

Количество совершенных паросочетаний в графах $C_m \times C_n$

С.Н. Перепечко

Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск

e-mail: persn@newmail.ru

Поступила в редколлегию 27.10.2016

Аннотация—Обсуждается эффективность формул для числа совершенных паросочетаний на торах $C_m \times C_n$, пригодных для проведения расчётов в больших графах. Получен набор рекуррентных соотношений при фиксированном значении параметра $m \leq 20$ и изучены их основные свойства. Установлена зависимость порядка соотношения от m в виде оценки сверху. Найдена асимптотика числа совершенных паросочетаний при фиксированном m .

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: совершенные паросочетания, подсчёт паросочетаний, рекуррентные соотношения, производящие функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о димерах — одна из классических решёточных моделей статистической механики — в её комбинаторной интерпретации приводит к необходимости подсчёта совершенных паросочетаний (в дальнейшем для краткости просто паросочетаний) в некотором двухпараметрическом семействе решёточных графов. В изотропном случае, т.е. при равенстве активностей всех димеров, производящая функция для числа паросочетаний идентична производящей функции в модели димеров.

Как известно, в планарном графе всегда существует пфаффова ориентация, поэтому, по крайней мере формально, перечислительная задача может быть сведена к вычислению определителя. Благодаря данному обстоятельству техника пфаффианов на протяжении нескольких десятилетий являлась наиболее популярным методом исследования задачи о димерах. Однако, несмотря на возможность построения пфаффовых ориентаций и для некоторых семейств непланарных графов систематического обобщения данного подхода так и не было предложено.

Более того, даже в тех немногочисленных случаях, когда пфаффиан удаётся вычислить в символьном виде, и, тем самым, вывести явные формулы, выражающие количество паросочетаний через параметры семейства графов, полученные выражения оказываются весьма громоздкими и сложными для анализа. Следует обратить внимание и на низкую эффективность подобного рода формул с вычислительной точки зрения. Серьёзные трудности могут возникнуть даже при проведении расчётов в графах, порядки которых составляют всего несколько десятков тысяч. С учётом сделанных замечаний представляет интерес обсудить возможности альтернативных способов подсчёта, ориентированных, прежде всего, на эффективное вычисление количества паросочетаний в больших графах.

В настоящей работе на примере двухпараметрического семейства $C_m \times C_n$, представителей которого часто называют торами, демонстрируется возможность решения перечислительной задачи с помощью рекуррентных соотношений. Такие соотношения могут быть найдены для любых графов декартовых произведений вида $H \times P_n$ или $H \times C_n$, а также структурно близких к ним.

Получен обширный набор производящих функций для количества паросочетаний на торах при фиксированном значении параметра m и изучены свойства их знаменателей. Показано,

что порядки рекуррентных соотношений существенно зависят от чётности m и приводятся оценки сверху для этой величины. В результате упрощения и оптимизации формул, полученных методом пфаффианов, предложены новые, более эффективные выражения для подсчёта паросочетаний. Предварительные результаты работы были представлены в [1].

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Принятая в данной работе система обозначений согласована с [2], поэтому достаточно пояснить назначение лишь наиболее часто используемых величин.

Поскольку необходимым условием существования совершенного паросочетания является чётность порядка графа, то, по крайней мере, один из параметров тора должен быть чётным. Будем обозначать символом $K_{m,n}$ число паросочетаний в графах $C_m \times C_n$ при чётных значениях m и в графах $C_m \times C_{2n}$ при нечётных m . На торах величины $K_{m,n}$ удовлетворяют простым соотношениям симметрии:

$$K_{m,n} = \begin{cases} K_{n,m}, & \text{если оба параметра чётны,} \\ K_{2n,m}, & \text{если } m \text{ нечётно,} \\ K_{n,m/2}, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

При фиксированном $m \geq 3$ числовая последовательность

$$\{K_{m,n}\} = K_{m,n_0}, K_{m,n_0+1}, K_{m,n_0+2}, \dots$$

является монотонно возрастающей и удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами. В терминах производящих функций $G_m(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} K_{m,n} z^n$ отмеченная закономерность соответствует тому, что $G_m(z)$ рациональна и может быть представлена в виде отношения двух полиномов с целыми коэффициентами, т.е.

$$G_m(z) = P_m(z)/Q_m(z)$$

причём $Q_m(0) = 1$. Начальное значение индекса суммирования $n_0 = 3 - \delta(m)$, где $\delta(m)$ – символ нечётности числа равный 1 для нечётных m и 0 в противном случае.

Производящие функции будут всегда строиться на основе рекуррентных соотношений минимального порядка, из чего следует взаимная простота $P_m(z)$ и $Q_m(z)$. Степень знаменателя $q_m = \deg Q_m(z)$ является порядком рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет последовательность $\{K_{m,n}\}$. Обозначим через $\lambda(m)$ максимальный корень характеристического полинома $z^{q_m} Q_m(1/z)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ количество паросочетаний в графах $C_m \times C_{(1+\delta(m))n}$ будет оцениваться величиной $\tilde{K}_{m,n} = \alpha(m) \lambda^n(m)$.

3. УПРОЩЕНИЕ ЯВНЫХ ФОРМУЛ

Впервые явные формулы для числа паросочетаний на торах были получены в работе [3], автор которой успешно применил технику пфаффианов для семейства непланарных графов. Количество паросочетаний удалось представить с помощью четырёх пфаффианов, допускающих вычисление в символьном виде. Первый пфаффиан оказался тождественно равен 0. Для удобства дальнейших ссылок выпишем отличные от 0 составляющие этой формулы в том виде,

как они приводятся в [3] (см. формулу (25) на стр. 1219)

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^n 2\sqrt{\sin^2\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right)}, \\ \Phi_3 &= \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^n 2\sqrt{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + \sin^2\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}, \\ \Phi_4 &= \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^n 2\sqrt{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Соотношения (1) были выведены в предположении чётности параметра m и позволяют выразить количество паросочетаний в графе $C_m \times C_n$ в виде полусуммы $\frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4)$. Сами по себе эти соотношения пригодны только для проведения демонстрационных расчётов в небольших графах и их практическая ценность крайне ограничена. Низкая эффективность (1) отмечалась ещё в [3], однако во многих работах, посвящённых применению метода пфаффианов в модели димеров, вычислительные аспекты проблемы не обсуждаются.

