

実軸上の関数の Choquet integral

Choquet integral of a function on the real line.

桐朋学園, 早稲田大学・産業経営研,
成川康男 (Yasuo NARUKAWA)

Toho Gakuen, IRBA Waseda University

スペイン科学研究機構 人工知能研究所,
ヴィセンス トッラ (Vicenc Torra)

IIIA Consejo Superior de Investigaciones Cientificas

Abstract

本論文では、実数を定義域とする関数の Choquet 積分を考察する。その特殊形として、Ordered Weighted Averaging operator (OWA) と Weighted Ordered Weighted Averaging operator (WOWA) の連続関数への拡張を定義し、基本的計算の結果を示す。

Keywords: Non additive measure, Fuzzy measures, Order weighted averaging operator, Weighted OWA operator, Choquet integral

1 Introduction

菅野 [9] によって 1970 年代にその応用の方向が示された非加法的測度 (ファジィ測度) とその積分は、ポテンシャル論において用いられていた Choquet 積分 [2] と結びつきながらシステム科学・工学・経済学などの分野で取り上げられ発展してきた ref:Grabisch.Murofushi.Sugeno.2000。近年、意思決定の問題やその人工知能への応用の発展とともに、いくつかの情報を融合するための Aggregation operators [1, 10, 4] が提案され、その研究が欧米を中心に流行している。Aggregation operator のなかで最も有名で多くの応用があるのは、Yager [14, 15, 16] によって提案された Ordered Weighted Averaging operator (OWA) である。この OWA は非加法的測度に関する Choquet 積分とみなせることはよく知られている [8, 11]。また、OWA を一般化した Weighted Ordered Weighted Averaging operator (WOWA) [12, 13] も、一つのパラメータでデータの最大値から最小値までを表わすことができるため興味深い。

上記の Aggregation Operator の理論においては、データの数を有限とし、その項目が多いと計算が困難になるものがほとんどである。古典的な統計では、データの数や項目が多いときには、連続的な分布で近似することが多い。連続的な分布は、実数軸上の関数を被積分関数とする Lebesgue 積分で計算される。Lebesgue 積分に関しては豊富な実例と理論が存在しているのは言うまでもないことであろう。一方で、実数軸上の関数を被積分関数とする Choquet 積分に関してはほとんど研究がなされていなかった。本研究はその第一歩である。

本論文の構成は以下のようになっている。

第2章で非加法的測度、Choquet 積分、Aggregation Operator の定義と基本性質を確認する。第3章で OWA Operator の連続化としての Lebesgue 測度を単調変換した非加法的測度に関する Choquet 積分の基本的計算公式を示す。第4章では第3章と同様にして WOWA Operator の連続化とその基本的な計算を行う。第5章で、結果のまとめと今後の展望を述べる。

2 Preliminaries

ここでは、 X を閉区間として、 \mathcal{B} をそのボレル集合とする。この章では、非加法的測度と Choquet 積分、OWA operator とその基本的な性質を述べる。

定義 2.1. (X, \mathcal{B}) を可測空間とする。非加法的測度 (または ファジィ測度 [9]) μ とは集合関数 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ で以下の性質を持つものである。

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (2) $A \subset B, A, B \in \mathcal{B}$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$.

μ が非加法的測度であるとき、 (X, \mathcal{B}, μ) をファジィ測度空間という。

非加法的測度が連続であるとは、 $A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ と $A_n \downarrow A$ ならば $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ が成り立つことをいう。

ここで、 $\mathcal{F}(X)$ を可測関数の集合とする。

定義 2.2. [2, 6] (X, \mathcal{B}, μ) をファジィ測度空間とする。 $f \in \mathcal{F}(X)$ の非加法的測度 μ に関する Choquet 積分とは以下の式で定義される。

$$(C) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu_f(r) dr,$$

ここで、 $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$.

