &: 7de_6 + 7e_7f + 4b_3k + 4b_4p = 0;
\end{aligned}
\tag{35.7}
$$

$$
\begin{aligned}
x^8 &: 8cf_0 + 8ef_1 + 5c_0g + 5c_1l = e^4G_3,\\
x^7y &: 8df_0 + 56cf_1 + 8ff_1 + 56ef_2 + 20c_1g + 20c_0h + 20c_2l+\\
&\quad + 20c_1m = -4ce^3G_3 + 4e^3fG_3,\\
x^6y^2 &: 56df_1 + 168cf_2 + 56ff_2 + 168ef_3 + 30c_2g + 80c_1h+\\
&\quad + 30c_0i + 30c_3l + 80c_2m + 30c_1n = 6c^2e^2G_3 - 4de^3G_3-\\
&\quad - 12ce^2fG_3 + 6e^2f^2G_3,\\
x^5y^3 &: 168df_2 + 280cf_3 + 168ff_3 + 280ef_4 + 20c_3g + 120c_2h+\\
&\quad + 120c_1i + 20c_0j + 20c_4l + 120c_3m + 120c_2n + 20c_1o =\\
&\quad = -4c^3eG_3 + 12cde^2G_3 + 12c^2efG_3 - 12de^2fG_3-\\
&\quad - 12cef^2G_3 + 4ef^3G_3,\\
x^4y^4 &: 280df_3 + 280cf_4 + 280ff_4 + 280ef_5 + 5c_4g + 80c_3h+\\
&\quad + 180c_2i + 80c_1j + 5c_0k + 5c_5l + 80c_4m + 180c_3n + 80c_2o+\\
&\quad + 5c_1p = c^4G_3 - 12c^2deG_3 + 6d^2e^2G_3 - 4c^3fG_3+\\
&\quad + 24cdefG_3 + 6c^2f^2G_3 - 12def^2G_3 - 4cf^3G_3 + f^4G_3,\\
x^3y^5 &: 280df_4 + 168cf_5 + 280ff_5 + 168ef_6 + 20c_4h + 120c_3i+\\
&\quad + 120c_2j + 20c_1k + 20c_5m + 120c_4n + 120c_3o + 20c_2p =\\
&\quad 4c^3dG_3 - 12cd^2eG_3 - 12c^2dfG_3+\\
&\quad + 12d^2efG_3 + 12cdf^2G_3 - 4df^3G_3,\\
x^2y^6 &: 168df_5 + 56cf_6 + 168ff_6 + 56ef_7 + 30c_4i + 80c_3j + 30c_2k+\\
&\quad + 30c_5n + 80c_4o + 30c_3p = 6c^2d^2G_3 - 4d^3eG_3-\\
&\quad - 12cd^2fG_3 + 6d^2f^2G_3,\\
xy^7 &: 56df_6 + 8cf_7 + 56ff_7 + 8ef_8 + 20c_4j + 20c_3k + 20c_5o+\\
&\quad + 20c_4p = 4cd^3G_3 - 4d^3fG_3,\\
y^8 &: 8df_7 + 8ff_8 + 5c_4k + 5c_5p = d^4G_3;
\end{aligned}
\tag{35.8}
$$

$$
\begin{aligned}
x^9 &: 6d_0g + 9cg_0 + 9eg_1 + 6d_1l = 0,\\
x^8y &: 30d_1g + 9dg_0 + 72cg_1 + 9fg_1 + 72eg_2 + 24d_0h + 30d_2l+\\
&\quad + 24d_1m = 0,\\
x^7y^2 &: 60d_2g + 72dg_1 + 252cg_2 + 72fg_2 + 252eg_3 + 120d_1h+\\
&\quad + 36d_0i + 60d_3l + 120d_2m + 36d_1n = 0,\\
x^6y^3 &: 60d_3g + 252dg_2 + 504cg_3 + 252fg_3 + 504eg_4 + 240d_2h+\\
&\quad + 180d_1i + 24d_0j + 60d_4l + 240d_3m + 180d_2n + 24d_1o = 0,\\
x^5y^4 &: 30d_4g + 504dg_3 + 630cg_4 + 504fg_4 + 630eg_5 + 240d_3h+\\
&\quad + 360d_2i + 120d_1j + 6d_0k + 30d_5l + 240d_4m + 360d_3n+\\
&\quad + 120d_2o + 6d_1p = 0,\\
x^4y^5 &: 6d_5g + 630dg_4 + 504cg_5 + 630fg_5 + 504eg_6 + 120d_4h+\\
&\quad + 360d_3i + 240d_2j + 30d_1k + 6d_6l + 120d_5m + 360d_4n+\\
&\quad + 240d_3o + 30d_2p = 0,\\
x^3y^6 &: 504dg_5 + 252cg_6 + 504fg_6 + 252eg_7 + 24d_5h + 180d_4i+\\
&\quad + 240d_3j + 60d_2k + 24d_6m + 180d_5n + 240d_4o + 60d_3p = 0,\\
x^2y^7 &: 252dg_6 + 72cg_7 + 252fg_7 + 72eg_8 + 36d_5i + 120d_4j+\\
&\quad + 60d_3k + 36d_6n + 120d_5o + 60d_4p = 0,\\
xy^8 &: 72dg_7 + 9cg_8 + 72fg_8 + 9eg_9 + 24d_5j + 30d_4k + 24d_6o+\\
&\quad + 30d_5p = 0,\\
y^9 &: 9dg_8 + 9fg_9 + 6d_5k + 6d_6p = 0;
\end{aligned}
\tag{35.9}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{10} &: 7e_0g + e^5G_4 + 10ch_0 + 10eh_1 + 7e_1l = 0,\\
x^9y &: 42e_1g - 5ce^4G_4 + 5e^4fG_4 + 28e_0h + 10dh_0 + 90ch_1 + 10fh_1+\\
&\quad + 90eh_2 + 42e_2l + 28e_1m = 0,\\
x^8y^2 &: 105e_2g + 10c^2e^3G_4 - 5de^4G_4 - 20ce^3fG_4 + 10e^3f^2G_4 + 168e_1h+\\
&\quad + 90dh_1 + 360ch_2 + 90fh_2 + 360eh_3 + 42e_0i + 105e_3l + 168e_2m+\\
&\quad 42e_1n = 0,\\
x^7y^3 &: 140e_3g - 10c^3e^2G_4 + 20cde^3G_4 + 30c^2e^2fG_4 - 20de^3fG_4-\\
&\quad + 30ce^2f^2G_4 + 10e^2f^3G_4 + 420e_2h + 360dh_2 + 840ch_3 + 360fh_3+\\
&\quad + 840eh_4 + 252e_1i + 28e_0j + 140e_4l + 420e_3m + 252e_2n + 28e_1o = 0,\\
x^6y^4 &: 105e_4g + 5c^4eG_4 - 30c^2de^2G_4 + 10d^2e^3G_4 - 20c^3efG_4+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+60cde^2fG_4+30c^2ef^2G_4-30de^2f^2G_4-20cef^3G_4+\\
&+5ef^4G_4+560e_3h+840dh_3+1260ch_4+840fh_4+\\
&+1260eh_5+630e_2i+168e_1j+7e_0k+105e_5l+560e_4m+\\
&+630e_3n+168e_2o+7e_1p=0,\\
x^5y^5:\ &42e_5g-c^5G_4+20c^3deG_4-30cd^2e^2G_4+5c^4fG_4-\\
&-60c^2defG_4+30d^2e^2fG_4-10c^3f^2G_4+60cdef^2G_4+\\
&+10c^2f^3G_4-20def^3G_4-5cf^4G_4+f^5G_4+420e_4h+\\
&+1260dh_4+1260ch_5+1260fh_5+1260eh_6+840e_3i+\\
&+420e_2j+42e_1k+42e_6l+420e_5m+840e_4n+\\
&+420e_3o+42e_2p=0,\\
x^4y^6:\ &7e_6g-5c^4dG_4+30c^2d^2eG_4-10d^3e^2G_4+20c^3dfG_4-\\
&-60cd^2efG_4-30c^2df^2G_4+30d^2ef^2G_4+20cdf^3G_4-\\
&-5df^4G_4+168e_5h+1260dh_5+840ch_6+1260fh_6+\\
&+840eh_7+630e_4i+560e_3j+105e_2k+7e_7l+168e_6m+\\
&+630e_5n+560e_4o+105e_3p=0,\\
x^3y^7:\ &20cd^3eG_4-10c^3d^2G_4+30c^2d^2fG_4-20d^3efG_4-\\
&-30cd^2f^2G_4+10d^2f^3G_4+28e_6h+840dh_6+360ch_7+\\
&+840fh_7+360eh_8+252e_5i+420e_4j+140e_3k+28e_7m+\\
&+252e_6n+420e_5o+140e_4p=0,\\
x^2y^8:\ &5d^4eG_4-10c^2d^3G_4+20cd^3fG_4-10d^3f^2G_4+360dh_7\\
&++90ch_8+360fh_8+90eh_9+42e_6i+168e_5j+105e_4k+\\
&+42e_7n+168e_6o+105e_5p=0,\\
xy^9:\ &5d^4fG_4-5cd^4G_4+10eh_{10}+90dh_8+10ch_9+90fh_9+\\
&+28e_6j+42e_5k+28e_7o+42e_6p=0,\\
y^{10}:\ &10fh_{10}-d^5G_4+10dh_9+7e_6k+7e_7p=0;
\end{aligned}
\tag{35.10}
$$

Очевидно, что системы линейных уравнений (35.3)–(35.10) относительно неизвестных a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1,...,b_4, c_0, c_1,...,c_5, d_0, d_1,...,d_6, e_0, e_1,...,e_7, l_0, l_1,...,l_{14}, f_0, f_1,...,f_8,..., G_1, G_2, G_3, ... можно рассматривать как единую систему, которая может быть продолжена, присоединением после последнего уравнения из (35.10) бесконечного числа уравнений, которые получаются вследствие равенства коэффициентов при $x^\alpha y^\beta$ для $\alpha+\beta>10$ в тождестве (29.1).

Для получения постоянной G_1 рассмотрим систему (35.4), которая содержит постоянные $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, G_1$. Запишем эту систему в матричной форме

$$A_1 B_1 = C_1, \tag{35.11}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4c & 4e & 0 & 0 & 0 & -e^2 \\ 4d & 12c+4f & 12e & 0 & 0 & 2ce-2ef \\ 0 & 12d & 12c+12f & 12e & 0 & 2de+2cf-c^2-f^2 \\ 0 & 0 & 12d & 4c+12f & 4e & -2cd+2df \\ 0 & 0 & 0 & 4d & 4f & -d^2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35.12}$$

Отметим, что элементы первых 5-ти столбцов матрицы A_1 из (35.12) являются линейными функциями от коэффициентов системы $s(1,4)$ из (35.1), а ненулевые элементы 6-го столбца (соответствующие в произведении (35.11) постоянной G_1) имеют степень 2 относительно этих коэффициентов. Так как система (35.4) состоит из 5-ти уравнений с 6-ю неизвестными, то одна из них может быть объявлена свободной. В качестве свободной неизвестной в системе (35.4) может быть взята одна из неизвестных b_i для фиксированого $i = \overline{0,4}$. Тогда из системы уравнений (35.4) получаем

$$G_1 = \frac{B_{1,i} b_i}{\sigma_{1,i}} \tag{35.13}$$

для фиксированого i, равного $0,1,2,3,4$ где $B_{1,i}, \sigma_{1,i}$ являются многочленами от коэффициентов системы (35.1), а b_i–неопределенные коэффициенты функции $U(x,y)$ из (35.2). Получаем, что одно частное решение системы (35.4) можеть быть взято $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$, поэтому G_1 можно считать равным нулю.

Для получения постоянной G_2 рассмотрим системы (35.3), (35.6). Полученная система состоит из 4-х уравнений (35.3) для определения $a_i,\ i = \overline{0,4}$, к которыми добавляется еще 7 уравнений, содержащих G_2. Записывая данные уравнения в матричной форме и выполняя аналогичные рассуждения, как в вышеупомянутом случае, получаем

$$G_2 = \frac{D_{2,i} d_i}{\sigma_{2,i}}, \tag{35.14}$$

для каждого $i = \overline{0,6}$. Так как система (35.3) имеет решение $a_0 = a_1 = = a_2 = a_3 = 0$, получаем что частное решение системы (35.3), (35.6) является $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 0$. Таким образом G_2 можно считать равным нулю.

Для получения постоянной G_3 используем матричное уравнение (см. приложение 7)

$$A_3 B_3 = C_3, \tag{35.15}$$

Так как размерность матрицы A_3 равна 15×16, то очевидно, что имеем одну свободную неизвестную. Как следствие, принимая в качестве свободной неизвестной одну из переменных f_i $(i \in \{0, 1, ..., 8\})$, с помощью правила Крамера для системы (35.15) для любого фиксированного i получаем

$$G_3 = \frac{G_{3,i} + F_{3,i} f_i}{\sigma_{3,i}}, \tag{35.16}$$

где $G_{3,i}, F_{3,i}, \sigma_{3,i}$ являются многочленами от коэффициентов системы (35.1), а f_i–неопределенные коэффициенты функции $U(x, y)$ из (35.2).

Нас интересует степень многочленов $G_{3,i}$ относительно коэффициентов системы $s(1, 4)$ из (35.1). Очевидно, что указанная степень совпадает со степенью определителя Крамера Δ_{G_3}. Таким образом, степень $G_{3,i}$ относительно коэффициентов системы $s(1, 4)$ из (35.1) будет $degG_3 = 16$ для всех $i = \overline{0,8}$. Принимая во внимание размерность системы (35.15), получаем, что $G_{3,i}$ имеет тип $(0, 14, 2)$, то есть $G_{3,i}$ является однородным многочленом степени 14 относительно коэффициентов линейной части и однородным степени 2 относительно коэффициентов неоднородности четвертого порядка системы $s(1, 4)$ из (35.1). Ноль в $(0, 14, 2)$ показывает, что выражение $G_{3,i}$ не содержит фазовые переменные x, y.

Так как $G_{3,i}$ из (35.16) являются однородными многочленами относительно коэффициентов дифференциальной системы $s(1, 4)$ из (35.1), то согласно [17], для $i = \overline{0,8}$ находим, что они являются многочленами изобарности веса

$$(7, -1),\ (6, 0),\ (5, 1),\ (4, 2),\ (3, 3),\ (2, 4),\ (1, 5),\ (0, 6),\ (-1, 7).$$

Отметим также, что $\sigma_{3,i}$ являются многочленами только от коэффициентов линейной части c, d, e, f системы $s(1, 4)$ из (35.1).

Для дифференциальной системы (35.1), используя формулу веса комитанта (14.3), получаем, что числители дробей (35.16) могут быть коэффициентами в комитантах веса -1 типа $(8, 14, 2)$. С помощью дифференциального оператора Ли D_3 из (35.20) для дифференциальной системы (35.1) получаем систему из 8-ми линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$
\begin{gathered}
D_3(G_{3,0}+F_{3,0}f_0)=G_{3,1}+F_{3,1}f_1,\ D_3(G_{3,1}+F_{3,1}f_1)=-G_{3,2}-F_{3,2}f_2,\\
-D_3(G_{3,2}+F_{3,2}f_2)=G_{3,3}+F_{3,3}f_3,\ D_3(G_{3,3}+F_{3,3}f_3)=-G_{3,4}-F_{3,4}f_4,\\
-D_3(G_{3,4}+F_{3,4}f_4)=G_{3,5}+F_{3,5}f_5,\ D_3(G_{3,5}+F_{3,5}f_5)=-G_{3,6}-F_{3,6}f_6,\\
-D_3(G_{3,6}+F_{3,6}f_6)=G_{3,7}+F_{3,7}f_7,\ D_3(G_{3,7}+F_{3,7}f_7)=-G_{3,8}-F_{3,8}f_8
\end{gathered}
\tag{35.17}
$$

относительно 9-ти неизвестных $f_0, f_1, ..., f_8$. Согласно лемме 11.3 система (35.17) имеет бесконечное множество решений. Отметим, что частным решением этой системы является $f_0 = f_1 = ... = f_8 = 0$, для которой многочлен

$$
\begin{gathered}
f'_8(x,y)=G_{3,0}x^8-8G_{3,1}x^7y-4G_{3,2}x^6y^2+8G_{3,3}x^5y^3+\\
+2G_{3,4}x^4y^4-8G_{3,5}x^3y^5-4G_{3,6}x^2y^6+8G_{3,7}xy^7+G_{3,8}y^8
\end{gathered}
\tag{35.18}
$$

является центроаффинным комитантом дифференциальной системы (35.1). Это подверждается и теоремой 10.2 с операторами из §5 вида

$$
\begin{gathered}
X_1=x\frac{\partial}{\partial x}+D_1,\ X_2=y\frac{\partial}{\partial x}+D_2,\\
X_3=x\frac{\partial}{\partial y}+D_3,\ X_4=y\frac{\partial}{\partial y}+D_4,
\end{gathered}
\tag{35.19}
$$

где

$$
\begin{gathered}
D_1=d\frac{\partial}{\partial d}-e\frac{\partial}{\partial e}-3g\frac{\partial}{\partial g}-2h\frac{\partial}{\partial h}-i\frac{\partial}{\partial i}+k\frac{\partial}{\partial k}-4l\frac{\partial}{\partial l}-3m\frac{\partial}{\partial m}-\\
-2n\frac{\partial}{\partial n}-o\frac{\partial}{\partial o},\\
D_2=e\frac{\partial}{\partial c}+(f-c)\frac{\partial}{\partial d}-e\frac{\partial}{\partial f}+l\frac{\partial}{\partial g}+(m-g)\frac{\partial}{\partial h}+(n-2h)\frac{\partial}{\partial i}+\\
+(o-3i)\frac{\partial}{\partial j}+(p-4j)\frac{\partial}{\partial k}-l\frac{\partial}{\partial m}-2m\frac{\partial}{\partial n}-3n\frac{\partial}{\partial o}-4o\frac{\partial}{\partial p},\\
D_3=-d\frac{\partial}{\partial c}+(c-f)\frac{\partial}{\partial e}+d\frac{\partial}{\partial f}-4h\frac{\partial}{\partial g}-3i\frac{\partial}{\partial h}-2j\frac{\partial}{\partial i}-k\frac{\partial}{\partial j}+\\
+(g-4m)\frac{\partial}{\partial l}+(h-3n)\frac{\partial}{\partial m}+(i-2o)\frac{\partial}{\partial n}+(j-p)\frac{\partial}{\partial o}+k\frac{\partial}{\partial p},\\
D_4=-d\frac{\partial}{\partial d}+e\frac{\partial}{\partial e}-h\frac{\partial}{\partial h}-2i\frac{\partial}{\partial i}-3j\frac{\partial}{\partial j}-4k\frac{\partial}{\partial k}+l\frac{\partial}{\partial l}-\\
-n\frac{\partial}{\partial n}-2o\frac{\partial}{\partial o}-3p\frac{\partial}{\partial p},
\end{gathered}
\tag{35.20}
$$

для дифференциальной системы (35.1), для которой выполняются равенства

$$X_1(f_8') = X_4(f_8') = f_8',\ X_2(f_8') = X_3(f_8') = 0.$$

Очевидно, что дифференциальная система (35.17) имеет бесконечное множество решений $f_0, f_1, ..., f_8$, которые определяют центроаффинные комитанты типа $(8, 14, 2)$, которые записываются в виде

$$\begin{gathered} f_8''(x,y) = (G_{3,0} + F_{3,0}f_0)x^8 - 8(G_{3,1} + F_{3,1}f_1)x^7y - 4(G_{3,2}+ \\ +F_{3,2}f_2)x^6y^2 + 8(G_{3,3} + F_{3,3}f_3)x^5y^3 + 2(G_{3,4} + F_{3,4}f_4)x^4y^4- \\ -8(G_{3,5} + F_{3,5}f_5)x^3y^5 - 4(G_{3,6} + F_{3,6}f_6)x^2y^6 + 8(G_{3,7}+ \\ +F_{3,7}f_7)xy^7 + (G_{3,8} + F_{3,8}f_8)y^8. \end{gathered} \tag{35.21}$$

Согласно сказанному выше комитант (35.21) принадлежит линейному пространству $S_{1,4}^{(8,14,2)}$.

Отметим, что комитант (35.18) на многообразии $\mathcal{V}$ из (28.9) для дифференциальной системы $s(1, 4)$ из (35.1) имеет вид

$$f_8'(x,y)|_{\mathcal{V}} = L_3(x^2+y^2)^4\ (G_3|_{\mathcal{V}} = L_3), \tag{35.22}$$

где

$$\begin{gathered} L_3 = 648(7gh + 18hi + 3gj + 18ij + 3hk + 7jk - 7gl - 3il - 8hm - 7lm- \\ -3gn + 3kn - 18mn + 8jo - 3lo - 18no + 3ip + 7kp - 3mp - 7op), \end{gathered}$$

является первой ненулевой постоянной Ляпунова дифференциальной системы (35.1) на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$.

Рассмотрим продолжение системы (35.3)–(35.10), содержащую постоянную G_{3k}, которая получается из тождества (29.1) для дифференциальной системы (35.1) и функции (35.2). Систему (35.3)–(35.10) запишем в матричной форме $A_{3k}B_{3k} = C_{3k}$. Обозначим через $m_{G_{3k}}$ число уравнений этой системы, а через $n_{G_{3k}}$–число неизвестных.

Отметим, что это число записывается в виде

$$m_{G_{3k}} = \underbrace{6+9}_{G_3} + \underbrace{12+15}_{G_6} + \underbrace{18+21}_{G_9} + \cdots + \underbrace{6k+3(2k+1)}_{G_{3k}},$$

для $k = 1, 2, 3, \ldots$. Отсюда получается

$$m_{G_{3k}} = 6k^2 + 9k. \tag{35.23}$$

Из этих систем получается

$$G_{3k} = \frac{G_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k} + B_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}}{\sigma_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}}. \tag{35.24}$$

Важно определить степень многочленов $G_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}+B_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1}+\cdots+Z_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (35.1).

Отметим, что степень ненулевого коэффициента многочлена при G_{3i} $(i=\overline{1,k})$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (35.1) в определителе Крамера порядка $m_{G_{3k}}$, когда коэффициенты при G_{3k} заменяются свободными членами указанной системы, составляет следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} G_3, & G_6, & G_9,\ldots, & G_{3(k-1)}, & G_{3k}. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 7 & 10 & 3(k-1)+1 & 2 \end{array}$$

Тогда степень многочленов $G_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}+B_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1}+\cdots+$ $+Z_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}$ относительно коэффициентов системы (35.1), обозначенная через $N_{G_{3k}}$, запишется в виде

$$N_{G_{3k}}=m_{G_{3k}}-k+\left[\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)+k\right],$$

откуда получаем

$$N_{G_{3k}}=\frac{1}{2}(15k^2+15k+2). \tag{35.25}$$

Это и есть степень однородности многочленов $G_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}+$ $+B_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1}+\cdots+Z_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}$ относительно коэффициентов системы (35.1), которые являются многочленами типа

$$(0,d_1,d_2), \tag{35.26}$$

где d_1–степень однородности многочлена относительно коэффициентов линейной части, а d_2–степень однородности многочлена относительно коэффициентов неоднородности четвертого порядка системы $s(1,4)$ из (35.1). Так как $d_2=2k$, то $d_1=N_{G_{3k}}-2k$. Поэтому согласно формуле (14.3) получаем, что $\delta=2(3k+1)$, когда вес $g=-1$.

Так находим, что комитант веса -1 системы $s(1,4)$ из (35.1), который содержит в качестве полуинварианта (коэффициент при наивысшей степени x) $G_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}+B_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1}+\cdots+Z_{3k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}$ соответствующий постоянной G_{3k} для $k=1,2,3,\ldots$ ($G_n=0$ если $n\neq 3k$), принадлежит типу

$$\left(2(3k+1),\frac{1}{2}(15k^2+11k+2),2k\right), \tag{35.27}$$

где $2(3k+1)$–степень однородности комитанта относительно фазовых переменных x, y, $\dfrac{1}{2}(15k^2+11k+2)$–степень однородности комитанта относительно коэффициентов линейной части, а $2k$–степень однородности комитанта относительно коэффициентов неоднородности четвертого порядка системы $s(1,4)$ из (35.1).

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,4)$ из (35.1). В этом случае согласно работе [20] с помощью теоремы 23.1 справедлива

Теорема 35.1. *Размерность линейного пространства центроаффинных комитантов типа* $(d)=(\delta,d_1,d_2)$ *для дифференциальной системы* $s(1,4)$ *из* (35.1), *обозначенная через* $dim_{\mathbb{R}}V_{1,4}^{(d)}$, *равна коэффициенту при одночлене* $u^{\delta}b^{d_1}e^{d_2}$ *в разложении обобщенного ряда Гильберта из* (23.3)–(23.4) *для алгебры Сибирского* $S_{1,4}$ *комитантов рассмотренной системы.*

Рассмотрим подалгебру $S'_{1,4}\subset S_{1,4}$, которую запишем в виде

$$S'_{1,4}=\bigoplus_{(d)} S_{1,4}^{(d')}, \tag{35.28}$$

где через $S_{1,4}^{(d')}$ обозначены линейные пространства

$$S_{1,4}^{(0,0,0)}=\mathbb{R},\ S_{1,4}^{(0,1,0)},...,S_{1,4}^{2(3k+1),\frac{1}{2}(15k^2+11k+2),2k},\ k=1,2,..., \tag{35.29}$$

а также пространства из $S_{1,4}$, которые содержат всевозможные их произведения.

Так как алгебра $S'_{1,4}$ является градуированной подалгеброй в конечно-определенной алгебре $S_{1,4}$, то согласно предложению 19.1 получаем $\varrho(S'_{1,4})\le\varrho(S_{1,4})$. Из этого неравенства и теоремы 23.3 имеем $\varrho(S_{1,4})=13$. С учетом примечания 28.1 о полуинвариантах и того что обобщенные фокусные псевдовеличины являются коэффициентами при наивысших степенях некоторых комитантов, имеет место

Теорема 35.2. *Максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин в проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы* (35.1), *не превышает* 13.

Из предложения 19.2 и замечания 28.1 следует, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин L_k $(k=\overline{1,\infty})$ не может превысить максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин $G_{3k,i_1,i_2,...,i_k}+B_{3k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1}+\cdots+Z_{3k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$. Отсюда с помощью теоремы 35.2 получаем

Следствие 35.1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы* *центра и фокуса для дифференциальной системы* (35.1), *не превышает* 13.

Обобщенная производящая функция пространства $V_{1,4}$, состоящего из прямой суммы пространств (35.28), может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\Phi(V_{1,4},u,b,e)=dim_{\mathbb{R}}S_{1,4}^{(0,0,0)}+dim_{\mathbb{R}}S_{1,4}^{(0,1,0)}b+\\+\sum_{k=1}^{\infty}dim_{\mathbb{R}}S_{1,4}^{(2(k+1),\frac{1}{2}(15k^2+11k+2),2k)}u^{2(k+1)}b^{\frac{1}{2}(15k^2+11k+2)}e^{2k}.\end{gathered}\tag{35.30}$$

Используя компютер, разлагаем ряд Гильберта $H(S_{1,4},u,b,e)$ в степенной ряд. Тогда для (35.30) имеем

$$\begin{gathered}\Phi(V_{1,4},u,b,e)=1+b+153u^4b^{14}e^2+4589u^6b^{42}e^4+49632u^8b^{85}e^6+...\\+C_{2(k+1),\frac{1}{2}(15k^2+11k+2),2k}u^{2(k+1)}b^{\frac{1}{2}(15k^2+11k+2)}e^{2k}+...,\end{gathered}\tag{35.31}$$

где $C_{2(k+1),\frac{1}{2}(15k^2+11k+2),2k}$–неопределенный коэффициент.

С помощью этой обобщенной производящей функции и ряда Гильберта $H(S_{1,4},u,b,e)$ из теоремы 23.1 были получены первые слагаемые до $u^8b^{85}e^6$ в ряде Гильберта $H(S'_{1,4},u,b,e)$:

$$\begin{gathered}H(S'_{1,4},u,b,e)=1+b+2b^2+2b^3+3b^4+3b^5+4b^6+4b^7+5b^8+5b^9+\\+6b^{10}+6b^{11}+7b^{12}+7b^{13}+8b^{14}+8b^{15}+9b^{16}+9b^{17}+10b^{18}+10b^{19}+\\+11b^{20}+11b^{21}+12b^{22}+12b^{23}+13b^{24}+13b^{25}+14b^{26}+14b^{27}+15b^{28}+\\+15b^{29}+16b^{30}+16b^{31}+17b^{32}+17b^{33}+18b^{34}+18b^{35}+19b^{36}+19b^{37}+\\+20b^{38}+20b^{39}+21b^{40}+21b^{41}+22b^{42}+22b^{43}+23b^{44}+23b^{45}+24b^{46}+\\+24b^{47}+25b^{48}+25b^{49}+26b^{50}+26b^{51}+27b^{52}+27b^{53}+28b^{54}+28b^{55}+\\+29b^{56}+29b^{57}+30b^{58}+30b^{59}+31b^{60}+31b^{61}+32b^{62}+32b^{63}+33b^{64}+\\+33b^{65}+34b^{66}+34b^{67}+35b^{68}+35b^{69}+36b^{70}+36b^{71}+37b^{72}+37b^{73}+\\+38b^{74}+38b^{75}+39b^{76}+39b^{77}+40b^{78}+40b^{79}+41b^{80}+41b^{81}+42b^{82}+\\+42b^{83}+43b^{84}+43b^{85}+242b^{14}e^2u^4+264b^{15}e^2u^4+281b^{16}e^2u^4+\\+303b^{17}e^2u^4+320b^{18}e^2u^4+342b^{19}e^2u^4+359b^{20}e^2u^4+381b^{21}e^2u^4+\\+398b^{22}e^2u^4+420b^{23}e^2u^4+437b^{24}e^2u^4+459b^{25}e^2u^4+476b^{26}e^2u^4+\\+498b^{27}e^2u^4+515b^{28}e^2u^4+537b^{29}e^2u^4+554b^{30}e^2u^4+576b^{31}e^2u^4+\\+593b^{32}e^2u^4+615b^{33}e^2u^4+632b^{34}e^2u^4+654b^{35}e^2u^4+671b^{36}e^2u^4+\\+693b^{37}e^2u^4+710b^{38}e^2u^4+732b^{39}e^2u^4+749b^{40}e^2u^4+771b^{41}e^2u^4+\\+788b^{42}e^2u^4+810b^{43}e^2u^4+827b^{44}e^2u^4+849b^{45}e^2u^4+866b^{46}e^2u^4+\end{gathered}$$

$$+888b^{47}e^2u^4 + 905b^{48}e^2u^4 + 927b^{49}e^2u^4 + 944b^{50}e^2u^4 + 966b^{51}e^2u^4+$$
$$+983b^{52}e^2u^4 + 1005b^{53}e^2u^4 + 1022b^{54}e^2u^4 + 1044b^{55}e^2u^4 + 1061b^{56}e^2u^4+$$
$$+1083b^{57}e^2u^4 + 1100b^{58}e^2u^4 + 1122b^{59}e^2u^4 + 1139b^{60}e^2u^4 + 1161b^{61}e^2u^4+$$
$$+1178b^{62}e^2u^4 + 1200b^{63}e^2u^4 + 1217b^{64}e^2u^4 + 1239b^{65}e^2u^4 + 1256b^{66}e^2u^4+$$
$$+1278b^{67}e^2u^4 + 1295b^{68}e^2u^4 + 1317b^{69}e^2u^4 + 1334b^{70}e^2u^4 + 1356b^{71}e^2u^4+$$
$$+1373b^{72}e^2u^4 + 1395b^{73}e^2u^4 + 1412b^{74}e^2u^4 + 1434b^{75}e^2u^4 + 1451b^{76}e^2u^4+$$
$$+1473b^{77}e^2u^4 + 1490b^{78}e^2u^4 + 1512b^{79}e^2u^4 + 1529b^{80}e^2u^4 + 1551b^{81}e^2u^4+$$
$$+1568b^{82}e^2u^4 + 1590b^{83}e^2u^4 + 1607b^{84}e^2u^4 + 1629b^{85}e^2u^4 + 9591b^{42}e^4u^6+$$
$$+9845b^{43}e^4u^6 + 10084b^{44}e^4u^6 + 10338b^{45}e^4u^6 + 10577b^{46}e^4u^6+$$
$$+10831b^{47}e^4u^6 + 11070b^{48}e^4u^6 + 11324b^{49}e^4u^6 + 11563b^{50}e^4u^6+$$
$$+11817b^{51}e^4u^6 + 12056b^{52}e^4u^6 + 12310b^{53}e^4u^6 + 12549b^{54}e^4u^6+$$
$$+12803b^{55}e^4u^6 + 13042b^{56}e^4u^6 + 13296b^{57}e^4u^6 + 13535b^{58}e^4u^6+$$
$$+13789b^{59}e^4u^6 + 14028b^{60}e^4u^6 + 14282b^{61}e^4u^6 + 14521b^{62}e^4u^6+$$
$$+14775b^{63}e^4u^6 + 15014b^{64}e^4u^6 + 15268b^{65}e^4u^6 + 15507b^{66}e^4u^6+$$
$$+15761b^{67}e^4u^6 + 16000b^{68}e^4u^6 + 16254b^{69}e^4u^6 + 16493b^{70}e^4u^6+$$
$$+16747b^{71}e^4u^6 + 16986b^{72}e^4u^6 + 17240b^{73}e^4u^6 + 17479b^{74}e^4u^6+$$
$$+17733b^{75}e^4u^6 + 17972b^{76}e^4u^6 + 18226b^{77}e^4u^6 + 18465b^{78}e^4u^6+$$
$$+18719b^{79}e^4u^6 + 18958b^{80}e^4u^6 + 19212b^{81}e^4u^6 + 19451b^{82}e^4u^6+$$
$$+19705b^{83}e^4u^6 + 19944b^{84}e^4u^6 + 20198b^{85}e^4u^6 + 7110b^{28}e^4u^8+$$
$$+7393b^{29}e^4u^8 + 7691b^{30}e^4u^8 + 7974b^{31}e^4u^8 + 8272b^{32}e^4u^8+$$
$$+8555b^{33}e^4u^8 + 8853b^{34}e^4u^8 + 9136b^{35}e^4u^8 + 9434b^{36}e^4u^8+$$
$$+9717b^{37}e^4u^8 + 10015b^{38}e^4u^8 + 10298b^{39}e^4u^8 + 10596b^{40}e^4u^8+$$
$$+10879b^{41}e^4u^8 + 11177b^{42}e^4u^8 + 11460b^{43}e^4u^8 + 11758b^{44}e^4u^8+$$
$$+12041b^{45}e^4u^8 + 12339b^{46}e^4u^8 + 12622b^{47}e^4u^8 + 12920b^{48}e^4u^8+$$
$$+13203b^{49}e^4u^8 + 13501b^{50}e^4u^8 + 13784b^{51}e^4u^8 + 14082b^{52}e^4u^8+$$
$$+14365b^{53}e^4u^8 + 14663b^{54}e^4u^8 + 14946b^{55}e^4u^8 + 15244b^{56}e^4u^8+$$
$$+15527b^{57}e^4u^8 + 15825b^{58}e^4u^8 + 16108b^{59}e^4u^8 + 16406b^{60}e^4u^8+$$
$$+16689b^{61}e^4u^8 + 16987b^{62}e^4u^8 + 17270b^{63}e^4u^8 + 17568b^{64}e^4u^8+$$
$$+17851b^{65}e^4u^8 + 18149b^{66}e^4u^8 + 18432b^{67}e^4u^8 + 18730b^{68}e^4u^8+$$
$$+19013b^{69}e^4u^8 + 19311b^{70}e^4u^8 + 19594b^{71}e^4u^8 + 19892b^{72}e^4u^8+$$
$$+20175b^{73}e^4u^8 + 20473b^{74}e^4u^8 + 20756b^{75}e^4u^8 + 21054b^{76}e^4u^8+$$

$$+21337b^{77}e^4u^8+21635b^{78}e^4u^8+21918b^{79}e^4u^8+22216b^{80}e^4u^8+$$
$$+22499b^{81}e^4u^8+22797b^{82}e^4u^8+23080b^{83}e^4u^8+23378b^{84}e^4u^8+$$
$$+23661b^{85}e^4u^8+137561b^{85}e^6u^8+\dots.$$

Отсюда обычный ряд Гильберта $H_{S'_{1,4}}(t)$ алгебры $S'_{1,4}$ будет иметь вид (первые 100 слагаемые):

$$H_{S'_{1,4}}(t)=1+t+2t^2+2t^3+3t^4+3t^5+4t^6+4t^7+5t^8+5t^9+6t^{10}+$$
$$+6t^{11}+7t^{12}+7t^{13}+8t^{14}+8t^{15}+9t^{16}+9t^{17}+10t^{18}+10t^{19}+253t^{20}+$$
$$+275t^{21}+293t^{22}+315t^{23}+333t^{24}+355t^{25}+373t^{26}+395t^{27}+413t^{28}+$$
$$+435t^{29}+453t^{30}+475t^{31}+493t^{32}+515t^{33}+533t^{34}+555t^{35}+573t^{36}+$$
$$+595t^{37}+613t^{38}+635t^{39}+7763t^{40}+8068t^{41}+8384t^{42}+8689t^{43}+$$
$$+9005t^{44}+9310t^{45}+9626t^{46}+9931t^{47}+10247t^{48}+10552t^{49}+$$
$$+10868t^{50}+11173t^{51}+21080t^{52}+21639t^{53}+22194t^{54}+22753t^{55}+$$
$$+23308t^{56}+23867t^{57}+24422t^{58}+24981t^{59}+25536t^{60}+26095t^{61}+$$
$$+26650t^{62}+27209t^{63}+27764t^{64}+28323t^{65}+28878t^{66}+29437t^{67}+$$
$$+29992t^{68}+30551t^{69}+31106t^{70}+31665t^{71}+32220t^{72}+32779t^{73}+$$
$$+33334t^{74}+33893t^{75}+34448t^{76}+35007t^{77}+35562t^{78}+36121t^{79}+$$
$$+36676t^{80}+37235t^{81}+37790t^{82}+38349t^{83}+38904t^{84}+39463t^{85}+$$
$$+39974t^{86}+40533t^{87}+41087t^{88}+41646t^{89}+42200t^{90}+42759t^{91}+$$
$$+41667t^{92}+42204t^{93}+42741t^{94}+43278t^{95}+23378t^{96}+23661t^{97}+$$
$$+137561t^{99}+\dots. \tag{35.32}$$

Рассмотрим первые 100 слагаемых в разложении ряда Гильберта алгебры $SI_{1,4}$, который согласно [20] получается из (23.3)–(23.4) следующим образом:

$$H_{SI_{1,4}}(t)=H(S_{1,4},0,t,t)=1+t+2t^2+5t^3+14t^4+26t^5+57t^6+$$
$$+119t^7+248t^8+461t^9+864t^{10}+1547t^{11}+2737t^{12}+4601t^{13}+$$
$$+7662t^{14}+12383t^{15}+19768t^{16}+30664t^{17}+47066t^{18}+70770t^{19}+$$
$$+105300t^{20}+153783t^{21}+222506t^{22}+317223t^{23}+448337t^{24}+$$
$$+625302t^{25}+865296t^{26}+1184226t^{27}+1609007t^{28}+2164498t^{29}+$$
$$+2892657t^{30}+3832653t^{31}+5047384t^{32}+6595561t^{33}+8570829t^{34}+$$
$$+11061230t^{35}+14202137t^{36}+18120878t^{37}+23011677t^{38}+29058179t^{39}+$$

$$
\begin{gathered}
+36532673t^{40}+45692819t^{41}+56917559t^{42}+70566839t^{43}+\\
+87158250t^{44}+107183955t^{45}+131345992t^{46}+160313871t^{47}+\\
+195025339t^{48}+236375592t^{49}+285608968t^{50}+343916178t^{51}+\\
+412927382t^{52}+494204023t^{53}+589868721t^{54}+701958526t^{55}+\\
+833207339t^{56}+986241378t^{57}+1164562071t^{58}+\\
+1371538331t^{59}+1611612886t^{60}+1889064095t^{61}+\\
+2209499727t^{62}+2578327522t^{63}+3002568564t^{64}+\\
+3488999055t^{65}+4046367551t^{66}+4683127424t^{67}+\\
+5410102263t^{68}+6237758509t^{69}+7179427892t^{70}+\\
+8248015477t^{71}+9459839180t^{72}+10830705810t^{73}+\\
+12380506870t^{74}+14128528398t^{75}+16098882290t^{76}+\\
+18314961754t^{77}+20805884383t^{78}+23599922669t^{79}+\\
+26732062272t^{80}+30236294034t^{81}+34154507484t^{82}+\\
+38527430455t^{83}+43404991223t^{84}+48835760568t^{85}+\\
+54879055119t^{86}+61592616546t^{87}+69046625211t^{88}+\\
+77309433488t^{89}+86463824763t^{90}+96590473934t^{91}+\\
+107786664234t^{92}+120147246938t^{93}+133786223574t^{94}+\\
+148814805866t^{95}+165366127962t^{96}+183570124286t^{97}+\\
+203581864473t^{98}+225552766408t^{99}+\ldots.
\end{gathered} \tag{35.33}
$$

Так как для рядов (35.32) и (35.33) имеет место неравенство

$$H_{S'_{1,4}}(t) \leq H_{SI_{1,4}}(t),$$

то, в предположении, что это неравенство имеет место и для остальных слагаемых рассмотренных рядов, получаем неравенство

$$\varrho(S'_{1,4}) \leq \varrho(SI_{1,4}).$$

Отметим, что $S'_{1,4}$ не является подалгеброй в $SI_{1,4}$. Так как из теоремы 23.3 имеем $\varrho(SI_{1,4}) = 11$, то согласно последнему неравенству получаем, что может быть справедлива

Гипотеза 35.1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин (а также фокусных величин) для дифференциальной системы* (35.1)*, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для данной дифференциальной системы, может не превышать* 11.