Основные трудности при использовании (1) заключаются в необходимости вычисления с высокой точностью большого числа тригонометрических функций, что является следствием экспоненциальной зависимости числа паросочетаний от параметров тора. Для получения практичных реализаций следует минимизировать количество множителей путём вычисления одного из произведений в символьном виде, а также избавиться от повторяющихся величин, опираясь на свойства тригонометрических функций.

Предполагая в дальнейшем вывод рекуррентных соотношений из достаточно длинных начальных отрезков последовательностей $\{K_{m,n}\}$, которые строятся при фиксированном значении m , имеет смысл вычислить произведение с верхним индексом равным n . В этом случае количество множителей будет оставаться фиксированным, а затраты на нахождение очередного значения $K_{m,n}$ будут возрастать только за счёт повышения разрядности вычислений. Данное соглашение, впрочем, никак не ограничивает общности полученных ниже выражений в силу соотношений симметрии, указанных в предыдущем разделе.

Количество паросочетаний в графах $C_m \times C_n$ существенно зависит от чётности m и n , поэтому процесс упрощения целесообразно разбить на две части.

3.1. Случай чётных m

Основной результат данного подраздела можно сформулировать в виде

Утверждение 1. *При чётных m количество совершенных паросочетаний в графах $C_m \times C_n$ равно*

$$\prod_{k=1}^{m/2} \left(b_k^n(m) - \bar{b}_k^n(m) \right), \text{ если } n \text{ нечётно,} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{m/2} \left(c_k^n(m) + 2 + \bar{c}_k^n(m) \right) + \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{m/2} \left(b_k^n(m) - 2 + \bar{b}_k^n(m) \right) + \\ &\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{m/2} \left(b_k^n(m) + 2 + \bar{b}_k^n(m) \right), \text{ если } n \text{ чётно.} \end{aligned} \tag{3}$$

Фигурирующие в (2) и (3) величины определяются соотношениями

$$b_k(m) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} + \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right), \quad \bar{b}_k(m) = \frac{1}{b_k(m)}, \quad (4)$$

$$c_k(m) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{m}\right)} + \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right), \quad \bar{c}_k(m) = \frac{1}{c_k(m)}. \quad (5)$$

Доказательство. В качестве отправной точки воспользуемся соотношениями (1), поместив произведение с индексом l под знак корня

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \prod_{k=1}^{m/2} \sqrt{\prod_{l=1}^n 4 \sin^2\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right)}, \\ \Phi_3 &= \prod_{k=1}^{m/2} \sqrt{\prod_{l=1}^n 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}, \\ \Phi_4 &= \prod_{k=1}^{m/2} \sqrt{\prod_{l=1}^n 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Обозначим через x^2 независящую от l часть каждого множителя и рассмотрим набор величин $\sigma_l(n) = x^2 + \sin^2((2l-1)\pi/n)$. Опираясь на свойства синуса, нетрудно заметить, что эти величины удовлетворяют равенству $\sigma_l(n) = \sigma_{n+1-l}(n)$, поэтому для каждого значения l из диапазона $1 \leq l \leq [n/2]$ можно подобрать такое $[n/2] < l' \leq n$, что $\sigma_l(n) = \sigma_{l'}(n)$. Для нечётных n множитель $\sigma_{[n/2]}(n) = x^2$ не имеет пары и его приходится учитывать отдельно.

Убедившись в том, что подкоренные выражения являются полными квадратами, можно упростить Φ_2 и Φ_4

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \prod_{k=1}^{m/2} \left(2 \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\right)^{\delta(n)} \prod_{l=1}^{[n/2]} 4 \sin^2\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right), \\ \Phi_4 &= \prod_{k=1}^{m/2} \left(2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)^{\delta(n)} \prod_{l=1}^{[n/2]} 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Когда n нечётно, $\sin(2k\pi/m)$ обращается в 0 при $k = m/2$, следовательно, в данном случае количество паросочетаний сводится к полусумме $\frac{1}{2}(\Phi_3 + \Phi_4)$.

Убедимся теперь, что подкоренное выражение в Φ_3 также является полным квадратом. Вводя, как и ранее, набор величин $\sigma_l(n) = x^2 + \sin^2(2l\pi/n)$ замечаем, что при чётных n и $1 \leq l \leq n/2$ справедливо равенство $\sigma_l(n) = \sigma_{n/2+l}(n)$, т.е. вторая половина множителей, стоящих под знаком произведения, совпадает с первой. В нечётном случае для $1 \leq l \leq [n/2]$ имеет место другое равенство: $\sigma_l(n) = \sigma_{n-l}(n)$. Как и при упрощении Φ_2 и Φ_4 множитель $\sigma_n(n) = x^2$ приходится учитывать отдельно. Избавляясь от квадратного корня, получаем

$$\Phi_3 = \prod_{k=1}^{m/2} \left(2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)^{\delta(n)} \prod_{l=1}^{[n/2]} 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{2l\pi}{n}\right).$$

Фигурирующие в Φ_3 и Φ_4 произведения синусов могут быть вычислены аналитически, если обратить внимание на тесную связь подобных выражений с полиномами Чебышева первого

рода $T_M(x)$. Воспользуемся одним из известных соотношений

$$\prod_{k=1}^M \left(x + 2(-1)^k \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2M}\right) \right) = 2T_M\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi M}{2}\right). \quad (6)$$