A を X の可測部分集合とする。 A に制限された Choquet 積分を以下の式で定義する。

$$(C) \int_A f d\mu := (C) \int f \cdot 1_A d\mu.$$

次に Aggregation Operator を定義しよう。

定義 2.3. $D \subset R^N$ とする。An aggregation operator Ag は次の性質を満たす関数 $Ag : D \rightarrow R$ である。

- (1) (Unanimity or idempotency) $(a, \dots, a) \in D$ のとき $Ag(a, \dots, a) = a$
- (2) (Monotonicity) ここで $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ とする。全ての $i = 1, \dots, n$ について $a_i \leq b_i$ であるとき、 $Ag(\mathbf{a}) \leq Ag(\mathbf{b})$.

この、Aggregation Operator の特殊なものとして Yager [14] は Ordered Weighted Averaging operator (OWA) を提案した。

定義 2.4. [14]

$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$ が重みベクトルであるとは、全ての $i = 1, 2, \dots, N$ について $0 \leq w_i \leq 1$ であるものをいう。

\mathbf{w} を重みベクトルとする。Ordered Weighted Averaging operator (OWA Operator) とは以下の式で定義されるものである。

$$OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N w_i a_{\sigma(i)}$$

ここで σ は $\{1, \dots, N\}$ の置換で $a_{\sigma(i)} \geq a_{\sigma(i+1)}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. をみたすものである。

非加法的測度 μ が対称 (symmetric [5]) であるとは、 $|A| = |B|$, $A, B \in \mathcal{B}$ ならば $\mu(A) = \mu(B)$ が成り立つときをいう。ここで、 $|A|$ は A の要素の個数である。 $\{1, \dots, N\}$ 上の対称な非加法的測度は N 個の重み w_i ($i = 1, \dots, N$) を使って $\mu(A) = \sum_{i=1}^{|A|} w_i$ と表わされる。この対称な非加法的測度を使って OWA Operator は Choquet 積分として表わされる。

命題 2.5. $X := \{1, 2, \dots, N\}$ とする。このとき、 $OWA_{\mathbf{w}}$ に対して、対称な非加法的測度で $\mu(\{1\}) := w_1$, $\mu(\{1, \dots, i\}) := w_1 + \dots + w_i$ for $i = 1, 2, \dots, N$, とすると

$$OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = (C) \int \mathbf{a} d\mu$$

for $\mathbf{a} \in R_+^N$ が成り立つ。

3 Continuous OWA operator

ここで、OWA Operator を有限集合上の関数の積分から、実数軸上の関数の積分へと一般化してくことを考える。実数軸上の測度としては $[0, 1]$ 上のルベーグ測度が基本となる。以下で λ は $[0, 1]$ 上のルベーグ測度とする。

まず、Aggregation Operator を拡張しよう。

定義 3.1. $\mathcal{F}_b([0, 1])$ を $[0, 1]$ 上の有界可測関数の集合とする。

実軸上の連続 Aggregation Operator とは以下の性質を満たすものをいう。

(1) (Unanimity or idempotency)

$$a(x) = a \text{ for all } x \in [0, 1] \text{ であるとき } Ag(a) = a$$

(2) (Monotonicity)

$$a(x) \leq b(x) \text{ for all } x \in [0, 1] \text{ であるとき } Ag(a) \leq Ag(b)$$

(3) (Continuity) $a_n, a \in \mathcal{F}_b([0, 1])$ for $n = 1, 2, 3, \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とするとき $\lim_{n \rightarrow \infty} Ag(a_n) = Ag(a)$.

連続な非加法的測度に関する Choquet 積分は上記の条件をすべて満たすことから、連続 Aggregation Operator である。この Choquet 積分を使って OWA Operator の連続版 (COWA) を定義できる。

有限な場合の対称非加法的測度は、ルベーク測度 λ と密接な関係を持つことになる。

定義 3.2. μ を $([0, 1], \mathcal{B})$ 上の非加法的測度とする。 μ が対称 (symmetric) であるとは、 $\lambda(A) = \lambda(B)$ ならば $\mu(A) = \mu(B)$ が成り立つときをいう。

定義 3.3. $a \in \mathcal{F}_b([0, 1])$ とする。The continuous OWA operator (COWA) は以下の式で定義される。

$$COWA_\mu(\mathbf{a}) = (C) \int \mathbf{a} d\mu$$

ここで、 μ は対称非加法的測度である。

μ を $([0, 1], \mathcal{B})$ 上の対称非加法的測度とする。

$([0, 1], \mathcal{B})$ 上のルベーク測度 λ について、 $\lambda(A) < \lambda(B)$ とすると、ある $B' \in \mathcal{B}$ が存在して $\lambda(B) = \lambda(B')$ と $A \subset B'$ が成り立つようにできる。このとき、 $\mu(A) < \mu(B') = \mu(B)$ となる。