§36. Верхняя граница числа алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин для дифференциальной системы $s(1,5)$

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,5)$, которую запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= cx + dy + gx^5 + 5hx^4y + 10kx^3y^2 + 10lx^2y^3 + 5mxy^4 + ny^5,\\ \dot{y} &= ex + fy + px^5 + 5qx^4y + 10rx^3y^2 + 10sx^2y^3 + 5uxy^4 + vy^5\end{aligned} \qquad (36.1)$$

с конечно-определенной градуированной алгеброй унимодулярных комитантов $S_{1,5}$ [15,20]. Для этой системы запишем фунцию (29.2) в виде

$$\begin{gathered}U = k_2 + a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 + b_0x^4 + 4b_1x^3y + 6b_2x^2y^2+\\ +4b_3xy^3 + b_4y^4 + c_0x^5 + 5c_1x^4y + 10c_2x^3y^2 + 10c_3x^2y^3 + 5c_4xy^4+\\ +c_5y^5 + d_0x^6 + 6d_1x^5y + 15d_2x^4y^2 + 20d_3x^3y^3 + 15d_4x^2y^4 + 6d_5xy^5+\\ +d_6y^6 + e_0x^7 + 7e_1x^6y + 21e_2x^5y^2 + 35e_3x^4y^3 + 21e_5x^2y^5 + 7e_6xy^6+\\ +e_7y^7 + f_0x^8 + 8f_1x^7y + 28f_2x^6y^2 + 56f_3x^5y^3 + 70f_4y^4+\\ +56f_5x^3y^5 + 28f_6x^2y^6 + 8f_7xy^7 + f_8y^8 + ...,\end{gathered} \qquad (36.2)$$

где $k_2 \not\equiv 0$ из (28.6), а $a_0, a_1, ..., f_7, f_8, ...$–неизвестные коэффициенты.

Тождество (29.1) вдоль траекторий дифференциальной системы (36.1) с функцией (36.2) разлагается на следующие системы уравнений (равенство (29.4) опущено):

$$\begin{aligned}x^3 &: 3a_0c + 3a_1e = 0,\\ x^2y &: 6a_1c + 3a_0d + 6a_2e + 3a_1f = 0,\\ xy^2 &: 3a_2c + 6a_1d + 3a_3e + 6a_2f = 0,\\ y^3 &: 3a_2d + 3a_3f = 0;\end{aligned} \qquad (36.3)$$

$$\begin{aligned}x^4 &: 4b_0c + 4b_1e - e^2G_1 = 0,\\ x^3y &: 12b_1c + 4b_0d + 12b_2e + 4b_1f + 2ceG_1 - 2efG_1 = 0,\\ x^2y^2 &: 12b_2c + 12b_1d + 12b_3e + 12b_2f - c^2G_1 + 2deG_1+\\ &\quad + 2cfG_1 - f^2G_1 = 0,\\ xy^3 &: 4b_3c + 12b_2d + 4b_4e + 12b_3f - 2cdG_1 + 2dfG_1 = 0,\\ y^4 &: 4b_3d + 4b_4f - d^2G_1 = 0;\end{aligned} \qquad (36.4)$$

$$
\begin{aligned}
x^5 &: 5cc_0 + 5c_1e = 0,\\
x^4y &: 20cc_1 + 5c_0d + 20c_2e + 5c_1f = 0,\\
x^3y^2 &: 30cc_2 + 20c_1d + 30c_3e + 20c_2f = 0,\\
x^2y^3 &: 20cc_3 + 30c_2d + 20c_4e + 30c_3f = 0,\\
xy^4 &: 5cc_4 + 20c_3d + 5c_5e + 20c_4f = 0,\\
y^5 &: 5c_4d + 5c_5f = 0;
\end{aligned}
\tag{36.5}
$$

$$
\begin{aligned}
x^6 &: 6cd_0 + 6d_1e - 2eg + e^3G_2 + cp - fp = 0,\\
x^5y &: 6dd_0 + 30cd_1 + 30d_2e + 6d_1f + cg - fg - 3ce^2G_2+\\
&\quad + 3e^2fG_2 - 10eh + 2dp + 5cq - 5fq = 0,\\
x^4y^2 &: 330dd_1 + 60cd_2 + 60d_3e + 30d_2f + 3c^2eG_2 - 3de^2G_2-\\
&\quad - 6cefG_2 + 3ef^2G_2 + 5ch - 5fh - 20ek + 10dq + 10cr-\\
&\quad - 10fr = 0,\\
x^3y^3 &: 60dd_2 + 60cd_3 + 60d_4e + 60d_3f - c^3G_2 + 6cdeG_2+\\
&\quad + 3c^2fG_2 - 6defG_2 - 3cf^2G_2 + f^3G_2 + 10ck - 10fk-\\
&\quad - 20el + 20dr + 10cs - 10fs = 0,\\
x^2y^4 &: 660dd_3 + 30cd_4 + 30d_5e + 60d_4f - 3c^2dG_2 + 3d^2eG_2+\\
&\quad + 6cdfG_2 - 3df^2G_2 + 10cl - 10fl - 10em + 20ds + 5cu-\\
&\quad - 5fu = 0,\\
xy^5 &: 30dd_4 + 6cd_5 + 6d_6e + 30d_5f - 3cd^2G_2 + 3d^2fG_2 + 5cm-\\
&\quad - 5fm - 2en + 10du + cv - fv = 0,\\
y^6 &: 6dd_5 + 6d_6f - d^3G_2 + cn - fn + 2dv = 0;
\end{aligned}
\tag{36.6}
$$

$$
\begin{aligned}
x^7 &: 7ce_0 + 7ee_1 + 3a_0g + 3a_1p = 0,\\
x^6y &: 7de_0 + 42ce_1 + 42ee_2 + 7e_1f + 6a_1g + 15a_0h + 6a_2p+\\
&\quad + 15a_1q = 0,\\
x^5y^2 &: 42de_1 + 105ce_2 + 105ee_3 + 42e_2f + 3a_2g + 30a_1h + 30a_0k+\\
&\quad + 3a_3p + 30a_2q + 30a_1r = 0,\\
x^4y^3 &: 105de_2 + 140ce_3 + 140ee_4 + 105e_3f + 15a_2h + 60a_1k + 30a_0l+\\
&\quad + 15a_3q + 60a_2r + 30a_1s = 0,\\
x^3y^4 &: 140de_3 + 105ce_4 + 105ee_5 + 140e_4f + 30a_2k + 60a_1l + 15a_0m+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+30a_3r+60a_2s+15a_1u=0,\\
x^2y^5:\ &105de_4+42ce_5+42ee_6+105e_5f+30a_2l+30a_1m+\\
&+3a_0n+30a_3s+30a_2u+3a_1v=0,\\
xy^6:\ &42de_5+7ce_6+7ee_7+42e_6f+15a_2m+6a_1n+15a_3u+\\
&+6a_2v=0,\\
y^7:\ &7de_6+7e_7f+3a_2n+3a_3v=0;
\end{aligned}
\tag{36.7}
$$

$$
\begin{aligned}
x^8:\ &8cf_0+8ef_1+4b_0g+4b_1p-e^4G_3=0,\\
x^7y:\ &8df_0+56cf_1+8ff_1+56ef_2+12b_1g+20b_0h+12b_2p+\\
&+20b_1q+4ce^3G_3-4e^3fG_3=0,\\
x^6y^2:\ &56df_1+168cf_2+56ff_2+168ef_3+12b_2g+60b_1h+40b_0k+\\
&+12b_3p+60b_2q+40b_1r-6c^2e^2G_3+4de^3G_3+12ce^2fG_3-\\
&-6e^2f^2G_3=0,\\
x^5y^3:\ &168df_2+280cf_3+168ff_3+280ef_4+4b_3g+60b_2h+\\
&+120b_1k+40b_0l+4b_4p+60b_3q+120b_2r+40b_1s+\\
&+4c^3eG_3-12cde^2G_3-12c^2efG_3+12de^2fG_3+\\
&+12cef^2G_3-4ef^3G_3=0,\\
x^4y^4:\ &280df_3+280cf_4+280ff_4+280ef_5+20b_3h+120b_2k+\\
&+120b_1l+20b_0m+20b_4q+120b_3r+120b_2s+20b_1u-\\
&-c^4G_3+12c^2deG_3-6d^2e^2G_3+4c^3fG_3-24cdefG_3-\\
&-6c^2f^2G_3+12def^2G_3+4cf^3G_3-f^4G_3=0,\\
x^3y^5:\ &280df_4+168cf_5+280ff_5+168ef_6+40b_3k+120b_2l+\\
&+60b_1m+4b_0n+40b_4r+120b_3s+60b_2u+4b_1v-\\
&-4c^3dG_3+12cd^2eG_3+12c^2dfG_3-12d^2efG_3-\\
&-12cdf^2G_3+4df^3G_3=0,\\
x^2y^6:\ &168df_5+56cf_6+168ff_6+56ef_7+40b_3l+60b_2m+\\
&+12b_1n+40b_4s+60b_3u+12b_2v-6c^2d^2G_3+4d^3eG_3+\\
&+12cd^2fG_3-6d^2f^2G_3=0,\\
xy^7:\ &56df_6+8cf_7+56ff_7+8ef_8+20b_3m+12b_2n+20b_4u+\\
&+12b_3v-4cd^3G_3+4d^3fG_3=0,\\
y^8:\ &8df_7+8ff_8+4b_3n+4b_4v-d^4G_3=0.
\end{aligned}
\tag{36.8}
$$

Очевидно, что системы линейных уравнений (36.3)–(36.8) относительно неизвестных a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1,...,b_4, c_0, c_1,...,c_5, d_0, d_1,...,d_6, e_0, e_1,...,e_7, f_0, f_1,...,f_8,..., G_1, G_2, G_3,... можно рассматривать как единую систему, которая может быть продолжена, присоединением после последнего уравнения из (36.8) бесконечного числа уравнений, которые получаются вследствие равенства коэффициентов при степенях $x^\alpha y^\beta$ для $\alpha + \beta > 8$ в тождестве (29.1).

Для получения постоянной G_1 запишем систему (36.4) в матричной форме

$$A_1 B_1 = C_1, \tag{36.9}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4c & 4e & 0 & 0 & 0 & -e^2 \\ 4d & 12c+4f & 12e & 0 & 0 & 2ce-2ef \\ 0 & 12d & 12c+12f & 12e & 0 & 2de+2cf-c^2-f^2 \\ 0 & 0 & 12d & 4c+12f & 4e & -2cd+2df \\ 0 & 0 & 0 & 4d & 4f & -d^2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \end{pmatrix}, \ C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{36.10}$$

Так как размерность матрицы A_1 равна 5×6, то очевидно, что имеем одну свободную неизвестную. Как слествие, принимая в качестве свободной неизвестной одну из переменных b_i ($i \in \{0,,1,...,4\}$), с помощью правила Крамера для системы (36.9) получаем

$$G_1 = \frac{B_{1,i} b_i}{\sigma_{1,i}}, \tag{36.11}$$

для любого фиксированного i, равного $0, 1, 2, 3, 4$, где $B_{1,i}, \sigma_{1,i}$ являются многочленами от коэффициентов системы (36.1), а b_i-неопределенные коэффициенты функции $U(x, y)$ из (36.2). Получаем, что как частное решение системы (36.4) можно взять $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Это означает, что G_1 можно считать равным нулю.

Система (36.6) состоит из 7 уравнений. Записывая данное уравнение в матричной форме $A_2 B_2 = C_2$ (см. приложение 8) и выполняя аналогичные рассуждения как в вышеупомянутом случае, получаем

$$G_2 = \frac{G_{2,i} + D_{2,i} d_i}{\sigma_{2,i}} \tag{36.12}$$

для каждого $i = \overline{0,6}$.

Нас интересует степень многочленов $G_{2,i}$ относительно коэффициентов системы $s(1,5)$ из (36.1). Очевидно, что указанная степень совпадает со степенью Δ_{G_2}. Таким образом, степень $G_{2,i}$ относительно коэффициентов системы $s(1,5)$ из (36.1) будет $degG_{2,i} = 8$ для всех $i = \overline{0,6}$. Принимая во внимание степень системы, получаем, что $G_{2,i}$ имеет тип $(0,7,1)$, то есть G_2 является однородным многочленом степени 7 относительно коэффициентов линейной части и однородным степени 1 относительно коэффициентов неоднородности пятого порядка системы $s(1,5)$ из (36.1). Ноль в $(0,7,1)$ показывает что выражение $G_{2,i}$ не содержит фазовых переменных x, y.

Отметим, что помимо этих результатов, полученных из анализа системы (36.6), были проведены компьютерные расчеты и определены явные формы многочленов $G_{2,i}$ из (36.12) для каждого фиксированного $i = \overline{0,6}$ (см. приложение 9).

Было определено, что $G_{2,i}$ $(i = \overline{0,6})$ являются однородными многочленами относительно коэффициентов системы $s(1,5)$ из (36.1), и одновременно для $i = 0,1,2,3,4,5,6$ соответственно являются многочленами изобарности веса

$$(5,-1),\ (4,0),\ (3,1),\ (2,2),\ (1,3),\ (0,4),\ (-1,5). \tag{36.13}$$

Отметим также, что $\sigma_{2,i}$ являются многочленами только от коэффициентов линейной части c, d, e, f системы $s(1,5)$ из (36.1).

В дальнейшем будет нужен явный вид операторов $X_1, ..., X_4$ алгебры Ли L_4 для системы (36.7), выражения для которых получаются из §5:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + D_1,\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + D_2,\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} + D_3,\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} + D_4, \tag{36.14}$$

где

$$D_1 = d\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial e} - 4g\frac{\partial}{\partial g} - 3h\frac{\partial}{\partial h} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - l\frac{\partial}{\partial l} + n\frac{\partial}{\partial n} - 5p\frac{\partial}{\partial p} -$$
$$-4q\frac{\partial}{\partial q} - 3r\frac{\partial}{\partial r} - 2s\frac{\partial}{\partial s} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$D_2 = e\frac{\partial}{\partial c} + (f-c)\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial f} + p\frac{\partial}{\partial g} + (q-g)\frac{\partial}{\partial h} + (r-2h)\frac{\partial}{\partial k} +$$
$$+(s-3k)\frac{\partial}{\partial l} + (u-4l)\frac{\partial}{\partial m} + (v-5m)\frac{\partial}{\partial n} - p\frac{\partial}{\partial q} - 2q\frac{\partial}{\partial r} - 3r\frac{\partial}{\partial s} -$$
$$-4s\frac{\partial}{\partial u} - 5u\frac{\partial}{\partial v},$$

$$D_3=-d\frac{\partial}{\partial c}+(c-f)\frac{\partial}{\partial e}+d\frac{\partial}{\partial f}-5h\frac{\partial}{\partial g}-4k\frac{\partial}{\partial h}-3l\frac{\partial}{\partial k}-$$
$$-2m\frac{\partial}{\partial l}-n\frac{\partial}{\partial m}+(g-5q)\frac{\partial}{\partial p}+(h-4r)\frac{\partial}{\partial q}+(k-3s)\frac{\partial}{\partial r}+$$
$$+(l-2u)\frac{\partial}{\partial s}+(m-v)\frac{\partial}{\partial u}+n\frac{\partial}{\partial v}, \tag{36.15}$$
$$D_4=-d\frac{\partial}{\partial d}+e\frac{\partial}{\partial e}-h\frac{\partial}{\partial h}-2k\frac{\partial}{\partial k}-3l\frac{\partial}{\partial l}-4m\frac{\partial}{\partial m}-$$
$$-5n\frac{\partial}{\partial n}+p\frac{\partial}{\partial p}-r\frac{\partial}{\partial r}-2s\frac{\partial}{\partial s}-3u\frac{\partial}{\partial u}-4v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Используя формулу веса комитанта (14.3), для дифференциальной системы (36.1), получаем, что числители дробей (36.12) могут быть коэффициентами в комитантах веса -1 типа $(6,7,1)$. С помощью дифференциального оператора Ли D_3 из (36.15) для дифференциальной системы (36.1) получаем систему из 6-ти линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
D_3(G_{2,0}+D_{2,0}f_0)=G_{2,1}+D_{2,1}d_1,\\
D_3(G_{2,1}+D_{2,1}d_1)=-G_{2,2}-D_{2,2}d_2,\\
-D_3(G_{2,2}+D_{2,2}d_2)=G_{2,3}+D_{2,3}d_3,\\
D_3(G_{2,3}+D_{2,3}d_3)=-G_{2,4}-D_{2,4}d_4,\\
-D_3(G_{2,4}+D_{2,4}d_4)=G_{2,5}+D_{2,5}d_5,\\
D_3(G_{2,5}+D_{2,5}d_5)=-G_{2,6}-D_{2,6}d_6
\end{gathered} \tag{36.16}$$

относительно 7-ми неизвестных $d_0, d_1, ..., d_6$. Согласно лемме 11.3 система (36.16) имеет бесконечное множество решений. Отметим, что частным решением этой системы является $d_0 = d_1 = ... = d_6 = 0$, для которой многочлен

$$\begin{gathered}
f_6'(x,y)=G_{2,0}x^6-6G_{2,1}x^5y-3G_{2,2}x^4y^2+2G_{2,3}x^3y^3+\\
+3G_{2,4}x^2y^4-6G_{2,5}xy^5-G_{2,6}y^6
\end{gathered} \tag{36.17}$$

является центроаффинным комитантом дифференциальной системы (36.1). Это подверждается и теоремой 10.2 с операторами $X_1 - X_4$ из (36.14), (36.15) для дифференциальной системы (36.1), для которой

$$X_1(f_6')=X_4(f_6')=f_6',\ X_2(f_6')=X_3(f_6')=0.$$

Очевидно, что дифференциальная система (36.16) имеет бесконечное множество решений $d_0, d_1, ..., d_6$, которые определяют центроаффинные комитанты типа $(6,7,1)$, которые записываются в виде

$$
\begin{gathered}
f_6''(x,y) = (G_{2,0} + D_{2,0}d_0)x^6 - 6(G_{2,1} + D_{2,1}d_1)x^5y - 3(G_{2,2}+ \\
+D_{2,2}d_2)x^4y^2 + 2(G_{2,3} + D_{2,3}d_3)x^3y^3 + 3(G_{2,4} + D_{2,4}d_4)x^2y^4- \\
-6(G_{2,5} + D_{2,5}d_5)xy^5 - (G_{2,6} + D_{2,6}d_6)y^6.
\end{gathered} \tag{36.18}
$$

Согласно сказанному выше комитант (36.17) принадлежит линейному пространству $S_{1,5}^{(6,7,1)}$.

Отметим, что комитант (36.17) на многообразии $\mathcal{V}$ из (28.7) для дифференциальной системы (36.1) имеет вид

$$
f_6'(x,y)|_{\mathcal{V}} = L_2(x^2+y^2)^3 \quad (G_2|_{\mathcal{V}} = L_2), \tag{36.19}
$$

где

$$
L_2 = 20(g + 2k + m + q + 2s + v),
$$

является первой ненулевой постоянной Ляпунова дифференциальной системы (36.1) на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$.

Рассмотрим продолжение системы (36.3)–(36.8), которая получается из тождества (29.1) для дифференциальной системы (36.1) и функции (36.2), содержащей постоянную G_{2k}, которую запишем в матричной форме $A_{2k}B_{2k} = C_{2k}$. Обозначим через $m_{G_{2k}}$ число уравнений этой системы, а через $n_{G_{2k}}$–число неизвестных.

Отметим, что это число записывается в виде:

$$
m_{G_{2k}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2\cdot 2+3}_{G_2}+2\cdot 4+3}_{G_4}+2\cdot 6+3}_{G_6\ \cdots}+\ldots+2\cdot 2k+3}_{G_{2k}},
$$

для $k = 1,2,3,\ldots$. Отсюда получаем

$$
m_{G_{2k}} = 2k^2 + 5k. \tag{36.20}
$$

Из этих систем получается

$$
G_{2k} = \frac{G_{2k,i_1,i_2,\ldots,i_k} + B_{2k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{2k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}}{\sigma_{2k,i_1,i_2,\ldots,i_k}}. \tag{36.21}
$$

Важно определить степень многочленов $G_{2k,i_1,i_2,\ldots,i_k} + B_{2k,i_1,i_2,\ldots,i_k}b_{i_1} + \cdots + Z_{2k,i_1,i_2,\ldots,i_k}z_{i_k}$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (36.1).

Отметим, что степень ненулевого коэффициента многочлена при G_{2i} $(i = \overline{1,k})$ относительно коэффициентов системы (36.1) в определителе Крамера порядка $m_{G_{2k}}$, когда коэффициенты при G_{2k} заменяются свободными членами указанной системы и составляют следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} G_2, & G_4, & G_6, \; \dots , & G_{2(k-1)}, & G_{2k}. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 18 & 33 & k(2k+1)-3 & 1 \end{array}$$

Тогда степень многочленов $G_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} + B_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \cdots$ $+ Z_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$ относительно коэффициентов системы (36.1), обозначенная через $N_{G_{2k}}$, запишется в виде

$$N_{G_{2k}} = m_{G_{2k}} + 2\frac{k(k-1)}{2} + 1,$$

откуда получаем

$$N_{G_{2k}} = 3k^2 + 4k + 1. \tag{36.22}$$

Это и есть степень однородности многочленов $G_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} +$ $+ B_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \cdots + Z_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$ относительно коэффициентов системы (36.1), которые являются многочленами типа

$$(0, d_1, d_2), \tag{36.23}$$

где d_1–степень однородности многочлена относительно коэффициентов линейной части, а d_2–степень однородности многочлена относительно коэффициентов неоднородности пятого порядка системы $s(1,5)$ из (36.1).Так как $\delta = 2(2k+1)$ и $d_2 = k$, то $d_1 = N_{G_k} - k$.

Таким образом находим, что комитант веса -1 системы $s(1,5)$ из (36.1), который содержит в качестве полуинварианта $G_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} +$ $+ B_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} b_{i_1} + \cdots + Z_{2k,i_1,i_2,\dots,i_k} z_{i_k}$ соответствующий постоянной G_{2k} для $k = 1, 2, 3, \dots$ ($G_n = 0$ если $n \neq 2k$), имеет тип

$$\left(2(2k+1), 3k^2 + 3k + 1, k\right), \tag{36.24}$$

где $2(2k+1)$–степень однородности комитанта относительно фазовых переменных x, y, $3k^2 + 3k + 1$–степень однородности комитанта относительно коэффициентов линейной части, а k–степень однородности комитанта относительно коэффициентов неоднородности пятого порядка системы $s(1,5)$ из (36.1).

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,5)$ из (36.1). В этом случае согласно работе [20] с помощью теоремы 24.1 справедлива

Теорема 36.1. *Размерность линейного пространства центроаффинных комитантов типа* $(d)=(\delta,d_1,d_2)$ *для дифференциальной системы* $s(1,5)$ *из* (36.1), *обозначенная через* $dim_{\mathbb{R}}V_{1,5}^{(d)}$, *равна коэффициенту при одночлене* $u^{\delta}b^{d_1}f^{d_2}$ *в разложении обобщенного ряда Гильберта из* (24.3)–(24.4) *для алгебры Сибирского* $S_{1,5}$ *комитантов рассмотренной системы.*

Рассмотрим подалгебру $S'_{1,5}\subset S_{1,5}$, которую запишем в виде

$$S'_{1,5}=\bigoplus_{(d)}S_{1,5}^{(d')}, \tag{36.25}$$

где через $S_{1,5}^{(d')}$ обозначены линейные пространства

$$S_{1,5}^{(0,0,0)}=\mathbb{R},\ S_{1,5}^{(0,1,0)},...,S_{1,5}^{2(2k+1),3k^2+3k+1,k},\ k=1,2,..., \tag{36.26}$$

а также пространства из $S_{1,5}$, которые содержат всевозможные их произведения.

Так как алгебра $S'_{1,5}$ является градуированной подалгеброй в конечно-определенной алгебре $S_{1,5}$, то согласно предложению 19.1 получаем $\varrho(S'_{1,5})\le\varrho(S_{1,5})$. Из этого неравенства и из того что $\varrho(S_{1,5})=15$ (см. теорему 24.3), согласно примечанию 11.2 о полуинвариантах и того, что обобщенные фокусные псевдовеличины являются коэффициентами некоторых комитантов, получаем

Теорема 36.2. *Максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин в проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы* (36.1), *не превышает* 15.

Согласно предложению 19.2, замечанию 28.1 и равенству (29.3) следует, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин L_k $(k=\overline{1,\infty})$ не может превышать максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин $G_{2k,i_1,i_2,...,i_k}+B_{2k,i_1,i_2,...,i_k}b_{i_1}+\cdots+Z_{2k,i_1,i_2,...,i_k}z_{i_k}$.

Отсюда с помощью теоремы 36.2 получаем

Следствие 36.1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы* (36.1), *не превышает* 15.

Обобщенная производящая функция пространства (36.25) может быть записана в следующим виде:

$$\Phi(V_{1,5},u,b,f)=dim_{\mathbb{R}}S_{1,5}^{(0,0,0)}+dim_{\mathbb{R}}S_{1,5}^{(0,1,0)}b+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}dim_{\mathbb{R}}S_{1,5}^{(2(2k+1),3k^2+3k+1,k)}u^{2(2k+1)}b^{3k^2+3k+1}f^k. \tag{36.27}$$

Используя компьютер, разлагаем ряд Гильберта $H(S_{1,5},u,b,f)$ из (24.7)–(24.9) в степенной ряд. Тогда для (36.27) имеем

$$\Phi(V_{1,5},u,b,f)=1+b+33u^6b^7f+585u^{10}b^{19}f^2+5616u^{14}b^{37}f^3+...$$
$$+C_{2(2k+1),3k^2+3k+1,k}u^{2(2k+1)}b^{(3k^2+3k+1)}f^k+...,\tag{36.28}$$

где $C_{2(k+1),\frac{1}{2}(15k^2+11k+2),2k}$–неопределенный коэффициент.

С помощью этой обобщенной производящей функции и ряда Гильберта $H(S_{1,5},u,b,f)$ из теоремы 36.1 были получены первые слагаемые до $u^{22}b^{91}f^5$ $(\delta+d_1+d_2\leq 118)$ в ряде Гильберта $H(S'_{1,5},u,b,f)$:

$$H(S'_{1,5},u,b,f)=1+b+2b^2+2b^3+3b^4+3b^5+4b^6+4b^7+5b^8+5b^9+$$
$$+6b^{10}+6b^{11}+7b^{12}+7b^{13}+8b^{14}+8b^{15}+9b^{16}+9b^{17}+10b^{18}+10b^{19}+$$
$$+11b^{20}+11b^{21}+12b^{22}+12b^{23}+13b^{24}+13b^{25}+14b^{26}+14b^{27}+15b^{28}+$$
$$+15b^{29}+16b^{30}+16b^{31}+17b^{32}+17b^{33}+18b^{34}+18b^{35}+19b^{36}+19b^{37}+$$
$$+20b^{38}+20b^{39}+21b^{40}+21b^{41}+22b^{42}+22b^{43}+23b^{44}+23b^{45}+$$
$$+24b^{46}+...+u^{22}(46666b^{78}f^4+47358b^{79}f^4+48029b^{80}f^4+48721b^{81}f^4+$$
$$+49392b^{82}f^4+50084b^{83}f^4+50755b^{84}f^4+51447b^{85}f^4+52118b^{86}f^4+$$
$$+52810b^{87}f^4+53481b^{88}f^4+54173b^{89}f^4+54844b^{90}f^4+55536b^{91}f^4+$$
$$+176322b^{91}f^5)+...$$

Отсюда обычный ряд Гильберта $H_{S'_{1,5}}(t)$ алгебры $S'_{1,5}$ будет иметь вид (первые 119 слагаемые):

$$H_{S'_{1,5}}(t)=1+t+2t^2+2t^3+3t^4+3t^5+4t^6+4t^7+5t^8+5t^9+6t^{10}+$$
$$+6t^{11}+7t^{12}+7t^{13}+41t^{14}+47t^{15}+54t^{16}+60t^{17}+67t^{18}+73t^{19}+$$
$$+80t^{20}+86t^{21}+93t^{22}+99t^{23}+106t^{24}+112t^{25}+119t^{26}+125t^{27}+$$
$$+504t^{28}+546t^{29}+595t^{30}+1222t^{31}+1306t^{32}+1389t^{33}+1473t^{34}+$$
$$+1556t^{35}+1640t^{36}+1723t^{37}+1807t^{38}+1890t^{39}+1974t^{40}+2057t^{41}+$$
$$+4598t^{42}+4863t^{43}+5129t^{44}+8915t^{45}+9362t^{46}+9808t^{47}+$$
$$+10255t^{48}+10701t^{49}+11148t^{50}+11594t^{51}+12041t^{52}+$$
$$+12487t^{53}+18550t^{54}+19175t^{55}+19801t^{56}+20426t^{57}+$$
$$+21052t^{58}+37686t^{59}+38983t^{60}+40300t^{61}+61616t^{62}+63602t^{63}+$$
$$+65589t^{64}+67575t^{65}+69562t^{66}+71548t^{67}+73535t^{68}+75521t^{69}+$$
$$+77508t^{70}+79494t^{71}+81481t^{72}+83467t^{73}+85454t^{74}+87440t^{75}+$$
$$+89427t^{76}+91413t^{77}+93400t^{78}+95386t^{79}+97373t^{80}+99359t^{81}+$$

$$+101346t^{82}+139347t^{83}+141998t^{84}+144669t^{85}+147320t^{86}+$$
$$+149991t^{87}+152642t^{88}+155313t^{89}+157964t^{90}+160635t^{91}+$$
$$+163286t^{92}+165957t^{93}+168608t^{94}+171279t^{95}+173930t^{96}+$$
$$+176601t^{97}+179252t^{98}+181380t^{99}+184025t^{100}+186690t^{101}+$$
$$+189335t^{102}+192000t^{103}+191289t^{104}+193913t^{105}+193109t^{106}+$$
$$+195697t^{107}+198265t^{108}+185392t^{109}+187781t^{110}+174723t^{111}+$$
$$+176931t^{112}+163780t^{113}+108892t^{114}+110253t^{115}+$$
$$+54903t^{116}+55595t^{117}+176382t^{118}+\ldots \tag{36.29}$$

Рассмотрим первые 119 слагаемых в разложении ряда Гильберта алгебры $SI_{1,5}$ из (24.3)–(24.4). Заменяя $z=t$, получаем

$$H_{SI_{1,5}}(t)=H(S_{1,5},0,t,t)=1+t+4t^2+8t^3+26t^4+53t^5+146t^6+$$
$$+305t^7+704t^8+1417t^9+2920t^{10}+5533t^{11}+10500t^{12}+18825t^{13}+$$
$$+33444t^{14}+57120t^{15}+96303t^{16}+157599t^{17}+254508t^{18}+401472t^{19}+$$
$$+625182t^{20}+955251t^{21}+1442076t^{22}+2142840t^{23}+3149178t^{24}+$$
$$+4566267t^{25}+6554694t^{26}+9300484t^{27}+13076140t^{28}+18198949t^{29}+$$
$$+25118690t^{30}+34359893t^{31}+46645739t^{32}+62820314t^{33}+84019460t^{34}+$$
$$+111568250t^{35}+147213784t^{36}+192990661t^{37}+251534302t^{38}+$$
$$+325907859t^{39}+420016674t^{40}+538389135t^{41}+686719824t^{42}+$$
$$+871593216t^{43}+1101188574t^{44}+1384936842t^{45}+1734423882t^{46}+$$
$$+2162969685t^{47}+2686776843t^{48}+3324416523t^{49}+4098277602t^{50}+$$
$$+5033946165t^{51}+6162015960t^{52}+7517347113t^{53}+9141313732t^{54}+$$
$$+11080921339t^{55}+13391579524t^{56}+16136061599t^{57}+$$
$$+19387898270t^{58}+23230161917t^{59}+27759598166t^{60}+$$
$$+33085209860t^{61}+39333260630t^{62}+46645639450t^{63}+$$
$$+55185881485t^{64}+65137293814t^{65}+76710167634t^{66}+$$
$$+90139636710t^{67}+105694278048t^{68}+123673683567t^{69}+$$
$$+144418662324t^{70}+168308506209t^{71}+195773044560t^{72}+$$
$$+227289574704t^{73}+263397050880t^{74}+304692662715t^{75}+$$
$$+351848461524t^{76}+405607571979t^{77}+466803608430t^{78}+$$
$$+536356493511t^{79}+615295057113t^{80}+704752453114t^{81}+$$
$$+805992362230t^{82}+920404001941t^{83}+1049532417158t^{84}+$$

$$
\begin{gathered}
+1195073066570t^{85}+1358906736914t^{86}+1543093711865t^{87}+\\
+1749913882256t^{88}+1981860511040t^{89}+2241686191348t^{90}+\\
+2532396208270t^{91}+2857301061364t^{92}+3220009454859t^{93}+\\
+3624488148738t^{94}+1981860511040t^{89}+2241686191348t^{90}+\\
+2532396208270t^{91}+2857301061364t^{92}+3220009454859t^{93}+\\
+3624488148738t^{94}+4075054619802t^{95}+4576445103411t^{96}+\\
+5133806955846t^{97}+5752775830170t^{98}+6439467809532t^{99}+\\
+7200566719746t^{100}+8043316119915t^{101}+8975617875264t^{102}+\\
+10006024079634t^{103}+11143848111366t^{104}+12399156613041t^{105}+\\
+13782894327786t^{106}+15306876284184t^{107}+16983927856168t^{108}+\\
+18827877291745t^{109}+20853712561492t^{110}+23077574432714t^{111}+\\
+25516931762351t^{112}+28190575349780t^{113}+31118813506166t^{114}+\\
+34323466911800t^{115}+37828086439832t^{116}+41657949323224t^{117}+\\
+45840301322554t^{118}+\ldots
\end{gathered}
\tag{36.30}
$$

Так как для рядов (36.29) и (36.30) имеет место неравенство

$$
H_{S'_{1,5}}(t)\leq H_{SI_{1,5}}(t),
$$

то, в предположении, что это неравенство имеет место и для остальных слагаемых рассмотренных рядов, получаем неравенство

$$
\varrho(S'_{1,5})\leq\varrho(SI_{1,5}).
$$

Отметим, что $S'_{1,5}$ не является подалгеброй в $SI_{1,5}$. Так как из теоремы 24.3 имеем $\varrho(SI_{1,5})=13$, то согласно последнему неравенству получаем, что может быть справедлива

Гипотеза 36.1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин (а также фокусных величин) для дифференциальной системы* (36.1), *которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для данной дифференциальной системы, не превышает* 13.

§37. Комитанты, которые имеют в качестве коэффициентов обобщенные фокусные псевдовеличины системы $s(1,2,3)$, и их градуированная алгебра Сибирского

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1,2,3)$, которую запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= cx + dy + gx^2 + 2hxy + kx^2 + px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3,\\ \dot{y} &= ex + fy + lx^2 + 2mxy + ny^2 + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3\end{aligned} \tag{37.1}$$

с конечно-определенной градуированной алгеброй унимодулярных комитантов $S_{1,2,3}$. Для этой системы запишем фунцию (29.2) в виде

$$\begin{gathered}U = k_2 + a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 + b_0x^4 + 4b_1x^3y + 6b_2x^2y^2 +\\ +4b_3xy^3 + b_4y^4 + c_0x^5 + 5c_1x^4y + 10c_2x^3y^2 + 10c_3x^2y^3 + 5c_4xy^4 +\\ +c_5y^5 + d_0x^6 + 6d_1x^5y + 15d_2x^4y^2 + 20d_3x^3y^3 + 15d_4x^2y^4 + 6d_5xy^5 +\\ +d_6y^6 + e_0x^7 + 7e_1x^6y + 21e_2x^5y^2 + 35e_3x^4y^3 + 21e_5x^2y^5 + 7e_6xy^6 +\\ +e_7y^7 + f_0x^8 + 8f_1x^7y + 28f_2x^6y^2 + 56f_3x^5y^3 + 70f_4y^4 +\\ +56f_5x^3y^5 + 28f_6x^2y^6 + 8f_7xy^7 + f_8y^8 + ...,\end{gathered} \tag{37.2}$$

где $k_2 \not\equiv 0$ из (28.6), а $a_0, a_1, ..., f_7, f_8, ...$–неизвестные коэффициенты.

Тождество (29.1) вдоль траекторий дифференциальной системы (37.1) с функцией (37.2) разлагается в системы уравнений относительно переменных a_0, a_1,..., f_7, f_8, G_1, G_2, G_3, ... (равенство (29.4) опущено). Для получения величины G_1 запишем уравнения, в которых разлагается тождество (29.1) в случае дифференциальной системы (37.1) в матричной форме

$$\widetilde{A}_1\widetilde{B}_1 = \widetilde{C}_1, \tag{37.3}$$

где

$$\widetilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 3c & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3d & 6c+3f & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6d & 3c+6f & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3d & 3f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3l & 0 & 0 & 4c & 4e & 0 & 0 & 0 & -e^2 \\ 6h & 6g+6m & 6l & 0 & 4d & 12c+4f & 12e & 0 & 0 & 2ce-2ef \\ 3k & 12h+3n & 3g+12m & 3l & 0 & 12d & 12c+12f & 12e & 0 & -c^2+2de+2cf-f^2 \\ 0 & 6k & 6h+6n & 6m & 0 & 0 & 12d & 4c+12f & 4e & -2cd+2df \\ 0 & 0 & 3k & 3n & 0 & 0 & 0 & 4d & 4f & -d^2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 2eg - cl + fl \\ -cg + fg + 4eh - 2dl - 2cm + 2fm \\ -2ch + 2fh + 2ek - 4dm - cn + fn \\ -ck + fk - 2dn \\ 2ep - ct + ft \\ -cp + fp + 6eq - 2dt - 3cu + 3fu \\ -3cq + 3fq + 6er - 6du - 3cv + 3fv \\ -3cr + 3fr + 2es - 6dv - cw + fw \\ -cs + fs - 2dw \end{pmatrix}. \tag{37.4}$$

Для каждого фиксированного $i \in \{0, 1, ..., 4\}$ с помощью правила Крамера из системы (37.3) получаем

$$G_1 = \frac{\widetilde{G}_{1,i} + \widetilde{B}_{1,i} b_i}{\widetilde{\sigma}_{1,i}}, \tag{37.5}$$

где $\widetilde{G}_{1,i}, \widetilde{B}_{1,i}, \widetilde{\sigma}_{1,i}$–многочлены от коэффициентов дифференциальной системы (37.1), а b_i–неопределенные коэффициенты функции $U(x, y)$ из (37.2).