Для чётных M , положив $x = 0$ в (6), получаем следующую цепочку равенств:

$$\prod_{k=1}^M 2(-1)^k \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2M}\right) = (-1)^{M/2} \prod_{k=1}^M 2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2M}\right) = 2T_M(0) = 2(-1)^{M/2},$$

из которой следует

$$\prod_{k=1}^M 2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2M}\right) = 2. \quad (7)$$

Тождество (7) справедливо и для нечётных M , поскольку в этом случае (6) принимает вид

$$(-1)^{\lceil M/2 \rceil} \prod_{k=1}^M 2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2M}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi M}{2}\right) = -2(-1)^{\lfloor M/2 \rfloor}.$$

Подставляя (7) в Φ_3 и Φ_4 при условии $2M = m$, приходим к более простым выражениям

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= 2^{\delta(n)} \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{2l\pi}{n}\right), \\ \Phi_4 &= 2^{\delta(n)} \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

При чётных n свой вклад в число паросочетаний вносит ещё одно слагаемое

$$\Phi_2 = \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4 \sin^2\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right).$$

Следующим этапом упрощения явных формул станет вычисление произведения с индексом l . На данный момент в результате серии преобразований выражения для Φ_j удалось привести к виду, допускающему непосредственное применение формул работы [4]. Начнём со случая чётных n , воспользовавшись соотношением (7) из [4]

$$\prod_{j=1}^{n/2} \left(\left(a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) \right) = a^n + 2 + \frac{1}{a^n}.$$

Если в качестве a выбрать корни уравнений $a - 1/a = \pm 2 \sin(2k\pi/m)$, то можно избавиться от одного из произведений в Φ_2 . Фактический выбор знаков этих корней значения не имеет в силу чётности n и инвариантности приведенного выше соотношения относительно замены a на $1/a$. Таким образом, положив $a = c_k(m)$ из (5), получаем

$$\Phi_2 = \prod_{k=1}^{m/2} \left(c_k^n(m) + 2 + \bar{c}_k^n(m) \right).$$

Повторяя аналогичные рассуждения для корней уравнений

$$a - 1/a = \pm 2 \sin((2k - 1)\pi/m) \quad (8)$$

замечаем, что в качестве a можно выбрать $b_k(m)$ из (4). В таком случае

$$\Phi_4 = \prod_{k=1}^{m/2} (b_k^n(m) + 2 + \bar{b}_k^n(m)).$$

Дальнейшее упрощение Φ_3 требует применения ещё одного соотношения из [4] под номером (6), в котором следует заменить n на $n/2$

$$\prod_{j=1}^{n/2} \left(\left(a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right) = \left(a^{n/2} - \frac{1}{a^{n/2}} \right)^2 = a^n - 2 + \frac{1}{a^n}.$$

Для нахождения a вновь обращаемся к уравнению (8), что в итоге даёт

$$\Phi_3 = \prod_{k=1}^{m/2} (b_k^n(m) - 2 + \bar{b}_k^n(m)),$$

тем самым завершая доказательство утверждения для случая чётных n .

Когда n нечётно формулы для числа паросочетаний примут более простой вид, поскольку выясняется, что $\Phi_3 = \Phi_4$. Фактически произведения с индексом l представляют собой одну и те же величину, в которой множители перемножаются в обратном порядке. Заметим, что первое слагаемое в каждом множителе одинаково и равно $4 \sin^2((2k - 1)\pi/m)$. Вводя новую переменную l' на основе соотношения $l = \lfloor n/2 \rfloor + 1 - l'$, получаем равенство вторых слагаемых

$$4 \sin^2 \left(\frac{2l\pi}{n} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{(2\lfloor n/2 \rfloor + 2 - 2l')\pi}{n} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{(2l' - 1)\pi}{n} \right).$$

Корректность выполненных преобразований для нечётных n следует из условия $2\lfloor n/2 \rfloor = n - 1$.

С учётом равенства $\Phi_3 = \Phi_4$ количество паросочетаний сводится к Φ_4 . Для завершения преобразований вычислим произведение по индексу l , воспользовавшись ещё одним тождеством, заимствованным из [4]

$$\prod_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\left(a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{(2j - 1)\pi}{n} \right) \right) = \frac{a^n - 1/a^n}{a - 1/a}.$$

Поскольку в данном случае величина a также находится из уравнений (8), то, как и ранее, полагая $a = b_k(m)$, получаем

$$\Phi_4 = 2 \prod_{k=1}^{m/2} \frac{b_k^n(m) - \bar{b}_k^n(m)}{2 \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right)}.$$

Соотношение (7) позволяет избавиться от знаменателя и выражение для числа паросочетаний принимает окончательный вид

$$\Phi_4 = \prod_{k=1}^{m/2} (b_k^n(m) - \bar{b}_k^n(m)).$$

□

3.2. Случай нечётных m

Данный подраздел, как и предыдущий, посвящён выводу явной формулы для числа паросочетаний.

Утверждение 2. При нечётных m количество совершенных паросочетаний в графах $C_m \times C_n$ равно

$$2 \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} (b_k^n(m) + 2 + \bar{b}_k^n(m)). \quad (9)$$

Величины $b_k(m)$ и $\bar{b}_k(m)$ определяются на основе соотношений (4).

Доказательство. В рассматриваемом случае, перед тем как воспользоваться формулами (1), следует поменять местами индексы m и n . Преобразуя выражения для пфаффианов аналогично тому, как это было выполнено в начале предыдущего раздела, получаем набор формул для упрощения

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \prod_{k=1}^m \sqrt{\prod_{l=1}^{n/2} 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}, \\ \Phi_3 &= \prod_{k=1}^m \sqrt{\prod_{l=1}^{n/2} 4 \sin^2\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right)}, \\ \Phi_4 &= \prod_{k=1}^m \sqrt{\prod_{l=1}^{n/2} 4 \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Учитывая диапазоны изменения индексов k и l замечаем, что при $k = \lfloor m/2 \rfloor + 1$, $l = n/2$ в выражении для Φ_2 содержится нулевой множитель, поэтому количество паросочетаний сводится к полусумме $\frac{1}{2}(\Phi_3 + \Phi_4)$.