これゆえに、以下の命題が成り立つ。

命題 3.4. μ を $([0, 1], \mathcal{B})$ 上の対称非加法的測度とすると、ある単調関数 $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が存在して、

$$\mu = \varphi \circ \lambda \text{ が成り立つ.}$$

上記の命題から、 $[0, 1]$ 上のルベーク測度 λ を φ で単調変換したもの $\varphi \circ \lambda$ に関する Choquet 積分を COWA Operator として考えてよいことが分かる。

ここで、 $COWA_{\varphi \circ \lambda}$ の代わりに $COWA_\varphi$ とかき、また、 φ を COWA Operator の重みという。 $f : [0, 1] \rightarrow R$ は微分可能単調増加で $f(0) = 0$ を満たすとする。ここで、関数列 $\{f_k\}$ を

$$f_1 = f, f_{k+1} = \int_0^x f_k d\lambda$$

for $x \in [0, 1], k = 1, 2, \dots$ で定義する。

このとき

$$\begin{aligned} (C) \int_{[0,1]} f d\lambda^n &= \int_0^\infty \lambda^n(f \cdot 1_{[0,x] \geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^{f(x)} (x - f^{-1}(\alpha))^n d\alpha \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $t := x - f^{-1}(\alpha)$ とおくと、 $d\alpha = -f'(x-t)dt$ で、 $\alpha = 0$ のとき $t = x$ 、 $\alpha = f(x)$ のとき $t = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} (C) \int_{[0,1]} f d\lambda^n &= \int_x^0 t^n \cdot (-f'(x-t)) dt \\ &= \int_0^x t^n f'(x-t) dt \end{aligned}$$

次に、 $s := x - t$ とすると

$$\begin{aligned} (C) \int_{[0,1]} f d\lambda^n &= \int_0^x (x-s)^n f'(s) ds \\ &= [(x-s)^n f(s)]_0^x + n \int_0^x (x-s)^{n-1} f_1(s) ds \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ であるから

$$(C) \int_{[0,1]} f d\lambda^n = n \int_0^x (x-s)^{n-1} f_1(s) ds.$$

部分積分を再度行うことで

$$\int_0^x (x-s)^{n-1} f_1(s) ds = (n-1) \int_0^x (x-s)^{n-2} f_2(s) ds.$$

が得られる。これを繰り返して、次の補題が得られる。

補題 3.5. $f: [0,1] \rightarrow R$ は微分可能単調増加で $f(0) = 0$ を満たすとする。関数列 $\{f_k\}$ を

$$f_1 = f, f_{k+1} = \int_0^x f_k d\lambda$$

for $x \in [0,1]$, $k = 1, 2, \dots$ で定義する。このとき、 $x \in [0,1]$ に対して

$$(C) \int_{[0,x]} f d\lambda^n = n! f_n(x).$$

例 1. $f(t) = t$ とすると $x \in [0,1]$ に対して

$$f_1 = \frac{1}{2}x^2, \dots, f_n = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$$

であり、

$$(C) \int_{[0,x]} t d\lambda^n(t) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

となる。

さて、COWA Operator の重み関数 w が無限回微分可能であるとする。このとき、 w を級数展開して

$$w(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

と表わすことができる。Choquet 積分は測度に関して線形であるから以下の定理が得られる。

定理 3.6. $f: [0, 1] \rightarrow R$ は微分可能単調増加で $f(0) = 0$ を満たすとする。関数列 $\{f_k\}$ を

$$f_1 = f, f_{k+1} = \int_0^x f_k d\lambda$$

for $x \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$ で定義する。

このとき、 $x \in [0, 1]$ に対して

$$COWA_w(f) = \sum_{k=1}^{\infty} k! a_k f_k(1)$$

が成り立つ。

4 Continuous WOWA operator

OWA Operator の一般化の一つである Weighted OWA (WOWA) operator は Torra [12, 13] により導入された。

ここでは、その連続化として Continuous WOWA operator (CWOWA) を定義しその計算を扱う。

初めに WOWA Operator を定義しよう。

定義 4.1. [12, 13] 確率 (p_1, \dots, p_N) , $\sum p_i = 1$ と関数 $w: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ with $w(0) = 0, w(1) = 1$ が与えられたとき *Weighted Ordered Weighted Averaging (WOWA) operator* は下の式で定義される。

$$WOWA_{w,p}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N w_i a_{\sigma(i)}$$