Изучая матричное уравнение (37.3) для дифференциальной системы (37.1), находим, что фокусная псевдовеличина $\widetilde{G}_{1,i}$ для любого фиксированного i из (37.5) может быть записана в виде

$$\widetilde{G}_{1,i} = \widetilde{G}'_{1,i} + \widetilde{G}''_{1,i},\ (i = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{37.6}$$

где $\widetilde{G}'_{1,i}$ (соответственно $\widetilde{G}''_{1,i}$) являются однородными многочленами степени 8 (соответственно 9) относительно коэффициентов линейной части и однородными степени 2 относительно коэффициентов квадратичной части (соответственно степени 1 относительно коэффициентов кубической части) дифференциальной системы (37.1).

Из (5.1)–(5.2), (5.5)–(5.6), (5.8)–(5.9), (5.11)–(5.12) операторы алгебры Ли L_4 для дифференциальной системы (37.1) получаются

$$\mathcal{X}_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial e} - g\frac{\partial}{\partial g} + k\frac{\partial}{\partial k} - 2l\frac{\partial}{\partial l} - m\frac{\partial}{\partial m} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} +$$
$$+ s\frac{\partial}{\partial s} - 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\mathcal{X}_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial c} + (f-c)\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial f} + l\frac{\partial}{\partial g} + (m-g)\frac{\partial}{\partial h} + (n-$$
$$-2h)\frac{\partial}{\partial k} - l\frac{\partial}{\partial m} - 2m\frac{\partial}{\partial n} + t\frac{\partial}{\partial p} + (u-p)\frac{\partial}{\partial q} + (v-2q)\frac{\partial}{\partial r} + (w-$$
$$-3r)\frac{\partial}{\partial s} - t\frac{\partial}{\partial u} - 2u\frac{\partial}{\partial v} - 3v\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\mathcal{X}_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - d\frac{\partial}{\partial c} + (c-f)\frac{\partial}{\partial e} + d\frac{\partial}{\partial f} - 2h\frac{\partial}{\partial g} - k\frac{\partial}{\partial h} + (g-2m)\frac{\partial}{\partial l} +$$
$$+(h-n)\frac{\partial}{\partial m} + k\frac{\partial}{\partial n} - 3q\frac{\partial}{\partial p} - 2r\frac{\partial}{\partial q} - s\frac{\partial}{\partial r} + (p-3u)\frac{\partial}{\partial t} + (q-$$
$$-2v)\frac{\partial}{\partial u} + (r-w)\frac{\partial}{\partial v} + s\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\mathcal{X}_4 = y\frac{\partial}{\partial y} - d\frac{\partial}{\partial d} + e\frac{\partial}{\partial e} - h\frac{\partial}{\partial h} - 2k\frac{\partial}{\partial k} + l\frac{\partial}{\partial l} - n\frac{\partial}{\partial n} - q\frac{\partial}{\partial q} - 2r\frac{\partial}{\partial r} -$$
$$-3s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2w\frac{\partial}{\partial w}.$$

Применяя эти операторы к выражениям из (37.6), находим равенства

$$\mathcal{X}_1(\widetilde{f}'_4) = \mathcal{X}_4(\widetilde{f}'_4) = \widetilde{f}'_4,\ \mathcal{X}_2(\widetilde{f}'_4) = \mathcal{X}_3(\widetilde{f}'_4) = 0,$$
$$\mathcal{X}_1(\widetilde{f}''_4) = \mathcal{X}_4(\widetilde{f}''_4) = \widetilde{f}''_4,\ \mathcal{X}_2(\widetilde{f}''_4) = \mathcal{X}_3(\widetilde{f}''_4) = 0,$$

где

$$\widetilde{f}_4'(x,y) = \widetilde{G}_{1,0}'x^4 - 4\widetilde{G}_{1,1}'x^3y + 2\widetilde{G}_{1,2}'x^2y^2 + 4\widetilde{G}_{1,3}'xy^3 - \widetilde{G}_{1,4}'y^4,$$
$$\widetilde{f}_4''(x,y) = \widetilde{G}_{1,0}''x^4 - 4\widetilde{G}_{1,1}''x^3y + 2\widetilde{G}_{1,2}''x^2y^2 + 4\widetilde{G}_{1,3}''xy^3 - \widetilde{G}_{1,4}''y^4 \quad (37.7)$$

являются комитантами веса -1 дифференциальной системы (37.1), а $\widetilde{G}_{1,i}'$, $\widetilde{G}_{1,i}''$ из (37.6).

Согласно сказанному выше и (14.1) комитанты (37.7) принадлежат линейным пространствам

$$S_{1,2,3}^{(4,8,2,0)},\ S_{1,2,3}^{(4,9,0,1)}, \quad (37.8)$$

которые являются компонентами градуированной алгебры Сибирского комитантов $S_{1,2,3}$ для дифференциальной системы (37.1).

Принимая во внимание (37.5), например для $b_i = 0$ $(i = \overline{0,4})$ на многообразии $\mathcal{V}$ из (28.9) для (37.6), (37.7), находим, что между первой фокусной величиной L_1 дифференциальной системы (37.1) и комитантами (37.7) имеет место равенство

$$\left[\widetilde{f}_4'(x,y) + \widetilde{f}_4''(x,y)\right]|_{\mathcal{V}} = 8L_1(x^2+y^2)^2 \ (G_1|_{\mathcal{V}} = 8L_1),$$

где

$$L_1 = \frac{1}{4}\left\{2[g(l-h) - k(h+n) + m(l+n)] - 3[p+r+u+w]\right\}.$$

Если исключить числовую постоянную и принять во внимание обозначение коэффициентов данной дифференциальной системы, то последнее выражение совпадет с фокусной величиной этой системы из [37, стр. 25].

Для получения величины G_2 для дифференциальной системы (37.1) из тождества (29.1) аналогично получаем следующее матричное уравнение (см. приложение 10):

$$\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2 = \widetilde{C}_2. \quad (37.9)$$

Для любого фиксированного $i \in \{0,1,...,4\}$, $j \in \{0,1,2,...,6\}$ находим выражение

$$G_2 = \frac{\widetilde{G}_{2,i,j} + \widetilde{B}_{2,i,j}b_i + \widetilde{D}_{2,i,j}d_j}{\widetilde{\sigma}_{2,i,j}}. \quad (37.10)$$

Изучая матричное уравнение (37.9), находим, что фокусная псевдовеличина из (37.10) можеть быть записана в виде однородности степени 24 и представлена в виде

$$\widetilde{G}_{2,i,j} = \widetilde{G}_{2,i,j}' + \widetilde{G}_{2,i,j}'' + \widetilde{G}_{2,i,j}''', \quad (37.11)$$

где $\widetilde{G}'_{2,i,j}$, $\widetilde{G}''_{2,i,j}$ и $\widetilde{G}'''_{2,i,j}$ являются однородностями аналогичного типа из (14.1), то есть вида $(0, d_1, d_2, d_3)$. Отсюда соответственно имеем формулы $(0, 20, 4, 0)$, $(0, 21, 2, 1)$ и $(0, 22, 0, 2)$. Отметим, что на многообразии $\mathcal{V}$ из (28.9) для дифференциальной системы (37.1) величины $\widetilde{G}_{2,2,j}$ $(j = \overline{0,6})$ имеют вид

$$\widetilde{G}_{2,2,j}|_{\mathcal{V}} = 2304L_2\, (j = 0, 2, 4, 6),\ \widetilde{G}_{2,2,j}|_{\mathcal{V}} = 0,\ (j = 1, 3, 5).$$

С другой стороны, вторая фокусная величина L_2 дифференциальной системы (37.1) может быть записана с помощью выражении из (37.11) следующим образом:

$$24L_2 = \widetilde{G}'_{2,2,j}|_{\mathcal{V}} + \widetilde{G}''_{2,2,j}|_{\mathcal{V}} + \widetilde{G}'''_{2,2,j}|_{\mathcal{V}}\, (j = 0, 2, 4, 6),$$

где

$$\begin{gathered}
\widetilde{G}'_{2,2,j}|_{\mathcal{V}} = 4(62g^3h - 2gh^3 + 95g^2hk - 2h^3k + 38ghk^2 + 5hk^3 - 62g^3l+\\
+27gh^2l - 39g^2kl + 29h^2kl - 15gk^2l - 8ghl^2 + 15hkl^2 - 5gl^3 + 53g^2hm+\\
+66ghkm + 13hk^2m - 127g^2lm - 6h^2lm - 68gklm - 15k^2lm - 13hl^2m-\\
-5l^3m + 6ghm^2 + 6hkm^2 - 63glm^2 - 29klm^2 + 2lm^3 + 6g^3n + 61gh^2n+\\
+72g^2kn + 63h^2kn + 33gk^2n + 5k^3n - 10ghln + 68hkln - 33gl^2n+\\
+15kl^2n - 72g^2mn - 6h^2mn + 10gkmn + 8k^2mn - 66hlmn - 38l^2mn-\\
-61gm^2n - 27km^2n + 2m^3n + 72ghn^2 + 127hkn^2 - 72gln^2 + 39kln^2-\\
-53hmn^2 - 95lmn^2 - 6gn^3 + 62kn^3 - 62mn^3),\\
\widetilde{G}''_{2,2,j}|_{\mathcal{V}} = -2(186g^2p + 10h^2p + 117gkp + 45k^2p + 59hlp + 15l^2p+\\
+159gmp + 75kmp + 18m^2p + 143hnp + 89lnp + 196n^2p - 69ghq-\\
-57hkq + 69glq + 12klq + 9lmq + 60gnq + 3knq + 21mnq + 168g^2r-\\
-6h^2r + 69gkr + 15k^2r + 87hlr + 45l^2r + 123gmr + 39kmr + 18m^2r+\\
+171hnr + 129lnr + 222n^2r - 13ghs - 17hks - 15gls - 16hms - 15lms-\\
-16gns - 17kns - 19mns - 19ght - 15hkt - 17glt - 16hmt - 17lmt-\\
-16gnt - 15knt - 13mnt + 222g^2u + 18h^2u + 129gku + 45k^2u + 39hlu+\\
+15l^2u + 171gmu + 87kmu - 6m^2u + 123hnu + 69lnu + 168n^2u + 21ghv+\\
+9hkv + 3glv + 12klv - 57lmv + 60gnv + 69knv - 69mnv + 196g^2w+\\
+18h^2w + 89gkw + 15k^2w + 75hlw + 45l^2w + 143gmw + 59kmw+\\
+10m^2w + 159hnw + 117lnw + 186n^2w),\\
\widetilde{G}'''_{2,2,j}|_{\mathcal{V}} = -9(11pq + 15qr - 5ps - rs + pt + 5rt + 3qu - 5su + tu - 7pv-\\
-3rv - 15uv + 7qw - sw + 5tw - 11vw).
\end{gathered}$$

Выбираем комитант веса -1 дифференциальной системы $s(1,2,3)$ из (37.1), который содержит в качестве полуинварианта выражение $\widetilde{G}_{2,i,j}+\widetilde{B}_{2,i,j}b_i+\widetilde{D}_{2,i,j}d_j$. Согласно разложению (37.11) и вытекающих из нее типов, находим, что этот комитант является суммой комитантов, которые принадлежат линейным пространствам

$$S_{1,2,3}^{(6,20,4,0)},\ S_{1,2,3}^{(6,21,2,1)},\ S_{1,2,3}^{(6,22,0,2)}. \tag{37.12}$$

Используя тот же процесс и матричное уравнение

$$\widetilde{A}_3\widetilde{B}_3=\widetilde{C}_3$$

для любого фиксированного $i\in\{0,1,...,4\},\ j\in\{0,1,...,6\},\ k\in\{0,1,...,8\}$ получаем

$$G_3=\frac{\widetilde{G}_{3,i,j,k}+\widetilde{B}_{3,i,j,k}b_i+\widetilde{D}_{3,i,j,k}d_j+\widetilde{F}_{3,i,j,k}f_j}{\widetilde{\sigma}_{3,i,j,k}}. \tag{37.13}$$

Аналогично с предыдущим случаем находим, что фокусная псевдовеличина $\widetilde{G}_{3,i,j,k}$ разлагается в сумму их четырех членов одной степени 43 относительно коэффициентов дифференциальной системы (37.1), которые согласно (14.1) запишутся $(0,d_1,d_2,d_3)$ и принадлежат к типам $(0,37,6,0)$, $(0,38,4,1)$, $(0,39,2,2)$ и $(0,40,0,3)$. В этом случае следует, что комитант веса -1, который имеет в качестве полуинварианта один из числителей выражения (37.13), состоит из суммы комитантов системы (37.1), которые принадлежат линейным пространствам

$$S_{1,2,3}^{(8,37,6,0)},\ S_{1,2,3}^{(8,38,4,1)},\ S_{1,2,3}^{(8,39,2,2)},\ S_{1,2,3}^{(8,40,0,3)}. \tag{37.14}$$

Следуя этому процесу, получаем ряд линейных пространств (37.8), (37.12), (37.14) и.т.д. комитантов дифференциальной системы (37.1). Заметим, что соответственные обобщенные фокусные псевдовеличины G_k данной системы это сумма коэффициентов этих комитантов.

Аналогично нетрудно вывести общую формулу комитантов, которые имеют в качестве коэффициентов обобщенные фокусные псевдовеличины, соответствующие G_k, которые разлагаются в сумму комитантов дифференциальной системы (37.1) соответствующих типов

$$\left(2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2)+i,2(k-i),i\right)\ (i=\overline{0,k}).$$

Рассмотрим подалгебру $S'_{1,2,3}\subset S_{1,2,3}$, которую запишем в виде

$$S'_{1,2,3}=\bigoplus_{(d)}S_{1,2,3}^{(d')}, \tag{37.15}$$

где через $S_{1,2,3}^{(d')}$ обозначены линейные пространства

$$S_{1,2,3}^{(0,0,0,0)} = \mathbb{R},\ S_{1,2,3}^{(0,1,0,0)}, ..., S_{1,2,3}^{(2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2)+i,2(k-i),i)} \\ (i = \overline{0,k}, k = 1,2,...) \tag{37.16}$$

а также пространства из $S_{1,2,3}$, которые содержат всевозможные их произведения.

Так как алгебра $S'_{1,2,3}$ является градуированной подалгеброй в конечно-определенной алгебре $S_{1,2,3}$, то согласно предложению 19.1 получаем $\varrho(S'_{1,2,3}) \le \varrho(S_{1,2,3})$. Из этого неравенства и из того что с помощью формулы (11.5), в которой для дифференциальной системы (37.1) имеем $m_0 = 1$, $m_1 = 2$, $m_3 = 3$, получаем $\varrho(S_{1,2,3}) = 17$. Тогда согласно примечанию 11.2 о полуинвариантах и того что обобщенные фокусные псевдовеличины являются коэффициентами некоторых комитантов данной дифференциальной системы, получаем что справедлива

Теорема 37.1. *Максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин в проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы* (37.1), *не превышает* 17.

Согласно предложению 19.2, замечанию 29.1 и равенству (29.3) следует, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин L_k $(k = \overline{1,\infty})$ не может превысить максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин. Отсюда с помощью теоремы 38.1 получаем

Следствие 37.1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы* (37.1), *не превышает* 17.

§38. О верхней границе числа алгебраически-независимых фокусных величин в решении проблемы центра и фокуса для дифференциальной системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$

Рассмотрим дифференциальную систему $s(1, m_1, ..., m_\ell)$:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x,y),\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x,y), \tag{38.1}$$

где P_{m_i} и Q_{m_i}–однородные многочлены степени $m_i \geq 1$ относительно x и y, а $m_0 = 1$. Согласно §27 задача состоит в определении мажорантной оценки числа λ алгебраически-независимых элементов из (27.1), (27.2), то есть для любого нетривиального многочлена относительно переменных L_{i_1}, L_{i_2},..., L_{i_λ} имеет место неравенство $F(L_{i_1}, L_{i_2}, ..., L_{i_\lambda}) \neq 0$, $(\lambda \leq \omega)$.

Фокусные величины дифференциальной системы (38.1) образуют бесконечную последовательность многочленов от коэффициентов этой системы (27.1).

Известно из работы [20], что дифференциальная система $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ допускает группу $GL(2, \mathbb{R})$, которой соответствует редуктивная алгебра Ли L_4, состоящая из операторов (5.1)–(5.2), (5.5)–(5.6), (5.8)–(5.9), (5.11)–(5.12) линейного представления данной группы в пространстве фазовых переменных и коэффициентов этой системы. Эта алгебра генерирует градуированную алгебру Сибирского инвариантных многочленов относительно унимодулярной группы $SL(2, \mathbb{R}) \subset GL(2, \mathbb{R})$, которую запишем в виде

$$S_{1,m_1,...,m_\ell} = \sum_{(d)} S^{(d)}_{1,m_1,...,m_\ell}, \tag{38.2}$$

где (d) называется тип пространства $S^{(d)}_{1,m_1,...,m_\ell}$ и имеет вид (14.1), который является конечномерным линейным пространством инвариантных многочленов (однородные комитанты, инварианты степени δ относительно фазовых переменных x, y и степени d_i относительно коэффициентов многочленов P_{m_i} и Q_{m_i} системы (38.1)).

Аналогично рассматриваемым примерам в этой главе можно показать, что каждой фокусной величине L_k $(k = \overline{1, \infty})$ можно поставить в соответствие конечномерные линейные пространства инвариантных многочленов (унимодулярные комитанты [20])

$$S^{(d^{(k)})}_{1,m_1,...,m_\ell} \ (k = 1, 2, ...), \tag{38.3}$$

где

$$(d^{(k)}) = (\delta^{(k)}, d_0^{(k)}, d_1^{(k)}, ..., d_\ell^{(k)}) \tag{38.4}$$

является типом пространства, который содержит комитанты, что имеют в качестве коэффициентов фокусные псевдовеличины дифференциальной системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Существование пространств комитантов (38.3) аргументировано леммой 11.3. Для этих пространств характерно, что они содержат хотя-бы один однороный многочлен относительно x, y, в котором коэффициенты являются обобщенными фокусными псевдовеличинами, которые характеризуется тем, что на инвариантном многообразии $\mathcal{V}$ из

(28.9) их полуинварианты, за исключением числовой константы, переходят к соответствующей фокусной величине L_k. Таким образом получаем последовательность пространств $\mathbb{R} = S^{(0,0,\dots,0)}_{1,m_1,\dots,m_\ell}$, $S^{(0,1,\dots,0)}_{1,m_1,\dots,m_\ell}$,..., $S^{(\delta^{(k)},d_0^{(k)},d_1^{(k)},\dots,d_\ell^{(k)})}_{1,m_1,\dots,m_\ell}$,... из $S_{1,m_1,\dots,m_\ell}$. С их помощью образуем градуированную подалгебру $S'_{1,m_1,\dots,m_\ell}$, которая удовлетворяет включению

$$S'_{1,m_1,\dots,m_\ell} \subset S_{1,m_1,\dots,m_\ell},$$

откуда согласно предложению 19.1, следует что между их размерностями Крулля имеет место неравенство

$$\varrho(S'_{1,m_1,\dots,m_\ell}) \leq \varrho(S_{1,m_1,\dots,m_\ell}). \tag{38.5}$$

Из формулы (11.5) и примечания 11.1 получаем

$$\varrho(S_{1,m_1,\dots,m_\ell}) = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3. \tag{38.6}$$

Аналогично примерам, рассмотренными в §§32 – 37 с помощью (38.5) и (38.6) можно показать, что справедлива

Лемма 38.1. *Максимальное число алгебраически-независимых обобщенных фокусных псевдовеличин в проблеме центра и фокуса для дифференциальной системы* (38.1), *не превышает число из* (38.6).

Принимая во внимание, что обобщенные фокусные псевдовеличины, будучи полуинвариантами в комитантах, которые содержаться во всех однородных пространствах алгебры $S'_{1,m_1,\dots,m_\ell}$ системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (1.1)–(1.2) на многообразии $\mathcal{V}$ из (28.7), или что тоже самое из (28.9), преобразовываются с точностью до числового множителя в фокусных величинах L_1, L_2,..., L_k,... этой системы, с помощью леммы 38.1 получаем, что имеет место

Теорема 38.1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин дифференциальной системы* (38.1), *которые принимают участие в решении проблемы центра и фокуса, не превышает число из* (38.6).

Напоминаем что для дифференциальных систем $s(1,2)$ и $s(1,3)$ число существенных условий центра $\omega = 3$ и соответственно 5, а для дифференциальной системы $s(1,2,3)$ согласно одной гипотезе $\omega \leq 13$.

Из теоремы 38.1 получаем, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин дифференциальной системы $s(1,2)$ не превышает 9, для дифференциальной системы $s(1,3)$ не превышает 11, а для дифференциальной системы $s(1,2,3)$ не превышает 17.

Эти аргументы и предложение 19.2 с многообразием $\mathcal{V}$ из (28.7), что эквивалентно (28.9), и ранее определенная алгебра $S'_{1,m_1,\dots,m_\ell}$, позволяют нам заключить, что может быть справедлива

Гипотеза 38.1. *Число существенных условий центра* ω (27.2), *что решают проблему центра и фокуса для дифференциальной системы* (38.1), *котороя имеет в начале координат особую точку второй группы, не превышает число из* (38.6).

Замечание 38.1. *Равенство* (38.6) *показывает, что величина* ϱ *равна числу всех коэффициентов нелинейностей правой части системы* (38.1) *плюс три.* Указанные результаты впервые были приведены в работе [25].

Отметим, что в §16 из монографии Сибирского [25] определена оценка нижней границы числа существенных условий центра, когда дифференциальная система (1.1) содержит все неоднородности степени от 1 до q ($q > 1$). Другими словами, для дифференциальной системы $s(\Gamma)$, где $\Gamma = \{1, 2, ..., q\}$, имеет место

Теорема 2.16 [25]. *Число существенных условий центра не менее* $q^2 - q$ *для четного* q *и* $q^2 - q - 1$ *для нечетного* q.

Адаптируя результат из теоремы 39.1 для дифференциальной системы $s(1, 2, ..., q)$, находим

$$\varrho(S_{1,2,\dots,q}) = 2\left(\sum_{i=2}^{q} i + q - 1\right) + 3 = q^2 + 3q - 1.$$

Получаем, что между оценками из теоремы 38.1 и теоремы 2.16 [25] существуют соотношения

$$\varrho(S_{1,2,\dots,q}) = q^2 + 3q - 1 = \underbrace{[q^2 - q] + 4q - 1}_{q=2k} \text{ или } \underbrace{[q^2 - q - 1] + 4q}_{q=2k+1}.$$

Так получаем, что для дифференциальной системы $s(1, 2, ..., q)$ оценка из теоремы 38.1 больше чем оценка из теоремы 2.16 [25] на $4q - 1$, когда q четное и $4q$, когда q нечетное.

§39. Комментарии к шестой главе

Результаты этой главы позволили подойти к получению оценки верхней границы числа алгебраически-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для любой дифференциальной системы вида (1.1)–(1.2), сформулированной более 130 лет назад великим французским математиком Пуанкаре.

Эти результаты позволили выдвинуть обоснованную гипотезу о верхней границе числа существенных фокусных величин, принимающих участие в решении указанной проблемы для любой дифференциальной системы вида (1.1)–(1.2).

В этих исследованиях существенную роль сыграли ряды Гильберта для алгебр Сибирского инвариантов и комитантов, а также алгебра Ли представления центроаффинной группы в пространстве фазовых переменных и коэффициентов систем вида (1.1)–(1.2).

Основной результат состоит в том, что число алгебраически-независимых фокусных величин для дифференциальной системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ вида (38.1), имеющей в начале координат особую точку второй группы, не превосходит число $\varrho = 2(\sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i + \ell) + 3$, которое является размерностью Крулля градуированной алгебры Сибирского комитантов $S_{1,m_1,...,m_\ell}$ системы (38.1).

Это и есть решение обобщенной проблемы центра и фокуса для системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ вида (38.1).

Глава 7. Верхняя граница числа функционально-независимых фокусных величин, принимающих участие в решение проблемы центра и фокуса для системы Ляпунова

§40. Операторы Ли представления группы вращений $SO(2, \mathbb{R})$ в пространстве коэффициентов системы Ляпунова (28.4)

Рассмотрим проблему центра и фокуса для классической системы дифференциальных уравнений (28.4), которая имеет общий вид

$$\dot{x} = y + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x, y),\ \dot{y} = -x + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x, y)\ (\ell < \infty), \tag{40.1}$$

где

$$\begin{aligned} P_{m_i}(x, y) &= \sum_{k=0}^{m_i} \binom{m_i}{k} \overset{i}{a}{}^1_k x^{m_i - k} y^k, \\ Q_{m_i}(x, y) &= \sum_{k=0}^{m_i} \binom{m_i}{k} \overset{i}{a}{}^2_k x^{m_i - k} y^k\ (m_i \in \Gamma;\ i = \overline{1, \ell}). \end{aligned} \tag{40.2}$$

Множество $\Gamma = \{m_i\}_{i=1}^{\ell}$ является конечным множеством различных натуральных чисел. Напомним, что систему (40.1) будем называть *системой Ляпунова* [3] и обозначать через $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Исследуем действие группы вращений $SO(2,\mathbb{R})$, заданное формулами

$$\overline{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi,\ \overline{y} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi\,(0 \leq \varphi < \pi) \tag{40.3}$$

на систему (40.1)–(40.2).

Вследствие преобразования (40.3) в системе (40.1)–(40.2) получаем

$$\dot{\overline{x}} = \overline{y} + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(\overline{x},\overline{y}),\ \dot{\overline{y}} = -\overline{x} + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(\overline{x},\overline{y})\ (\ell < \infty), \tag{40.4}$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ имеют вид (40.3), а коэффициенты $\overset{i}{b}{}^j_k$ $(i = \overline{1,\ell};\ j = 1,2;$ $k = \overline{1,m_i})$ в полиномах

$$\begin{gathered} P_{m_i}(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{b}{}^1_k\overline{x}^{m_i-k}\overline{y}^k, \\ Q_{m_i}(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}\overset{i}{b}{}^2_k\overline{x}^{m_i-k}\overline{y}^k\,(m_i \in \Gamma;\ i = \overline{1,\ell}) \end{gathered} \tag{40.5}$$

запишутся в форме

$$\begin{gathered} \overset{i}{b}{}^1_k = \overset{i}{a}{}^1_k\cos^{m_i+1}\varphi + [(m_i-k)\overset{i}{a}{}^1_{k+1} - k\overset{i}{a}{}^1_{k-1} + \overset{i}{a}{}^2_k]\cos^{m_i}\varphi\sin\varphi + \\ +o(\sin\varphi), \\ \overset{i}{b}{}^2_k = \overset{i}{a}{}^2_k\cos^{m_i+1}\varphi + [-\overset{i}{a}{}^1_k + (m_i-k)\overset{i}{a}{}^2_{k+1} - k\overset{i}{a}{}^2_{k-1}]\cos^{m_i}\varphi\sin\varphi + \\ +o(\sin\varphi). \end{gathered} \tag{40.6}$$

Заметим, что $o(\sin\varphi)$ является линейной функцией от коэффициентов системы (40.1)–(40.2) и содержит в каждом члене $\sin\varphi$ в степени не меньше двух.

Из (40.3) и (40.6) согласно §2 и §4 следует, что линейное представление группы $SO(2,\mathbb{R})$ является однопараметрической группой, зависящей от параметра φ, значение которого в $\varphi = 0$ отвечает тождественному преобразованию

$$\overline{x} = x,\ \overline{y} = y,\ \overset{i}{b}{}^j_k = \overset{i}{a}{}^j_k\,(i = \overline{1,\ell};\ j = 1,2;\ k = \overline{1,m_i}).$$

С учетом этого по формулам (4.4) получаем

$$\begin{gathered} \xi^1(x,y) = y,\ \xi^2 = -x, \\ \overset{i}{\eta}{}^1_k = (m_i-k)\overset{i}{a}{}^1_{k+1} - k\overset{i}{a}{}^1_{k-1} + \overset{i}{a}{}^2_k\,(i = \overline{1,\ell};\ k = \overline{0,m_i}), \\ \overset{i}{\eta}{}^2_k = -\overset{i}{a}{}^1_k + (m_i-k)\overset{i}{a}{}^2_{k+1} - k\overset{i}{a}{}^2_{k-1}\,(i = \overline{1,\ell};\ k = \overline{0,m_i}). \end{gathered}$$

Подставляя эти равенства в (4.7)–(4.8) находим, что имеет место

Теорема 40.1. *Оператор Ли представления группы* $SO(2,\mathbb{R})$ *в пространстве* $E^N(x,y,A)$ *системы* (40.1)–(40.2) *имеет вид*

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + D, \tag{40.7}$$

где

$$\begin{gathered} D = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i}\left\{[(m_i-k)\overset{i}{a}{}^1_{k+1} - k\overset{i}{a}{}^1_{k-1} + \overset{i}{a}{}^2_k]\frac{\partial}{\partial \overset{i}{a}{}^1_k} + \right. \\ \left. +[-\overset{i}{a}{}^1_k + (m_i-k)\overset{i}{a}{}^2_{k+1} - k\overset{i}{a}{}^2_{k-1}]\frac{\partial}{\partial \overset{i}{a}{}^2_k}\right\}. \end{gathered} \tag{40.8}$$

Через A обозначена совокупность коэффициентов нелинейностей правых частей системы (40.1)–(40.2).

Следствие 40.1. *Оператор Ли представления группы* $SO(2,\mathbb{R})$ *в пространстве коэффициентов* $E^N(A)$ *системы* (40.1)–(40.2) *имеет вид* (40.8).

Примечание 40.1. *Теорема* 40.1 *и следствие* 40.1 *известны из работ* [15, 20] *для системы* $s(1,m_1,...,m_\ell)$ *общего вида.*

Примечание 40.2. *С помощью определяющих уравнений* (7.1) *можно проверить, что операторы* (40.7)–(40.8) *допускаются системой Ляпунова* $s\mathcal{L}(1,m_1,...,m_\ell)$ *из* (40.1)–(40.2).

§41. Комитанты системы (40.1) – (40.2) для группы вращений и понятие функционального базиса

Определение 41.1. *Полином* $F(x,y,A)$ *от коэффициентов системы* (40.1)–(40.2) *и фазовых переменных* x, y *называется алгебраическим комитантом этой системы при группе вращений* $SO(2,\mathbb{R})$ *из* (40.3), *если для всех допустимых* A, x, y *и* φ *имеет место тождество*

$$F(\overline{x},\overline{y},B) = F(x,y,A), \tag{41.1}$$

где A (B)*–совокупность коэффициентов системы* (40.1)–(40.2) ((40.4)–(40.5)), *а* (x,y), $(\overline{x},\overline{y})$*–фазовые переменные тех же систем.*

Если комитант F системы (40.1)–(40.2) не зависит от фазовых переменных x, y, то, следуя [25], его принято называть *инвариантом* указанной системы при группе вращений.

Определение 41.2. *Совокупность алгебраических комитантов системы* (40.1)–(40.2) *относительно группы вращений*

$$\{F_\alpha(x, y, A),\ \alpha \in \mathbb{N}^+\} \tag{41.2}$$

называется функциональным базисом комитантов указанной системы при группе $SO(2, \mathbb{R})$ *если любой комитант* $F(x, y, A)$ *рассматриваемой системы при группе вращений можно представить в виде однозначной функции от комитантов* (41.2).

Из работ [15, 20] следует, что имеет место

Теорема 41.1. *Для того чтобы полином* $F(x, y, A)$ *был комитантом системы* (40.1)–(40.2) *при группе вращений* (40.3), *то есть удовлетворял равенству* (41.1), *необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнению*

$$X(F) = 0, \tag{41.3}$$

где X *является операторм Ли из* (40.7)–(40.8).

С помощью теоремы 41.1 нетрудно проверить, что имеет место

Следствие 41.1. *Для того чтобы полином* $I(A)$ *был инвариантом системы* (40.1)–(40.2) *при группе вращений* (40.3), *необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял равенству*

$$D(I) = 0, \tag{41.4}$$

где D *является операторм Ли из* (40.8).

Примечание 41.1. *Из* (41.3) *и* (41.4) *следует, что комитанты и инварианты системы Ляпунова* $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ (40.1)–(40.2) *являются решениями однородных уравнений в частных производных первого порядка с операторами Ли* (40.7) *и* (40.8). *Заметим, что число переменных, участвующих в операторах* (40.7) *и* (40.8), *равно соответственно*

$$N = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell + 1\right) \tag{41.5}$$

и

$$N_1 = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right). \tag{41.6}$$

Из общей теории уравнений типа (41.3) и (41.4) (см., например, [42]) известно, что *максимальное число* функционально-независимых решений равно соотвественно $N - 1$ и $N_1 - 1$.

Пример 41.1. Рассмотрим дифференциальную систему (30.1) с квадратичными нелинейностями, записанную в тензорной записи.

Известно из работы [16], что образующие алгебры Сибирского для системы (30.1) являются следующими инвариантами и комитантами:

$$\begin{gathered}
I_1=a^{\alpha}_{\alpha},\ I_2=a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha},\ I_3=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq},\ I_4=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\beta q}a^{\gamma}_{\alpha\gamma}\varepsilon^{pq},\\
I_5=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\gamma q}a^{\gamma}_{\alpha\beta}\varepsilon^{pq},\ I_6=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\gamma}a^{\gamma}_{\alpha q}a^{\delta}_{\beta\delta}\varepsilon^{pq},\\
I_7=a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta s}a^{\delta}_{\gamma\delta}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\ I_8=a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\delta s}a^{\delta}_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
I_9=a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\beta q}a^{\gamma}_{\gamma s}a^{\delta}_{\alpha\delta}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\ I_{10}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\delta}a^{\gamma}_{\nu}a^{\delta}_{\alpha q}a^{\nu}_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq},\\
I_{11}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{qr}a^{\gamma}_{\beta s}a^{\delta}_{\alpha\gamma}a^{\mu}_{\delta\mu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},I_{12}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{qr}a^{\gamma}_{\beta s}a^{\delta}_{\alpha\delta}a^{\mu}_{\gamma\mu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
I_{13}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{qr}a^{\gamma}_{\gamma s}a^{\delta}_{\alpha\beta}a^{\mu}_{\delta\mu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},I_{14}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{r}a^{\gamma}_{\alpha q}a^{\delta}_{\beta s}a^{\mu}_{\gamma\delta}a^{\nu}_{\mu\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
I_{15}=a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{qk}a^{\gamma}_{\alpha s}a^{\delta}_{\delta l}a^{\mu}_{\beta\gamma}a^{\nu}_{\mu\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}\varepsilon^{kl},\\
I_{16}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{r}a^{\gamma}_{\delta}a^{\delta}_{\alpha q}a^{\mu}_{\beta s}a^{\nu}_{\gamma\tau}a^{\tau}_{\mu\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}.
\end{gathered}\tag{41.7}$$

$$\begin{gathered}
K_1=a^{\alpha}_{\alpha\beta}x^{\beta},\ K_2=a^{p}_{\alpha}x^{\alpha}x^{q}\varepsilon_{pq},\ K_3=a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha\gamma}x^{\gamma},\ K_4=a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\alpha\beta}x^{\gamma},\\
K_5=a^{p}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}x^{q}\varepsilon_{pq},\ K_6=a^{\alpha}_{\alpha\beta}a^{\beta}_{\gamma\delta}x^{\gamma}x^{\delta},\ K_7=a^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}_{\alpha\delta}x^{\gamma}x^{\delta},\\
K_8=a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\delta}a^{\gamma}_{\alpha\beta}x^{\delta},\ K_9=a^{\alpha}_{\alpha p}a^{\beta}_{\gamma q}a^{\gamma}_{\beta\delta}x^{\delta}\varepsilon^{pq},\ K_{10}=a^{\alpha}_{\alpha p}a^{\beta}_{\delta q}a^{\gamma}_{\beta\gamma}x^{\delta}\varepsilon^{pq},\\
K_{11}=a^{p}_{\alpha}a^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}x^{\gamma}x^{q}\varepsilon_{pq},\ K_{12}=a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha\gamma}a^{\gamma}_{\delta\mu}x^{\delta}x^{\mu},\\
K_{13}=a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\alpha\beta}a^{\gamma}_{\delta\mu}x^{\delta}x^{\mu},\ K_{14}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\delta}a^{\delta}_{\gamma\mu}x^{\mu}\varepsilon^{pq},\\
K_{15}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\mu}a^{\delta}_{\gamma\delta}x^{\mu}\varepsilon^{pq},\ K_{16}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\beta q}a^{\gamma}_{\alpha\mu}a^{\delta}_{\gamma\delta}x^{\mu}\varepsilon^{pq},\\
K_{17}=a^{\alpha}_{\beta\nu}a^{\beta}_{\alpha\gamma}a^{\gamma}_{\delta\mu}x^{\delta}x^{\mu}x^{\nu},\ K_{18}=a^{\alpha}_{\mu p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\nu}a^{\delta}_{\gamma\delta}x^{\mu}x^{\nu}\varepsilon^{pq},\\
K_{19}=a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\nu}a^{\gamma}_{\alpha q}a^{\delta}_{\beta\mu}a^{\mu}_{\gamma\delta}x^{\nu}\varepsilon^{pq},\ K_{20}=a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\nu q}a^{\gamma}_{\alpha s}a^{\delta}_{\beta\gamma}a^{\mu}_{\delta\mu}x^{\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}.
\end{gathered}\tag{41.8}$$

Запишем систему (30.1) в виде (40.1)–(40.2). С учетом обозначений (30.3) она примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=y+gx^2+2hxy+ky^2,\\
\dot{y}&=-x+\ell x^2+2mxy+ny^2,
\end{aligned}\tag{41.9}$$

для которой операторы Ли (40.7)–(40.8) будут иметь вид

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}+D,\tag{41.10}$$

где

$$\begin{gathered}
D=(2h+\ell)\frac{\partial}{\partial g}+(-g+k+m)\frac{\partial}{\partial h}+(2h+n)\frac{\partial}{\partial k}+\\
+(-g+2m)\frac{\partial}{\partial \ell}+(-h-\ell+n)\frac{\partial}{\partial m}-(k+2m)\frac{\partial}{\partial n}.
\end{gathered}\tag{41.11}$$

Тогда с учетом обозначений (30.3) для инвариантов и комитантов (41.7)–(41.8), полученных для системы (41.9) имеем

$$D(I_j) = 0\,(j = \overline{1,16}),\; X(K_i) = 0\,(i = \overline{1,20}). \tag{41.12}$$

С помощью равенств (41.12) и теоремы 41.1 доказана

Лемма 41.1. *Центроаффинные инварианты и комитанты* (41.7)–(41.8) *системы* (30.1) *являются для системы* (41.9) *инвариантами и комитантами группы вращений* $SO(2,\mathbb{R})$.

Очевидно, что обратное утверждение леммы 41.1 не всегда верно.