Находящиеся под знаком корня произведения могут быть вычислены так же, как и в предыдущем подразделе, опираясь на соотношение (7) из [4]

$$\Phi_3 = \prod_{k=1}^m \sqrt{c_k^n(m) + 2 + \bar{c}_k^n(m)}, \quad \Phi_4 = \prod_{k=1}^m \sqrt{b_k^n(m) + 2 + \bar{b}_k^n(m)}.$$

Для дальнейшего упрощения Φ_3 и Φ_4 необходимо уточнить свойства $b_k(m)$ и $c_k(m)$. С помощью формул приведения для функции синус можно показать, что при $1 \leq k \leq m$ справедливо равенство $b_k(m) = \bar{b}_{m+1-k}(m)$. Если учесть инвариантность всех множителей, стоящих под знаком произведения относительно замены $b_k(m)$ на $\bar{b}_k(m)$, то становится ясно, что при нечётных m выражение Φ_4 состоит из $\lfloor m/2 \rfloor$ пар одинаковых множителей и одного несбалансированного множителя равного 4 для всех допустимых m и n .

Аналогичные рассуждения следует повторить и для $c_k(m)$ с учётом равенства $c_k(m) = \bar{c}_{m-k}(m)$. В данном случае несбалансированным оказывается последний множитель $c_m^n(m) + 2 + \bar{c}_m^n(m) = 4$. Поскольку подкоренные выражения представляют собой полные квадраты, то можно записать

$$\Phi_3 = 2 \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} (c_k^n(m) + 2 + \bar{c}_k^n(m)), \quad \Phi_4 = 2 \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} (b_k^n(m) + 2 + \bar{b}_k^n(m)).$$

При нечётных m существует весьма полезная связь между $b_k(m)$ и $c_k(m)$. Рассмотрим величину $\sin(2k\pi/m)$ и введём индекс $k' = \lfloor m/2 \rfloor + 1 - k$. Тогда из цепочки равенств

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{2(\lfloor m/2 \rfloor + 1 - k')\pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{(m+1-2k')\pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{(2k'-1)\pi}{m}\right)$$

получаем соотношение $b_k(m) = c_{\lfloor m/2 \rfloor + 1 - k}(m)$, из которого следует, что Φ_3 и Φ_4 образованы из одних и тех же множителей. Поскольку $\Phi_3 = \Phi_4$, то количество паросочетаний в графе сводится к Φ_4 , что и завершает доказательство. \square

Замечание. При проведении расчётов на основе (9) следует всегда учитывать чётность параметра n . Для заданного $n = 2n'$ результат вычислений будет совпадать с $K_{m,n'}$.

Большое количество соотношений, использовавшихся при выводе явных формул, свидетельствует о значительной избыточности оригинальных выражений [3]. Их непосредственное использование будет приводить к многократному вычислению одних и тех же величин. В больших графах расчёты приходится выполнять с точностью в несколько тысяч и даже десятков тысяч значащих цифр, поэтому не слишком рациональная схема вычислений, заложенная в формулы из [3], быстро становится неэффективной. Упрощённые выражения текущего раздела в значительной мере свободны от указанного недостатка.

4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА $K_{m,n}$

Разбор нескольких случаев в ходе доказательства утверждений 1 и 2 указывает на то, что количество паросочетаний существенно зависит от чётности параметров графа. Эффекты чётности играют важную роль и в асимптотике $K_{m,n}$. Фактически же в (2) и (3) скрыта ещё и зависимость от делимости m на 4. Формулы (14) и (15) из следующего раздела, полностью исключая дублирование при подсчёте числа паросочетаний, делают эту зависимость явной.

При чётных m последовательность $\{K_{m,n}\}$ состоит из двух подпоследовательностей, элементы которых вычисляются по различным формулам. Данная особенность существенно увеличивает порядки рекуррентных соотношений по сравнению с более простым нечётным случаем. Как следует из [4], аналогичные свойства характерны и для ленточных графов $P_m \times C_n$, свидетельствуя о значительном сходстве торов с графами этого семейства. Рассмотрим некоторые из таких свойств более подробно.

В работах прошлых лет [6, 7] отмечалось наличие среди $K_{m,n}$ чисел весьма специального вида. Численные значения $K_{m,n}$ часто оказывались полными квадратами или же кратными им величинами. Опираясь на формулы раздела 3 можно показать, что семейство торов также не является исключением. Проще всего это продемонстрировать на примере $\{K_{3,n}\}$.

Лемма 1. *Последовательность $\{K_{3,n}\}$ состоит из чисел, которые либо являются удвоенными полными квадратами, либо представимы в виде $14\widehat{K}^2$ для некоторого целого \widehat{K} .*

Доказательство. В соответствии с утверждением 2 при $m = 3$ количество паросочетаний в графе $C_3 \times C_{2n}$ равно $K_{3,n} = 2u_n^2$, где

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Рассмотрим последовательность $\{u_n\}$

$$u_2 = 5, \quad u_3 = 4\sqrt{7}, \quad u_4 = 23, \quad u_5 = 19\sqrt{7}, \quad u_6 = 110, \quad u_7 = 91\sqrt{7}, \quad u_8 = 527, \quad u_9 = 436\sqrt{7}, \dots$$

Поскольку элементы $\{u_n\}$ образованы из двух геометрических прогрессий, то нетрудно убедиться в том, что как чётная, так и нечётная подпоследовательности $\{u_n\}$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению второго порядка $\bar{u}_n = 5\bar{u}_{n-1} - \bar{u}_{n-2}$. Так как два первых элемента чётной подпоследовательности являются целыми числами, то, в силу однородности соотношения, и все остальные элементы также будут целыми. Повторяя аналогичные рассуждения для нечётной подпоследовательности, убеждаемся в том, что все её элементы пропорциональны $\sqrt{7}$. В таком случае при нечётных n значения u_n^2 кратны 7, а $K_{3,n}$ кратны 14. \square

Подобными свойствами будут обладать элементы последовательностей $\{K_{m,n}\}$ и при других нечётных m , однако их формальное обоснование может потребовать достаточно громоздких преобразований, поэтому ограничимся случаем $m = 5$.