ここで、 σ は $\{1, \dots, N\}$ の置換で $a_{\sigma(i)} \geq a_{\sigma(i+1)}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ を満たすもの、また $w_i := w(p_{\sigma(1)} + \dots + p_{\sigma(i)})$ である。

この WOWA Operator の一般化をするために、実軸上の密度関数をもつ確率を考える。

定義 4.2. P を (R, \mathcal{B}) 上の確率測度で実軸上で密度関数 p を持つものとする。すなわち、

$$P([a, b]) := \int_{[a,b]} p(x) d\lambda,$$

ここで、 λ は実軸上の Lebesgue 測度である。また、 w は $[0, 1]$ 上の単調増加関数である。 a を $[0, 1]$ 上の有界可測関数とすると、Continuous WOWA operator は下記の式で定義される。

$$CWOWA_{\mu}(a) = (C) \int f d\mu$$

ここで、 $\mu = w \circ P$ である。

下記のように、前章で CWOWA にしたものと同様な計算をすることができる。

$f \in \mathcal{F}_b([0, 1])$ を微分可単調増加で $f(0) = 0$ であるものとする。ここで、 $I_n(f) := CWOWA_{P^n}(f)$ とおく。このとき、

$$I_n(f) = \int_0^{\infty} \mu(\{f(x) \geq t\}) dt = \int_0^{\infty} \mu(\{x \geq f^{-1}(t)\}) dt = \int_0^{\infty} \left(\int_{[f^{-1}(t), \infty)} p(x) dx \right)^n dt$$

$f^{-1}(t) := s$ とおくと、 $f(s) = t, dt = f'(s) ds$ であることから、

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{[s, \infty)} p(x) dx \right)^n f'(s) ds \\ &= [f(s) \left(\int_{[s, \infty)} p(x) dx \right)^n]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n(-p(s)) \left(\int_{[s, \infty)} p(x) dx \right)^{n-1} f(s) ds \\ &= n \int_0^{\infty} \left(\int_{[s, \infty)} p(x) dx \right)^{n-1} p(s) f(s) ds \end{aligned}$$

ここで、 $F_1(s) := \int_0^s p(x) f(x) dx$, $F_{n+1}(s) := \int_0^s p(x) F_n(x) dx$ とおくと、

$$\begin{aligned} I_n(f) &= n(n-1) \int_0^{\infty} \left(\int_{[s, \infty)} p(x) dx \right)^{n-2} p(s) F_1(s) ds \\ &= \dots \\ &= n! \int_0^{\infty} p(s) F_{n-1}(s) ds = \lim_{s \rightarrow \infty} F_n(s). \end{aligned}$$

このことから、以下の補題が得られる。

補題 4.3. P を (R, \mathcal{B}) 上の確率測度で実軸上で密度関数 p を持つもの、 $f \in \mathcal{F}_b([0, 1])$ を微分可能単調増加で $f(0) = 0$ であるものとする。

$s \in [0, \infty]$, $k = 1, 2, \dots$ に対して関数列 $\{F_k\}$ を

$$F_1(s) := \int_0^s p(x) f(x) dx, F_{k+1}(s) := \int_0^s p(x) F_k(x) dx \text{ で定義する。}$$