§42. Общие формулы, связывающие между собой коэффициенты комитанта системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ относительно группы вращений

Запишем комитант K системы Ляпунова (40.1)–(40.2) относительно группы вращений в виде

$$\begin{gathered} K = A_0x^m + A_1x^{m-1}y + A_2x^{m-2}y^2 + A_3x^{m-3}y^3 + A_4x^{m-4}y^4 + \\ +A_5x^{m-5}y^5 + A_6x^{m-6}y^6 + ... + A_{m-7}x^7y^{m-7} + A_{m-6}x^6y^{m-6} + \\ +A_{m-5}x^5y^{m-5} + A_{m-4}x^4y^{m-4} + A_{m-3}x^3y^{m-3} + A_{m-2}x^2y^{m-2} + \\ +A_{m-1}x^1y^{m-1} + A_my^m, \end{gathered} \tag{42.1}$$

где A_i $(i = \overline{1,m})$ являются полиномами от коэффициентов системы (40.1)–(40.2).

Рассмотрим равенство (41.3) с учетом формы оператора Ли (40.7). Используя (42.1) и оператор Ли (40.7), получаем

$$X(K) = y\frac{\partial K}{\partial x} - x\frac{\partial K}{\partial y} + D(K). \tag{42.2}$$

Тогда члены из правой части (42.2) с учетом (42.1) запишутся в виде

$$\begin{gathered} y\frac{\partial K}{\partial x} = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2}y + (m-2)A_2x^{m-3}y^2 + \\ +(m-3)A_3x^{m-4}y^3 + (m-4)A_4x^{m-5}y^4 + (m-5)A_5x^{m-6}y^5 + \\ +(m-6)A_6x^{m-7}y^6 + ... + 7A_{m-7}x^6y^{m-6} + 6A_{m-6}x^5y^{m-5} + \\ +5A_{m-5}x^4y^{m-4} + 4A_{m-4}x^3y^{m-3} + 3A_{m-3}x^2y^{m-2} + \\ +2A_{m-2}xy^{m-1} + A_{m-1}y^m, \end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
-x\frac{\partial K}{\partial y}=-A_1x^m-2A_2x^{m-1}y-3A_3x^{m-2}y^2-4A_4x^{m-3}y^3-\\
-5A_5x^{m-4}y^4-6A_6x^{m-5}y^5-...-(m-7)A_{m-7}x^8y^{m-8}-\\
-(m-6)A_{m-6}x^7y^{m-7}-(m-5)A_{m-5}x^6y^{m-6}-\\
-(m-4)A_{m-4}x^5y^{m-5}-(m-3)A_{m-3}x^4y^{m-4}-\\
-(m-2)A_{m-2}x^3y^{m-3}-(m-1)A_{m-1}x^2y^{m-2}-mA_mxy^{m-1}, \qquad (42.3)\\
D(K)=D(A_0)x^m+D(A_1)x^{m-1}y+D(A_2)x^{m-2}y^2+\\
+D(A_3)x^{m-3}y^3+D(A_4)x^{m-4}y^4+D(A_5)x^{m-5}y^5+\\
+D(A_6)x^{m-6}y^6+...+D(A_{m-7})x^7y^{m-7}+D(A_{m-6})x^6y^{m-6}+\\
+D(A_{m-5})x^5y^{m-5}+D(A_{m-4})x^4y^{m-4}+D(A_{m-3})x^3y^{m-3}+\\
+D(A_{m-2})x^2y^{m-2}+D(A_{m-1})x^1y^{m-1}+D(A_m)y^m.
\end{gathered}
$$

С учетом соотношения (41.3) и последних выражений из $X(K)=0$ имеем следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
x^m &: D(A_0)-A_1=0,\\
x^{m-1}y &: mA_0+2A_2+D(A_1)=0,\\
x^{m-2}y^2 &: (m-1)A_1-3A_3+D(A_2)=0,\\
x^{m-3}y^3 &: (m-2)A_2-4A_4+D(A_3)=0,\\
x^{m-4}y^4 &: (m-3)A_3-5A_5+D(A_4)=0,\\
x^{m-5}y^5 &: (m-4)A_4-6A_6+D(A_5)=0,\\
x^{m-6}y^6 &: (m-5)A_5-7A_7+D(A_6)=0,\\
x^{m-7}y^7 &: (m-6)A_6-8A_8+D(A_7)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x^6y^{m-6} &: 7A_{m-7}-(m-5)A_{m-5}+D(A_{m-6})=0,\\
x^5y^{m-5} &: 6A_{m-6}-(m-4)A_{m-4}+D(A_{m-5})=0,\\
x^4y^{m-4} &: 5A_{m-5}-(m-3)A_{m-3}+D(A_{m-4})=0,\\
x^3y^{m-3} &: 4A_{m-4}-(m-2)A_{m-2}+D(A_{m-3})=0,\\
x^2y^{m-2} &: 3A_{m-3}-(m-1)A_{m-1}+D(A_{m-2})=0,\\
xy^{m-1} &: 2A_{m-2}-(m)A_m+D(A_{m-1})=0,\\
y^m &: A_{m-1}+D(A_m)=0.
\end{aligned}
$$

Отсюда и теоремы 41.1 получаем, что имеет место

Теорема 42.1. *Полином* (42.1) *является комитантом системы Ляпунова* $s\mathcal{L}(1,m_1,...,m_\ell)$ *из* (40.1) *относительно группы вращений*

$SO(2,\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют равенствам

$$
\begin{gathered}
A_1 = D(A_0),\ D(A_m) = -A_{m-1}, \\
A_k = \frac{1}{k}\left[D(A_{k-1}) + (m-k+2)A_{k-2}\right]\ (k = \overline{2,m}),
\end{gathered} \tag{42.4}
$$

где A_i $(i = \overline{0,m})$ взято из (42.1), а D–из (40.8).

В качестве примера можно проверить справедливость теоремы 42.1 на комитантах (41.8) с обозначениями (30.3) для системы (41.9) с оператором (41.11).

Следствие 42.1. *Если известны коэффициент A_0 при наивысшей степени x комитанта K из (42.1) системы Ляпунова (40.1)–(40.2) относительно группы вращений $SO(2,\mathbb{R})$ и его степень относительно x и y, то остальные коэффициенты можно построить по формулам (42.4).*

По аналогии с комитантами группы центроаффинных преобразований для системы (1.1)–(1.2) будем называть *полуинвариантом* коэффициент A_0 комитанта K из (42.1) системы Ляпунова (40.1)–(40.2) относительно группы $SO(2,\mathbb{R})$.

Легко можно убедится, что имеет место

Замечание 42.1. *Если комитанты $K_1, K_2, ..., K_r$ системы Ляпунова (40.1)–(40.2) относительно группы $SO(2,\mathbb{R})$ функционально-независимы, то их полуинварианты могут быть также функционально-независимы.*

Отсюда вытекает

Примечание 42.1. *Число функционально-независимых полуинвариантов для функционально-независимых комитантов $K_1, K_2, ..., K_r$ системы Ляпунова (40.1)–(40.2) относительно группы $SO(2,\mathbb{R})$ не превышает r.*

§43. Об инвариантности фокусных величин в проблеме центра и фокуса относительно группы вращений

В работе [25, стр. 84] показано, что имеет место

Примечание 43.1. *Условия наличия центра для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (40.1)–(40.2) являются инвариантами этой системы относительно группы вращений $SO(2,\mathbb{R})$.*

Известно, что фокусные величины для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (28.4) строятся неоднозначно, так как уравнения (28.3) с функцией Ляпунова (28.2) содержат произвольные постоянные, которые могут принимать различные значения.

Покажем на некоторых примерах, что фокусные величины в проблеме центра и фокуса для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (40.1)–(40.2) могут быть *инвариантами* и *полуинвариантами* этой системы относительно группы вращений $SO(2, \mathbb{R})$. Для этого используем результаты, полученные в §42.

Рассмотрим систему Ляпунова $s\mathcal{L}(1, 2)$ из (41.9) и оператор Ли (41.10)–(41.11), допускаемый этой системой.

В работе А. П. Садовского [41, стр. 110] приведены 3 фокусные величины, которые решают проблему центра и фокуса для системы $s\mathcal{L}(1, 2)$ из (41.9), имеющие форму

$$L_1S = \frac{1}{2}(-gh - hk + gl + lm - kn + mn),$$

$$L_2S = \frac{1}{24}(62g^3h - 2gh^3 + 119g^2hk - 2h^3k + 62ghk^2 + 5hk^3-$$
$$-62g^3l + 27gh^2l - 63g^2kl + 29h^2kl - 15gk^2l - 8ghl^2 + 15hkl^2-$$
$$-5gl^3 + 101g^2hm + 138ghkm + 37hk^2m - 175g^2lm - 6h^2lm-$$
$$-116gklm - 15k^2lm - 13hl^2m - 5l^3m + 54ghm^2 + 54hkm^2-$$
$$-159glm^2 - 53klm^2 - 46lm^3 + 6g^3n + 37gh^2n + 72g^2kn + 39h^2kn+$$
$$+57gk^2n + 5k^3n + 14ghln + 68hkln - 33gl^2n + 15kl^2n - 72g^2mn-$$
$$-6h^2mn + 34gkmn + 32k^2mn - 42hlmn - 38l^2mn - 109gm^2n-$$
$$-3km^2n - 46m^3n + 48ghn^2 + 79hkn^2 - 48gln^2 + 39kln^2-$$
$$-29hmn^2 - 71lmn^2 - 6gn^3 + 38kn^3 - 38mn^3),$$

$$L_3S = \frac{1}{2304}(-44725g^5h + 11142g^3h^3 - 88gh^5 - 124537g^4hk+$$
$$+30842g^2h^3k - 88h^5k - 121728g^3hk^2 + 27186gh^3k^2 - 45492g^2hk^3+$$
$$+7486h^3k^3 - 2651ghk^4 + 925hk^5 + 44725g^5l - 51066g^3h^2l-$$
$$-1216gh^4l + 84372g^4kl - 95044g^2h^2kl - 1704h^4kl + 53320g^3k^2l-$$
$$-44602gh^2k^2l + 10096g^2k^3l - 2880h^2k^3l - 465gk^4l + 28368g^3hl^2-$$
$$-3362gh^3l^2 + 7708g^2hkl^2 - 5802h^3kl^2 - 13582ghk^2l^2 - 3650hk^3l^2+$$
$$+2436g^3l^3 + 1858gh^2l^3 + 9332g^2kl^3 - 1700h^2kl^3 + 3650gk^2l^3-$$
$$-875ghl^4 + 465hkl^4 - 925gl^5 - 157320g^4hm + 7528g^2h^3m-$$

$$-356424g^3hkm+19904gh^3km-264096g^2hk^2m+12376h^3k^2m-$$
$$-67288ghk^3m-2296hk^4m+211165g^4lm-72038g^2h^2lm+$$
$$+888h^4lm+310816g^3klm-109100gh^2klm+144112g^2k^2lm-$$
$$-26630h^2k^2lm+17812gk^3lm-465k^4lm+67344g^2hl^2m+$$
$$+2776h^3l^2m+12024ghkl^2m-7552hk^2l^2m+14808g^2l^3m+$$
$$+978h^2l^3m+17844gkl^3m+3650k^2l^3m-1800hl^4m-925l^5m-$$
$$-214106g^3hm^2-4560gh^3m^2-214106g^2hkm^2-4560h^3km^2-$$
$$-29106ghk^2m^2-29106hk^3m^2+389610g^3lm^2-16864gh^2lm^2+$$
$$+249820g^2klm^2-32896h^2klm^2+131634gk^2lm^2+7716k^3lm^2+$$
$$+60798ghl^2m^2+9126hkl^2m^2+15478gl^3m^2+8512kl^3m^2-$$
$$-131528g^2hm^3-188448ghkm^3-56920hk^2m^3+350410g^2lm^3+$$
$$+7632h^2lm^3+83832gklm^3+40842k^2lm^3+15912hl^2m^3+$$
$$+3106l^3m^3-29432ghm^4-29432hkm^4+152800glm^4+$$
$$+60456klm^4+25560lm^5-4560g^5n-49528g^3h^2n-$$
$$-2168gh^4n-56129g^4kn-71382g^2h^2kn-2656h^4kn-$$
$$-86332g^3k^2n-8356gh^2k^2n-42376g^2k^3n+11242h^2k^3n-$$
$$-3576gk^4n+925k^5n-8288g^3hln-21396gh^3ln-$$
$$-107608g^2hkln-28148h^3kln-78028ghk^2ln-6580hk^3ln+$$
$$+41832g^3l^2n-3496gh^2l^2n+29628g^2kl^2n-28690h^2kl^2n-$$
$$-7552gk^2l^2n-3650k^3l^2n+7132ghl^3n-5780hkl^3n-$$
$$-520gl^4n+465kl^4n+44753g^4mn-87182g^2h^2mn+$$
$$+888h^4mn-78864g^3kmn-108972gh^2kmn-155168g^2k^2mn-$$
$$-11358h^2k^2mn-60956gk^3mn-3221k^4mn+51096g^2hlmn+$$
$$+9632h^3lmn-124544ghklmn-50104hk^2lmn+144264g^2l^2mn+$$
$$+16334h^2l^2mn+63884gkl^2mn-1522k^2l^2mn+5272hl^3mn-$$
$$-1445l^4mn+173116g^3m^2n-43264gh^2m^2n+17830g^2km^2n-$$
$$-59296h^2km^2n+82532gk^2m^2n-25890k^3m^2n+121900ghlm^2n-$$
$$-26836hklm^2n+146916gl^2m^2n+39066kl^2m^2n+222962g^2m^3n+$$
$$+7632h^2m^3n-103272gkm^3n-18814k^2m^3n+53184hlm^3n+$$
$$+38574l^2m^3n+125304gm^4n+32960km^4n+25560m^5n-$$
$$-56942g^3hn^2-23378gh^3n^2-141270g^2hkn^2-27690h^3kn^2-$$

$$
\begin{gathered}
-60328ghk^2n^2+6856hk^3n^2+48734g^3ln^2-38598gh^2ln^2-\\
-11808g^2kln^2-81368h^2kln^2-38236gk^2ln^2-3700k^3ln^2+\\
+22272ghl^2n^2-43344hkl^2n^2+12584gl^3n^2-4080kl^3n^2-\\
-57664g^2hmn^2+6856h^3mn^2-184664ghkmn^2-\\
-49232hk^2mn^2+202966g^2lmn^2+36790h^2lmn^2+\\
+13848gklmn^2-28284k^2lmn^2+43488hl^2mn^2+\\
+11604l^3mn^2+28654ghm^2n^2-68410hkm^2n^2+\\
+243030glm^2n^2+34596klm^2n^2+37272hm^3n^2+75942lm^3n^2- \qquad (43.1)\\
-288g^3n^3-43772gh^2n^3-48542g^2kn^3-64906h^2kn^3-\\
-30696gk^2n^3+3100k^3n^3+4176ghln^3-85408hkln^3+\\
+31676gl^2n^3-20456kl^2n^3+55598g^2mn^3+21434h^2mn^3-\\
-58400gkmn^3-31408k^2mn^3+69384hlmn^3+39200l^2mn^3+\\
+100760gm^2n^3-6790km^2n^3+40474m^3n^3-18481ghn^4-\\
-56701hkn^4+25249gln^4-30484kln^4+32968hmn^4+\\
+43993lmn^4+3408gn^5-16917kn^5+16917mn^5).
\end{gathered}
$$

В L_iS буква S подчеркивает, что L_iS являются фокусными величинами А. П. Садовского.

Примечание 43.2. *Отметим, что для фокусных величин* (43.1) *с помощью оператора Ли* (41.11) *находим*

$$D(L_1S)=0,\ D(L_2S)\neq 0,\ D(L_3S)\neq 0,$$

откуда следует, что L_1S является инвариантом системы $s\mathcal{L}(1,2)$ при группе вращений $SO(2,\mathbb{R})$, а L_2S и L_3S таковыми не являются.

С учетом теорем 41.1 и 42.1 и операторов (41.10)–(41.11) находим, что фокусным величинам L_2S и L_3S из (43.1) соответствуют следующие комитанты группы вращений:

$$K(L_2S)=L_2Sx^4+A_1x^3y+A_2x^2y^2+A_3xy^3+A_4y^4, \qquad (43.2)$$

где

$$
\begin{gathered}
A_1=D(L_2S),\ A_2=\frac{1}{2}[D(A_1)+4L_2S],\\
A_3=\frac{1}{3}[D(A_3)+2A_2],\ A_4=\frac{1}{4}[D(A_3)+2A_2],
\end{gathered} \qquad (43.3)
$$

а

$$
\begin{gathered}
K(L_3S)=L_3Sx^{12}+A_1x^{11}y+A_2x^{10}y^2+A_3x^9y^3+A_4x^8y^4+\\
+A_5x^7y^5+A_6x^6y^6+A_7x^5y^7+A_8x^4y^8+A_9x^3y^9+A_{10}x^2y^{10}+
\end{gathered} \qquad (43.4)
$$

$$+A_{11}xy^{11}+A_{12}y^{12}, \tag{43.5}$$

при

$$\begin{gathered}
A_1=D(L_3S),\ A_2=\frac{1}{2}[D(A_1)+12L_3S],\ A_3=\frac{1}{3}[D(A_2)+11A_1],\\
A_4=\frac{1}{4}[D(A_3)+10A_2],\ A_5=\frac{1}{5}[D(A_4)+9A_3],\\
A_6=\frac{1}{6}[D(A_5)+8A_4],\ A_7=\frac{1}{7}[D(A_6)+7A_5],\\
A_8=\frac{1}{8}[D(A_7)+6A_6],\ A_9=\frac{1}{9}[D(A_8)+5A_7],\\
A_{10}=\frac{1}{10}[D(A_9)+4A_8],\ A_{11}=\frac{1}{11}[D(A_{10})+3A_9],\\
A_{12}=\frac{1}{12}[D(A_{11})+2A_{10}].
\end{gathered} \tag{43.6}$$

С помощью оператора Ли (41.10)–(41.11) из (43.2)–(43.3) и (43.5)–(43.6) находим

$$X[K(L_2S)]=X[K(L_3S)]=0. \tag{43.7}$$

Следовательно, из примечания 43.2 и равенств (43.7) получаем, что справедлива

Лемма 43.1. *Фокусные величины L_1S является инвариантом, а L_2S и L_3S–полуинвариантами системы $s\mathcal{L}(1,2)$ из (41.9) относительно группы вращений $SO(2,\mathbb{R})$.*

Примечание 43.3. *Другие три фокусные величины, которые решают проблему центра и фокуса для системы $s\mathcal{L}(1,2)$ из (41.9), были нам представлены профессором Ю. Ф. Калиным, построенные другим методом. Они имеют вид*

$$L_1S=L_2C=\frac{1}{2}(-gh-hk+gl+lm-kn+mn),$$

$$\begin{gathered}
L_2C=\frac{1}{24}(53g^3h+16gh^3+95g^2hk+16h^3k+47ghk^2+5hk^3-\\
-53g^3l+18gh^2l-48g^2kl+38h^2kl-15gk^2l-17ghl^2+15hkl^2-\\
-5gl^3+62g^2hm+84ghkm+22hk^2m-127g^2lm-24h^2lm-86gklm-\\
-15k^2lm-22hl^2m-5l^3m+24ghm^2+24hkm^2-90glm^2-38klm^2-\\
-16lm^3+6g^3n+70gh^2n+63g^2kn+90h^2kn+42gk^2n+5k^3n-\\
-10ghln+86hkln-42gl^2n+15kl^2n-63g^2mn-24h^2mn+10gkmn+\\
+17k^2mn-84hlmn-47l^2mn-70gm^2n-18km^2n-16m^3n+63ghn^2+\\
+127hkn^2-63gln^2+48kln^2-62hmn^2-95lmn^2-6gn^3+\\
+53kn^3-53mn^3),
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
L_3C = \frac{1}{2304}(-31393g^5h - 17022g^3h^3 - 1144gh^5 - 77985g^4hk- \\
-27330g^2h^3k - 1144h^5k - 67264g^3hk^2 - 8666gh^3k^2 - 21292g^2hk^3+ \\
+1642h^3k^3 + 305ghk^4 + 925hk^5 + 31393g^5l - 27138g^3h^2l - 10960gh^4l+ \\
+50720g^4kl - 70216g^2h^2kl - 13080h^4kl + 30636g^3k^2l - 41898gh^2k^2l+ \\
+5940g^2k^3l - 5844h^2k^3l - 465gk^4l + 35076g^3hl^2 - 1706gh^3l^2+ \\
+16672g^2hkl^2 - 14946h^3kl^2 - 6030ghk^2l^2 - 3650hk^3l^2 + 828g^3l^3+ \\
+7270gh^2l^3 + 6664g^2kl^3 - 3560h^2kl^3 + 3650gk^2l^3 + 265ghl^4 + 465hkl^4- \\
-925gl^5 - 79756g^4hm - 30792g^2h^3m - 164120g^3hkm - 37792gh^3km- \\
-106536g^2hk^2m - 7000h^3k^2m - 21512ghk^3m + 660hk^4m + 119405g^4lm+ \\
+4582g^2h^2lm + 3096h^4lm + 157960g^3klm - 48148gh^2klm+ \\
+72848g^2k^2lm - 19738h^2k^2lm + 9500gk^3lm - 465k^4lm + 74424g^2hl^2m+ \\
+12424h^3l^2m + 31600ghkl^2m + 6844g^2l^3m + 7530h^2l^3m + 12508gkl^3m+ \\
+3650k^2l^3m - 660hl^4m - 925l^5m - 74114g^3hm^2 - 15376gh^3m^2- \\
-127550g^2hkm^2 - 15376h^3km^2 - 60966ghk^2m^2 - 7530hk^3m^2+ \\
+168022g^3lm^2 + 41568gh^2lm^2 + 177140g^2klm^2 + 57158gk^2lm^2+ \\
+3560k^3lm^2 + 52258ghl^2m^2 + 19738hkl^2m^2 + 4374gl^3m^2 + 5844kl^3m^2- \\
= 29432g^2hm^3 - 41856ghkm^3 - 12424hk^2m^3 + 104770g^2lm^3+ \\
+15376h^2lm^3 + 82980gklm^3 + 14946k^2lm^3 + 7000hl^2m^3 - 1642l^3m^3- \\
-3096ghm^4 - 3096hkm^4 + 25904glm^4 + 13080klm^4 + 1144lm^5- \\
-4128g^5n - 89564g^3h^2n - 23784gh^4n - 41357g^4kn - 183390g^2h^2kn- \\
-25904h^4kn - 51912g^3k^2n - 91176gh^2k^2n - 21132g^2k^3n - 4374h^2k^3n- \\
-620gk^4n + 925k^5n + 30248g^3hln - 43620gh^3ln - 64504g^2hkln- \\
-82980h^3kln - 67900ghk^2ln - 12508hk^3ln + 43332g^3l^2n + 17324gh^2l^2n+ \\
+30812g^2kl^2n - 57158h^2kl^2n - 3650k^3l^2n + 21092ghl^3n - 9500hkl^3n+ \\
+620gl^4n + 465kl^4n + 32573g^4mn - 89970g^2h^2mn + 3096h^4mn- \\
= 32600g^3kmn - 175220gh^2kmn - 61672g^2k^2mn - 52258h^2k^2mn- \\
-21092gk^3mn - 265k^4mn + 162352g^2hlmn + 41856h^3lmn- \\
-31600hk^2lmn + 119932g^2l^2mn + 60966h^2l^2mn + 67900gkl^2mn+ \\
+6030k^2l^2mn + 21512hl^3mn - 305l^4mn + 93296g^3m^2n + 38762g^2km^2n- \\
-41568h^2km^2n - 17324gk^2m^2n - 7270k^3m^2n + 175220ghlm^2n+ \\
+48148hklm^2n + 91176gl^2m^2n + 41898kl^2m^2n + 78650g^2m^3n+
\end{gathered}
$$

$$\begin{gathered}
+15376h^2m^3n+43620gkm^3n+1706k^2m^3n+37792hlm^3n+\\
+8666l^2m^3n+23784gm^4n+10960km^4n+1144m^5n-\\
-68550g^3hn^2-78650gh^3n^2-204974g^2hkn^2-104770h^3kn^2-\\
-119932ghk^2n^2-6844hk^3n^2+59766g^3ln^2-38762gh^2ln^2-\\
-177140h^2kln^2-30812gk^2ln^2-6664k^3ln^2+61672ghl^2n^2-\\
-72848hkl^2n^2+21132gl^3n^2-5940kl^3n^2+29432h^3mn^2-\\
-162352ghkmn^2-74424hk^2mn^2+204974g^2lmn^2+\\
+127550h^2lmn^2+64504gklmn^2-16672k^2lmn^2+\\
+106536hl^2mn^2+21292l^3mn^2+89970ghm^2n^2-\\
-4582hkm^2n^2+183390glm^2n^2+70216klm^2n^2+\\
+30792hm^3n^2+27330lm^3n^2-93296gh^2n^3-\\
+59766g^2kn^3-168022h^2kn^3-43332gk^2n^3-828k^3n^3+\\
+32600ghln^3-157960hkln^3+51912gl^2n^3-30636kl^2n^3+\\
+68550g^2mn^3+74114h^2mn^3-30248gkmn^3-35076k^2mn^3+\\
+164120hlmn^3+67264l^2mn^3+89564gm^2n^3+27138km^2n^3+\\
+17022m^3n^3-32573ghn^4-119405hkn^4+41357gln^4-\\
-50720kln^4+79756hmn^4+77985lmn^4+4128gn^5-\\
-31393kn^5+31393mn^5).
\end{gathered} \tag{43.8}$$

В L_iC буква C подчеркивает, что L_iC являются фокусными величинами Ю. Ф. Калина.

С помощью оператора D из (41.11) и (43.8) находим

$$D(L_1C)=D(L_2C)=D(L_3C)=0.$$

Отсюда с учетом следствия 41.1 имеем что фокусные величины (43.8) являются инвариантами системы $s\mathcal{L}(1,2)$ из (41.9) относительно группы вращений $SO(2,\mathbb{R})$.

Аналогичным способом, который был использован для фокусных величин системы $s\mathcal{L}(1,2)$ можно найти последовательности фокусных величин для систем $s\mathcal{L}(1,3)$, $s\mathcal{L}(1,4)$, $s\mathcal{L}(1,2,3)$ и др., которые являются инвариантами и полуинвариантами указанных систем относительно группы вращений $SO(2,\mathbb{R})$.

§44. О верхней границе числа функционально-независимых фокусных величин, которые принимают участие в решение проблемы центра и фокуса для систем Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$

Рассмотрим множество комитантов $\{F(x, y, A)\}$ системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ типа (41.1)–(41.2) относительно группы вращений $SO(2, \mathbb{R})$. Из теоремы 41.1 следует, что для них справедливо равенство (41.3), где X является оператором Ли линейного представления группы вращений $SO(2, \mathbb{R})$ в пространстве $E^N(x, y, A)$ системы $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$. Тогда согласно примечанию 41.1 имеем, что максимальное число функционально-независимых решений уравнения (41.3) равно

$$\mu = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 1, \tag{44.1}$$

что соответствует числу коэффициентов системы в нелинейной части $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ плюс один. Так как фокусные величины в проблеме центра и фокуса для систем Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (41.1)–(41.2), вообще говоря, являются полуинвариантами этой системы относительно группы вращений $SO(2, \mathbb{R})$, то согласно примечанию 42.1 число функционально-независимых фокусных величин θ для этой системы не превосходит число (44.1).

Таким образом получаем, что имеет место

Теорема 44.1. *Число функционально-независимых фокусных величин θ в проблеме центра и фокуса для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ не превосходит число* (44.1)*, то есть имеет место неравенство*

$$\theta \leq \mu = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 1. \tag{44.2}$$

Отсюда имеем

Примечание 44.1. *Число функционально-независимых фокусных величин θ в проблеме центра и фокуса для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ из* (41.1)–(41.2) *не превосходит число коэффициентов в нелинейной части этой системы плюс один.*

Так как число фокусных величин, которые могут решать проблему центра и фокуса для системы $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$, можно считать функционально-независимыми, то тогда имеет смысл предполагать, что справедлива

Гипотеза 44.1. *Число существенных фокусных величин, которые решают проблему центра и фокуса для системы Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (41.1)–(41.2) не превосходит число коэффициентов нелинейной части этой системы плюс один.*

§45. Комментарии к седьмой главе

Как было отмечено раньше в §28, система $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ записана в форме

$$\dot{x} = cx + dy + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x, y),\ \dot{y} = ex + fy + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x, y), \tag{45.1}$$

а система Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ имеет вид

$$\dot{x} = y + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x, y),\ \dot{y} = -x + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x, y), \tag{45.2}$$

где P_{m_i} и Q_{m_i}–однородные полиномы степени m_i относительно фазовых переменных x и y. Множество $\{1, m_1, ..., m_\ell\}$ состоит из конечного числа различных натуральных чисел.

В *гипотезе* 38.1 отмечено, что число существенных условий центра, которые решают проблему центра и фокуса для системы (45.1) с особой точкой второй группы в начале координат (центр или фокус) не превосходит число

$$\varrho = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3, \tag{45.3}$$

а *гипотеза* 44.1 утверждает, что то же число для системы (45.2) не больше числа

$$\mu = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 1. \tag{45.4}$$

Так как систему $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (45.1) в случае особой точки второй группы в начале координат (центр или фокус) можно привести к форме Ляпунова $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ из (45.2) центроаффинным преобразованием и изменением переменной t, то из (45.4) следует, что число существенных условий центра для системы $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ и системы $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ не может превосходить μ. Следовательно, можно предположить, что имеет место

Общая гипотеза 45.1. *Существенное число фокусных величин ω, которые решают проблему центра и фокуса для системы* (45.1) *с особой точкой второй группы в начале координат не превосходит число* (45.4).

Это означает улучшение на две единицы верхней границы числа ω существенных фокусных величин, которые участвуют в решении проблемы центра и фокуса для системы (45.1).

A.S SELECTED COMMENTS IN ENGLISH

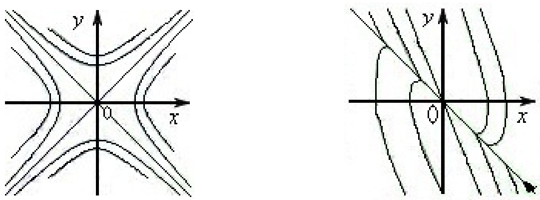
A.I INTRODUCTION

One of the old problem of the qualitative theory of differential equations is the center-focus problem. It appears, for example, when a system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{1}$$

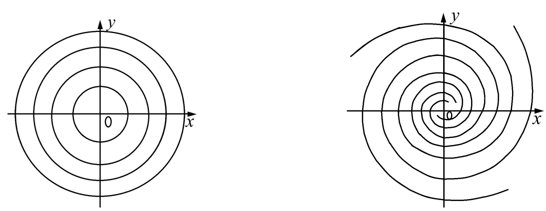
has a singular point with purely imaginary eigenvalues ($\lambda_{1,2} = \pm i$).

This problem was formulated by French scientist H. Poincaré (1854–1912) more than 130 years ago. It was shown that if a differential system can not be solved explicitly, then it is possible to study the behavior of its solutions (integral curves) without knowledge of these solutions. So there was initiated the qualitative theory of differential equations. One of the most important problems of this theory is the study of behavior of integral curves (trajectories) arround singular points, i.e. such points for which $X(x, y) = Y(x, y) = 0$. In this connection, Poincaré proposed the following classification of non-degenerate singular points: saddle, node, center and focus.



a) saddle b) node

Fig. 1. Singular points of the first type



a) center b) focus

Fig. 2. Singular points of the second type

As it was noted above, the presence of a center or a focus at a singular point of differential system (1) is ensured by purely imaginary eigenvalues of the characteristic equation. Under this condition, in the case of a center the singular point is surrounded by closed trajectories and in the case of a focus is surrounded by spirals. The center-focus problem is to determine the condition under which a singular point is a center. In general case the center problem is algebraically unsolvable [1, 2]. It should be noted that a lot of scientific papers are dedicated to the center-focus problem published in many countries France, Russia, Belarus, China, Great Britain, Spain, Poland, Slovenia, Canada, USA and other.

In the Republic of Moldova first began to deal with the center-focus problem for differential systems with polynomial nonlinearities the academician C. S. Sibirsky (1928–1990). His first work „*On conditions for the presence of a center and a focus*" (Kisinev Gos. Univ. Uch. Zap. 11, (1954), p. 115–117) caused interest to this problem and in our country.

His PhD thesis was focused on some aspects of the center-focus problem and was defensed in 1955 at the Kazan University (Russia). At different stages the disciples of the academician C. S. Sibirsky (N. I. Vulpe, A. S. Şubă, Iu. F. Calin, V. A. Baltag, D. V. Cozma and other) examined various issues of this problem and obtained important results.

Later on we will consider the case when the functions $X(x, y)$ and $Y(x, y)$ of the differential system (1) are polynomials. The center-focus problem is algebraically solvable, if the right-hand sides of this system are nonzero. We write the considered system in the form

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x, y), \ \ \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x, y) \ (\ell < \infty), \tag{2}$$

where P_{m_i} and Q_{m_i} are homogeneous polynomials of degree $m_i \geq 1$ in x, y, and $m_0 = 1$. The set $\{1, m_i\}_{i=1}^{\ell}$ consists of a finite number ($\ell < \infty$) of distinct natural numbers. The coefficients and variables in polynomials of the system (2) takes values from the fields of real numbers $\mathbb{R}$. Hereafter we denote the system (2) by $s(m_0, m_1, ..., m_\ell)$.

The fundamental results on the center-focus problem were obtained by A. M. Lyapunov (1857–1918) [3]. Henri Poincaré and Aleksandr Lyapunov laid the foundations of the qualitative theory of differential systems.

Using the methods proposed in [3, 4], the presence of a center at a singular point of a center or a focus type $O(0, 0)$ can be established by solving an infinite system of polynomial equations

$$L_1, L_2, ..., L_k, ..., \tag{3}$$

whose variables are parameters of the differential system (2), called focus quantities, Lyapunov's constants or Poincaré-Lyapunov's constants.

If at least one of the quantities (3) is not zero, then a singular point $O(0,0)$ is a focus for system (2). These conditions are necessary and sufficient.

From Hilbert's Theorem on the finiteness of basis of polynomial ideals it follows that *the essential center conditions*, which imply the vanishing of an infinite sequence of polynomials (3), consist of a finite number of polynomials, the rest once are consequences of them.

Taking into account this result, then the center-focus problem can be formulated in the following way: *how many polynomials* ω (*essential center conditions*)

$$L_{n_1}, L_{n_2}, ..., L_{n_\omega} \;\; (n_i \in \{1, 2, ..., k, ...\}; \; i = \overline{1, \omega}, \; \omega < \infty) \tag{4}$$

from (3) *must be equal to zero in order that all other polynomials* (3) *would vanish*?

Hence the center-focus problem consists of two parts. *The first part* relates to finding the number ω that determine the upper bound of the number of focus quantities, which constitute the essential center conditions. *The second part* consists in finding the set $\Omega = \{n_1, n_2, ..., n_\omega\}$ of indices n_i $(i = \overline{1, \omega})$, corresponding to the focus quantities, which constitute the essential center conditions.

The generalized center-focus problem is to determine the upper bound of the number λ of algebraically independent focus quantities from $\Pi = \{L_i : i \in \Omega\}$.

There is an opinion that if the center-focus problem will be solved negatively for system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$, having at the origin a singular point of a center or a focus type, then the solution of the generalized center-focus problem can be considered as the final solution of this problem.

The problem of determining the number ω of the essential center conditions (4) is a rather complicated problem and it is completely solved only for systems $s(1,2)$ and $s(1,3)$, for which we have $\omega = 3, 5$, respectively (see, for example, [5]– [7]).

Until now it is not known the number ω *for a system* $s(1,2,3)$, *which seems to be not a complicated system.*

There exists a hypothesis formulated by Professor H. Żołądek, mostly based on intuition, that for system $s(1,2,3)$ the number ω is ≤ 13. Till now this hypothesis has not been disproved. But in [8] it was proved that the vanishing of 12 focus quantities for system $s(1,2,3)$ is not enough for solving the center-focus problem in the complex plane.

We note that initially some methods to solve the center-focus problem were proposed by Poincaré and Lyapunov, which allowed to obtain solutions for systems $s(1,2)$ and $s(1,3)$ and other special cases. However, the specified way in solving of the center-focus problem for system $s(1,2,3)$ is connected with cumbersome computations with application of supercomputers. These difficulties are also insurmountable for other more complicated systems $s(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Therefore, as a basis, it was taken the generalized center-focus problem, which was formulated above for any systems of the form $s(1, m_1, ..., m_\ell)$. This allowed to avoid the calculation of the focus quantities (4) for given systems, and replace this process by investigating some Lie algebras of operators and Sibirsky graded algebras of comitants for considered systems. To estimate the maximal number of algebraically independent focus quantities for system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ these algebras we used. As a result, it was obtained a finite upper bound for the number of algebraically independent focus quantities, which are involved in solving of the center-focus problem for any system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ from (1.1)–(1.2), this was first announced at an international conference [43]. Results on the solution of the generalized center-focus problem were also presented at the international conferences on differential equations and algebra [44, 45].

In addition, for Lyapunov system $s\mathcal{L}(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$ from (41.1)–(41.2) it was found the upper bound of the number of functionally independent focus quantities, which are involved in solving of the center-focus problem for these systems.

Chapter 1 (§§1–7) is devoted to the construction of the Lie algebra of the operators of representation of a center-affine group in the space of coefficients and variables of differential systems with polynomial nonlinearities of the form (2).

Chapter 2 (§§8–13) is dedicated to the investigation of differential equations for center-affine invariants and comitants of system (2) and to the study of their algebraic bases.

Chapter 3 (§§14–18) is devoted to the study of generating functions and Hilbert series for Sibirsky algebras of comitants and invariants of polynomial differential systems of the form (2).

Chapter 4 (§§19–26) is dedicated to the construction of Hilbert series for Sibirsky algebras of different differential systems of the form (2) and to the computations for these algebras of the Krull dimension.

Chapter 5 (§§27–31) contains a brief summary of the concepts related to the new formulation of the center-focus problem for systems of the form (2).

Chapter 6 (§§32–39) describes examples of differential systems for which the upper bound of the number of algebraically independent focus quantities, which are involved in solving of the center-focus problem, is determined. These results are generalized for any system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Chapter 7 (§§40–45) is devoted to obtaining the upper bound of the number of functionally independent focus quantities, which are involved in solving of the center-focus problem for Lyapunov system $s\mathcal{L}(1, m_1, m_2, ..., m_\ell)$. This estimation is compared with the results established in Chapter 6. The results of the seventh Chapter were obtained in 2017 and are published for the first time in this monograph. It is important to note that the reader's first acquaintance with the results of the seventh Chapter will help him to come closer and closer to understanding the results of the first six Chapters.

The authors are extremely grateful to Professor N. I. Vulpe for useful discussions on the published article [10], the main results of which are included in this monograph, and for advertising of the obtained results in many scientific centers of other countries.

The authors are deeply grateful to the participants of the seminar of the Institute of Mathematics and Computer Science of ASM and the Tiraspol State University (Chisinau) „Differential Equations and Algebras" for extremely useful and fruitful discussions of the results included in this monograph, and also to L. T. Bendas for editing the manuscript.

The authors are sincerely grateful to the reviewers Professors A. S. Şubă and D. V. Cozma for their critical comments and valuable advices in the elaboration of the present work. Obviously, all disadvantages are on the authors conscience.

Special thanks to Academician M. M. Ciobanu and journalist T. Rotaru for a popular presentation, for a wide range of readers, of initial results of this book published in the article [9].

A.1 COMMENTS TO CHAPTER ONE

In this Chapter the continuous groups of linear transformations for two-dimensional polynomial differential systems (1.1)–(1.2) are considered. It is shown that these transformations preserve the form of the systems. This leads us to the group theory and Lie algebras, without which it is impossible today to imagine modern mathematics and even physics.

Therefore, the preservation of form of the differential system (1.1)–(1.2) under the above-mentioned groups of linear transformations, means the admission of these groups and of the corresponding Lie algebras of operators to the considered systems.