Лемма 2. *Последовательность $\{K_{5,n}\}$ состоит из чисел, которые либо являются удвоенными полными квадратами, либо представимы в виде $82\hat{K}^2$ для некоторого целого \hat{K} .*

Доказательство. Вычислив коэффициенты $b_1(5)$ и $b_2(5)$ в (4), а также обратные им величины, путём замены тригонометрических функций их явными значениями в радикалах, убеждаемся в том, что, как и в предыдущем случае, количество паросочетаний в графе $C_5 \times C_{2n}$ представляется в виде $K_{5,n} = 2u_n^2$. При $m = 5$ фигурирующее в (9) произведение содержит два множителя, которые после серии преобразований удастся представить парой сопряжённых величин v_n^+ и v_n^-

$$v_n^\pm = \left(\frac{\sqrt{3\sqrt{5} \pm 2} + \sqrt[4]{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{\sqrt{3\sqrt{5} \pm 2} - \sqrt[4]{5}}{2} \right)^n.$$

С учётом того, что $u_n = v_n^+ \cdot v_n^-$ выпишем несколько первых элементов $\{u_n\}$

$$u_2 = 19, \quad u_3 = 11\sqrt{41}, \quad u_4 = 279, \quad u_5 = 176\sqrt{41}, \quad u_6 = 4579, \\ u_7 = 2911\sqrt{41}, \quad u_8 = 75919, \quad u_9 = 48301\sqrt{41}, \quad u_{10} = 1260004, \dots$$

Поскольку u_n образованы из элементов четырёх геометрических прогрессий, то аналогично случаю $m = 3$ можно построить линейное рекуррентное соотношение, которому будут удовлетворять как чётная, так и нечётная подпоследовательности $\{u_n\}$. Его порядок не должен превышать 4. Фактически же оно имеет следующий вид

$$\bar{u}_n = 19\bar{u}_{n-1} - 41\bar{u}_{n-2} + 19\bar{u}_{n-3} - \bar{u}_{n-4}.$$

Для завершения доказательства достаточно повторить соответствующие рассуждения леммы 1, основанные на однородности соотношения. \square

Свойства элементов $\{K_{7,n}\}$ можно охарактеризовать, заменив коэффициент 82 в лемме 2 на 478. Численное значение этого коэффициента, а также тех, которые присутствуют в формулировках двух предыдущих лемм, может быть получено из соотношения, связывающего количество паросочетаний на торах с их количеством на цилиндрах $C_m \times P_n$. Считая параметр $m = 2m' - 1$ нечётным, а $n = 2n'$ чётным, обозначим через $K_{2m'-1,n'}^C$ число паросочетаний в графе $C_{2m'-1} \times P_{2n'}$. Тогда, положив $z = z_n = 1$ в формуле (69) работы [8], получаем

$$K_{2m'-1,2n'+1} = 2 \cdot \text{sh}((2m' - 1) \text{arcsinh}(1)) \cdot (K_{2m'-1,n'}^C)^2. \tag{10}$$

Таким образом, при фиксированных нечётных m элементы нечётной подпоследовательности $\{K_{m,n}\}$ кратны $2 \text{sh}(m \text{arcsinh}(1))$. В частности, если $m = 7$, то искомым коэффициентом равен $2 \text{sh}(7 \text{arcsinh}(1)) = 2 \text{sh}(7 \ln(1 + \sqrt{2})) = (\sqrt{2} + 1)^7 - (\sqrt{2} - 1)^7 = 478$.

Из соотношения (10) следует, что содержащие радикалы элементы $\{u_n\}$ из лемм 1 и 2 имеют вид $u_{2n'+1} = u_{2n'+1}(m) = \sqrt{\text{sh}(m \cdot \text{arcsinh}(1))} \cdot K_{m,n'}^C$. В литературе по данному вопросу не упоминается о наличии закономерностей столь же общего характера для чётных подпоследовательностей $\{u_n\}$, что, однако, не препятствует их существованию при некоторых частных значениях m . Например, приведенное в доказательстве леммы 1 явное выражение для u_n может быть при $n' > 1$ представлено в следующем виде: $u_{2n'}(3) = K_{3,n'-1}^C + K_{3,n'}^C$.

Наличие явных формул позволяет установить ещё одно соотношение между паросочетаниями на торах и ленточных графах вида $P_m \times C_n$. Пусть, в соответствии с [4], $K_{m,n}^S$ — количество паросочетаний на ленте $P_m \times C_n$ при чётном значении m и на ленте $P_m \times C_{2n}$ при нечётном m . Тогда для $n \geq 3 - \delta(m)$ справедливо

Утверждение 3. При нечётных значениях m количество паросочетаний на торах $C_m \times C_{2n}$ связано с паросочетаниями на лентах шириной $2m - 1$ и $m - 1$ отношением

$$K_{m,n} = K_{2m-1,n}^S / K_{m-1,2n}^S.$$

Доказательство. Переставим множители в произведении (9) так, чтобы вначале следовал множитель с минимальным k , а затем — с максимальным. Повторяя указанную процедуру до исчерпания всех возможных значений k , получим следующую последовательность индексов: $1, \lfloor m/2 \rfloor, 2, \lfloor m/2 \rfloor - 1, \dots$. Ей ставится в соответствие набор значений аргумента функции синус в коэффициентах $b_k(m) : \pi/m, \pi - 2\pi/m, 3\pi/m, \pi - 4\pi/m, \dots$, в котором учтена нечётность параметра m . Последующее использование формулы приведения $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ даёт возможность представить $b_k(m)$ в несколько иной форме

$$b_k(m) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)} + \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right).$$