このとき、

$$(C) \int f dP^n = n! \lim_{s \rightarrow \infty} F_n(s).$$

この補題を用いて次の定理が得られる。

定理 4.4. P を (R, \mathcal{B}) 上の確率測度で実軸上で密度関数 p を持つもの、重み w は

$$w(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

の形で表わせるものとする。

$f \in \mathcal{F}_b([0, 1])$ を微分可能単調増加で $f(0) = 0$ であるものとし、
 $s \in [0, \infty]$, $k = 1, 2, \dots$ に対して関数列 $\{F_k\}$ を
 $F_1(s) := \int_0^s p(x)f(x)dx$, $F_{k+1}(s) := \int_0^s p(x)F_k(x)dx$ で定義する。
 このとき、

$$CWOWA_w(f) = \sum_{k=1}^{\infty} k!a_k F_k(\infty).$$

例 2. P を $[0, \infty]$ 上の指数分布で密度関数が $p(x) := e^{-x}$ であるものとする。また、 $w(x) = x^n$ とする。このとき、

$$CWOWA_w(x) = (C) \int x dP^n = \int_0^{\infty} (e^{-x})^n dx = \frac{1}{n}.$$

5 Conclusion

本論文では、実数軸上の関数の Choquet 積分の例として、Aggregation Operator の特殊形である OWA Operator と CWOWA を定義し、その基本的な計算を扱った。Choquet 積分は非積分関数に関して線形でないため、関数の形が異なると積分の結果は異なったものとなる。今回は、計算の結果の比較的きれいな単調増加関数の Choquet 積分の結果を提示した。たとえば、単調減少関数に対する Choquet 積分も同様に求めることができるはずである。非加法的測度の応用では、どのような測度を用いるかが重要な問題となる。本論文では、ルベーク測度を単調変換したもの (COWA)、密度関数をもつ確率測度を単調変換したもの (CWOWA) を扱った。これらの比較的特殊的な非加法的測度についても Choquet 積分の結果は複雑なものとなる。また、ここでの単調変換をどのように特定するかということも重要な問題である。単調変換を特定するための微分方程式 [7] などとも考えることができる。今後の課題として考察しなければならない事柄も多いといえよう。

Acknowledgements

Partial support by the Spanish MEC (projects ARES – CONSOLIDER INGENIO 2010 CSD2007-00004 – and eAEGIS – TSI2007-65406-C03-02) is acknowledged.

References

- [1] Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (eds.) (2002) *Aggregation Operators*, Physica-Verlag.
- [2] Choquet, G. (1955) Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 5,131-295.
- [3] Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (eds.) (2000) *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, Physica-Verlag.

- [4] Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R., Pap, E., (2009), Aggregation Functions, (Encyclopedia of Mathematics and its Applications), Cambridge University Press.
- [5] Miranda, P., Grabisch, M. (2002) p -symmetric fuzzy measures, Proc. of the IPMU 2002 Conference, 545-552, Annecy, France.
- [6] Murofushi, T., Sugeno, M. (1989) An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems 29 201-227.
- [7] Narukawa, Y., Torra, V., (2009) Continuous OWA operator and its calculation, Proc. IFSA-EUSFLAT (ISBN:978-989-95079-6-8), Lisbon, Portugal, 1132-1135.
- [8] Ralescu, Anca L., Ralescu, Dan A. (1997) Extensions of fuzzy aggregation, Fuzzy Sets and Systems, 86, 321-330.
- [9] Sugeno, M. (1974) *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology.
- [10] Torra, V., Narukawa, Y. (2007) Modeling decisions: information fusion and aggregation operators, Springer.
- [11] Torra, V. Narukawa, Y. (2008) Choquet Stieltjes Integral, Losonczi's Means and OWA Operators. In V. Torra, Y. Narukawa (Eds.): 5th International Conference, MDAI 2008, Sabadell, Spain, October 30-31, 2008. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science 5285 Springer, 62-73.
- [12] Torra, V. (1996) Weighted OWA operators for synthesis of information, Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE-FUZZ'96) (ISBN 0-7803-3645-3), 966-971, New Orleans, USA.
- [13] Torra, V. (1997) The weighted OWA operator, Int. J. of Intel. Syst. 12 153-166.
- [14] Yager, R. R. (1988) On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 18 183-190.
- [15] Yager, R. R., Filev, D. P. (1994) Parameterized and-like and or-like OWA operators, Int. J. of General Systems 22 297-316.
- [16] Yager, R.R. (1993) Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems, 59 125-148.