As shown in [15, 20] this fact is verified on the coordinates of the obtained operators X_1, X_2, X_3, X_4 from (5.1)–(5.2), (5.5)–(5.6), (5.8)–(5.9), (5.11)–(5.12), respectively, taking into account that (4.7)–(4.8) satisfy the defining equations

$$\begin{aligned} \xi_x^1 P + \xi_y^1 Q &= \xi^1 P_x + \xi^2 P_y + D(P), \\ \xi_x^2 P + \xi_y^2 Q &= \xi^1 Q_x + \xi^2 Q_y + D(Q), \end{aligned} \tag{7.1}$$

of the corresponding system (1.1)–(1.2), where P and Q are from considered system.

A.2 COMMENTS TO CHAPTER TWO

Center-affine comitants and invariants of differential systems of the form (1.1)–(1.2) have found wide applications in qualitative study of such systems (see, for example, [15]– [17]). However, the existing methods of their construction [16, 17] do not allow us to know a priori the number of invariants and comitants in of an algebraic basis and other bases [16, 17], this number differs from system to system.

In this Chapter general formulas for the number of invariants and comitants included in an algebraic basis of any system of the form (1.1)–(1.2) is given.

A.3 COMMENTS TO CHAPTER THREE

Note that the method of generating functions is quite old and has hundreds of years. It was used in the papers of I. Newton (1642–1727), D. Bernoulli (1700–1782), L. Euler (1707–1783), K. Gauss (1777–1855), R. Riemann (1826–1866), A. Cayley (1821–1895), D. Silvester (1814–1897), D. Hilbert (1862–1943) and others scientist to prove unexpected results.

Probably the first manifestation of this method is the Newton binomial formula, which says that the number

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

is the coefficient of t^k in the polynomial $(1+t)^n$, i.e.

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

In modern language we can say that the function $(1+t)^n$ is a *generating function* for numbers

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}.$$

From these considerations such numbers are also called *binomial coefficients.*

The method of generating functions is based on a very simple idea. A sequence of real numbers $a_0, a_1, a_2, ...$ is associated with an expression of the form

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...,$$

which we will be called a series, or a *generating function* of this sequence. This function can be represented as a polynomial of infinite degree. Such an expression is called a formal power series, since we are not interested in its convergence.

Often these series have simple forms that allow us to draw certain conclusions about the sequence $\{a_n\}_{n\geq 0}$, which in another way are very difficult to obtain.

Let V be a vector space represented as a direct sum of finite-dimensional subspaces

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n, \ V_n \bigcap_{(n\neq m)} V_m = \{0\}.$$

Such expansion will be called a *graduation. A generating function* for V, or for sequence $dim_{\mathbb{R}} V_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$, we will be called the formal series

$$\Phi_V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (dim_{\mathbb{R}} V_n) t^n. \tag{18.1}$$

A remarkable effect for generating functions is that the corresponding formal series can converge in some neighborhood of zero to a concrete function. Thus, by studying its properties (for example, poles, zeros), we can obtain additional information on the structure of the space V, in particular, on the asymptotic behavior of the sequence $\{dim_{\mathbb{R}} V_n\}_{n=0}^{\infty}$.

If $V = A$ is a graded algebra, then (18.1) is called the Hilbert series for this algebra and is denoted by $H_A(t)$, which carries profound information on the nature of asymptotic behavior of the algebra A.

By studying the space V or the algebra A the generating functions or the Hilbert series which depend on several variables, can be introduced in some cases. This fact reflects a more detailed graduation of these objects. As a result, these functions are called the *generalized* generating functions and the Hilbert series, respectively, and those having the form (18.1), are called *ordinary*.

The application of generating functions and Hilbert series in the theory of two-dimensional autonomous first-order polynomial differential systems has its beginning in the papers [15, 20].

We note that (see [23]) the term Hilbert series araise from the classical Hilbert results relating to the commutative case. Sometimes it is also called the Poincaré series, but today this term should be considered to be settled, linking the name of Poincaré only to the homologous series. In spite of the fact that the algebras S_Γ and SI_Γ for system of the form (1.1)–(1.2) have their origin and are thoroughly studied in the papers [15, 20], the name of the "Sibirsky algebra" they received only in the article [10]. This was due to the fact that thanks to these algebras, it could be answered to one of the most important problem in the qualitative theory of differential systems, the problem of the number of algebraically independent focus quantities, which are involved in solving of the center-focus problem for any differential system of the form (1.1)–(1.2) with polynomial nonlinearities.

A.4 COMMENTS TO CHAPTER FOUR

As it follows from the papers [15,20], the generalized and the ordinary Hilbert series for Sibirsky algebras of differential systems of the form (1.1)–(1.2) play an important role in studying the structures of these algebras. With the help of these series one can form an idea on the upper bound of degrees of generators of these algebras. It is known [32] that if the ordinary Hilbert series for commutative algebras has the form $H(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$, where $D(t)$ and $N(t)$ are polynomials in t, then $degD(t) > degN(t)$. In our case for Sibirsky algebras this inequality also holds. If this algebras are written in the form (19.1) and their ordinary Hilbert series in the form $H_A(t) = \frac{N_A(t)}{D_A(t)}$, then from all examples concerning the construction of the generators of algebras A at the Chisinau school of differential equations, it was found that $\underset{1\leq i\leq m}{deg\ a_i} \leq degD_A(t)$, where $deg\ a_i$ denotes the degree of generators of these algebras with respect to the coefficients and phase variables of corresponding differential systems. In addition, the ordinary Hilbert series for Sibirsky algebra makes it possible to calculate the Krull dimension of given algebra and at the same time to estimate the upper bound of these dimensions for their subalgebras for which these series are unknown.

A.5 COMMENTS TO CHAPTER FIVE

In this Chapter we formulate the generalized center-focus problem and the arguments that prompted the authors to such formulation. We consider the invariant Sibirsky variety of center and focus, which is closely related to center-affine classification of the quadratic form (comitant) k_2 (see [16], p. 31) of system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$.

The concepts of isobarity and semi-invariants, which play an important role in construction of center-affine comitants and invariants, are explained.

A.6 COMMENTS TO CHAPTER SIX

The results of this Chapter allowed us to approach an estimation for the upper bound of the number of algebraically independent focus quantities, which are involved in solving of the center-focus problem for any differential system of the form (1.1)–(1.2), the problem formulated more than 130 years ago by the French mathematician Poincaré. These results made it possible to propose a valid hypothesis on the upper bound of the number of essential focus quantities, which are involved in solving of the considered problem for any differential system of the form (1.1)–(1.2).

In these studies, an important role was played by Hilbert series for Sibirsky algebras of invariants and comitants, and also by the Lie algebra of the representation of the center-affine group in the space of phase variables and the coefficients of systems of the form (1.1)–(1.2).

The main result is that the number of algebraically independent focus quantities for the differential system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ of the form (38.1), which has at the origin a singular point of a center or a focus type does not exceed the number $\varrho = 2(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell) + 3$, which is the Krull dimension of the Sibirsky graded algebra of comitants $S_{1,m_1,...,m_\ell}$ of the system (38.1).

This is the solution of the generalized center-focus problem for the system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ of the form (38.1).

A.7 COMMENTS TO CHAPTER SEVEN

As it was mentioned earlier in Section 28, the system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ is written in the form

$$\dot{x} = cx + dy + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x, y),\ \dot{y} = ex + fy + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x, y) \tag{45.1}$$

and the Lyapunov system $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ has the form

$$\dot{x} = y + \sum_{i=1}^{\ell} P_{m_i}(x, y),\ \dot{y} = -x + \sum_{i=1}^{\ell} Q_{m_i}(x, y), \tag{45.2}$$

where P_{m_i} and Q_{m_i} are homogeneous polynomials of degree m_i with respect to phase variables x and y. The set $\{1, m_1, ..., m_\ell\}$ consists of a finite number of distinct positive integers.

In the *Hypothesis* 38.1 was noted that the number of the essential center conditions that solve the center-focus problem for the system (45.1) with a singular point of a center or a focus type at the origin does not exceed the number

$$\varrho = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3, \tag{45.3}$$

but the *Hypothesis* 44.1 claims that the same number of the essential center conditions for the system (45.2) is not greater than the number

$$\mu = 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 1. \tag{45.4}$$

Since the system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ from (45.1), in the case of a singular point of a center or a focus type at the origin, can be reduced to the Lyapunov form $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ from (45.2) by a center-affine transformation and time rescaling, then (45.4) implies that the number of the essential center conditions for system $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ and for system $s\mathcal{L}(1, m_1, ..., m_\ell)$ can not exceed μ.

Hence, we can claim the following

Main Hypothesis 45.1. *The essential number of the focus quantities ω that solve the center-focus problem for the system*(45.1) *with a singular point of a center or a focus type at the origin does not exceeds the number* (45.4).

This means an improvement by two units of the upper bound of the number of essential focus quantities ω, which are involved in solving of the center-focus problem for the system (45.1).

Литература

[1] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. *Теория бифуркаций.* Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.5, Москва, ВИНИТИ, 1986, 218 с.

[2] Ильяшенко Ю. С. *Возникновение предельных циклов при возмущении уравнения* $dw/dz = -Rz/Rw$*, где* $R(z, w)$ *многочлен.* Мат. сб., т. 78, 1969, с. 360–373.

[3] Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения.* Собрание сочинений, т. II, Издательство Академии наук СССР, Москва–Ленинград, 1956, 472 с. (Liapunoff A. *Probléme général de la stabilité du mouvement.* Annales de la Faculté des Sciences de Touluose. Sér. 2, 9, (1907), pp. 204–477. Reproduction in Annals of Mathematics Studies 17, Princenton: Princenton University Press, 1947, reprinted, Kraus Reprint Corporation, New York, 1965).

[4] Poincaré H. *Mémoire sur les curbes définies par une équation différentielle.* J. Math. Pure et Appl. (Sér 3) 7 (1881) 375–422; (Sér 3) 8 (1882) 251–296; (Sér 4) 1 (1885) 167–244; (Sér 4) 2 (1886) 151–217.

[5] *Mathematical enciclopedia. Center and focus problem.* https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/6088/ЦЕНТРА (in Russian).

[6] Bautin N. N. *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from equilibrium position of focus or center type.* Math. Sb., 1952, t. 30(72), p. 181–196 (Amer. Math. Soc. Transl., 1954, vol. 100, p. 397–413).

[7] Żołądek H. *On certain generalization of the Bautin's theorem.* Nonlinearity, 1994, vol. 7, p. 273–279.

[8] Graf V., Bothmer H. C., Kröker J. *Focal Values of Plane Cubic Centers.* Qual. Theory Dyn. Syst. 2010, vol. 9, p. 319–324.

[9] Ciobanu M., Rotaru T. 130 *de ani de zbucium pentru soluţionarea problemei lui Poincaré despre centru şi focar.* Akademos. Revista de ştiinţă, inovare, cultură şi artă, AŞM, № 3 (30), 2013, p. 13–21.

[10] Popa M. N., Pricop V. V. *Applications of algebraic methods in solving the center-focus problem.* Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Matematica, 2013, № 1 (71), p. 45–71. http://arxiv.org/abs/1310.4343.pdf

[11] Пуанкаре Анри. *Наука и гипотеза. Включена в книгу О НАУКЕ.* Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 560 с. http://ilib.mccme.ru/Poincare/O-nauke.htm

[12] Святитель Лука (Войно-Ясенецкий). *Дух, душа и тело.* Изд. свт. Льва, папы Римского, 2002 (По благословению Блаженнейшего Владимира Митрополита Киевского и всея Украины), 149 с.

[13] Алексеев В. Г. *Теория рациональных инвариантов бинарных форм.* Юрьев, 1899, 232 с.

[14] Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* Наука, Москва, 1978, 400 с.

[15] Попа М. Н. *Приложения алгебр к дифференциальным системам.* Кишинев, ИМИ АНМ, 2001, 224 с.

[16] Сибирский К. С. *Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1982, 168 с.

[17] Вулпе Н. И. *Полиномиальные базисы комитантов дифференциальны систем и их приложения в качественной теории.* Кишинев, Штиинца, 1986, 171 с.

[18] Гуревич Г. Б. *Основы теории алгебраических инвариантов.* М.–Л., ГИТТЛ, 1948, 408 с.

[19] Franklin F. *On the Calculation of the Generating Function and Tabs if Ground-forms for Binary Quantities.* American Journal of Mathematics, 1880, 3, № 1, p. 128–153.

[20] Popa M. N. *Algebraic methods for differential systems.* Editura the Flower Power, Universitatea din Piteşti, Seria Matematică Aplicată şi Industrială, 2004, (15), 340 p. (in Romanian).

[21] Gherştega N. N., Popa M. N., Pricop V. V. *About characteristic of graded algebras $S_{1,4}$ and $SI_{1,4}$.* Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Matematica, 2010, № 1 (62), p. 23–32.

[22] Gherştega N. N., Popa M. N., Pricop V. V. *Generators of the algebras of invariants for differential systems with homogeneous non-liniarities of odd degree.* Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Matematica, 2012, № 2 (69), p. 43–58.

[23] Ufnarovskij V. A. *Combinatorial and Asymptotic Methods in Algebra.* In Algebra VI, A. I. Kostrikin and I. R. Shafarevich (Eds.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 57, Springer, Berlin, New York, 1995, 196 p.

[24] Сибирский К. С. *Метод инвариантов в качественной теории дифференциальных уравнений.* Кишинев, РИО АН МССР, 1968, 184 с.

[25] Сибирский К. С. *Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.* Кишинев, Штиинца, 1976, 268 с.

[26] Popa M., Repeşco V. *Lie algebras and dynamical systems in plane.* Optional course. Tiraspol State University, Chişinău, Moldova, 2016, 237 p. (in Romanian).

[27] Аржанцев И. В. *Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта.* Учебное пособие, Москва, Изд. МЦНМО, 2009, 62 с.

[28] Вулпе Н. И., Макарь П. М., Попа М. Н. *Целый алгебраический базис центроаффинных инвариантов дифференциальной системы с однородными правыми частями четвертого порядка.* Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Matematica, 1996, № 1 (20), p. 48–55.

[29] Вулпе Н. И. *Целый алгебраический базис центроаффинных инвариантов однородной кубической дифференциальной системы.* В кн: Алгебраические инварианты динамических систем. Мат. исслед., вып. 55, Кишинев, Штиинца, 1980, с. 37–45.

[30] Лункевич В. А., Сибирский К. С. *Квадратичные нуль-системы дифференциальных уравнений.* Диф. уравнения, 1989, Минск, т. 25, № 6, с. 1056–1058.

[31] Балтаг В. А. *Топологическая классификашия кубических нуль-систем дифференциальных уравнений.* Препринт, Институт математики с ВЦ., Кишинев, 1989, 59 с.

[32] Спрингер Т. А. *Теория инвариантов.* Новое в зарубежной науке, т. 24, Математика, Москва, Мир, 1981, 191 с.

[33] Dubé Thomas. *Inductive Proof of Macaulay's Theorem.* Technical Report, №455, Robotics Report №202, June, 1989, New-York University. Dep. of Computer Science. Courant Institute of Mathematical Sciences.

[34] Маркушевич А. И. *Краткий курс теории аналитический функций.* Москва, Наука, 1978, 415 с.

[35] Derksen Harm, Kemper Gregor. *Computational Invariant Theory.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 130, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 268 p.

[36] Derksen H. *Constructive Invariant Theory.* In book: Invariant Theory in All Characteristics. H. E. A. Eddy Campbell, David L. Wehlau editors, CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 35, 2004, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 11-36.

[37] Cozma D. *Integrability of Cubic Systems with Invariant Straight Lines and Invariant Conics.* Chişinău, Ştiinţa, 2013, 240 p.

[38] Calin Iu., Baltag V. *The invariant center conditions for a class of cubic systems of differential equations.* Conference Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE–2009), Abstracts, Chişinău, October 8-9, 2009, p. 6–7.

[39] Calin Iu., Ciubotaru S. *$GL(2,R)$-comitants and Lyapunov quantities for bidimensional polynomial systems of differential equations with nonlinearities of the fourth degree.* Conference Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE–2016), Abstracts, Chişinău, June 23-26, 2016, p. 13–15.

[40] Ciubotaru S., Calin Iu., *The center conditions for a class of bidimensional polynomial systems of differential equations with nonlinearities of the fourth degree.* Conference Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE–2016), Abstracts, Chişinău, June 23-26, 2016, p. 22–23.

[41] Садовский А. П. *Полиномиальные идеалы и многообразия.* Минск, БГУ, 2008, 199 с.

[42] Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Наука, Москва, 1974, 331 с.

[43] Popa M. N. *Applications of algebraic methods to the center-focus problem.* The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu, CAIM-2012, Communications, Chişinău, August 22-25, 2012, p. 184–186.

[44] Popa M. N., Pricop V. V. *About a solution of the center-focus problem.* XV International Scientific Conference on Differential Equations, Erugin readings, 2013, Yanka Kupala State University of Grodno, Abstracts, Part I, Grodno, May 13-16, 2013, p. 69-70.

[45] Popa M. N., Pricop V. V. *Applications of generating functions and Hilbert series to the center-focus problem.* The 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenco, Lugansk Taras Shevcenko National University, IACONU 2011, Book of abstracts, July 5-12, Lugansk, 2011, p. 10.

Приложение 1

Многочлены $R_k(b,e)$, которые определяют $N_{1,4}(u,b,e)$

$R_0(b,e) = 1 - e^2 + 4e^4 + e^6 + 18e^8 + 11e^{10} + 35e^{12} + 13e^{14} + 35e^{16} +$
$+ 11e^{18} + 18e^{20} + e^{22} + 4e^{24} - e^{26} + e^{28} + b(e^2 + 5e^4 + 13e^6 + 26e^8 +$
$+ 29e^{10} + 40e^{12} + 19e^{14} + 36e^{16} - 5e^{18} + 6e^{20} - 15e^{22} + e^{24} - 5e^{26} +$
$+ 2e^{28} - 2e^{30}) + b^2(e^2 + 8e^4 + 16e^6 + 26e^8 + 27e^{10} + 20e^{12} + 12e^{14} -$
$- 11e^{16} - 29e^{18} - 31e^{20} - 22e^{22} - 11e^{24} - 4e^{26} - 2e^{28} - e^{30} + e^{32}) +$
$+ b^3(e^2 + 10e^4 + 10e^6 + 24e^8 - 5e^{10} + 7e^{12} - 64e^{14} - 49e^{16} - 107e^{18} -$
$- 55e^{20} - 58e^{22} - 10e^{24} - 10e^{26} + 3e^{28} + e^{30}) + b^4(e^2 + 6e^4 + 9e^6 +$
$+ 10e^8 - 7e^{10} - 29e^{12} - 87e^{14} - 75e^{16} - 117e^{18} - 29e^{20} - 30e^{22} +$
$+ 26e^{24} + 2e^{26} + 17e^{28} - 3e^{30} + 4e^{32}) + b^5(5e^4 + 3e^6 + 10e^8 - 21e^{10} -$
$- 38e^{12} - 82e^{14} - 76e^{16} - 72e^{18} + e^{20} + 20e^{22} + 44e^{24} + 32e^{26} + 17e^{28} +$
$+ 6e^{30} + 2e^{32} - 2e^{34}) + b^6(2e^4 + 3e^6 - 2e^8 - 29e^{10} - 36e^{12} - 84e^{14} -$
$- 41e^{16} - 48e^{18} + 48e^{20} + 41e^{22} + 84e^{24} + 36e^{26} + 29e^{28} + 2e^{30} - 3e^{32} -$
$- 2e^{34}) + b^7(2e^4 - 2e^6 - 6e^8 - 17e^{10} - 32e^{12} - 44e^{14} - 20e^{16} - e^{18} +$
$+ 72e^{20} + 76e^{22} + 82e^{24} + 38e^{26} + 21e^{28} - 10e^{30} - 3e^{32} - 5e^{34}) +$
$+ b^8(-4e^6 + 3e^8 - 17e^{10} - 2e^{12} - 26e^{14} + 30e^{16} + 29e^{18} + 117e^{20} + 75e^{22} +$
$+ 87e^{24} + 29e^{26} + 7e^{28} - 10e^{30} - 9e^{32} - 6e^{34} - e^{36}) + b^9(-e^8 - 3e^{10} +$
$+ 10e^{12} + 10e^{14} + 58e^{16} + 55e^{18} + 107e^{20} + 49e^{22} + 64e^{24} - 7e^{26} +$
$+ 5e^{28} - 24e^{30} - 10e^{32} - 10e^{34} - e^{36}) + b^{10}(-e^6 + e^8 + 2e^{10} + 4e^{12} +$
$+ 11e^{14} + 22e^{16} + 31e^{18} + 29e^{20} + 11e^{22} - 12e^{24} - 20e^{26} - 27e^{28} - 26e^{30} -$
$- 16e^{32} - 8e^{34} - e^{36}) + b^{11}(2e^8 - 2e^{10} + 5e^{12} - e^{14} + 15e^{16} - 6e^{18} + 5e^{20} -$
$- 36e^{22} - 19e^{24} - 40e^{26} - 29e^{28} - 26e^{30} - 13e^{32} - 5e^{34} - e^{36}) + b^{12}(-e^{10} +$
$+ e^{12} - 4e^{14} - e^{16} - 18e^{18} - 11e^{20} - 35e^{22} - 13e^{24} - 35e^{26} - 11e^{28} -$
$- 18e^{30} - e^{32} - 4e^{34} + e^{36} - e^{38}),$

$R_1(b,e) = -2e + 4e^3 + e^5 + 15e^7 - 8e^9 + 21e^{11} - 18e^{13} + 26e^{15} - 27e^{17} +$
$+ 6e^{19} - 19e^{21} + 7e^{23} - 6e^{25} + 2e^{27} - 2e^{29} + b(e + 5e^3 + 8e^5 + 5e^7 + e^9 +$
$+ 15e^{11} - 8e^{13} + 16e^{15} - 47e^{17} + 11e^{19} - 19e^{21} + 18e^{23} - 13e^{25} + 7e^{27} -$
$- 4e^{29} + 4e^{31}) + b^2(2e + 6e^3 + 2e^5 + 6e^7 + 9e^9 + 7e^{11} - 7e^{13} - 34e^{15} -$
$- 24e^{17} + 2e^{19} + 11e^{21} + 6e^{23} + 5e^{25} + 5e^{27} + 4e^{29} + 2e^{31} - 2e^{33}) + b^3(e +$
$+ 4e^3 + 16e^7 - 11e^9 + 14e^{11} - 77e^{13} - e^{15} - 63e^{17} + 59e^{19} - 6e^{21} +$
$+ 52e^{23} - 3e^{25} + 19e^{27} - 3e^{29} - e^{31}) + b^4(4e^3 + 5e^5 + 3e^7 - 9e^9 -$
$- 26e^{11} - 60e^{13} + 4e^{15} - 35e^{17} + 88e^{19} - 11e^{21} + 51e^{23} - 24e^{25} +$
$+ 30e^{27} - 20e^{29} + 8e^{31} - 8e^{33}) + b^5(4e^3 + 7e^7 - 23e^9 - 19e^{11} - 49e^{13} +$
$+ e^{15} + e^{17} + 73e^{19} + 12e^{21} + 30e^{23} - e^{25} - 9e^{27} - 16e^{29} - 10e^{31} -$
$- 5e^{33} + 4e^{35}) + b^6(e^3 + e^5 - 3e^7 - 16e^9 - 10e^{11} - 51e^{13} + 26e^{15} -$
$- 11e^{17} + 96e^{19} - 3e^{21} + 60e^{23} - 45e^{25} - 4e^{27} - 38e^{29} - 7e^{31} + e^{33} +$
$+ 3e^{35}) + b^7(-3e^5 + 2e^7 - 6e^9 - 21e^{11} - 23e^{13} + 18e^{15} + 26e^{17} + 73e^{19} +$
$+ 7e^{21} + 11e^{23} - 39e^{25} - 15e^{27} - 39e^{29} + 7e^{31} - 4e^{33} + 6e^{35}) +$
$+ b^8(6e^7 - 20e^9 - 24e^{13} + 61e^{15} + 9e^{17} + 88e^{19} - 49e^{21} + 20e^{23} -$
$- 56e^{25} - 18e^{27} - 25e^{29} - e^{31} + e^{33} + 6e^{35} + 2e^{37}) + b^9(-e^7 - e^9 +$

$+7e^{11}+3e^{13}+44e^{15}+45e^{19}-53e^{21}+31e^{23}-65e^{25}+10e^{27}-47e^{29}+$
$+12e^{31}+14e^{35}+e^{37})+b^{10}(2e^{7}-2e^{9}-e^{11}+9e^{13}+16e^{15}+7e^{17}-$
$-6e^{19}-12e^{21}-12e^{23}-9e^{25}-21e^{27}-7e^{29}+14e^{31}+14e^{33}+8e^{35})+$
$+b^{11}(-4e^{9}+7e^{11}+e^{13}+14e^{15}-23e^{17}+11e^{19}-35e^{21}+18e^{23}-$
$-34e^{25}+7e^{27}+5e^{29}+21e^{31}+8e^{33}+3e^{35}+e^{37})+b^{12}(2e^{11}-4e^{13}-$
$-e^{15}-15e^{17}+8e^{19}-21e^{21}+18e^{23}-26e^{25}+27e^{27}-6e^{29}+19e^{31}-$
$-7e^{33}+6e^{35}-2e^{37}+2e^{39}),$
$R_2(b,e)=4e^{2}-2e^{4}+7e^{6}-5e^{8}+27e^{10}-13e^{12}+20e^{14}-29e^{16}+$
$+14e^{18}-17e^{20}+5e^{22}-14e^{24}+3e^{26}-e^{28}+e^{30}+b(2e^{2}-3e^{4}+7e^{6}+$
$+e^{8}+11e^{10}-53e^{12}-14e^{14}-73e^{16}+9e^{18}-45e^{20}+8e^{22}-17e^{24}+$
$+21e^{26}-5e^{28}+2e^{30}-2e^{32})+b^{2}(7e^{6}-12e^{8}-39e^{10}-64e^{12}-39e^{14}-$
$-37e^{16}+2e^{18}-16e^{20}+16e^{22}+17e^{24}+16e^{26}-3e^{28}+e^{30}-e^{32}+e^{34})+$
$+b^{3}(2e^{2}-e^{4}+e^{6}-42e^{8}-30e^{10}-85e^{12}+8e^{14}-44e^{16}+67e^{18}+e^{20}+$
$+81e^{22}+16e^{24}+32e^{26}-6e^{28}+e^{30}-e^{32})+b^{4}(2e^{2}-5e^{4}-6e^{6}-30e^{8}-$
$-18e^{10}-53e^{12}+65e^{14}-3e^{16}+159e^{18}+44e^{20}+143e^{22}+9e^{24}+40e^{26}-$
$-47e^{28}+5e^{30}-7e^{32}+4e^{34})+b^{5}(e^{2}-5e^{4}-28e^{8}-11e^{10}-14e^{12}+$
$+84e^{14}+57e^{16}+172e^{18}+51e^{20}+89e^{22}-23e^{24}-25e^{26}-43e^{28}+e^{30}-$
$-4e^{32}+2e^{34}-2e^{36})+b^{6}(-e^{4}-e^{6}-26e^{8}+e^{10}-12e^{12}+103e^{14}+67e^{16}+$
$+162e^{18}+6e^{20}+51e^{22}-98e^{24}-37e^{26}-59e^{28}-4e^{30}-4e^{32}+3e^{34})+$
$+b^{7}(-e^{6}-13e^{8}+7e^{10}+22e^{12}+103e^{14}+51e^{16}+104e^{18}-20e^{20}-9e^{22}-$
$-119e^{24}-60e^{26}-79e^{28}+8e^{30}-5e^{32}+10e^{34}+e^{36})+b^{8}(-2e^{4}+$
$+2e^{6}-11e^{8}+26e^{10}+23e^{12}+87e^{14}+79e^{18}-92e^{20}-24e^{22}-$
$-141e^{24}-68e^{26}-61e^{28}+12e^{30}+3e^{32}+14e^{34}+3e^{36}-e^{38})+$
$+b^{9}(3e^{6}-4e^{8}+22e^{10}+5e^{12}+55e^{14}-30e^{16}+30e^{18}-137e^{20}-$
$-41e^{22}-183e^{24}-39e^{26}-53e^{28}+43e^{30}+10e^{32}+18e^{34}-2e^{36}+$
$+e^{38})+b^{10}(-e^{8}+7e^{10}-2e^{12}-4e^{14}-53e^{16}-42e^{18}-104e^{20}-$
$-79e^{22}-99e^{24}-10e^{26}+11e^{28}+45e^{30}+12e^{32}+10e^{34}+4e^{36}+$
$+3e^{38})+b^{11}(e^{6}-e^{8}+5e^{10}-9e^{12}-6e^{14}-36e^{16}-10e^{18}-67e^{20}-$
$-7e^{22}-19e^{24}+46e^{26}+31e^{28}+35e^{30}+13e^{32}+17e^{34}+7e^{36})+$
$+b^{12}(-2e^{8}+2e^{10}-9e^{12}+3e^{14}-22e^{16}+11e^{18}-32e^{20}+49e^{22}-$
$-e^{24}+69e^{26}+15e^{28}+43e^{30}+8e^{32}+19e^{34}-2e^{36}+e^{38}-e^{40})+$
$+b^{13}(e^{10}-e^{12}+e^{14}+e^{16}+18e^{18}+11e^{20}+35e^{22}+13e^{24}+35e^{26}+$
$+11e^{28}+18e^{30}+e^{32}+4e^{34}-e^{36}+e^{38}),$
$R_3(b,e)=-e+e^{3}+e^{5}-3e^{7}-16e^{9}-38e^{11}-45e^{13}-46e^{15}-56e^{17}-$
$-50e^{19}-32e^{21}-14e^{23}-e^{27}-2e^{29}+b(2e-e^{3}-e^{5}-30e^{7}-35e^{9}-$
$-87e^{11}-44e^{13}-95e^{15}-44e^{17}-33e^{19}+27e^{21}+15e^{23}+22e^{25}-5e^{27}+$
$+3e^{29}+4e^{31})+b^{2}(e-2e^{3}-14e^{5}-32e^{7}-48e^{9}-64e^{11}-46e^{13}-$
$-73e^{15}+41e^{17}+49e^{19}+101e^{21}+45e^{23}+36e^{25}-e^{27}+12e^{29}-3e^{31}-$
$-2e^{33})+b^{3}(-3e^{3}-13e^{5}-31e^{7}-43e^{9}-45e^{11}-10e^{13}+77e^{15}+156e^{17}+$
$+197e^{19}+174e^{21}+105e^{23}+42e^{25}+7e^{27}-5e^{29}-5e^{31}+e^{33})+b^{4}(-2e^{3}-$

$-6e^5-31e^7-23e^9-46e^{11}+110e^{13}+113e^{15}+271e^{17}+189e^{19}+148e^{21}-$
$-16e^{23}-19e^{25}-61e^{27}-10e^{29}-6e^{31}-7e^{33})+b^5(-e^3-5e^5-20e^7-$
$-23e^9+20e^{11}+115e^{13}+132e^{15}+252e^{17}+92e^{19}+61e^{21}-97e^{23}-75e^{25}-$
$-110e^{27}-17e^{29}-33e^{31}+5e^{33}+6e^{35})+b^6(-4e^5-23e^7+14e^9+33e^{11}+$
$+122e^{13}+144e^{15}+165e^{17}+40e^{19}-26e^{21}-159e^{23}-158e^{25}-114e^{27}-$
$-48e^{29}-5e^{31}+17e^{33}+3e^{35}-e^{37})+b^7(-4e^5+e^7+14e^9+19e^{11}+$
$+109e^{13}+69e^{15}+126e^{17}-49e^{19}-116e^{21}-252e^{23}-138e^{25}-122e^{27}+$
$+4e^{29}+13e^{31}+16e^{33}+8e^{35})+b^8(4e^5-e^7+e^9+31e^{11}+52e^{13}+31e^{15}+$
$+17e^{17}-147e^{19}-199e^{21}-230e^{23}-154e^{25}-84e^{27}+24e^{29}+6e^{31}+$
$+33e^{33}+11e^{35}+e^{37})+b^9(-6e^7+21e^9+4e^{11}+28e^{13}-63e^{15}-61e^{17}-$
$-224e^{19}-145e^{21}-207e^{23}-58e^{25}-18e^{27}+35e^{29}+35e^{31}+38e^{33}+$
$+16e^{35}+2e^{37}-e^{39})+b^{10}(2e^7-8e^{11}+e^{13}-51e^{15}-36e^{17}-122e^{19}-$
$-33e^{21}-59e^{23}+84e^{25}+23e^{27}+97e^{29}+44e^{31}+48e^{33}+11e^{35}+e^{37}-$
$-2e^{39})+b^{11}(-2e^7+3e^{11}-8e^{13}-24e^{15}-26e^{17}-21e^{19}+20e^{21}+$
$+58e^{23}+56e^{25}+84e^{27}+82e^{29}+50e^{31}+28e^{33}+2e^{35}-e^{37}+e^{39})+$
$+b^{12}(4e^9-6e^{11}-2e^{13}-15e^{15}+26e^{17}+5e^{19}+73e^{21}+27e^{23}+80e^{25}+$
$+49e^{27}+45e^{29}+11e^{31}+6e^{33}-3e^{35}+2e^{39})+b^{13}(-2e^{11}+4e^{13}+e^{15}+$
$+15e^{17}-8e^{19}+21e^{21}-18e^{23}+26e^{25}-27e^{27}+6e^{29}-19e^{31}+7e^{33}-$
$-6e^{35}+2e^{37}-2e^{39}),$
$R_4(b,e)=3e^2-2e^4-2e^6-9e^8+8e^{10}-17e^{12}+11e^{14}-43e^{16}+$
$+26e^{18}-e^{20}+25e^{22}-6e^{24}+6e^{26}-3e^{28}+4e^{30}+b(-2e^2-e^4-$
$-12e^6+7e^8-32e^{10}-6e^{12}-36e^{14}+3e^{16}+54e^{18}+14e^{20}+12e^{22}-$
$-7e^{24}+10e^{26}-2e^{28}+6e^{30}-8e^{32})+b^2(-2e^2-4e^4-3e^6-22e^8-$
$-39e^{10}-13e^{12}-11e^{14}+89e^{16}+26e^{18}+25e^{20}-20e^{22}+9e^{24}-$
$-22e^{26}-14e^{30}-3e^{32}+4e^{34})+b^3(-4e^4-16e^6-30e^8-10e^{10}-$
$-12e^{12}+92e^{14}+27e^{16}+98e^{18}-37e^{20}+10e^{22}-75e^{24}-12e^{26}-$
$-33e^{28}\ +2e^{32})+b^4(e^2-8e^4-22e^6-2e^8-20e^{10}+92e^{12}+44e^{14}+$
$+88e^{16}+32e^{18}-72e^{20}-49e^{22}-54e^{24}-19e^{26}-32e^{28}+17e^{30}-$
$-12e^{32}+16e^{34})+b^5(-5e^4-10e^6-16e^8+27e^{10}+61e^{12}+59e^{14}+$
$+96e^{16}-31e^{18}-71e^{20}-89e^{22}-54e^{24}-54e^{26}+46e^{28}+7e^{30}+32e^{32}+$
$+10e^{34}-8e^{36})+b^6(-2e^4-13e^6+14e^8+10e^{10}+49e^{12}+73e^{14}+35e^{16}-$
$-14e^{18}-113e^{20}-84e^{22}-105e^{24}+48e^{26}+22e^{28}+62e^{30}+23e^{32}-e^{34}-$
$-4e^{36})+b^7(-2e^4+2e^6-e^8+8e^{10}+81e^{12}+25e^{14}+32e^{16}-99e^{18}-$
$-108e^{20}-101e^{22}+18e^{24}+17e^{26}+67e^{28}+58e^{30}+4e^{32}+11e^{34}-$
$-10e^{36}-2e^{38})+b^8(-5e^6+39e^{10}+28e^{12}+20e^{14}-39e^{16}-77e^{18}-$
$-133e^{20}+10e^{22}-29e^{24}+68e^{26}+77e^{28}+33e^{30}+30e^{32}-2e^{34}-15e^{36}-$
$-5e^{38})+b^9(17e^8-8e^{10}+13e^{12}-34e^{14}-13e^{16}-90e^{18}-33e^{20}-22e^{22}+$
$+2e^{24}+88e^{26}+38e^{28}+78e^{30}+4e^{32}-10e^{34}-28e^{36}-2e^{38})+b^{10}(e^6-$
$-2e^8+6e^{12}-39e^{14}-20e^{16}-69e^{18}+22e^{20}-23e^{22}+88e^{24}+7e^{26}+$

$+92e^{28}-2e^{30}-10e^{32}-34e^{34}-14e^{36}-3e^{38})+b^{11}(2e^{8}+2e^{10}-14e^{12}-$
$-13e^{14}-14e^{16}+5e^{18}-14e^{20}+55e^{22}-e^{24}+73e^{26}-20e^{30}-29e^{32}-$
$-17e^{34}-10e^{36}-4e^{38}-e^{40})+b^{12}(-7e^{10}+2e^{12}-3e^{14}+16e^{16}-12e^{18}+$
$+30e^{20}+13e^{22}+20e^{24}+17e^{26}-30e^{28}-8e^{30}-22e^{32}-3e^{34}-12e^{36}+$
$+3e^{38}-4e^{40})+b^{13}(4e^{12}-2e^{14}+7e^{16}-5e^{18}+27e^{20}-13e^{22}+20e^{24}-$
$-29e^{26}+14e^{28}-17e^{30}+5e^{32}-14e^{34}+3e^{36}-e^{38}+e^{40}),$
$R_5(b,e)=-3e^{3}-2e^{5}-13e^{9}-38e^{11}-30e^{13}-40e^{15}-3e^{17}-26e^{19}-$
$-5e^{21}-6e^{23}+16e^{25}-e^{27}+2e^{29}-2e^{31}+b(e-3e^{3}-8e^{7}-35e^{9}-$
$-20e^{11}+8e^{13}+26e^{15}+64e^{17}+26e^{19}+53e^{21}+36e^{23}+19e^{25}-18e^{27}+$
$+2e^{29}-4e^{31}+4e^{33})+b^{2}(-4e^{5}-22e^{7}-8e^{9}+37e^{11}+60e^{13}+81e^{15}+$
$+78e^{17}+56e^{19}+57e^{21}+15e^{23}-29e^{25}-13e^{27}-5e^{29}-e^{31}+2e^{33}-$
$-2e^{35})+b^{3}(-3e^{3}-8e^{5}-3e^{7}+19e^{9}+49e^{11}+103e^{13}+101e^{15}+118e^{17}+$
$+36e^{19}+31e^{21}-60e^{23}-29e^{25}-47e^{27}-5e^{29}-3e^{31}+3e^{33})+b^{4}(-5e^{3}+$
$+4e^{5}+4e^{7}+8e^{9}+63e^{11}+76e^{13}+54e^{15}+29e^{17}-109e^{19}-120e^{21}-$
$-169e^{23}-115e^{25}-64e^{27}+35e^{29}+13e^{33}-6e^{35})+b^{5}(-e^{3}+e^{5}-6e^{7}+$
$+26e^{9}+59e^{11}+38e^{13}+3e^{15}-82e^{17}-204e^{19}-143e^{21}-159e^{23}-$
$-68e^{25}+28e^{27}+28e^{29}+16e^{31}+11e^{33}-3e^{35}+3e^{37})+b^{6}(-3e^{5}+2e^{7}+$
$+26e^{9}+42e^{11}+42e^{13}-33e^{15}-130e^{17}-192e^{19}-134e^{21}-117e^{23}+$
$+42e^{25}+40e^{27}+75e^{29}+32e^{31}+12e^{33}-6e^{35})+b^{7}(17e^{9}+30e^{11}-$
$-16e^{13}-90e^{15}-123e^{17}-165e^{19}-110e^{21}-20e^{23}+70e^{25}+120e^{27}+$
$+119e^{29}+22e^{31}+11e^{33}-13e^{35}-3e^{37})+b^{8}(2e^{5}+15e^{9}+2e^{11}-49e^{13}-$
$-78e^{15}-109e^{17}-145e^{19}+3e^{21}-4e^{23}+131e^{25}+143e^{27}+92e^{29}+$
$+23e^{31}+e^{33}-23e^{35}-5e^{37}+e^{39})+b^{9}(-2e^{7}+5e^{9}-7e^{11}-33e^{13}-$
$-67e^{15}-94e^{17}-43e^{19}+62e^{21}+92e^{23}+222e^{25}+140e^{27}+88e^{29}-14e^{31}-$
$-22e^{33}-25e^{35}+4e^{37}-4e^{39})+b^{10}(2e^{9}-6e^{11}-17e^{13}-7e^{15}+32e^{17}+$
$+77e^{19}+139e^{21}+187e^{23}+172e^{25}+104e^{27}+9e^{29}-34e^{31}-25e^{33}-$
$-14e^{35}-10e^{37}-5e^{39})+b^{11}(-e^{7}+e^{9}-5e^{11}-6e^{13}+12e^{15}+25e^{17}+$
$+52e^{19}+110e^{21}+61e^{23}+55e^{25}-13e^{27}-30e^{29}-37e^{31}-28e^{33}-34e^{35}-$
$-11e^{37})+b^{12}(2e^{9}-2e^{11}+2e^{13}+10e^{15}+19e^{17}+40e^{19}+30e^{21}-16e^{23}-$
$-7e^{25}-60e^{27}-49e^{29}-59e^{31}-36e^{33}-26e^{35}+2e^{37}-3e^{39}+2e^{41})+$
$+b^{13}(-e^{11}+e^{13}+e^{15}-3e^{17}-16e^{19}-38e^{21}-45e^{23}-46e^{25}-56e^{27}-$
$-50e^{29}-32e^{31}-14e^{33}-e^{37}-2e^{39}),$
$R_6(b,e)=2e^{2}-2e^{4}+e^{6}-16e^{8}+6e^{10}+5e^{12}+26e^{14}+3e^{16}+$
$+40e^{18}+30e^{20}+38e^{22}+13e^{24}+2e^{28}+3e^{30}+b(-3e^{2}-7e^{6}+12e^{10}+$
$+36e^{12}+9e^{14}+63e^{16}+48e^{18}+34e^{20}-e^{22}-19e^{24}-17e^{26}+8e^{28}-$
$-6e^{30}-6e^{32})+b^{2}(-2e^{2}-3e^{4}-e^{6}+6e^{8}+19e^{10}+19e^{12}+35e^{14}+$
$+94e^{16}-10e^{18}+3e^{20}-72e^{22}-38e^{24}-33e^{26}-6e^{28}-20e^{30}+6e^{32}+$
$+3e^{34})+b^{3}(-3e^{4}-4e^{8}+29e^{10}+31e^{12}+82e^{14}-15e^{16}-22e^{18}-120e^{20}-$
$-114e^{22}-110e^{24}-50e^{26}-19e^{28}+7e^{30}+8e^{32}-2e^{34})+b^{4}(-e^{4}-11e^{6}+$
$+4e^{8}+39e^{10}+70e^{12}-13e^{14}-12e^{16}-152e^{18}-154e^{20}-122e^{22}-36e^{24}+$