Поскольку в ленточных графах аналогичный $b_k(m)$ набор коэффициентов выражается через функцию косинус (см. выражение (5) для $c_k(m)$ в [4]), то изменим порядок следования множителей в (9) на противоположный и воспользуемся ещё одной формулой приведения $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$. Тогда количество паросочетаний на торах можно записать в виде

$$K_{m,n} = 2 \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left(\tilde{b}_k^n(m) + 2 + \tilde{\tilde{b}}_k^n(m) \right). \quad (11)$$

Приведенное выражение отличается от (9) только способом вычисления коэффициентов

$$\tilde{b}_k(m) = \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right)} + \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right), \quad \tilde{\tilde{b}}_k(m) = 1/\tilde{b}_k(m).$$

Выполним преобразование правой части (11), добавив к произведению ещё $\lfloor m/2 \rfloor$ множителей, которые отличаются от имеющихся только видом аргумента функции косинус в коэффициентах $\tilde{b}_k(m)$. Построим вспомогательный набор коэффициентов, заменив $\cos((2k-1)\pi/(2m))$ на $\cos(2k\pi/(2m))$. Целью проделанной операции является такое переопределение $\tilde{b}_k(m)$, которое допускает сопоставление с результатами [4]. Явные выражения для нового набора коэффициентов

$$\tilde{c}_k(m) = \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right)} + \cos\left(\frac{k\pi}{2m}\right), \quad \tilde{\tilde{c}}_k(m) = 1/\tilde{c}_k(m).$$

будут согласованы с $c_k(m)$ для ленточных графов, если ширину ленты положить равной $2m - 1$. В соответствии с утверждением 1 работы [4] при указанной ширине количество множителей в

$K_{2m-1,n}^S$ равно $\lfloor (2m-1)/2 \rfloor = m-1$. Полученное произведение содержит $2\lfloor m/2 \rfloor$ множителей, что также равно $m-1$ при нечётных m .

Для того, чтобы значение правой части (11) осталось без изменений, необходимо разделить $K_{2m-1,n}^S$ на вышеупомянутые $\lfloor m/2 \rfloor$ множителей. Тогда в знаменателе появится произведение

$$\prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left(\hat{c}_k^n(m) + 2 + \hat{c}_k^n(m) \right), \text{ где } \hat{c}_k(m) = \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)} + \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), \quad \hat{c}_k(m) = 1/\hat{c}_k(m).$$

Повторное сопоставление с утверждением 1 из [4] при условии $\delta(m-1) = 0$ свидетельствует о том, что его величина равна $K_{m-1,2n}^S$. \square

При чётных m в последовательностях $\{K_{m,n}\}$ также можно встретить числа с упомянутыми выше свойствами. Сопоставление выражений, приведенных в утверждениях 1 и 2, позволяет предположить, что для этого индекс n должен быть нечётным. В простейшем случае $m = 4$ можно непосредственно убедиться в том, что

Лемма 3. *Подпоследовательность $\{K_{4,n}\}$ с нечётными индексами образована из чисел, которые являются удвоенными полными квадратами.*

Доказательство данной леммы аналогично двум предыдущим, если заметить, что $K_{4,n} = u_n^2$, где

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

Непосредственные расчёты свидетельствуют о пропорциональности $\sqrt{2}$ нескольких первых элементов u_n . Результат леммы следует из того, что сама $\{u_n\}$ удовлетворяет соотношению второго порядка.

В завершении данного раздела сформулируем гипотезу, из которой видно насколько существенную роль могут играть граничные условия, наложенные на графы исследуемого семейства. В начале 60-х годов прошлого века в результате изящного применения техники пфаффианов были получены явные выражения для количества паросочетаний на прямоугольных решётках вида $P_m \times P_n$ [3, 9]. Однако по причине громоздкости данных выражений их анализ существенно усложнялся и ряд интересных свойств, которыми обладают элементы $\{K_{m,n}\}$, был выявлен значительно позже. В частности, лишь спустя четверть века удалось показать, что на квадратных решётках, т.е. при выполнении условия $m = n$, величина $\{K_{2n,2n}\}$ всегда может быть представлена в виде произведения 2^n на квадрат некоторого нечётного числа. Подробное обсуждение этого вопроса вместе со ссылками на работы прошлых лет можно найти в [10].

Поскольку торы получаются из прямоугольных решёток путём наложения периодических граничных условий по каждому направлению, то представляет интерес проверка вышеуказанного свойства в семействе графов $C_m \times C_n$. Подсчёт паросочетаний в нескольких небольших графах дал следующие результаты:

$$K_{4,4} = 272 = 2^4 \cdot 17, K_{6,6} = 90176 = 2^6 \cdot 1409, K_{8,8} = 311853312 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 135353.$$

Обширные численные расчёты, выполненные на основе соотношения (3), позволяют предположить, что

Предположение. *Количество совершенных паросочетаний в графах $C_{2n} \times C_{2n}$ представимо в виде произведения 2^{2n} на некоторое нечётное число.*

5. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

На основе формул, приведенных в утверждениях 1 и 2, строились начальные отрезки последовательностей $\{K_{m,n}\}$. Для каждого значения m вычислялось такое количество $K_{m,n}$, которое было необходимо для реконструкции рекуррентного соотношения, а также восстановления ассоциированной с данной последовательностью производящей функции. Используемые в работе алгоритмы предполагают, что длина начального отрезка, по крайней мере, в два раза превышает порядок соотношения q_m . В связи с этим большое значение приобретает наличие хороших оценок q_m , которые позволяют избежать нерациональной траты вычислительных ресурсов. Получение таких оценок с учётом чётности параметра m является центральной темой данного раздела. Детали проделанных вычислений подробно рассмотрены в [2], поэтому сосредоточимся на обсуждении полученных результатов.