$+10e^{26}+50e^{28}+5e^{30}+9e^{32}+12e^{34})+b^5(-3e^4-7e^6+12e^8+50e^{10}-$
$-5e^{14}-48e^{16}-179e^{18}-67e^{20}-114e^{22}+17e^{24}+46e^{26}+91e^{28}+20e^{30}+$
$+52e^{32}-8e^{34}-8e^{36})+b^6(-3e^4+22e^8+8e^{10}+7e^{12}-19e^{14}-93e^{16}-$
$-93e^{18}-96e^{20}-65e^{22}+58e^{24}+120e^{26}+98e^{28}+69e^{30}+8e^{32}-20e^{34}-$
$-e^{36})+b^7(2e^6-e^8+14e^{10}+14e^{12}-48e^{14}-36e^{16}-144e^{18}-47e^{20}+$
$+29e^{22}+161e^{24}+112e^{26}+120e^{28}-3e^{32}-10e^{34}-11e^{36}-e^{38})+$
$+b^8(-6e^6+7e^8+24e^{10}-32e^{12}-2e^{14}-73e^{16}-65e^{18}+33e^{20}+85e^{22}+$
$+136e^{24}+159e^{26}+78e^{28}-3e^{30}+13e^{32}-40e^{34}-11e^{36}-e^{38})+b^9(e^6+$
$+11e^8-16e^{10}-14e^{12}-26e^{14}-10e^{16}+9e^{18}+98e^{20}+61e^{22}+170e^{24}+$
$+78e^{26}+23e^{28}+4e^{30}-32e^{32}-36e^{34}-16e^{36}-5e^{38}+2e^{40})+b^{10}(-2e^8+$
$+e^{10}-e^{12}-13e^{14}+17e^{16}-e^{18}+90e^{20}+35e^{22}+86e^{24}-51e^{26}+14e^{28}-$
$-82e^{30}-33e^{32}-50e^{34}-12e^{36}-e^{38}+3e^{40})+b^{11}(3e^8-e^{10}-13e^{12}+$
$+10e^{14}+e^{16}+29e^{18}+20e^{20}+10e^{22}-16e^{24}+11e^{26}-66e^{28}-68e^{30}-$
$-49e^{32}-29e^{34}+6e^{36}+3e^{38}-2e^{40})+b^{12}(-6e^{10}+4e^{12}+9e^{14}+8e^{16}-$
$-2e^{18}+5e^{20}-30e^{22}+10e^{24}-59e^{26}-56e^{28}-31e^{30}-11e^{32}+4e^{34}+$
$+7e^{36}-e^{38}-2e^{40})+b^{13}(3e^{12}-2e^{14}-2e^{16}-9e^{18}+8e^{20}-17e^{22}+$
$+11e^{24}-43e^{26}+26e^{28}-e^{30}+25e^{32}-6e^{34}+6e^{36}-3e^{38}+4e^{40}),$
$R_{13-k}(b,e)=-b^{13}e^{45}R_k(b^{-1},e^{-1}),\ (k=\overline{0,6}).$

Приложение 2

Многочлены $R_{2k}(b, f)$, которые определяют $N_{1,5}(u, b, f)$

$R_0(b,f) = 1 + f - f^3 + f^4 + 4f^5 + 11f^6 + 16f^7 + 17f^8 + 13f^9 +$
$+13f^{10} + 13f^{11} + 17f^{12} + 16f^{13} + 11f^{14} + 4f^{15} + f^{16} - f^{17} + f^{19} +$
$+f^{20} + b(-2f - f^2 + 5f^3 + 12f^4 + 15f^5 + 15f^6 + 11f^7 + 10f^8 +$
$+17f^9 + 27f^{10} + 25f^{11} + 16f^{12} - f^{13} - 9f^{14} - 5f^{15} + 2f^{16} + 3f^{17} +$
$+3f^{18} - 2f^{20} - 2f^{21}) + b^2(-f + 3f^2 + 6f^3 + 5f^4 - 3f^6 - 10f^7 -$
$-13f^8 - 15f^9 - 18f^{10} - 32f^{11} - 41f^{12} - 51f^{13} - 43f^{14} - 29f^{15} -$
$-18f^{16} - 11f^{17} - 3f^{18} - 2f^{19} - 2f^{20} - f^{21} + f^{22}) + b^3(3f^2 + f^3 -$
$-5f^4 - 11f^5 - 11f^6 - 15f^7 - 20f^8 - 35f^9 - 58f^{10} - 85f^{11} - 81f^{12} -$
$-61f^{13} - 21f^{14} - f^{15} - 7f^{17} - 7f^{18} - 8f^{19} - 2f^{20} + 3f^{21} + 4f^{22}) +$
$+b^4(2f^2 - f^3 - 4f^4 - 6f^5 - 9f^6 - 18f^7 - 21f^8 - 21f^9 - 23f^{10} -$
$-22f^{11} - 6f^{12} + 6f^{13} + 22f^{14} + 23f^{15} + 21f^{16} + 21f^{17} + 18f^{18} +$
$+9f^{19} + 6f^{20} + 4f^{21} + f^{22} - 2f^{23}) + b^5(-4f^3 - 3f^4 + 2f^5 + 8f^6 +$
$+7f^7 + 7f^8 + f^{10} + 21f^{11} + 61f^{12} + 81f^{13} + 85f^{14} + 58f^{15} + 35f^{16} +$
$+20f^{17} + 15f^{18} + 11f^{19} + 11f^{20} + 5f^{21} - f^{22} - 3f^{23}) + b^6(-f^3 + f^4 +$
$+2f^5 + 2f^6 + 3f^7 + 11f^8 + 18f^9 + 29f^{10} + 43f^{11} + 51f^{12} + 41f^{13} +$
$+32f^{14} + 18f^{15} + 15f^{16} + 13f^{17} + 10f^{18} + 3f^{19} - 5f^{21} - 6f^{22} - 3f^{23} +$
$+f^{24}) + b^7(2f^4 + 2f^5 - 3f^7 - 3f^8 - 2f^9 + 5f^{10} + 9f^{11} + f^{12} - 16f^{13} -$
$-25f^{14} - 27f^{15} - 17f^{16} - 10f^{17} - 11f^{18} - 15f^{19} - 15f^{20} - 12f^{21} -$
$-5f^{22} + f^{23} + 2f^{24}) + b^8(-f^5 - f^6 + f^8 - f^9 - 4f^{10} - 11f^{11} - 16f^{12} -$
$-17f^{13} - 13f^{14} - 13f^{15} - 13f^{16} - 17f^{17} - 16f^{18} - 11f^{19} - 4f^{20} -$
$-f^{21} + f^{22} - f^{24} - f^{25}),$
$R_2(b,f) = -2f - f^2 + 5f^3 + 12f^4 + 15f^5 + 15f^6 + 11f^7 + 10f^8 +$
$+17f^9 + 27f^{10} + 25f^{11} + 16f^{12} - f^{13} - 9f^{14} - 5f^{15} + 2f^{16} + 3f^{17} +$
$+3f^{18} - 2f^{20} - 2f^{21} + b(f + 9f^2 + 12f^3 + 3f^4 - 4f^5 - 3f^6 + 11f^7 +$
$+28f^8 + 34f^9 + 10f^{10} - 22f^{11} - 36f^{12} - 29f^{13} - 3f^{14} + 12f^{15} - f^{16} -$
$-12f^{17} - 11f^{18} - 7f^{19} + 4f^{21} + 4f^{22}) + b^2(2f + 6f^2 - 4f^3 - 15f^4 -$
$-13f^5 - 7f^6 - 6f^7 - 20f^8 - 53f^9 - 92f^{10} - 107f^{11} - 84f^{12} - 44f^{13} +$
$+f^{14} + 9f^{15} - 3f^{16} + f^{17} + 4f^{18} + f^{19} + 3f^{20} + 4f^{21} + 2f^{22} - 2f^{23}) +$
$+b^3(f - f^2 - 11f^3 - 10f^4 + f^5 - 3f^6 - 26f^7 - 64f^8 - 89f^9 - 85f^{10} -$
$-35f^{11} + 31f^{12} + 59f^{13} + 46f^{14} - 3f^{15} - 18f^{16} + 9f^{17} + 25f^{18} +$
$+24f^{19} + 19f^{20} + 5f^{21} - 6f^{22} - 8f^{23}) + b^4(-3f^2 - 9f^3 + 9f^5 +$
$+f^6 - 8f^7 - 13f^8 - 4f^9 + 15f^{10} + 65f^{11} + 99f^{12} + 99f^{13} + 75f^{14} +$
$+42f^{15} + 35f^{16} + 34f^{17} + 6f^{18} - 6f^{19} - 6f^{20} - 8f^{21} - 8f^{22} -$
$-2f^{23} + 4f^{24}) + b^5(-2f^2 + 12f^4 + 11f^5 - 3f^6 - 6f^7 + 9f^8 + 45f^9 +$
$+97f^{10} + 139f^{11} + 118f^{12} + 52f^{13} - f^{14} - 20f^{15} + 7f^{16} + 16f^{17} -$
$-11f^{19} - 19f^{20} - 23f^{21} - 12f^{22} + 2f^{23} + 6f^{24}) + b^6(4f^3 + 7f^4 - f^5 -$
$-7f^6 + 4f^7 + 19f^8 + 37f^9 + 45f^{10} + 31f^{11} - 20f^{12} - 51f^{13} - 49f^{14} -$
$-27f^{15} - 9f^{16} - 20f^{17} - 40f^{18} - 39f^{19} - 29f^{20} - 14f^{21} + 4f^{22} +$

$+12f^{23}+6f^{24}-2f^{25})+b^7(f^3-f^4-7f^5-6f^6+2f^7+4f^8-2f^9-$
$-23f^{10}-59f^{11}-88f^{12}-74f^{13}-45f^{14}-25f^{15}-28f^{16}-46f^{17}-$
$-47f^{18}-19f^{19}+6f^{20}+21f^{21}+21f^{22}+8f^{23}-5f^{24}-5f^{25})+$
$+b^8(-2f^4-2f^5+2f^6+4f^7-2f^8-10f^9-20f^{10}-24f^{11}-12f^{12}+$
$+6f^{13}+8f^{14}-8f^{16}-6f^{17}+12f^{18}+24f^{19}+20f^{20}+10f^{21}+2f^{22}-$
$-4f^{23}-2f^{24}+2f^{25}+2f^{26})+b^9(f^5+f^6-f^8+f^9+4f^{10}+11f^{11}+$
$+16f^{12}+17f^{13}+13f^{14}+13f^{15}+13f^{16}+17f^{17}+16f^{18}+11f^{19}+$
$+4f^{20}+f^{21}-f^{22}+f^{24}+f^{25}),$
$R_4(b,f)=-f+3f^2+6f^3+5f^4-3f^6-10f^7-13f^8-15f^9-18f^{10}-$
$-32f^{11}-41f^{12}-51f^{13}-43f^{14}-29f^{15}-18f^{16}-11f^{17}-3f^{18}-$
$-2f^{19}-2f^{20}-f^{21}+f^{22}+b(2f+6f^2-4f^3-15f^4-13f^5-7f^6-$
$-6f^7-20f^8-53f^9-92f^{10}-107f^{11}-84f^{12}-44f^{13}+f^{14}+9f^{15}-$
$-3f^{16}+f^{17}+4f^{18}+f^{19}+3f^{20}+4f^{21}+2f^{22}-2f^{23})+b^2(f-3f^2-$
$-17f^3-11f^4-2f^5-13f^6-44f^7-69f^8-72f^9-37f^{10}+18f^{11}+$
$+81f^{12}+114f^{13}+126f^{14}+96f^{15}+85f^{16}+83f^{17}+50f^{18}+19f^{19}+$
$+9f^{20}+5f^{21}-3f^{23}+f^{24})+b^3(-5f^2-8f^3+7f^4+5f^5-19f^6-$
$-41f^7-28f^8+24f^9+104f^{10}+190f^{11}+251f^{12}+233f^{13}+175f^{14}+$
$+95f^{15}+74f^{16}+52f^{17}+13f^{18}+f^{19}+4f^{20}-4f^{21}-10f^{22}-5f^{23}+$
$+4f^{24})+b^4(-2f^2+2f^3+13f^4-4f^5-18f^6+9f^7+72f^8+131f^9+$
$+165f^{10}+175f^{11}+133f^{12}+64f^{13}+14f^{14}-17f^{15}-23f^{16}-65f^{17}-$
$-98f^{18}-67f^{19}-37f^{20}-23f^{21}-12f^{22}+2f^{23}+5f^{24}-2f^{25})+$
$+b^5(8f^3+11f^4-8f^5-6f^6+23f^7+62f^8+84f^9+94f^{10}+$
$+52f^{11}-48f^{12}-152f^{13}-196f^{14}-197f^{15}-161f^{16}-154f^{17}-$
$-115f^{18}-66f^{19}-45f^{20}-29f^{21}-4f^{22}+11f^{23}+5f^{24}-3f^{25})+$
$+b^6(f^3-7f^4-11f^5+15f^6+41f^7+33f^8-13f^9-74f^{10}-140f^{11}-$
$-176f^{12}-151f^{13}-114f^{14}-107f^{15}-121f^{16}-130f^{17}-82f^{18}-$
$-21f^{19}+13f^{20}+30f^{21}+32f^{22}+17f^{23}-3f^{24}-6f^{25}+f^{26})+$
$+b^7(-4f^4-3f^5+5f^6-2f^7-23f^8-46f^9-64f^{10}-80f^{11}-66f^{12}-$
$-30f^{13}-10f^{14}+10f^{16}+30f^{17}+66f^{18}+80f^{19}+64f^{20}+46f^{21}+$
$+23f^{22}+2f^{23}-5f^{24}+3f^{25}+4f^{26})+b^8(5f^5+5f^6-8f^7-21f^8-$
$-21f^9-6f^{10}+19f^{11}+47f^{12}+46f^{13}+28f^{14}+25f^{15}+45f^{16}+$
$+74f^{17}+88f^{18}+59f^{19}+23f^{20}+2f^{21}-4f^{22}-2f^{23}+6f^{24}+7f^{25}+$
$+f^{26}-f^{27})+b^9(-2f^6-f^7+5f^8+12f^9+15f^{10}+15f^{11}+11f^{12}+$
$+10f^{13}+17f^{14}+27f^{15}+25f^{16}+16f^{17}-f^{18}-9f^{19}-5f^{20}+2f^{21}+$
$+3f^{22}+3f^{23}-2f^{25}-2f^{26}),$
$R_6(b,f)=3f^2+f^3-5f^4-11f^5-11f^6-15f^7-20f^8-35f^9-$
$-58f^{10}-85f^{11}-81f^{12}-61f^{13}-21f^{14}-f^{15}-7f^{17}-7f^{18}-8f^{19}-$
$-2f^{20}+3f^{21}+4f^{22}+b(f-f^2-11f^3-10f^4+f^5-3f^6-26f^7-$
$-64f^8-89f^9-85f^{10}-35f^{11}+31f^{12}+59f^{13}+46f^{14}-3f^{15}-$

$-18f^{16}+9f^{17}+25f^{18}+24f^{19}+19f^{20}+5f^{21}-6f^{22}-8f^{23})+$
$+b^2(-5f^2-8f^3+7f^4+5f^5-19f^6-41f^7-28f^8+24f^9+$
$+104f^{10}+190f^{11}+251f^{12}+233f^{13}+175f^{14}+95f^{15}+74f^{16}+$
$+52f^{17}+13f^{18}+f^{19}+4f^{20}-4f^{21}-10f^{22}-5f^{23}+4f^{24})+$
$+b^3(-3f^2+3f^3+8f^4-15f^5-33f^6-6f^7+73f^8+167f^9+226f^{10}+$
$+235f^{11}+162f^{12}+29f^{13}-36f^{14}-27f^{15}+45f^{16}+29f^{17}-20f^{18}-$
$-43f^{19}-51f^{20}-51f^{21}-22f^{22}+9f^{23}+16f^{24})+b^4(7f^3+4f^4-$
$-16f^5-3f^6+45f^7+86f^8+92f^9+67f^{10}+26f^{11}-82f^{12}-174f^{13}-$
$-199f^{14}-183f^{15}-160f^{16}-172f^{17}-128f^{18}-50f^{19}-22f^{20}-7f^{21}+$
$+14f^{22}+23f^{23}+6f^{24}-8f^{25})+b^5(3f^3-8f^4-12f^5+23f^6+56f^7+$
$+53f^8-80f^{10}-194f^{11}-290f^{12}-276f^{13}-176f^{14}-110f^{15}-100f^{16}-$
$-137f^{17}-91f^{18}-41f^{19}+2f^{20}+46f^{21}+65f^{22}+35f^{23}-6f^{24}-$
$-13f^{25})+b^6(-6f^4+7f^5+25f^6+9f^7-37f^8-79f^9-104f^{10}-$
$-112f^{11}-86f^{12}-13f^{13}+16f^{14}-16f^{16}+13f^{17}+86f^{18}+$
$+112f^{19}+104f^{20}+79f^{21}+37f^{22}-9f^{23}-25f^{24}-7f^{25}+6f^{26})+$
$+b^7(-f^4+6f^5+3f^6-17f^7-32f^8-30f^9-13f^{10}+21f^{11}+$
$+82f^{12}+130f^{13}+121f^{14}+107f^{15}+114f^{16}+151f^{17}+176f^{18}+$
$+140f^{19}+74f^{20}+13f^{21}-33f^{22}-41f^{23}-15f^{24}+11f^{25}+7f^{26}-$
$-f^{27})+b^8(2f^5-6f^6-12f^7-4f^8+14f^9+29f^{10}+39f^{11}+40f^{12}+$
$+20f^{13}+9f^{14}+27f^{15}+49f^{16}+51f^{17}+20f^{18}-31f^{19}-45f^{20}-$
$-37f^{21}-19f^{22}-4f^{23}+7f^{24}+f^{25}-7f^{26}-4f^{27})+b^9(-f^6+$
$+3f^7+6f^8+5f^9--3f^{11}-10f^{12}-13f^{13}-15f^{14}-18f^{15}-$
$-32f^{16}-41f^{17}-51f^{18}-43f^{19}-29f^{20}-18f^{21}-11f^{22}-3f^{23}-$
$-2f^{24}-2f^{25}-f^{26}+f^{27}),$
$R_8(b,f)=2f^2-f^3-4f^4-6f^5-9f^6-18f^7-21f^8-21f^9-23f^{10}-$
$-22f^{11}-6f^{12}+6f^{13}+22f^{14}+23f^{15}+21f^{16}+21f^{17}+18f^{18}+$
$+9f^{19}+6f^{20}+4f^{21}+f^{22}-2f^{23}+b(-3f^2-9f^3+9f^5+f^6-8f^7-$
$-13f^8-4f^9+15f^{10}+65f^{11}+99f^{12}+99f^{13}+75f^{14}+42f^{15}+35f^{16}+$
$+34f^{17}+6f^{18}-6f^{19}-6f^{20}-8f^{21}-8f^{22}-2f^{23}+4f^{24})+b^2(-2f^2+$
$+2f^3+13f^4-4f^5-18f^6+9f^7+72f^8+131f^9+165f^{10}+175f^{11}+$
$+133f^{12}+64f^{13}+14f^{14}-17f^{15}-23f^{16}-65f^{17}-98f^{18}-67f^{19}-$
$-37f^{20}-23f^{21}-12f^{22}+2f^{23}+5f^{24}-2f^{25})+b^3(7f^3+4f^4-16f^5-$
$-3f^6+45f^7+86f^8+92f^9+67f^{10}+26f^{11}-82f^{12}-174f^{13}-199f^{14}-$
$-183f^{15}-160f^{16}-172f^{17}-128f^{18}-50f^{19}-22f^{20}-7f^{21}+14f^{22}+$
$+23f^{23}+6f^{24}-8f^{25})+b^4(f^3-8f^4-9f^5+33f^6+61f^7+20f^8-$
$-67f^9-145f^{10}-201f^{11}-272f^{12}-243f^{13}-200f^{14}-178f^{15}-$
$-181f^{16}-141f^{17}-16f^{18}+81f^{19}+77f^{20}+72f^{21}+55f^{22}+25f^{23}-$
$-10f^{24}-9f^{25}+4f^{26})+b^5(-8f^4++f^5+24f^6+7f^7-42f^8-89f^9-$
$-123f^{10}-182f^{11}-209f^{12}-130f^{13}-55f^{14}+55f^{16}+130f^{17}+$

$+209f^{18}+182f^{19}+123f^{20}+89f^{21}+42f^{22}-7f^{23}-24f^{24}-f^{25}+$
$+8f^{26})+b^6(13f^5+6f^6-35f^7-65f^8-46f^9-2f^{10}+41f^{11}+$
$+91f^{12}+137f^{13}+100f^{14}+110f^{15}+176f^{16}+276f^{17}+290f^{18}+$
$+194f^{19}+80f^{20}-53f^{22}-56f^{23}-23f^{24}+12f^{25}+8f^{26}-3f^{27})+$
$+b^7(3f^5-5f^6-11f^7+4f^8+29f^9+45f^{10}+66f^{11}+115f^{12}+$
$+154f^{13}+161f^{14}+197f^{15}+196f^{16}+152f^{17}+48f^{18}-52f^{19}-$
$-94f^{20}-84f^{21}-62f^{22}-23f^{23}+6f^{24}+8f^{25}-11f^{26}-8f^{27})+$
$+b^8(-6f^6-2f^7+12f^8+23f^9+19f^{10}+11f^{11}-16f^{13}-7f^{14}+$
$+20f^{15}+f^{16}-52f^{17}-118f^{18}-139f^{19}-97f^{20}-45f^{21}-9f^{22}+$
$+6f^{23}+3f^{24}-11f^{25}-12f^{26}+2f^{28})+b^9(3f^7+f^8-5f^9-11f^{10}-$
$-11f^{11}-15f^{12}-20f^{13}-35f^{14}-58f^{15}-85f^{16}-81f^{17}-61f^{18}-$
$-21f^{19}-f^{20}-7f^{22}-7f^{23}-8f^{24}-2f^{25}+3f^{26}+4f^{27}),$
$R_{16-2k}(b,f)=-b^9f^{30}R_{2k}(b^{-1},f^{-1}),\ (k=\overline{0,3}).$

Приложение 3

Многочлены которые определяют величину G_1 для системы $s(1,2)$. Выражения фокусных псевдовеличин $G_{1,i}$, а также $\sigma_{1,i}$ и $B_{1,i}$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$

$$
\begin{aligned}
G_{1,0} = {} & -17c^3d^2e^3g^2 + 11cd^3e^4g^2 + 34c^4de^2fg^2 - 118c^2d^2e^3fg^2+\\
& +15d^3e^4fg^2 - 17c^5ef^2g^2 + 215c^3de^2f^2g^2 - 200cd^2e^3f^2g^2-\\
& -108c^4ef^3g^2 + 403c^2de^2f^3g^2 - 91d^2e^3f^3g^2 - 224c^3ef^4g^2+\\
& +247cde^2f^4g^2 - 174c^2ef^5g^2 + 29de^2f^5g^2 - 47cef^6g^2 - 6ef^7g^2+\\
& +34c^2d^2e^4gh - 4d^3e^5gh - 92c^3de^3fgh + 152cd^2e^4fgh + 58c^4e^2f^2gh-\\
& -400c^2de^3f^2gh + 118d^2e^4f^2gh + 276c^3e^2f^3gh - 400cde^3f^3gh+\\
& +354c^2e^2f^4gh - 80de^3f^4gh + 152ce^2f^5gh + 24e^2f^6gh - 24cd^2e^5h^2+\\
& +72c^2de^4fh^2 - 32d^2e^5fh^2 - 72c^3e^3f^2h^2 + 132cde^4f^2h^2-\\
& -172c^2e^3f^3h^2 + 44de^4f^3h^2 - 116ce^3f^4h^2 - 24e^3f^5h^2 + 12c^3de^4gk-\\
& -12cd^2e^5gk - 12c^4e^3fgk + 72c^2de^4fgk - 16d^2e^5fgk - 72c^3e^3f^2gk+\\
& +102cde^4f^2gk - 122c^2e^3f^3gk + 34de^4f^3gk - 70ce^3f^4gk - 12e^3f^5gk-\\
& -12c^2de^5hk + 4d^2e^6hk + 36c^3e^4fhk - 52cde^5fhk + 120c^2e^4f^2hk-\\
& -32de^5f^2hk + 104ce^4f^3hk + 24e^4f^4hk - 6c^3e^5k^2 + 5cde^6k^2-\\
& -23c^2e^5fk^2 + 5de^6fk^2 - 23ce^5f^2k^2 - 6e^5f^3k^2 + 9c^4d^2e^2gl-\\
& -13c^2d^3e^3gl - 4d^4e^4gl - 18c^5defgl + 65c^3d^2e^2fgl - 16cd^3e^3fgl+\\
& +9c^6f^2gl - 103c^4def^2gl + 90c^2d^2e^2f^2gl - 11d^3e^3f^2gl + 51c^5f^3gl-\\
& -140c^3def^3gl + 7cd^2e^2f^3gl + 76c^4f^4gl + 26c^2def^4gl - 31d^2e^2f^4gl-\\
& -10c^3f^5gl + 110cdef^5gl - 79c^2f^6gl + 29def^6gl - 41cf^7gl - 6f^8gl-\\
& -12c^3d^2e^3hl + 26cd^3e^4hl + 48c^4de^2fhl - 122c^2d^2e^3fhl + 22d^3e^4fhl-\\
& -36c^5ef^2hl + 250c^3de^2f^2hl - 104cd^2e^3f^2hl - 166c^4ef^3hl+\\
& +248c^2de^2f^3hl - 2d^2e^3f^3hl - 190c^3ef^4hl + 40cde^2f^4hl - 38c^2ef^5hl-\\
& -10de^2f^5hl + 34cef^6hl + 12ef^7hl - 12c^4de^3kl + 11c^2d^2e^4kl+\\
& +12c^5e^2fkl - 70c^3de^3fkl + 16cd^2e^4fkl + 65c^4e^2f^2kl - 109c^2de^3f^2kl+\\
& +5d^2e^4f^2kl + 105c^3e^2f^3kl - 58cde^3f^3kl + 53c^2e^2f^4kl - 7de^3f^4kl-\\
& -5ce^2f^5kl - 6e^2f^6kl + 3c^3d^3e^2l^2 - 5cd^4e^3l^2 - 6c^4d^2efl^2 + 20c^2d^3e^2fl^2-\\
& -5d^4e^3fl^2 + 3c^5df^2l^2 - 37c^3d^2ef^2l^2 + 26cd^3e^2f^2l^2 + 22c^4df^3l^2-\\
& -73c^2d^2ef^3l^2 + 9d^3e^2f^3l^2 + 58c^3df^4l^2 - 59cd^2ef^4l^2 + 68c^2df^5l^2-\\
& -17d^2ef^5l^2 + 35cdf^6l^2 + 6df^7l^2 - 12c^3d^2e^3gm + 2cd^3e^4gm+\\
& +24c^4de^2fgm - 90c^2d^2e^3fgm - 2d^3e^4fgm - 12c^5ef^2gm+\\
& +138c^3de^2f^2gm - 152cd^2e^3f^2gm - 62c^4ef^3gm + 200c^2de^2f^3gm-\\
& -82d^2e^3f^3gm - 70c^3ef^4gm + 32cde^2f^4gm + 50c^2ef^5gm-\\
& -58de^2f^5gm + 82cef^6gm + 12ef^7gm + 20c^2d^2e^4hm - 40c^3de^3fhm+\\
& +96cd^2e^4fhm + 44c^4e^2f^2hm - 212c^2de^3f^2hm + 76d^2e^4f^2hm+\\
& +164c^3e^2f^3hm - 152cde^3f^3hm + 76c^2e^2f^4hm + 20de^3f^4hm-\\
& -68ce^2f^5hm - 24e^2f^6hm + 12c^3de^4km - 6cd^2e^5km - 24c^4e^3fkm+\\
& +70c^2de^4fkm - 10d^2e^5fkm - 88c^3e^3f^2km + 80cde^4f^2km-
\end{aligned}
$$

$$-70c^2e^3f^3km+14de^4f^3km+10ce^3f^4km+12e^3f^5km+6c^4d^2e^2lm-$$
$$-4c^2d^3e^3lm-4d^4e^4lm-12c^5deflm+64c^3d^2e^2flm-28cd^3e^3flm+$$
$$+6c^6f^2lm-92c^4def^2lm+180c^2d^2e^2f^2lm-32d^3e^3f^2lm+32c^5f^3lm-$$
$$-212c^3def^3lm+148cd^2e^2f^3lm+40c^4f^4lm-168c^2def^4lm+22d^2e^2f^4lm-$$
$$-20c^3f^5lm-48cdef^5lm-46c^2f^6lm-12def^6lm-12cf^7lm-4c^3d^2e^3m^2+$$
$$+8c^4de^2fm^2-20c^2d^2e^3fm^2-8d^3e^4fm^2-4c^5ef^2m^2+64c^3de^2f^2m^2-$$
$$-48cd^2e^3f^2m^2-20c^4ef^3m^2+148c^2de^2f^3m^2-48d^2e^3f^3m^2-20c^3ef^4m^2+$$
$$+100cde^2f^4m^2+20c^2ef^5m^2+24cef^6m^2+31c^2d^2e^4gn-38c^3de^3fgn+$$
$$+96cd^2e^4fgn+13c^4e^2f^2gn-125c^2de^3f^2gn+65d^2e^4f^2gn+41c^3e^2f^3gn-$$
$$-58cde^3f^3gn-7c^2e^2f^4gn+29de^3f^4gn-41ce^2f^5gn-6e^2f^6gn-$$
$$-12c^3de^4hn-46cd^2e^5hn+78c^2de^4fhn-50d^2e^5fhn-56c^3e^3f^2hn+$$
$$+88cde^4f^2hn-38c^2e^3f^3hn-10de^4f^3hn+34ce^3f^4hn+12e^3f^5hn+$$
$$+6c^4e^4kn-17c^2de^5kn+4d^2e^6kn+29c^3e^4fkn-32cde^5fkn+28c^2e^4f^2kn-$$
$$-7de^5f^2kn-5ce^4f^3kn-6e^4f^4kn-22c^3d^2e^3ln+32cd^3e^4ln+32c^4de^2fln-$$
$$-134c^2d^2e^3fln+28d^3e^4fln-10c^5ef^2ln+148c^3de^2f^2ln-116cd^2e^3f^2ln-$$
$$-34c^4ef^3ln+126c^2de^2f^3ln-12d^2e^3f^3ln-2c^3ef^4ln+14cde^2f^4ln+$$
$$+34c^2ef^5ln+12cef^6ln+14c^2d^2e^4mn+4d^3e^5mn-52c^3de^3fmn+$$
$$+88cd^2e^4fmn+14c^4e^2f^2mn-204c^2de^3f^2mn+74d^2e^4f^2mn+40c^3e^2f^3mn-$$
$$-128cde^3f^3mn-18c^2e^2f^4mn+12de^3f^4mn-36ce^2f^5mn+6c^3de^4n^2-$$
$$-31cd^2e^5n^2+63c^2de^4fn^2-27d^2e^5fn^2-14c^3e^3f^2n^2+43cde^4f^2n^2+$$
$$+2c^2e^3f^3n^2-6de^4f^3n^2+12ce^3f^4n^2;$$
$$G_{1,1}=2c^4d^2e^2g^2+9c^2d^3e^3g^2-4c^5defg^2-14c^3d^2e^2fg^2+41cd^3e^3fg^2+$$
$$+2c^6f^2g^2-5c^4def^2g^2-102c^2d^2e^2f^2g^2+36d^3e^3f^2g^2+10c^5f^3g^2+$$
$$+57c^3def^3g^2-129cd^2e^2f^3g^2+10c^4f^4g^2+121c^2def^4g^2-35d^2e^2f^4g^2-$$
$$-10c^3f^5g^2+65cdef^5g^2-12c^2f^6g^2+6def^6g^2-22c^3d^2e^3gh-12cd^3e^4gh+$$
$$+56c^4de^2fgh-52c^2d^2e^3fgh-16d^3e^4fgh-34c^5ef^2gh+200c^3de^2f^2gh-$$
$$-2cd^2e^3f^2gh-160c^4ef^3gh+144c^2de^2f^3gh+28d^2e^3f^3gh-198c^3ef^4gh-$$
$$-24cde^2f^4gh-76c^2ef^5gh-12de^2f^5gh-12cef^6gh+24c^2d^2e^4h^2-$$
$$-72c^3de^3fh^2+32cd^2e^4fh^2+72c^4e^2f^2h^2-132c^2de^3f^2h^2+172c^3e^2f^3h^2-$$
$$-44cde^3f^3h^2+116c^2e^2f^4h^2+24ce^2f^5h^2-6c^4de^3gk+4c^2d^2e^4gk+$$
$$+6c^5e^2fgk-32c^3de^3fgk+40c^4e^2f^2gk-34c^2de^3f^2gk-8d^2e^4f^2gk+$$
$$+70c^3e^2f^3gk+6cde^3f^3gk+38c^2e^2f^4gk+6de^3f^4gk+6ce^2f^5gk+$$
$$+12c^3de^4hk-4cd^2e^5hk-36c^4e^3fhk+52c^2de^4fhk-120c^3e^3f^2hk+$$
$$+32cde^4f^2hk-104c^2e^3f^3hk-24ce^3f^4hk+6c^4e^4k^2-5c^2de^5k^2+$$
$$+23c^3e^4fk^2-5cde^5fk^2+23c^2e^4f^2k^2+6ce^4f^3k^2+c^3d^3e^2gl+4cd^4e^3gl+$$
$$+4c^4d^2efgl-4c^2d^3e^2fgl-5c^5df^2gl+8c^3d^2ef^2gl+23cd^3e^2f^2gl-$$
$$-14c^4df^3gl-53c^2d^2ef^3gl+20d^3e^2f^3gl+18c^3df^4gl-76cd^2ef^4gl+$$
$$+56c^2df^5gl-23d^2ef^5gl+35cdf^6gl+6df^7gl-10c^2d^3e^3hl-12c^5defhl+$$
$$+22c^3d^2e^2fhl-6cd^3e^3fhl+12c^6f^2hl-50c^4def^2hl-12c^2d^2e^2f^2hl+$$
$$+50c^5f^3hl+8c^3def^3hl-26cd^2e^2f^3hl+34c^4f^4hl+64c^2def^4hl-38c^3f^5hl+$$

$+22cdef^5hl-46c^2f^6hl-12cf^7hl+6c^5de^2kl-3c^3d^2e^3kl-6c^6efkl+$
$+30c^4de^2fkl-33c^5ef^2kl+41c^3de^2f^2kl+3cd^2e^3f^2kl-53c^4ef^3kl+$
$+18c^2de^2f^3kl-21c^3ef^4kl+cde^2f^4kl+11c^2ef^5kl+6cef^6kl+c^2d^4e^2l^2+$
$+4c^3d^3efl^2-3cd^4e^2fl^2-5c^4d^2f^2l^2+24c^2d^3ef^2l^2-4d^4e^2f^2l^2-27c^3d^2f^3l^2+$
$+31cd^3ef^3l^2-45c^2d^2f^4l^2+11d^3ef^4l^2-29cd^2f^5l^2-6d^2f^6l^2+6c^4d^2e^2gm+$
$+6c^2d^3e^3gm-12c^5defgm+30c^3d^2e^2fgm+34cd^3e^3fgm+6c^6f^2gm-$
$-54c^4def^2gm+24d^3e^3f^2gm+30c^5f^3gm-40c^3def^3gm-18cd^2e^2f^3gm+$
$+30c^4f^4gm+24c^2def^4gm-2d^2e^2f^4gm-30c^3f^5gm+14cdef^5gm-$
$-36c^2f^6gm-12def^6gm-20c^3d^2e^3hm+40c^4de^2fhm-96c^2d^2e^3fhm-$
$-44c^5ef^2hm+212c^3de^2f^2hm-76cd^2e^3f^2hm-164c^4ef^3hm+$
$+152c^2de^2f^3hm-76c^3ef^4hm-20cde^2f^4hm+68c^2ef^5hm+24cef^6hm-$
$-12c^4de^3km+6c^2d^2e^4km+24c^5e^2fkm-70c^3de^3fkm+10cd^2e^4fkm+$
$+88c^4e^2f^2km-80c^2de^3f^2km+70c^3e^2f^3km-14cde^3f^3km-10c^2e^2f^4km-$
$-12ce^2f^5km-4c^3d^3e^2lm+4cd^4e^3lm-4c^4d^2eflm-4c^2d^3e^2flm+$
$+8c^5df^2lm-28c^3d^2ef^2lm+8cd^3e^2f^2lm+52c^4df^3lm-48c^2d^2ef^3lm+$
$+112c^3df^4lm-20cd^2ef^4lm+92c^2df^5lm+24cdf^6lm+4c^4d^2e^2m^2-$
$-8c^5defm^2+20c^3d^2e^2fm^2+8cd^3e^3fm^2+4c^6f^2m^2-64c^4def^2m^2+$
$+48c^2d^2e^2f^2m^2+20c^5f^3m^2-148c^3def^3m^2+48cd^2e^2f^3m^2+20c^4f^4m^2-$
$-100c^2def^4m^2-20c^3f^5m^2-24c^2f^6m^2-19c^3d^2e^3gn-16cd^3e^4gn+$
$+20c^4de^2fgn-20c^2d^2e^3fgn-16d^3e^4fgn-7c^5ef^2gn+45c^3de^2f^2gn+$
$+3cd^2e^3f^2gn-21c^4ef^3gn+6c^2de^2f^3gn+4d^2e^3f^3gn+7c^3ef^4gn-$
$-13cde^2f^4gn+21c^2ef^5gn+6de^2f^5gn+12c^4de^3hn+46c^2d^2e^4hn-$
$-78c^3de^3fhn+50cd^2e^4fhn+56c^4e^2f^2hn-88c^2de^3f^2hn+38c^3e^2f^3hn+$
$+10cde^3f^3hn-34c^2e^2f^4hn-12ce^2f^5hn-6c^5e^3kn+17c^3de^4kn-$
$-4cd^2e^5kn-29c^4e^3fkn+32c^2de^4fkn-28c^3e^3f^2kn+7cde^4f^2kn+$
$+5c^2e^3f^3kn+6ce^3f^4kn+10c^4d^2e^2ln-16c^2d^3e^3ln-14c^5defln+$
$+58c^3d^2e^2fln-12cd^3e^3fln+4c^6f^2ln-68c^4def^2ln+48c^2d^2e^2f^2ln+$
$+14c^5f^3ln-74c^3def^3ln+8cd^2e^2f^3ln+2c^4f^4ln-30c^2def^4ln-14c^3f^5ln-$
$-6cdef^5ln-6c^2f^6ln-14c^3d^2e^3mn-4cd^3e^4mn+52c^4de^2fmn-$
$-88c^2d^2e^3fmn-14c^5ef^2mn+204c^3de^2f^2mn-74cd^2e^3f^2mn-$
$-40c^4ef^3mn+128c^2de^2f^3mn+18c^3ef^4mn-12cde^2f^4mn+36c^2ef^5mn-$
$-6c^4de^3n^2+31c^2d^2e^4n^2-63c^3de^3fn^2+27cd^2e^4fn^2+14c^4e^2f^2n^2-$
$-43c^2de^3f^2n^2-2c^3e^2f^3n^2+6cde^3f^3n^2-12c^2e^2f^4n^2;$
$G_{1,2}=-6c^3d^3e^2g^2-27cd^4e^3g^2+18c^4d^2efg^2+70c^2d^3e^2fg^2-31d^4e^3fg^2-$
$-12c^5df^2g^2-23c^3d^2ef^2g^2+175cd^3e^2f^2g^2-38c^4df^3g^2-206c^2d^2ef^3g^2+$
$+99d^3e^2f^3g^2+8c^3df^4g^2-195cd^2ef^4g^2+42c^2df^5g^2-18d^2ef^5g^2+$
$+12c^4d^2e^2gh+74c^2d^3e^3gh+4d^4e^4gh-36c^5defgh-194c^3d^2e^2fgh+$
$+52cd^3e^3fgh+24c^6f^2gh+106c^4def^2gh-378c^2d^2e^2f^2gh-30d^3e^3f^2gh+$
$+86c^5f^3gh+524c^3def^3gh-178cd^2e^2f^3gh+14c^4f^4gh+518c^2def^4gh-$
$-18d^2e^2f^4gh-94c^3f^5gh+120cdef^5gh-30c^2f^6gh-48c^3d^2e^3h^2-8cd^3e^4h^2+$

$+144c^4de^2fh^2+8c^2d^2e^3fh^2-168c^5ef^2h^2+140c^3de^2f^2h^2+68cd^2e^3f^2h^2-$
$-356c^4ef^3h^2-76c^2de^2f^3h^2+12d^2e^3f^3h^2-208c^3ef^4h^2-48cde^2f^4h^2-$
$-36c^2ef^5h^2+6c^5de^2gk-8c^3d^2e^3gk+12cd^3e^4gk-6c^6efgk+34c^4de^2fgk-$
$-44c^2d^2e^3fgk+16d^3e^4fgk-62c^5ef^2gk+70c^3de^2f^2gk-62cd^2e^3f^2gk-$
$-146c^4ef^3gk+58c^2de^2f^3gk-26d^2e^3f^3gk-120c^3ef^4gk+34cde^2f^4gk-$
$-44c^2ef^5gk+6de^2f^5gk-6cef^6gk-24c^4de^3hk+8c^2d^2e^4hk-4d^3e^5hk+$
$+96c^5e^2fhk-124c^3de^3fhk+24cd^2e^4fhk+332c^4e^2f^2hk-132c^2de^3f^2hk+$
$+16d^2e^4f^2hk+328c^3e^2f^3hk-56cde^3f^3hk+112c^2e^2f^4hk-12de^3f^4hk+$
$+12ce^2f^5hk-18c^5e^3k^2+21c^3de^4k^2-5cd^2e^5k^2-75c^4e^3fk^2+43c^2de^4fk^2-$
$-5d^2e^5fk^2-92c^3e^3f^2k^2+28cde^4f^2k^2-41c^2e^3f^3k^2+6de^4f^3k^2-6ce^3f^4k^2-$
$-6c^4d^3egl-7c^2d^4e^2gl+4d^5e^3gl+6c^5d^2fgl+2c^3d^3efgl-36cd^4e^2fgl+$
$+23c^4d^2f^2gl+81c^2d^3ef^2gl-29d^4e^2f^2gl-13c^3d^2f^3gl+142cd^3ef^3gl-$
$-113c^2d^2f^4gl+57d^3ef^4gl-93cd^2f^5gl-18d^2f^6gl+12c^5d^2ehl+14c^3d^3e^2hl-$
$-10cd^4e^3hl-12c^6dfhl+8c^4d^2efhl+74c^2d^3e^2fhl-6d^4e^3fhl-58c^5df^2hl-$
$-112c^3d^2ef^2hl+74cd^3e^2f^2hl-24c^4df^3hl-262c^2d^2ef^3hl+14d^3e^2f^3hl+$
$+194c^3df^4hl-166cd^2ef^4hl+224c^2df^5hl-24d^2ef^5hl+60cdf^6hl-6c^6dekl-$
$-c^4d^2e^2kl-3c^2d^3e^3kl+6c^7fkl-16c^5defkl-7c^3d^2e^2fkl+35c^6f^2kl-$
$-10c^4def^2kl+3d^3e^3f^2kl+56c^5f^3kl+7cd^2e^2f^3kl+10c^2def^4kl+d^2e^2f^4kl-$
$-56c^3f^5kl+16cdef^5kl-35c^2f^6kl+6def^6kl-6cf^7kl-6c^3d^4el^2+5cd^5e^2l^2+$
$+6c^4d^3fl^2-28c^2d^4efl^2+5d^5e^2fl^2+41c^3d^3f^2l^2-43cd^4ef^2l^2+92c^2d^3f^3l^2-$
$-21d^4ef^3l^2+75cd^3f^4l^2+18d^3f^5l^2-18c^3d^3e^2gm-18cd^4e^3gm+$
$+12c^4d^2efgm+2c^2d^3e^2fgm-14d^4e^3fgm-30c^5df^2gm+8c^3d^2ef^2gm+$
$+122cd^3e^2f^2gm-64c^4df^3gm-238c^2d^2ef^3gm+102d^3e^2f^3gm+$
$+130c^3df^4gm-186cd^2ef^4gm+156c^2df^5gm+36d^2ef^5gm+24c^4d^2e^2hm+$
$+28c^2d^3e^3hm-24c^5defhm+28c^3d^2e^2fhm+72c^6f^2hm-152c^4def^2hm-$
$-28d^3e^3f^2hm+240c^5f^3hm-28cd^2e^2f^3hm+152c^2def^4hm-24d^2e^2f^4hm-$
$-240c^3f^5hm+24cdef^5hm-72c^2f^6hm+24c^5de^2km-14c^3d^2e^3km+$
$+6cd^3e^4km-60c^6efkm+166c^4de^2fkm-74c^2d^2e^3fkm+10d^3e^4fkm-$
$-224c^5ef^2km+262c^3de^2f^2km-74cd^2e^3f^2km-194c^4ef^3km+$
$+112c^2de^2f^3km-14d^2e^3f^3km+24c^3ef^4km-8cde^2f^4km+58c^2ef^5km-$
$-12de^2f^5km+12cef^6km+12c^4d^3elm-16c^2d^4e^2lm+4d^5e^3lm-$
$-12c^5d^2flm+56c^3d^3eflm-24cd^4e^2flm-112c^4d^2f^2lm+132c^2d^3ef^2lm-$
$-8d^4e^2f^2lm-328c^3d^2f^3lm+124cd^3ef^3lm-332c^2d^2f^4lm+24d^3ef^4lm-$
$-96cd^2f^5lm-12c^3d^3e^2m^2+48c^4d^2efm^2-68c^2d^3e^2fm^2+8d^4e^3fm^2+$
$+36c^5df^2m^2+76c^3d^2ef^2m^2-8cd^3e^2f^2m^2+208c^4df^3m^2-140c^2d^2ef^3m^2+$
$+48d^3e^2f^3m^2+356c^3df^4m^2-144cd^2ef^4m^2+168c^2df^5m^2+33c^4d^2e^2gn+$
$+49c^2d^3e^3gn-24c^5defgn-35c^3d^2e^2fgn+9c^6f^2gn-8c^4def^2gn-$
$-49d^3e^3f^2gn+30c^5f^3gn+35cd^2e^2f^3gn+8c^2def^4gn-33d^2e^2f^4gn-$
$-30c^3f^5gn+24cdef^5gn-9c^2f^6gn-36c^5de^2hn-102c^3d^2e^3hn+$
$+14cd^3e^4hn+186c^4de^2fhn-122c^2d^2e^3fhn+18d^3e^4fhn-156c^5ef^2hn+$

$+238c^3de^2f^2hn-2cd^2e^3f^2hn-130c^4ef^3hn-8c^2de^2f^3hn+18d^2e^3f^3hn+$
$+64c^3ef^4hn-12cde^2f^4hn+30c^2ef^5hn+18c^6e^2kn-57c^4de^3kn+$
$+29c^2d^2e^4kn-4d^3e^5kn+93c^5e^2fkn-142c^3de^3fkn+36cd^2e^4fkn+$
$+113c^4e^2f^2kn-81c^2de^3f^2kn+7d^2e^4f^2kn+13c^3e^2f^3kn-2cde^3f^3kn-$
$-23c^2e^2f^4kn+6de^3f^4kn-6ce^2f^5kn-6c^5d^2eln+26c^3d^3e^2ln-16cd^4e^3ln+$
$+6c^6dfln-34c^4d^2efln+62c^2d^3e^2fln-12d^4e^3fln+44c^5df^2ln-$
$-58c^3d^2ef^2ln+44cd^3e^2f^2ln+120c^4df^3ln-70c^2d^2ef^3ln+8d^3e^2f^3ln+$
$+146c^3df^4ln-34cd^2ef^4ln+62c^2df^5ln-6d^2ef^5ln+6cdf^6ln+18c^4d^2e^2mn+$
$+30c^2d^3e^3mn-4d^4e^4mn-120c^5defmn+178c^3d^2e^2fmn-52cd^3e^3fmn+$
$+30c^6f^2mn-518c^4def^2mn+378c^2d^2e^2f^2mn-74d^3e^3f^2mn+94c^5f^3mn-$
$-524c^3def^3mn+194cd^2e^2f^3mn-14c^4f^4mn-106c^2def^4mn-$
$-12d^2e^2f^4mn-86c^3f^5mn+36cdef^5mn-24c^2f^6mn+18c^5de^2n^2-$
$-99c^3d^2e^3n^2+31cd^3e^4n^2+195c^4de^2fn^2-175c^2d^2e^3fn^2+27d^3e^4fn^2-$
$-42c^5ef^2n^2+206c^3de^2f^2n^2-70cd^2e^3f^2n^2-8c^4ef^3n^2+23c^2de^2f^3n^2+$
$+6d^2e^3f^3n^2+38c^3ef^4n^2-18cde^2f^4n^2+12c^2ef^5n^2;$
$G_{1,3}=-6c^3d^3efg^2-27cd^4e^2fg^2+12c^4d^2f^2g^2+43c^2d^3ef^2g^2-$
$-31d^4e^2f^2g^2+2c^3d^2f^3g^2+63cd^3ef^3g^2-14c^2d^2f^4g^2+6d^3ef^4g^2+$
$+12c^4d^2efgh+74c^2d^3e^2fgh+4d^4e^3fgh-36c^5df^2gh-128c^3d^2ef^2gh+$
$+88cd^3e^2f^2gh-18c^4df^3gh-204c^2d^2ef^3gh+14d^3e^2f^3gh+40c^3df^4gh-$
$-52cd^2ef^4gh+14c^2df^5gh-48c^3d^2e^2fh^2-8cd^3e^3fh^2+24c^6f^2h^2+$
$+100c^4def^2h^2-48c^2d^2e^2f^2h^2+20c^5f^3h^2+148c^3def^3h^2-20cd^2e^2f^3h^2-$
$-20c^4f^4h^2+64c^2def^4h^2-4d^2e^2f^4h^2-20c^3f^5h^2+8cdef^5h^2-4c^2f^6h^2+$
$+6c^5defgk-8c^3d^2e^2fgk+12cd^3e^3fgk+6c^6f^2gk+30c^4def^2gk-$
$-48c^2d^2e^2f^2gk+16d^3e^3f^2gk+14c^5f^3gk+74c^3def^3gk-58cd^2e^2f^3gk-$
$-2c^4f^4gk+68c^2def^4gk-10d^2e^2f^4gk-14c^3f^5gk+14cdef^5gk-$
$-4c^2f^6gk-24c^6efhk+20c^4de^2fhk-8c^2d^2e^3fhk-4d^3e^4fhk-$
$-92c^5ef^2hk+48c^3de^2f^2hk+4cd^2e^3f^2hk-112c^4ef^3hk+28c^2de^2f^3hk+$
$+4d^2e^3f^3hk-52c^3ef^4hk+4cde^2f^4hk-8c^2ef^5hk+6c^6e^2k^2-$
$-11c^4de^3k^2+4c^2d^2e^4k^2+29c^5e^2fk^2-31c^3de^3fk^2+3cd^2e^4fk^2+$
$+45c^4e^2f^2k^2-24c^2de^3f^2k^2-d^2e^4f^2k^2+27c^3e^2f^3k^2-4cde^3f^3k^2+$
$+5c^2e^2f^4k^2-6c^4d^3fgl-7c^2d^4efgl+4d^5e^2fgl-5c^3d^3f^2gl-$
$-32cd^4ef^2gl+28c^2d^3f^3gl-17d^4ef^3gl+29cd^3f^4gl+6d^3f^5gl+$
$+12c^5d^2fhl+14c^3d^3efhl-10cd^4e^2fhl+10c^4d^2f^2hl+80c^2d^3ef^2hl-$
$-6d^4e^2f^2hl-70c^3d^2f^3hl+70cd^3ef^3hl-88c^2d^2f^4hl+12d^3ef^4hl-$
$-24cd^2f^5hl-6c^6dfkl-c^4d^2efkl-3c^2d^3e^2fkl-11c^5df^2kl-$
$-18c^3d^2ef^2kl+21c^4df^3kl-41c^2d^2ef^3kl+3d^3e^2f^3kl+53c^3df^4kl-$
$-30cd^2ef^4kl+33c^2df^5kl-6d^2ef^5kl+6cdf^6kl-6c^3d^4fl^2+5cd^5efl^2-$
$-23c^2d^4f^2l^2+5d^5ef^2l^2-23cd^4f^3l^2-6d^4f^4l^2+12c^5d^2fgm-$
$-10c^3d^3efgm-50cd^4e^2fgm+34c^4d^2f^2gm+88c^2d^3ef^2gm-$
$-46d^4e^2f^2gm-38c^3d^2f^3gm+78cd^3ef^3gm-56c^2d^2f^4gm-12d^3ef^4gm-$

$$
\begin{aligned}
&-24c^6dfhm+20c^4d^2efhm+76c^2d^3e^2fhm-68c^5df^2hm-152c^3d^2ef^2hm+\\
&+96cd^3e^2f^2hm+76c^4df^3hm-212c^2d^2ef^3hm+20d^3e^2f^3hm+\\
&+164c^3df^4hm-40cd^2ef^4hm+44c^2df^5hm+12c^7fkm-22c^5defkm+\\
&+26c^3d^2e^2fkm+6cd^3e^3fkm+46c^6f^2km-64c^4def^2km+12c^2d^2e^2f^2km+\\
&+10d^3e^3f^2km+38c^5f^3km-8c^3def^3km-22cd^2e^2f^3km-34c^4f^4km+\\
&+50c^2def^4km-50c^3f^5km+12cdef^5km-12c^2f^6km+24c^4d^3flm-\\
&-32c^2d^4eflm+4d^5e^2flm+104c^3d^3f^2lm-52cd^4ef^2lm+120c^2d^3f^3lm-\\
&-12d^4ef^3lm+36cd^3f^4lm-24c^5d^2fm^2+44c^3d^3efm^2-32cd^4e^2fm^2-\\
&-116c^4d^2f^2m^2+132c^2d^3ef^2m^2-24d^4e^2f^2m^2-172c^3d^2f^3m^2+\\
&+72cd^3ef^3m^2-72c^2d^2f^4m^2-6c^5d^2egn-4c^3d^3e^2gn+16cd^4e^3gn+\\
&+13c^4d^2efgn-3c^2d^3e^2fgn+16d^4e^3fgn-21c^5df^2gn-6c^3d^2ef^2gn+\\
&+20cd^3e^2f^2gn-7c^4df^3gn-45c^2d^2ef^3gn+19d^3e^2f^3gn+21c^3df^4gn-\\
&-20cd^2ef^4gn+7c^2df^5gn+12c^6dehn+2c^4d^2e^2hn-24c^2d^3e^3hn-\\
&-14c^5defhn+18c^3d^2e^2fhn-34cd^3e^3fhn+36c^6f^2hn-24c^4def^2hn-\\
&-6d^3e^3f^2hn+30c^5f^3hn+40c^3def^3hn-30cd^2e^2f^3hn-30c^4f^4hn+\\
&+54c^2def^4hn-6d^2e^2f^4hn-30c^3f^5hn+12cdef^5hn-6c^2f^6hn-6c^7ekn+\\
&+23c^5de^2kn-20c^3d^2e^3kn-35c^6efkn+76c^4de^2fkn-23c^2d^2e^3fkn-\\
&-4d^3e^4fkn-56c^5ef^2kn+53c^3de^2f^2kn+4cd^2e^3f^2kn-18c^4ef^3kn-\\
&-8c^2de^2f^3kn-d^2e^3f^3kn+14c^3ef^4kn-4cde^2f^4kn+5c^2ef^5kn-\\
&-6c^4d^3eln+8c^2d^4e^2ln-6c^5d^2fln-6c^3d^3efln-38c^4d^2f^2ln+\\
&+34c^2d^3ef^2ln-4d^4e^2f^2ln-70c^3d^2f^3ln+32cd^3ef^3ln-40c^2d^2f^4ln+\\
&+6d^3ef^4ln-6cd^2f^5ln+12c^5d^2emn-28c^3d^3e^2mn+16cd^4e^3mn+\\
&+12c^6dfmn+24c^4d^2efmn+2c^2d^3e^2fmn+12d^4e^3fmn+76c^5df^2mn-\\
&-144c^3d^2ef^2mn+52cd^3e^2f^2mn+198c^4df^3mn-200c^2d^2ef^3mn+\\
&+22d^3e^2f^3mn+160c^3df^4mn-56cd^2ef^4mn+34c^2df^5mn-6c^6den^2+\\
&+35c^4d^2e^2n^2-36c^2d^3e^3n^2-65c^5defn^2+129c^3d^2e^2fn^2-41cd^3e^3fn^2+\\
&+12c^6f^2n^2-121c^4def^2n^2+102c^2d^2e^2f^2n^2-9d^3e^3f^2n^2+10c^5f^3n^2-\\
&-57c^3def^3n^2+14cd^2e^2f^3n^2-10c^4f^4n^2+5c^2def^4n^2-2d^2e^2f^4n^2-\\
&-10c^3f^5n^2+4cdef^5n^2-2c^2f^6n^2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_{1,4}=6c^3d^4eg^2+27cd^5e^2g^2-12c^4d^3fg^2-43c^2d^4efg^2+31d^5e^2fg^2-\\
&-2c^3d^3f^2g^2-63cd^4ef^2g^2+14c^2d^3f^3g^2-6d^4ef^3g^2-12c^4d^3egh-\\
&-74c^2d^4e^2gh-4d^5e^3gh+36c^5d^2fgh+128c^3d^3efgh-88cd^4e^2fgh+\\
&+18c^4d^2f^2gh+204c^2d^3ef^2gh-14d^4e^2f^2gh-40c^3d^2f^3gh+52cd^3ef^3gh-\\
&-14c^2d^2f^4gh+48c^3d^3e^2h^2+8cd^4e^3h^2-24c^6dfh^2-100c^4d^2efh^2+\\
&+48c^2d^3e^2fh^2-20c^5df^2h^2-148c^3d^2ef^2h^2+20cd^3e^2f^2h^2+20c^4df^3h^2-\\
&-64c^2d^2ef^3h^2+4d^3e^2f^3h^2+20c^3df^4h^2-8cd^2ef^4h^2+4c^2df^5h^2+\\
&+12c^3d^3e^2gk-28cd^4e^3gk-12c^6dfgk-14c^4d^2efgk+116c^2d^3e^2fgk-\\
&-32d^4e^3fgk-34c^5df^2gk-126c^3d^2ef^2gk+134cd^3e^2f^2gk+2c^4df^3gk-\\
&-148c^2d^2ef^3gk+22d^3e^2f^3gk+34c^3df^4gk-32cd^2ef^4gk+10c^2df^5gk+\\
&+12c^6dehk-22c^4d^2e^2hk+32c^2d^3e^3hk+4d^4e^4hk+12c^7fhk+
\end{aligned}
$$

$+48c^5defhk-148c^3d^2e^2fhk+28cd^3e^3fhk+46c^6f^2hk+168c^4def^2hk-$
$-180c^2d^2e^2f^2hk+4d^3e^3f^2hk+20c^5f^3hk+212c^3def^3hk-64cd^2e^2f^3hk-$
$-40c^4f^4hk+92c^2def^4hk-6d^2e^2f^4hk-32c^3f^5hk+12cdef^5hk-$
$-6c^2f^6hk-6c^7ek^2+17c^5de^2k^2-9c^3d^2e^3k^2+5cd^3e^4k^2-35c^6efk^2+$
$+59c^4de^2fk^2-26c^2d^2e^3fk^2+5d^3e^4fk^2-68c^5ef^2k^2+73c^3de^2f^2k^2-$
$-20cd^2e^3f^2k^2-58c^4ef^3k^2+37c^2de^2f^3k^2-3d^2e^3f^3k^2-22c^3ef^4k^2+$
$+6cde^2f^4k^2-3c^2ef^5k^2+6c^4d^4gl+7c^2d^5egl-4d^6e^2gl+5c^3d^4fgl+$
$+32cd^5efgl-28c^2d^4f^2gl+17d^5ef^2gl-29cd^4f^3gl-6d^4f^4gl-12c^5d^3hl-$
$-14c^3d^4ehl+10cd^5e^2hl-10c^4d^3fhl-80c^2d^4efhl+6d^5e^2fhl+$
$+70c^3d^3f^2hl-70cd^4ef^2hl+88c^2d^3f^3hl-12d^4ef^3hl+24cd^3f^4hl+$
$+6c^6d^2kl+7c^4d^3ekl-5c^2d^4e^2kl+5c^5d^2fkl+58c^3d^3efkl-16cd^4e^2fkl-$
$-53c^4d^2f^2kl+109c^2d^3ef^2kl-11d^4e^2f^2kl-105c^3d^2f^3kl+70cd^3ef^3kl-$
$-65c^2d^2f^4kl+12d^3ef^4kl-12cd^2f^5kl+6c^3d^5l^2-5cd^6el^2+23c^2d^5fl^2-$
$-5d^6efl^2+23cd^5f^2l^2+6d^5f^3l^2-12c^5d^3gm+10c^3d^4egm+50cd^5e^2gm-$
$-34c^4d^3fgm-88c^2d^4efgm+46d^5e^2fgm+38c^3d^3f^2gm-78cd^4ef^2gm+$
$+56c^2d^3f^3gm+12d^4ef^3gm+24c^6d^2hm-20c^4d^3ehm-76c^2d^4e^2hm+$
$+68c^5d^2fhm+152c^3d^3efhm-96cd^4e^2fhm-76c^4d^2f^2hm+$
$+212c^2d^3ef^2hm-20d^4e^2f^2hm-164c^3d^2f^3hm+40cd^3ef^3hm-$
$-44c^2d^2f^4hm-12c^7dkm+10c^5d^2ekm+2c^3d^3e^2km-22cd^4e^3km-$
$-34c^6dfkm-40c^4d^2efkm+104c^2d^3e^2fkm-26d^4e^3fkm+38c^5df^2km-$
$-248c^3d^2ef^2km+122cd^3e^2f^2km+190c^4df^3km-250c^2d^2ef^3km+$
$+12d^3e^2f^3km+166c^3df^4km-48cd^2ef^4km+36c^2df^5km-24c^4d^4lm+$
$+32c^2d^5elm-4d^6e^2lm-104c^3d^4flm+52cd^5eflm-120c^2d^4f^2lm+$
$+12d^5ef^2lm-36cd^4f^3lm+24c^5d^3m^2-44c^3d^4em^2+32cd^5e^2m^2+$
$+116c^4d^3fm^2-132c^2d^4efm^2+24d^5e^2fm^2+172c^3d^3f^2m^2-$
$-72cd^4ef^2m^2+72c^2d^3f^3m^2+6c^6d^2gn-29c^4d^3egn-65c^2d^4e^2gn+$
$+41c^5d^2fgn+58c^3d^3efgn-96cd^4e^2fgn+7c^4d^2f^2gn+125c^2d^3ef^2gn-$
$-31d^4e^2f^2gn-41c^3d^2f^3gn+38cd^3ef^3gn-13c^2d^2f^4gn-12c^7dhn+$
$+58c^5d^2ehn+82c^3d^3e^2hn+2cd^4e^3hn-82c^6dfhn-32c^4d^2efhn+$
$+152c^2d^3e^2fhn-2d^4e^3fhn-50c^5df^2hn-200c^3d^2ef^2hn+$
$+90cd^3e^2f^2hn+70c^4df^3hn-138c^2d^2ef^3hn+12d^3e^2f^3hn+62c^3df^4hn-$
$-24cd^2ef^4hn+12c^2df^5hn+6c^8kn-29c^6dekn+31c^4d^2e^2kn+$
$+11c^2d^3e^3kn+4d^4e^4kn+41c^7fkn-110c^5defkn-7c^3d^2e^2fkn+$
$+16cd^3e^3fkn+79c^6f^2kn-26c^4def^2kn-90c^2d^2e^2f^2kn+13d^3e^3f^2kn+$
$+10c^5f^3kn+140c^3def^3kn-65cd^2e^2f^3kn-76c^4f^4kn+103c^2def^4kn-$
$-9d^2e^2f^4kn-51c^3f^5kn+18cdef^5kn-9c^2f^6kn+12c^5d^3ln-$
$-34c^3d^4eln+16cd^5e^2ln+70c^4d^3fln-102c^2d^4efln+12d^5e^2fln+$
$+122c^3d^3f^2ln-72cd^4ef^2ln+72c^2d^3f^3ln-12d^4ef^3ln+12cd^3f^4ln-$
$-24c^6d^2mn+80c^4d^3emn-118c^2d^4e^2mn+4d^5e^3mn-152c^5d^2fmn+$
$+400c^3d^3efmn-152cd^4e^2fmn-354c^4d^2f^2mn+400c^2d^3ef^2mn-$

$-34d^4e^2f^2mn - 276c^3d^2f^3mn + 92cd^3ef^3mn - 58c^2d^2f^4mn + 6c^7dn^2-$
$-29c^5d^2en^2 + 91c^3d^3e^2n^2 - 15cd^4e^3n^2 + 47c^6dfn^2 - 247c^4d^2efn^2+$
$+200c^2d^3e^2fn^2 - 11d^4e^3fn^2 + 174c^5df^2n^2 - 403c^3d^2ef^2n^2+$
$+118cd^3e^2f^2n^2 + 224c^4df^3n^2 - 215c^2d^2ef^3n^2 + 17d^3e^2f^3n^2+$
$+108c^3df^4n^2 - 34cd^2ef^4n^2 + 17c^2df^5n^2;$
$\sigma_{1,0} = 12c^4d^2e^4 - 22c^2d^3e^5 + 8d^4e^6 - 24c^5de^3f + 114c^3d^2e^4f - 76cd^3e^5f+$
$+12c^6e^2f^2 - 162c^4de^3f^2 + 252c^2d^2e^4f^2 - 22d^3e^5f^2 + 70c^5e^2f^3-$
$-308c^3de^3f^3 + 114cd^2e^4f^3 + 124c^4e^2f^4 - 162c^2de^3f^4 + 12d^2e^4f^4+$
$+70c^3e^2f^5 - 24cde^3f^5 + 12c^2e^2f^6;$
$\sigma_{1,1} = 6c^5d^2e^3 + 11c^3d^3e^4 - 4cd^4e^5 + 12c^6de^2f - 51c^4d^2e^3f + 27c^2d^3e^4f+$
$+4d^4e^5f - 6c^7ef^2 + 69c^5de^2f^2 - 69c^3d^2e^3f^2 - 27cd^3e^4f^2 - 29c^6ef^3+$
$+73c^4de^2f^3 + 69c^2d^2e^3f^3 - 11d^3e^4f^3 - 27c^5ef^4 - 73c^3de^2f^4+$
$+51cd^2e^3f^4 + 27c^4ef^5 - 69c^2de^2f^5 + 6d^2e^3f^5 + 29c^3ef^6-$
$-12cde^2f^6 + 6c^2ef^7;$
$\sigma_{1,2} = 6c^6d^2e^2 - 23c^4d^3e^3 + 26c^2d^4e^4 - 8d^5e^5 - 12c^7def + 69c^5d^2e^2f-$
$-130c^3d^3e^3f + 68cd^4e^4f + 6c^8f^2 - 69c^6def^2 + 180c^4d^2e^2f^2-$
$-198c^2d^3e^3f^2 + 26d^4e^4f^2 + 23c^7f^3 - 74c^5def^3 + 170c^3d^2e^2f^3-$
$-130cd^3e^3f^3 - 2c^6f^4 + 22c^4def^4 + 180c^2d^2e^2f^4 - 23d^3e^3f^4 - 54c^5f^5-$
$-74c^3def^5 + 69cd^2e^2f^5 - 2c^4f^6 - 69c^2def^6 + 6d^2e^2f^6 + 23c^3f^7-$
$-12cdef^7 + 6c^2f^8;$
$\sigma_{1,3} = 6c^5d^3e^2 - 11c^3d^4e^3 + 4cd^5e^4 - 12c^6d^2ef + 51c^4d^3e^2f - 27c^2d^4e^3f-$
$-4d^5e^4f + 6c^7df^2 - 69c^5d^2ef^2 + 69c^3d^3e^2f^2 + 27cd^4e^3f^2 + 29c^6df^3-$
$-73c^4d^2ef^3 - 69c^2d^3e^2f^3 + 11d^4e^3f^3 + 27c^5df^4 + 73c^3d^2ef^4-$
$-51cd^3e^2f^4 - 27c^4df^5 + 69c^2d^2ef^5 - 6d^3e^2f^5 - 29c^3df^6 + 12cd^2ef^6-$
$-6c^2df^7;$
$\sigma_{1,4} = 12c^4d^4e^2 - 22c^2d^5e^3 + 8d^6e^4 - 24c^5d^3ef + 114c^3d^4e^2f-$
$-76cd^5e^3f + 12c^6d^2f^2 - 162c^4d^3ef^2 + 252c^2d^4e^2f^2 - 22d^5e^3f^2+$
$+70c^5d^2f^3 - 308c^3d^3ef^3 + 114cd^4e^2f^3 + 124c^4d^2f^4 - 162c^2d^3ef^4+$
$+12d^4e^2f^4 + 70c^3d^2f^5 - 24cd^3ef^5 + 12c^2d^2f^6;$

$$B_{1,i} = 4k_i(c+f)(cf-de)^2(2c^2 - de + 5cf + 2f^2)(3c^2 - 4de + 10cf + 3f^2),$$
$$(k_0 = k_1 = k_3 = k_4 = 1,\ k_2 = 3).$$

Матрицы, которые определяют линейную систему уравнений $A_2B_2 = C_2$ для величины G_2 в случае дифференциальной системы $s(1,2)$

$$A_2 = [A_2'|A_2''|A_2'''|A_2''''],$$

$$A_2' = \begin{pmatrix}
3c & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3d & 3(2c+f) & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6d & 3(2c+f) & 3e & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3d & 3f & 0 & 0 & 0 \\
3g & 3l & 0 & 0 & 4c & 4e & 0 \\
6h & 6(g+m) & 6l & 0 & 4d & 4(f+3c) & 12e \\
3k & 3(4h+n) & 3(g+4m) & 3l & 0 & 12d & 12(c+f) \\
0 & 6k & 6(h+n) & 6m & 0 & 0 & 12d \\
0 & 0 & 3k & 3n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4g & 4l & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8h & 4(3g+2m) & 12l \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4k & 4(6h+n) & 12(g+2m) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12k & 12(2h+n) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$A_2'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e(c-f) & 0 & 0 & 0 \\ 12e & 0 & 2de-(c-f)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 4(3f+c) & 4l & 2d(f-c) & 0 & 0 & 0 \\ 4d & 4f & -d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5c & 5e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5d & 5(4c+f) & 20e \\ 12l & 0 & 0 & 0 & 20d & 10(3c+2f) \\ 4(g+6m) & 4l & 0 & 0 & 0 & 30d \\ 4(2h+3n) & 8m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4k & 4n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5g & 5l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10h & 10(2g+m) & 20l \\ 0 & 0 & 0 & 5k & 5(8h+n) & 10(3g+4m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20k & 20(3h+n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
A_2''' = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
30e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
10(2c+3f) & 20e & 0 & 0 & 0 & 0 \\
20d & 5(c+4f) & 5e & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5d & 5f & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6c & 6e & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6d & 6(5c+f) & 30e \\
30l & 0 & 0 & 0 & 30d & 30(2c+f) \\
20(g+3m) & 20l & 0 & 0 & 0 & 60d \\
10(4h+3n) & 5(g+8m) & 5l & 0 & 0 & 0 \\
20k & 10(h+2n) & 10m & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5k & 5n & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$A_2'''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3e^2(f-c) \\ 60e & 0 & 0 & 0 & 3e[(c-f)^2 - de] \\ 60(c+f) & 60e & 0 & 0 & (f-c)[(c-f)^2 - 6de] \\ 60d & 30(c+2f) & 30e & 0 & 3d[de-(c-f)^2] \\ 0 & 30d & 6(c+5f) & 6e & 3d^2(f-c) \\ 0 & 0 & 6d & 6f & -d^3 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ G_2 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 2eg + (f-c)l \\ (f-c)(g+2m) - 2dl + 4eh \\ (f-c)(2h+n) + 2ek - 4dm \\ (f-c)k - 2dn \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приложение 5

Многочлены, которые определяют величину G_1 для системы $s(1,3)$ Выражения фокусных псевдовеличин $G_{1,i}$, а также выражения $\sigma_{1,i}$ и $B_{1,i}$ $(i=0,1,2,3,4)$

$G_{1,0} = 7c^2de^2p - 6d^2e^3p - 7c^3efp + 35cde^2fp - 29c^2ef^2p + 22de^2f^2p-$
$-25cef^3p - 3ef^4p - 9cde^3q + 9c^2e^2fq - 21de^3fq + 30ce^2f^2q + 9e^2f^3q+$
$+6de^4r - 15ce^3fr - 9e^3f^2r + 3ce^4s + 3e^4fs - 3c^3det + 5cd^2e^2t + 3c^4ft-$
$-15c^2deft + 5d^2e^2ft + 10c^3f^2t - 5cdef^2t + 7def^3t - 10cf^4t - 3f^5t+$
$+3c^2de^2u - 6d^2e^3u - 3c^3efu + 15cde^2fu - 9c^2ef^2u + 6de^2f^2u + 3cef^3u+$
$+9ef^4u - 3cde^3v + 3c^2e^2fv - 15de^3fv + 6ce^2f^2v - 9e^2f^3v + 6de^4w-$
$-3ce^3fw + 3e^3f^2w;$
$G_{1,1} = -c^3dep - 2cd^2e^2p + c^4fp - c^2defp - 8d^2e^2fp + 3c^3f^2p+$
$+12cdef^2p - c^2f^3p + 6def^3p - 3cf^4p + 9c^2de^2q - 9c^3efq + 21cde^2fq-$
$-30c^2ef^2q - 9cef^3q - 6cde^3r + 15c^2e^2fr + 9ce^2f^2r - 3c^2e^3s - 3ce^3fs-$
$-c^2d^2et + c^3dft - 5cd^2eft + 5c^2df^2t - 4d^2ef^2t + 7cdf^3t + 3df^4t-$
$-3c^3deu + 6cd^2e^2u + 3c^4fu - 15c^2defu + 9c^3f^2u - 6cdef^2u - 3c^2f^3u-$
$-9cf^4u + 3c^2de^2v - 3c^3efv + 15cde^2fv - 6c^2ef^2v + 9cef^3v - 6cde^3w+$
$+3c^2e^2fw - 3ce^2f^2w;$
$G_{1,2} = 3(c^2d^2ep + 2d^3e^2p - c^3dfp - 3cd^2efp - 2c^2df^2p - 6d^2ef^2p+$
$+3cdf^3p - 3c^3deq - 5cd^2e^2q + 3c^4fq + 7c^2defq - d^2e^2fq + 7c^3f^2q+$
$+17cdef^2q - 7c^2f^3q + 3def^3q - 3cf^4q + 6c^2de^2r - 2d^2e^3r - 15c^3efr+$
$+7cde^2fr - 14c^2ef^2r + 3de^2f^2r - 3cef^3r + 3c^3e^2s - cde^3s + 4c^2e^2fs-$
$-de^3fs + ce^2f^2s + cd^3et - c^2d^2ft + d^3eft - 4cd^2f^2t - 3d^2f^3t-$
$-3c^2d^2eu + 2d^3e^2u + 3c^3dfu - 7cd^2efu + 14c^2df^2u - 6d^2ef^2u+$
$+15cdf^3u - 3c^3dev + cd^2e^2v + 3c^4fv - 17c^2defv + 5d^2e^2fv + 7c^3f^2v-$
$-7cdef^2v - 7c^2f^3v + 3def^3v - 3cf^4v + 6c^2de^2w - 2d^2e^3w - 3c^3efw+$
$+3cde^2fw + 2c^2ef^2w - de^2f^2w + cef^3w);$
$G_{1,3} = 3c^2d^2fp + 6d^3efp - 3cd^2f^2p - 9c^3dfq - 15cd^2efq + 6c^2df^2q-$
$-3d^2ef^2q + 3cdf^3q + 9c^4fr + 6c^2defr - 6d^2e^2fr + 3c^3f^2r + 15cdef^2r-$
$-9c^2f^3r + 3def^3r - 3cf^4r - 3c^4es + 4c^2de^2s - 7c^3efs + 5cde^2fs-$
$-5c^2ef^2s + de^2f^2s - cef^3s + 3cd^3ft + 3d^3f^2t - 9c^2d^2fu + 6d^3efu-$
$-15cd^2f^2u + 9c^3dfv - 21cd^2efv + 30c^2df^2v - 9d^2ef^2v + 9cdf^3v-$
$-6c^3dew + 8cd^2e^2w + 3c^4fw - 12c^2defw + 2d^2e^2fw + c^3f^2w+$
$+cdef^2w - 3c^2f^3w + def^3w - cf^4w;$
$G_{1,4} = -(3c^2d^3p + 6d^4ep - 3cd^3fp - 9c^3d^2q - 15cd^3eq + 6c^2d^2fq-$
$-3d^3efq + 3cd^2f^2q + 9c^4dr + 6c^2d^2er - 6d^3e^2r + 3c^3dfr + 15cd^2efr-$
$-9c^2df^2r + 3d^2ef^2r - 3cdf^3r - 3c^5s + 7c^3des + 5cd^2e^2s - 10c^4fs-$
$-5c^2defs + 5d^2e^2fs - 15cdef^2s + 10c^2f^3s - 3def^3s + 3cf^4s + 3cd^4t+$
$+3d^4ft - 9c^2d^3u + 6d^4eu - 15cd^3fu + 9c^3d^2v - 21cd^3ev + 30c^2d^2fv-$