Все расчёты в данной работе были выполнены в 64-битовой версии системы компьютерной алгебры Maple 17. Выбор этой среды позволил не только эффективно манипулировать целыми числами с очень большим количеством разрядов, но и распараллелить вычисление произведений (2), (3) и (9) средствами пакета `Threads`. Имеющихся в нашем распоряжении вычислительных ресурсов оказалось достаточно, чтобы реконструировать из начальных данных рекуррентные соотношения вместе с сопутствующими им $G_m(z)$ для всех $m \leq 18$, а также $m = 20$. При $m \leq 8$ обширные наборы значений $K_{m,n}$ с соответствующей этому набору $G_m(z)$ были зарегистрированы в Электронной энциклопедии целочисленных последовательностей (OEIS) [11]. Номера последовательностей указаны в таблице 1. Более сложный пример производящей функции при $m = 9$ приводится в приложении А.

Таблица 1. Номера последовательностей в OEIS

Семейство графов	Номер в OEIS	Семейство графов	Номер в OEIS
$C_3 \times C_{2n}$	A231087	$C_4 \times C_n$	A220864
$C_5 \times C_{2n}$	A231485	$C_6 \times C_n$	A232804
$C_7 \times C_{2n}$	A230033	$C_8 \times C_n$	A253678

Результаты расчётов показали, что на этапе вывода $G_m(z)$ узким местом оказалась не эффективность явных формул, а проблема нахождения рекуррентных соотношений, порядок которых увеличивается экспоненциально с ростом m . В случае нечётных m оценку порядка сверху, равную $3^{\lceil m/2 \rceil}$, можно получить непосредственно из формулы для нахождения $K_{m,n}$. Данная оценка оказалась точной для всех изученных значений m за исключением $m = 15$, когда порядок был равен 1755.

Как отмечалось в [2], в задаче о димерах исключительные случаи являются следствием наличия алгебраических соотношений между коэффициентами $b_k(m)$ при некоторых m . Их полная классификация неизвестна, однако, если значение параметра m нечётно, то в семействе торов можно обнаружить соотношения, имеющие вид $b_\beta(m)b_\gamma(m) = b_\mu(m)b_\nu(m)$ для некоторого набора индексов β, γ, μ, ν . Существование такого рода соотношений вытекает из следующей леммы

Лемма 4. При $m = 15$ справедливо равенство $b_1(15)b_4(15) = b_6(15)b_7(15)$.

Доказательство. Проверка равенства, фигурирующего в формулировке леммы, приводит к громоздким преобразованиям, поэтому отметим лишь основные этапы промежуточных вычислений, опуская второстепенные выкладки, которые могут быть выполнены в системе компьютерной алгебры.

Начнём с левой части, перемножив $b_1(15)$ и $b_4(15)$. Опираясь на формулу произведения синусов и заменяя квадраты синуса косинусом двойного аргумента, получаем

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \sqrt{6 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)} + \\ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) \sqrt{6 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(3 - \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right) \left(3 + \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)}.$$

Порядок выполнения всех последующих операций станет очевиден, если, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, полностью избавиться от синуса и объединить множители под одним корнем. Поскольку последнее слагаемое уже приведено к требуемому виду, то его можно упростить путём перемножения стоящих под знаком корня множителей и применения формулы произведения косинусов

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right) \left(3 + \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)} + \\ \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\right) \left(3 - \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)} + \frac{1}{4} \sqrt{36 + 10 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

В результате упрощения двух оставшихся радикалов аналогично последнему слагаемому и применения очевидного тождества $\cos(7\pi/15) = \cos(2\pi/15) - \cos(\pi/5)$ левая часть равенства приводится к виду

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \frac{1}{4} \sqrt{12 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + \\ \frac{1}{4} \sqrt{12 + 10 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 4 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + \frac{1}{4} \sqrt{36 + 10 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

Полученный результат интересен, прежде всего, тем, что все фигурирующие в нём подкоренные выражения являются полными квадратами. Рассмотрим, например, выражение $3 - 2 \cos(2\pi/15)$. Квадрат этой величины равен $11 - 12 \cos(2\pi/15) + 2 \cos(4\pi/15)$. Последовательное применение двух простых тождеств

$$\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} \quad (12)$$

позволяет убедиться в том, что

$$\left(3 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)^2 = 12 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Упрощение двух оставшихся радикалов может потребовать дополнительных усилий, поскольку искомая величина, квадрат которой равен подкоренному выражению, будет содержать более двух слагаемых. Действительно, рассмотрим квадрат трёхчлена $1 + 2 \cos(2\pi/15) + 4 \cos(2\pi/5)$. После преобразования всех квадратов и произведений функции косинус получим

$$11 + 4 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 8 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 10 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) + 8 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 8 \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right).$$

Если теперь воспользоваться упомянутым выше тождеством для $\cos(7\pi/15)$ и соотношениями (12), то оказывается, что

$$\left(1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + 4 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 = 12 + 10 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 4 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Для преобразования последнего подкоренного выражения к полному квадрату трёх слагаемых уже недостаточно. Убедимся в том, что искомая величина может быть представлена в виде $3 + 8 \cos(\pi/15) - 2 \cos(2\pi/15) - 4 \cos(\pi/5)$. После её возведения в квадрат и устранения всех квадратов и произведений функции косинус получается линейная форма

$$55 + 40 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 40 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 30 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) + 8 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Упрощение этой формы с помощью соотношений (12) приводит к искомому результату

$$\left(3 + 8 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 4 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 = 36 + 10 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) - 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Замена всех подкоренных выражений полными квадратами позволяет избавиться от радикалов в левой части равенства, а повторное применение (12) существенно упрощает конечный результат: $b_1(15)b_4(15) = 1 + 2 \cos(\pi/15)$.