$-9d^3efv+9cd^2f^2v-3c^4dw+22c^2d^2ew-6d^3e^2w-25c^3dfw+35cd^2efw-$
$-29c^2df^2w+7d^2ef^2w-7cdf^3w);$
$\sigma_{1,0}=-6c^2de^3+8d^2e^4+6c^3e^2f-28cde^3f+20c^2e^2f^2-6de^3f^2+6ce^2f^3;$
$\sigma_{1,1}=3c^3de^2-4cd^2e^3-3c^4ef+11c^2de^2f+4d^2e^3f-7c^3ef^2-11cde^2f^2+$
$+7c^2ef^3-3de^2f^3+3cef^4;$
$\sigma_{1,2}=-3c^4de+10c^2d^2e^2-8d^3e^3+3c^5f-14c^3def+20cd^2e^2f+4c^4f^2+$
$+2c^2def^2+10d^2e^2f^2-14c^3f^3-14cdef^3+4c^2f^4-3def^4+3cf^5;$
$\sigma_{1,3}=-3c^3d^2e+4cd^3e^2+3c^4df-11c^2d^2ef-4d^3e^2f+7c^3df^2+11cd^2ef^2-$
$-7c^2df^3+3d^2ef^3-3cdf^4;$
$\sigma_{1,4}=-6c^2d^3e+8d^4e^2+6c^3d^2f-28cd^3ef+20c^2d^2f^2-6d^3ef^2+6cd^2f^3;$
$B_{1,i}=4k_i(c+f)(-de+cf)(3c^2-4de+10cf+3f^2),$
$(k_0=k_1=k_3=k_4=1,\ k_2=3).$

Приложение 6

Матрицы, которые определяют линейную систему уравнений $A_2B_2 = C_2$ для величины G_2 в случае дифференциальной системы $s(1,3)$

$$A_2 = [A_2'|A_2''|A_2'''],$$

$$A_2' = \begin{pmatrix} 4c & 4e & 0 & 0 & 0 \\ 4d & 12c+4f & 12e & 0 & 0 \\ 0 & 12d & 12c+12f & 12e & 0 \\ 0 & 0 & 12d & 4c+12f & 4e \\ 0 & 0 & 0 & 4d & 4f \\ 4p & 4t & 0 & 0 & 0 \\ 12q & 12p+12u & 12t & 0 & 0 \\ 12r & 36q+12v & 12p+36u & 12t & 0 \\ 4s & 36r+4w & 36q+36v & 4p+36u & 4t \\ 0 & 12s & 36r+12w & 12q+36v & 12u \\ 0 & 0 & 12s & 12r+12w & 12v \\ 0 & 0 & 0 & 4s & 4w \end{pmatrix},$$

$$A_2'' = \begin{pmatrix} -e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2ce-2ef & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2+2de+2cf-f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2cd+2df & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6c & 6e & 0 & 0 \\ 0 & 6d & 30c+6f & 30e & 0 \\ 0 & 0 & 30d & 60c+30f & 60e \\ 0 & 0 & 0 & 60d & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Приложение 6

$$
A_2''' = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e^3 \\
0 & 0 & 0 & -3e^2(c-f) \\
0 & 0 & 0 & 3e[(c-f)^2 - de] \\
60e & 0 & -(c-f)[(c-f)^2 - 6de] & \\
30c+60f & 30e & -3d[(c-f)^2 - de] & \\
30d & 6c+30f & 6e & -3d^2(c-f) \\
0 & 6d & 6f & -d^3
\end{pmatrix},
$$

$$
B_2 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ G_2 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix}
2ep - ct + ft \\
-cp + fp + 6eq - 2dt - 3cu + 3fu \\
-3cq + 3fq + 6er - 6du - 3cv + 3fv \\
-3cr + 3fr + 2es - 6dv - cw + fw \\
-cs + fs - 2dw \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}.
$$

Матрицы, которые определяют систему линейных уравнений $A_3B_3 = C_3$ для величины G_3 в случае дифференциальной системы $s(1,4)$

$$A_3 = [A_3'|A_3''|A_3'''|A_3''''],$$

$$A_3' = \begin{pmatrix}
5c & 5e & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5d & 20c+5f & 20e & 0 & 0 & 0 \\
0 & 20d & 30c+20f & 30e & 0 & 0 \\
0 & 0 & 30d & 20c+30f & 20e & 0 \\
0 & 0 & 0 & 20d & 5c+20f & 5e \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5d & 5f \\
5g & 5l & 0 & 0 & 0 & 0 \\
20h & 20g+20m & 20l & 0 & 0 & 0 \\
30i & 80h+30n & 30g+80m & 30l & 0 & 0 \\
20j & 120i+20o & 120h+120n & 20g+120m & 20l & 0 \\
5k & 80j+5p & 180i+80o & 80h+180n & 5g+80m & 5l \\
0 & 20k & 120j+20p & 120i+120o & 20h+120n & 20m \\
0 & 0 & 30k & 80j+30p & 30i+80o & 30n \\
0 & 0 & 0 & 20k & 20j+20p & 20o \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5k & 5p
\end{pmatrix},$$

$$A_3'' = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8c & 8e & 0 & 0 & 0 \\
8d & 56c+8f & 56e & 0 & 0 \\
0 & 56d & 168c+56f & 168e & 0 \\
0 & 0 & 168d & 280c+168f & 280e \\
0 & 0 & 0 & 280d & 280c+280f \\
0 & 0 & 0 & 0 & 280d \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$A_3''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 280e & 0 & 0 & 0 \\ 168c + 280f & 168e & 0 & 0 \\ 168d & 56c + 168f & 56e & 0 \\ 0 & 56d & 8c + 56f & 8e \\ 0 & 0 & 8d & 8f \end{pmatrix},$$

$$A_3'''' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -e^4 \\ 4ce^3 - 4e^3 f \\ -6c^2e^2 + 4de^3 + 12ce^2 f - 6e^2 f^2 \\ 4c^3 e - 12cde^2 - 12c^2 ef + 12de^2 f + 12cef^2 - 4ef^3 \\ -c^4 + 12c^2 de - 6d^2e^2 + 4c^3 f - 24cdef - 6c^2 f^2 + 12def^2 + 4cf^3 - f^4 \\ -4c^3 d + 12cd^2 e + 12c^2 df - 12d^2 ef - 12cdf^2 + 4df^3 \\ -6c^2d^2 + 4d^3 e + 12cd^2 f - 6d^2 f^2 \\ -4cd^3 + 4d^3 f \\ -d^4 \end{pmatrix},$$

Приложение 7

$$B_3 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ G_3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 2eg - cl + fl \\ -cg + fg + 8eh - 2dl - 4cm + 4fm \\ -4ch + 4fh + 12ei - 8dm - 6cn + 6fn \\ -6ci + 6fi + 8ej - 12dn - 4co + 4fo \\ -4cj + 4fj + 2ek - 8do - cp + fp \\ -ck + fk - 2dp \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приложение 8

Матрицы, которые определяют линейную систему $A_2B_2 = C_2$ для величины G_2 в случае дифференциальной системы $s(1,5)$

$$A_2 = [A_2'|A_2''],$$

$$A_2' = \begin{pmatrix} 6c & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6d & 30c+6f & 30e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30d & 60c+30f & 60e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60d & 60c+60f & 60e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60d & 30c+60f & 30e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30d & 6c+30f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6d \end{pmatrix},$$

$$A_2'' = \begin{pmatrix} 0 & e^3 \\ 0 & -3ce^2+3e^2f \\ 0 & 3c^2e-3de^2-6cef+3ef^2 \\ 0 & -c^3+6cde+3c^2f-6def-3cf^2+f^3 \\ 0 & -3c^2d+3d^2e+6cdf-3df^2 \\ 6e & -3cd^2+3d^2f \\ 6f & -d^3 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ G_2 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 2eg-cp+fp \\ -cg+fg+10eh-2dp-5cq+5fq \\ -5ch+5fh+20ek-10dq-10cr+10fr \\ -10ck+10fk+20el-20dr-10cs+10fs \\ -10cl+10fl+10em-20ds-5cu+5fu \\ -5cm+5fm+2en-10du-cv+fv \\ -cn+fn-2dv \end{pmatrix}.$$

Приложение 9

Многочлены, которые определяют величину G_2 для дифференциальной системы $s(1,5)$

Выражения фокусных псевдовеличин $G_{2,i}$ и $\sigma_{2,i}$, $D_{2,i}$ $(i = 0,1,2,3,4,5,6)$.

$G_{20} = 22c^4de^2g - 76c^2d^2e^3g + 20d^3e^4g - 22c^5efg + 265c^3de^2fg-$
$-282cd^2e^3fg - 189c^4ef^2g + 741c^2de^2f^2g - 186d^2e^3f^2g - 479c^3ef^3g+$
$+635cde^2f^3g - 449c^2ef^4g + 137de^2f^4g - 147cef^5g - 10ef^6g - 25c^3de^3h+$
$+70cd^2e^4h + 25c^4e^2fh - 275c^2de^3fh + 150d^2e^4fh + 205c^3e^2f^2h-$
$-615cde^3f^2h + 465c^2e^2f^3h - 285de^3f^3h + 335ce^2f^4h + 50e^2f^5h+$
$+30c^2de^4k - 40d^2e^5k - 30c^3e^3fk + 260cde^4fk - 220c^2e^3f^2k+$
$+270de^4f^2k - 370ce^3f^3k - 100e^3f^4k - 40cde^5l + 40c^2e^4fl - 120de^5fl+$
$+220ce^4f^2l + 100e^4f^3l + 20de^6m - 70ce^5fm - 50e^5f^2m + 10ce^6n+$
$+10e^6fn - 10c^5dep + 39c^3d^2e^2p - 22cd^3e^3p + 10c^6fp - 116c^4defp+$
$+147c^2d^2e^2fp - 22d^3e^3fp + 77c^5f^2p - 265c^3def^2p + 81cd^2e^2f^2p+$
$+140c^4f^3p - 59c^2def^3p - 27d^2e^2f^3p + 167cdef^4p - 140c^2f^5p + 67def^5p-$
$-77cf^6p - 10f^7p + 10c^4de^2q - 40c^2d^2e^3q + 20d^3e^4q - 10c^5efq+$
$+115c^3de^2fq - 150cd^2e^3fq - 75c^4ef^2q + 255c^2de^2f^2q - 90d^2e^3f^2q-$
$-125c^3ef^3q + 65cde^2f^3q + 25c^2ef^4q - 85de^2f^4q + 135cef^5q + 50ef^6q-$
$-10c^3de^3r + 40cd^2e^4r + 10c^4e^2fr - 110c^2de^3fr + 120d^2e^4fr+$
$+70c^3e^2f^2r - 210cde^3f^2r + 90c^2e^2f^3r - 30de^3f^3r - 70ce^2f^4r-$
$-100e^2f^5r + 10c^2de^4s - 40d^2e^5s - 10c^3e^3fs + 100cde^4fs - 60c^2e^3f^2s+$
$+130de^4f^2s - 30ce^3f^3s + 100e^3f^4s - 10cde^5u + 10c^2e^4fu - 90de^5fu+$
$+40ce^4f^2u - 50e^4f^3u + 20de^6v - 10ce^5fv + 10e^5f^2v;$
$G_{21} = 2c^5deg - 2c^3d^2e^2g - 12cd^3e^3g - 2c^6fg + 17c^4defg + 36c^2d^2e^2fg-$
$-32d^3e^3fg - 15c^5f^2g + c^3def^2g + 132cd^2e^2f^2g - 25c^4f^3g-$
$-105c^2def^3g + 74d^2e^2f^3g + 5c^3f^4g - 111cdef^4g + 27c^2f^5g - 20def^5g+$
$+10cf^6g - 25c^4de^2h + 70c^2d^2e^3h + 25c^5efh - 275c^3de^2fh+$
$+150cd^2e^3fh + 205c^4ef^2h - 615c^2de^2f^2h + 465c^3ef^3h - 285cde^2f^3h+$
$+335c^2ef^4h + 50cef^5h + 30c^3de^3k - 40cd^2e^4k - 30c^4e^2fk+$
$+260c^2de^3fk - 220c^3e^2f^2k + 270cde^3f^2k - 370c^2e^2f^3k - 100ce^2f^4k-$
$-40c^2de^4l + 40c^3e^3fl - 120cde^4fl + 220c^2e^3f^2l + 100ce^3f^3l+$
$+20cde^5m - 70c^2e^4fm - 50ce^4f^2m + 10c^2e^5n + 10ce^5fn + 2c^4d^2ep-$
$-6c^2d^3e^2p - 2c^5dfp + 25c^3d^2efp - 22cd^3e^2fp - 19c^4df^2p+$
$+81c^2d^2ef^2p - 16d^3e^2f^2p - 59c^3df^3p + 95cd^2ef^3p - 79c^2df^4p+$
$+37d^2ef^4p - 47cdf^5p - 10df^6p + 10c^5deq - 40c^3d^2e^2q + 20cd^3e^3q-$
$-10c^6fq + 115c^4defq - 150c^2d^2e^2fq - 75c^5f^2q + 255c^3def^2q-$
$-90cd^2e^2f^2q - 125c^4f^3q + 65c^2def^3q + 25c^3f^4q - 85cdef^4q+$
$+135c^2f^5q + 50cf^6q - 10c^4de^2r + 40c^2d^2e^3r + 10c^5efr - 110c^3de^2fr+$
$+120cd^2e^3fr + 70c^4ef^2r - 210c^2de^2f^2r + 90c^3ef^3r - 30cde^2f^3r-$

$-70c^2ef^4r-100cef^5r+10c^3de^3s-40cd^2e^4s-10c^4e^2fs+$
$+100c^2de^3fs-60c^3e^2f^2s+130cde^3f^2s-30c^2e^2f^3s+100ce^2f^4s-$
$-10c^2de^4u+10c^3e^3fu-90cde^4fu+40c^2e^3f^2u-50ce^3f^3u+20cde^5v-$
$-10c^2e^4fv+10ce^4f^2v;$
$G_{22}=5(-c^4d^2eg+4d^4e^3g+c^5dfg-7c^3d^2efg-22cd^3e^2fg+7c^4df^2g+$
$+9c^2d^2ef^2g-34d^3e^2f^2g+9c^3df^3g+51cd^2ef^3g-7c^2df^4g+20d^2ef^4g-$
$-10cdf^5g+5c^5deh-c^3d^2e^2h-18cd^3e^3h-5c^6fh+37c^4defh+$
$+99c^2d^2e^2fh-2d^3e^3fh-36c^5f^2h-29c^3def^2h+165cd^2e^2f^2h-$
$-52c^4f^3h-239c^2def^3h+17d^2e^2f^3h+26c^3f^4h-124cdef^4h+$
$+57c^2f^5h-10def^5h+10cf^6h-30c^4de^2k+46c^2d^2e^3k-8d^3e^4k+$
$+30c^5efk-272c^3de^2fk+60cd^2e^3fk+226c^4ef^2k-366c^2de^2f^2k+$
$+54d^2e^3f^2k+414c^3ef^3k-128cde^2f^3k+174c^2ef^4k-20de^2f^4k+$
$+20cef^5k+40c^3de^3l-8cd^2e^4l-40c^4e^2fl+136c^2de^3fl-24d^2e^4fl-$
$-228c^3e^2f^2l+68cde^3f^2l-144c^2e^2f^3l+20de^3f^3l-20ce^2f^4l-$
$-20c^2de^4m+4d^2e^5m+70c^3e^3fm-18cde^4fm+64c^2e^3f^2m-$
$-10de^4f^2m+10ce^3f^3m-10c^3e^4n+2cde^5n-12c^2e^4fn+2de^5fn-$
$-2ce^4f^2n-c^3d^3ep+2cd^4e^2p+c^4d^2fp-11c^2d^3efp+2d^4e^2fp+$
$+9c^3d^2f^2p-27cd^3ef^2p+25c^2d^2f^3p-17d^3ef^3p+27cd^2f^4p+$
$+10d^2f^5p+5c^4d^2eq-12c^2d^3e^2q+4d^4e^3q-5c^5dfq+59c^3d^2efq-$
$-34cd^3e^2fq-47c^4df^2q+171c^2d^2ef^2q-34d^3e^2f^2q-141c^3df^3q+$
$+153cd^2ef^3q-169c^2df^4q+20d^2ef^4q-70cdf^5q+10c^5der-$
$-42c^3d^2e^2r+8cd^3e^3r-10c^6fr+114c^4defr-150c^2d^2e^2fr+$
$+24d^3e^3fr-72c^5f^2r+246c^3def^2r-66cd^2e^2f^2r-104c^4f^3r+$
$+90c^2def^3r-6d^2e^2f^3r+52c^3f^4r-8cdef^4r+114c^2f^5r-20def^5r+$
$+20cf^6r-10c^4de^2s+42c^2d^2e^3s-8d^3e^4s+10c^5efs-104c^3de^2fs+$
$+28cd^2e^3fs+62c^4ef^2s-162c^2de^2f^2s+26d^2e^3f^2s+42c^3ef^3s-$
$-32cde^2f^3s-94c^2ef^4s+20de^2f^4s-20cef^5s+10c^3de^3u-2cd^2e^4u-$
$-10c^4e^2fu+94c^2de^3fu-18d^2e^4fu-42c^3e^2f^2u+26cde^3f^2u+$
$+42c^2e^2f^3u-10de^3f^3u+10ce^2f^4u-20c^2de^4v+4d^2e^5v+$
$+10c^3e^3fv-6cde^4fv-8c^2e^3f^2v+2de^4f^2v-2ce^3f^3v);$
$G_{23}=10(-c^3d^3eg-2cd^4e^2g+c^4d^2fg-4c^2d^3efg-14d^4e^2fg+$
$+6c^3d^2f^2g+21cd^3ef^2g+3c^2d^2f^3g+20d^3ef^3g-10cd^2f^4g+5c^4d^2eh+$
$+9c^2d^3e^2h-5c^5dfh+22c^3d^2efh+64cd^3e^2fh-31c^4df^2h-$
$-93c^2d^2ef^2h+7d^3e^2f^2h-21c^3df^3h-104cd^2ef^3h+47c^2df^4h-$
$-10d^2ef^4h+10cdf^5h-10c^5dek-13c^3d^2e^2k+4cd^3e^3k+10c^6fk-$
$-54c^4defk-105c^2d^2e^2fk+28d^3e^3fk+67c^5f^2k+128c^3def^2k-$
$-99cd^2e^2f^2k+73c^4f^3k+244c^2def^3k-47d^2e^2f^3k-73c^3f^4k+$
$+114cdef^4k-67c^2f^5k+10def^5k-10cf^6k+40c^4de^2l-28c^2d^2e^3l-$
$-40c^5efl+176c^3de^2fl-88cd^2e^3fl-248c^4ef^2l+246c^2de^2f^2l-$
$-12d^2e^3f^2l-258c^3ef^3l+104cde^2f^3l-92c^2ef^4l+10de^2f^4l-$

$$-10cef^5l-20c^3de^3m+14cd^2e^4m+70c^4e^2fm-63c^2de^3fm+$$
$$+2d^2e^4fm+99c^3e^2f^2m-44cde^3f^2m+42c^2e^2f^3m-5de^3f^3m+$$
$$+5ce^2f^4m-10c^4e^3n+7c^2de^4n-17c^3e^3fn+8cde^4fn-8c^2e^3f^2n+$$
$$+de^4f^2n-ce^3f^3n-c^2d^4ep+c^3d^3fp-8cd^4efp+8c^2d^3f^2p-7d^4ef^2p+$$
$$+17cd^3f^3p+10d^3f^4p+5c^3d^3eq-2cd^4e^2q-5c^4d^2fq+44c^2d^3efq-$$
$$-14d^4e^2fq-42c^3d^2f^2q+63cd^3ef^2q-99c^2d^2f^3q+20d^3ef^3q-$$
$$-70cd^2f^4q-10c^4d^2er+12c^2d^3e^2r+10c^5dfr-104c^3d^2efr+$$
$$+88cd^3e^2fr+92c^4df^2r-246c^2d^2ef^2r+28d^3e^2f^2r+258c^3df^3r-$$
$$-176cd^2ef^3r+248c^2df^4r-40d^2ef^4r+40cdf^5r-10c^5des+47c^3d^2e^2s-$$
$$-28cd^3e^3s+10c^6fs-114c^4defs+99c^2d^2e^2fs-4d^3e^3fs+67c^5f^2s-$$
$$-244c^3def^2s+105cd^2e^2f^2s+73c^4f^3s-128c^2def^3s+13d^2e^2f^3s-$$
$$-73c^3f^4s+54cdef^4s-67c^2f^5s+10def^5s-10cf^6s+10c^4de^2u-$$
$$-7c^2d^2e^3u-10c^5efu+104c^3de^2fu-64cd^2e^3fu-47c^4ef^2u+$$
$$+93c^2de^2f^2u-9d^2e^3f^2u+21c^3ef^3u-22cde^2f^3u+31c^2ef^4u-$$
$$-5de^2f^4u+5cef^5u-20c^3de^3v+14cd^2e^4v+10c^4e^2fv-21c^2de^3fv+$$
$$+2d^2e^4fv-3c^3e^2f^2v+4cde^3f^2v-6c^2e^2f^3v+de^3f^3v-ce^2f^4v);$$
$$G_{24}=5(2c^2d^4eg+4d^5e^2g-2c^3d^3fg-6cd^4efg-8c^2d^3f^2g-$$
$$-20d^4ef^2g+10cd^3f^3g-10c^3d^3eh-18cd^4e^2h+10c^4d^2fh+$$
$$+26c^2d^3efh-2d^4e^2fh+42c^3d^2f^2h+94cd^3ef^2h-42c^2d^2f^3h+$$
$$+10d^3ef^3h-10cd^2f^4h+20c^4d^2ek+26c^2d^3e^2k-8d^4e^3k-20c^5dfk-$$
$$=32c^3d^2efk+28cd^3e^2fk-94c^4df^2k-162c^2d^2ef^2k+42d^3e^2f^2k+$$
$$+42c^3df^3k-104cd^2ef^3k+62c^2df^4k-10d^2ef^4k+10cdf^5k-20c^5del-$$
$$-6c^3d^2e^2l+24cd^3e^3l+20c^6fl-8c^4defl-66c^2d^2e^2fl+8d^3e^3fl+$$
$$+114c^5f^2l+90c^3def^2l-150cd^2e^2f^2l+52c^4f^3l+246c^2def^3l-$$
$$-42d^2e^2f^3l-104c^3f^4l+114cdef^4l-72c^2f^5l+10def^5l-10cf^6l+$$
$$+20c^4de^2m-34c^2d^2e^3m+4d^3e^4m-70c^5efm+153c^3de^2fm-$$
$$-34cd^2e^3fm-169c^4ef^2m+171c^2de^2f^2m-12d^2e^3f^2m-141c^3ef^3m+$$
$$+59cde^2f^3m-47c^2ef^4m+5de^2f^4m-5cef^5m+10c^5e^2n-17c^3de^3n+$$
$$+2cd^2e^4n+27c^4e^2fn-27c^2de^3fn+2d^2e^4fn+25c^3e^2f^2n-$$
$$-11cde^3f^2n+9c^2e^2f^3n-de^3f^3n+ce^2f^4n+2cd^5ep-2c^2d^4fp+$$
$$+2d^5efp-12cd^4f^2p-10d^4f^3p-10c^2d^4eq+4d^5e^2q+10c^3d^3fq-$$
$$-18cd^4efq+64c^2d^3f^2q-20d^4ef^2q+70cd^3f^3q+20c^3d^3er-$$
$$-24cd^4e^2r-20c^4d^2fr+68c^2d^3efr-8d^4e^2fr-144c^3d^2f^2r+$$
$$+136cd^3ef^2r-228c^2d^2f^3r+40d^3ef^3r-40cd^2f^4r-20c^4d^2es+$$
$$+54c^2d^3e^2s-8d^4e^3s+20c^5dfs-128c^3d^2efs+60cd^3e^2fs+$$
$$+174c^4df^2s-366c^2d^2ef^2s+46d^3e^2f^2s+414c^3df^3s-272cd^2ef^3s+$$
$$+226c^2df^4s-30d^2ef^4s+30cdf^5s-10c^5deu+17c^3d^2e^2u-2cd^3e^3u+$$
$$+10c^6fu-124c^4defu+165c^2d^2e^2fu-18d^3e^3fu+57c^5f^2u-$$
$$-239c^3def^2u+99cd^2e^2f^2u+26c^4f^3u-29c^2def^3u-d^2e^2f^3u-$$
$$-52c^3f^4u+37cdef^4u-36c^2f^5u+5def^5u-5cf^6u+20c^4de^2v-$$

$-34c^2d^2e^3v+4d^3e^4v-10c^5efv+51c^3de^2fv-22cd^2e^3fv-7c^4ef^2v+$
$+9c^2de^2f^2v+9c^3ef^3v-7cde^2f^3v+7c^2ef^4v-de^2f^4v+cef^5v)$;
$G_{25}=-10c^2d^4fg-20d^5efg+10cd^4f^2g+50c^3d^3fh+90cd^4efh-$
$-40c^2d^3f^2h+10d^4ef^2h-10cd^3f^3h-100c^4d^2fk-130c^2d^3efk+$
$+40d^4e^2fk+30c^3d^2f^2k-100cd^3ef^2k+60c^2d^2f^3k-10d^3ef^3k+$
$+10cd^2f^4k+100c^5dfl+30c^3d^2efl-120cd^3e^2fl+70c^4df^2l+$
$+210c^2d^2ef^2l-40d^3e^2f^2l-90c^3df^3l+110cd^2ef^3l-70c^2df^4l+$
$+10d^2ef^4l-10cdf^5l-50c^6fm+85c^4defm+90c^2d^2e^2fm-20d^3e^3fm-$
$-135c^5f^2m-65c^3def^2m+150cd^2e^2f^2m-25c^4f^3m-255c^2def^3m+$
$+40d^2e^2f^3m+125c^3f^4m-115cdef^4m+75c^2f^5m-10def^5m+$
$+10cf^6m+10c^6en-37c^4de^2n+16c^2d^2e^3n+47c^5efn-95c^3de^2fn+$
$+22cd^2e^3fn+79c^4ef^2n-81c^2de^2f^2n+6d^2e^3f^2n+59c^3ef^3n-$
$-25cde^2f^3n+19c^2ef^4n-2de^2f^4n+2cef^5n-10cd^5fp-10d^5f^2p+$
$+50c^2d^4fq-20d^5efq+70cd^4f^2q-100c^3d^3fr+120cd^4efr-$
$-220c^2d^3f^2r+40d^4ef^2r-40cd^3f^3r+100c^4d^2fs-270c^2d^3efs+$
$+40d^4e^2fs+370c^3d^2f^2s-260cd^3ef^2s+220c^2d^2f^3s-30d^3ef^3s+$
$+30cd^2f^4s-50c^5dfu+285c^3d^2efu-150cd^3e^2fu-335c^4df^2u+$
$+615c^2d^2ef^2u-70d^3e^2f^2u-465c^3df^3u+275cd^2ef^3u-205c^2df^4u+$
$+25d^2ef^4u-25cdf^5u+20c^5dev-74c^3d^2e^2v+32cd^3e^3v-10c^6fv+$
$+111c^4defv-132c^2d^2e^2fv+12d^3e^3fv-27c^5f^2v+105c^3def^2v-$
$-36cd^2e^2f^2v-5c^4f^3v-c^2def^3v+2d^2e^2f^3v+25c^3f^4v-17cdef^4v+$
$+15c^2f^5v-2def^5v+2cf^6v$;
$G_{26}=10c^2d^5g+20d^6eg-10cd^5fg-50c^3d^4h-90cd^5eh+40c^2d^4fh-$
$-10d^5efh+10cd^4f^2h+100c^4d^3k+130c^2d^4ek-40d^5e^2k-30c^3d^3fk+$
$+100cd^4efk-60c^2d^3f^2k+10d^4ef^2k-10cd^3f^3k-100c^5d^2l-$
$-30c^3d^3el+120cd^4e^2l-70c^4d^2fl-210c^2d^3efl+40d^4e^2fl+$
$+90c^3d^2f^2l-110cd^3ef^2l+70c^2d^2f^3l-10d^3ef^3l+10cd^2f^4l+$
$+50c^6dm-85c^4d^2em-90c^2d^3e^2m+20d^4e^3m+135c^5dfm+$
$+65c^3d^2efm-150cd^3e^2fm+25c^4df^2m+255c^2d^2ef^2m-40d^3e^2f^2m-$
$-125c^3df^3m+115cd^2ef^3m-75c^2df^4m+10d^2ef^4m-10cdf^5m-$
$-10c^7n+67c^5den-27c^3d^2e^2n-22cd^3e^3n-77c^6fn+167c^4defn+$
$+81c^2d^2e^2fn-22d^3e^3fn-140c^5f^2n-59c^3def^2n+147cd^2e^2f^2n-$
$-265c^2def^3n+39d^2e^2f^3n+140c^3f^4n-116cdef^4n+77c^2f^5n-$
$-10def^5n+10cf^6n+10cd^6p+10d^6fp-50c^2d^5q+20d^6eq-$
$-70cd^5fq+100c^3d^4r-120cd^5er+220c^2d^4fr-40d^5efr+40cd^4f^2r-$
$-100c^4d^3s+270c^2d^4es-40d^5e^2s-370c^3d^3fs+260cd^4efs-$
$-220c^2d^3f^2s+30d^4ef^2s-30cd^3f^3s+50c^5d^2u-285c^3d^3eu+$
$+150cd^4e^2u+335c^4d^2fu-615c^2d^3efu+70d^4e^2fu+465c^3d^2f^2u-$
$-275cd^3ef^2u+205c^2d^2f^3u-25d^3ef^3u+25cd^2f^4u-10c^6dv+$
$+137c^4d^2ev-186c^2d^3e^2v+20d^4e^3v-147c^5dfv+635c^3d^2efv-$

$-282cd^3e^2fv - 449c^4df^2v + 741c^2d^2ef^2v - 76d^3e^2f^2v - 479c^3df^3v+$
$265cd^2ef^3v - 189c^2df^4v + 22d^2ef^4v - 22cdf^5v;$
$\sigma_{20} = 2e^3(de-cf)(-5c^2+16de-26cf-5f^2)(-2c^2+de-5cf-2f^2);$
$\sigma_{21} = e^2(c-f)(de-cf)(-5c^2+16de-26cf-5f^2)(-2c^2+de-5cf-$
$-2f^2);$
$\sigma_{22} = 2e(de-cf)(-5c^2+16de-26cf-5f^2)(-2c^2+de-5cf-2f^2)\cdot$
$\cdot(-c^2+de+2cf-f^2);$
$\sigma_{23} = (c-f)(-de+cf)(c^2-6de-2cf+f^2)(2c^2-de+5cf+2f^2)\cdot$
$\cdot(5c^2-16de+26cf+5f^2);$
$\sigma_{24} = 2d(de-cf)(-5c^2+16de-26cf-5f^2)(-2c^2+de-5cf-2f^2)\cdot$
$\cdot(-c^2+de+2cf-f^2);$
$\sigma_{25} = d^2(c-f)(de-cf)(-5c^2+16de-26cf-5f^2)(-2c^2+de-5cf-$
$-2f^2);$
$\sigma_{26} = 2d^3(de-cf)(-5c^2+16de-26cf-5f^2)(-2c^2+de-5cf-2f^2);$
$D_{20} = -60c^5de + 222c^3d^2e^2 - 96cd^3e^3 + 60c^6f - 744c^4def+$
$+954c^2d^2e^2f - 96d^3e^3f + 522c^5f^2 - 2220c^3def^2 + 954cd^2e^2f^2+$
$+1362c^4f^3 - 2220c^2def^3 + 222d^2e^2f^3 + 1362c^3f^4 - 744cdef^4+$
$+522c^2f^5 - 60def^5 + 60cf^6;$
$D_{21} = 60c^5de - 222c^3d^2e^2 + 96cd^3e^3 - 60c^6f + 744c^4def - 954c^2d^2e^2f+$
$+96d^3e^3f - 522c^5f^2 + 2220c^3def^2 - 954cd^2e^2f^2 - 1362c^4f^3+$
$+2220c^2def^3 - 222d^2e^2f^3 - 1362c^3f^4 + 744cdef^4 - 522c^2f^5+$
$+60def^5 - 60cf^6;$
$D_{22} = 5(60c^5de - 222c^3d^2e^2 + 96cd^3e^3 - 60c^6f + 744c^4def-$
$-954c^2d^2e^2f + 96d^3e^3f - 522c^5f^2 + 2220c^3def^2 - 954cd^2e^2f^2-$
$-1362c^4f^3 + 2220c^2def^3 - 222d^2e^2f^3 - 1362c^3f^4 + 744cdef^4-$
$-522c^2f^5 + 60def^5 - 60cf^6);$
$D_{23} = 10(-60c^5de + 222c^3d^2e^2 - 96cd^3e^3 + 60c^6f - 744c^4def+$
$+954c^2d^2e^2f - 96d^3e^3f + 522c^5f^2 - 2220c^3def^2 + 954cd^2e^2f^2+$
$+1362c^4f^3 - 2220c^2def^3 + 222d^2e^2f^3 + 1362c^3f^4 - 744cdef^4+$
$+522c^2f^5 - 60def^5 + 60cf^6);$
$D_{24} = 5(-60c^5de + 222c^3d^2e^2 - 96cd^3e^3 + 60c^6f - 744c^4def+$
$+954c^2d^2e^2f - 96d^3e^3f + 522c^5f^2 - 2220c^3def^2 + 954cd^2e^2f^2+$
$+1362c^4f^3 - 2220c^2def^3 + 222d^2e^2f^3 + 1362c^3f^4 - 744cdef^4+$
$+522c^2f^5 - 60def^5 + 60cf^6);$
$D_{25} = 60c^5de - 222c^3d^2e^2 + 96cd^3e^3 - 60c^6f + 744c^4def - 954c^2d^2e^2f+$
$+96d^3e^3f - 522c^5f^2 + 2220c^3def^2 - 954cd^2e^2f^2 - 1362c^4f^3+$
$+2220c^2def^3 - 222d^2e^2f^3 - 1362c^3f^4 + 744cdef^4 - 522c^2f^5+$
$+60def^5 - 60cf^6;$

$$D_{26} = 60c^5de - 222c^3d^2e^2 + 96cd^3e^3 - 60c^6f + 744c^4def - 954c^2d^2e^2f+$$
$$+96d^3e^3f - 522c^5f^2 + 2220c^3def^2 - 954cd^2e^2f^2 - 1362c^4f^3+$$
$$+2220c^2def^3 - 222d^2e^2f^3 - 1362c^3f^4 + 744cdef^4 - 522c^2f^5+$$
$$+60def^5 - 60cf^6.$$

Приложение 10

Матрицы, которые определяют систему линейных уравнений $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2 = \widetilde{C}_2$ для величины G_2 в случае дифференциальной системы $s(1,2,3)$

$$\widetilde{A}_2 = [\widetilde{A}_2'|\widetilde{A}_2''|\widetilde{A}_2'''|\widetilde{A}_2''''|\widetilde{A}_2'''''],$$

$$\widetilde{A}_2' = \begin{pmatrix}
3c & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3d & 6c+3f & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6d & 3c+6f & 3e & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3d & 3f & 0 & 0 & 0 \\
3g & 3l & 0 & 0 & 4c & 4e & 0 \\
6h & 6g+6m & 6l & 0 & 4d & 12c+4f & 12e \\
3k & 12h+3n & 3g+12m & 3l & 0 & 12d & 12c+12f \\
0 & 6k & 6h+6n & 6m & 0 & 0 & 12d \\
0 & 0 & 3k & 3n & 0 & 0 & 0 \\
3p & 3t & 0 & 0 & 4g & 4l & 0 \\
9q & 6p+9u & 6t & 0 & 8h & 12g+8m & 12l \\
9r & 18q+9v & 3p+18u & 3t & 4k & 24h+4n & 12g+24m \\
3s & 18r+3w & 9q+18v & 9u & 0 & 12k & 24h+12n \\
0 & 6s & 9r+6w & 9v & 0 & 0 & 12k \\
0 & 0 & 3s & 3w & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4p & 4t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12q & 12p+12u & 12t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12r & 36q+12v & 12p+36u \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4s & 36r+4w & 36q+36v \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12s & 36r+12w \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_2'' = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -e^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2ce - 2ef & 0 & 0 \\
12e & 0 & -c^2 + 2de + 2cf - f^2 & 0 & 0 \\
4c + 12f & 4e & -2cd + 2df & 0 & 0 \\
4d & 4f & -d^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5c & 5e \\
0 & 0 & 0 & 5d & 20c + 5f \\
12l & 0 & 0 & 0 & 20d \\
4g + 24m & 4l & 0 & 0 & 0 \\
8h + 12n & 8m & 0 & 0 & 0 \\
4k & 4n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5g & 5l \\
0 & 0 & 0 & 10h & 20g + 10m \\
12t & 0 & 0 & 5k & 40h + 5n \\
4p + 36u & 4t & 0 & 0 & 20k \\
12q + 36v & 12u & 0 & 0 & 0 \\
12r + 12w & 12v & 0 & 0 & 0 \\
4s & 4w & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_2''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30c+20f & 30e & 0 & 0 & 0 \\ 30d & 20c+30f & 20e & 0 & 0 \\ 0 & 20d & 5c+20f & 5e & 0 \\ 0 & 0 & 5d & 5f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6c \\ 20l & 0 & 0 & 0 & 6d \\ 30g+40m & 30l & 0 & 0 & 0 \\ 60h+20n & 20g+60m & 20l & 0 & 0 \\ 30k & 40h+30n & 5g+40m & 5l & 0 \\ 0 & 20k & 10h+20n & 10m & 0 \\ 0 & 0 & 5k & 5n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_2'''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30c+6f & 30e & 0 & 0 & 0 \\ 30d & 60c+30f & 60e & 0 & 0 \\ 0 & 60d & 60c+60f & 60e & 0 \\ 0 & 0 & 60d & 30c+60f & 30e \\ 0 & 0 & 0 & 30d & 6c+30f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6d \end{pmatrix},$$

Приложение 10

$$\widetilde{A}_2''''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & e^3 \\ 0 & 3e^2(f-c) \\ 0 & 3e[(c+f)^2-de] \\ 0 & -(c-f)[(c-f)^2-6de] \\ 0 & 3d[-(c-f)^2+de] \\ 6e & 3d^2(f-c) \\ 6f & -d^3 \end{pmatrix},$$

Приложение 10

$$\widetilde{B}_2 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b0 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \\ G_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ G_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C}_2 = \begin{pmatrix} 2eg - cl + fl \\ -cg + fg + 4eh - 2dl - 2cm + 2fm \\ -2ch + 2fh + 2ek - 4dm - cn + fn \\ -ck + fk - 2dn \\ 2ep - ct + ft \\ -cp + fp + 6eq - 2dt - 3cu + 3fu \\ -3cq + 3fq + 6er - 6du - 3cv + 3fv \\ -3cr + 3fr + 2es - 6dv - cw + fw \\ -cs + fs - 2dw \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$