Покажем теперь, что подобная цепочка преобразований позволит привести к такому же виду и правую часть равенства. В данном случае произведение $b_6(15)$ на $b_7(15)$ оказывается равным

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sqrt{6 + 2 \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right)} + \\ & \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{15}\right) \sqrt{6 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(3 - \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right) \left(3 + \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Следующий этап оказывается таким же, как и при обработке левой части: избавляемся от синусов, собираем оба множителя под одним корнем, а в последнем слагаемом, уже имеющем требуемый вид, раскрываем скобки и применяем формулу произведения косинусов

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right) \left(3 + \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right)} + \\ & \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right) \left(3 - \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right)} + \frac{1}{4} \sqrt{36 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 10 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) + 12 \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right)}. \end{aligned}$$

Упрощая два оставшихся радикала аналогично последнему слагаемому, обнаруживаем вхождение $\cos(7\pi/15)$ во все подкоренные выражения. Избавляясь от этой величины с помощью упомянутого ранее тождества, приводим правую часть равенства к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{4} \sqrt{12 + 4 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 10 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - 6 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + \\ & \frac{1}{4} \sqrt{12 + 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - 14 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + \frac{1}{4} \sqrt{36 + 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 10 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - 14 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}. \end{aligned}$$

Продолжая аналогии с преобразованием левой части, замечаем, что все подкоренные выражения также являются полными квадратами

$$\begin{aligned} 12 + 4 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 10 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - 6 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \left(6 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 1\right)^2, \\ 12 + 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - 14 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \left(3 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)^2, \\ 36 + 12 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) - 10 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - 14 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \left(6 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + 8 \cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - 3\right)^2. \end{aligned}$$

Подстановка этих соотношений в правую часть равенства леммы позволяет избавиться от радикалов и после приведения подобных членов она упрощается до суммы $2 \cos(\pi/5) + 2 \cos(4\pi/15)$. Заключительное применение тождеств (12) даёт возможность представить произведение $b_6(15)b_7(15)$ в виде $1 + 2 \cos(\pi/15)$. \square

Важность леммы 4 определяется тем, что из неё непосредственно вытекает существование множества особых значений параметра m .

Утверждение 4. При $m = 15(2k - 1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) последовательности $\{K_{m,n}\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, порядки которых меньше $3^{\lfloor m/2 \rfloor}$.

Доказательство. В соответствии с [2] для доказательства утверждения необходимо отыскать алгебраическое соотношение, которому удовлетворяют коэффициенты $b_k(m)$ при указанных значениях m . Как уже отмечалось выше, в семействе торов такие соотношения могут иметь вид $b_\beta(m)b_\gamma(m) = b_\mu(m)b_\nu(m)$, что, в частности, и следует из леммы 4 при $m = 15$.

Рассматривая индексы β, γ, μ, ν как функции параметра k , попытаемся подобрать для них такие значения, чтобы искомые соотношения сводились к тождеству леммы 4. Если положить $\beta(k) = k$, то, опираясь на определение коэффициента $b_k(m)$, легко проверить, что $b_k(15(2k - 1)) = b_1(15)$. Из условия $2\gamma(k) - 1 = 7(2k - 1)$ следует равенство $b_{7k-3}(15(2k - 1)) = b_4(15)$, а условие $2\mu(k) - 1 = 11(2k - 1)$ приводит к другому равенству: $b_{11k-5}(15(2k - 1)) = b_6(15)$.

Вычисляя аналогичным образом индекс ν , можно убедиться в существовании множества соотношений вида $b_k(15(2k - 1))b_{7k-3}(15(2k - 1)) = b_{11k-5}(15(2k - 1))b_{13k-6}(15(2k - 1))$, где $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, все значения параметра $m = 15(2k - 1)$ будут соответствовать исключительным случаям, при которых верхняя граница порядка рекуррентного соотношения не достигается. \square

Утверждение 4 не исключает существования и других связей между коэффициентами $b_k(m)$ помимо тех, которые упомянуты в его доказательстве. Однако в изученном нами диапазоне изменения параметра m каких-либо иных причин уменьшения порядка рекуррентного соотношения, кроме рассмотренных выше, зафиксировано не было. Дополнительные наборы особых значений m могут возникнуть лишь при $m > 20$, когда порядок соотношения окажется больше 15 000. Вывод таких соотношений встроенными средствами систем компьютерной алгебры представляется крайне проблематичным.

Перейдём к обсуждению торов с чётным m . В этом случае порядок соотношения меняется более сложным образом. Полученные результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Порядки рекуррентных соотношений при чётных m

Семейство графов	Порядок соотн.	Семейство графов	Порядок соотн.	Семейство графов	Порядок соотн.
$C_4 \times C_n$	8	$C_{10} \times C_n$	118	$C_{16} \times C_n$	1358
$C_6 \times C_n$	22	$C_{12} \times C_n$	266	$C_{18} \times C_n$	3094
$C_8 \times C_n$	50	$C_{14} \times C_n$	530	$C_{20} \times C_n$	6842

Для аналитического описания приведенных данных определим количество геометрических прогрессий, на которые распадаются произведения, заданные формулами (2) и (3). С этой целью представим указанные выражения в виде $\sum_j \alpha_j(m)\lambda_j^n(m)$ и обозначим через N_2 верхнюю границу суммирования по j для преобразованной версии формулы (2), а через N_3 соответствующую границу для формулы (3) при условии, что на этапе трансформации из одной формы в другую приведение подобных членов не выполнялось. Тогда порядок рекуррентного соотношения можно будет выразить через N_2 и N_3 .

Начнём с более громоздкого выражения (3) и вычислим значение N_3 . Чётность m приводит к симметрии коэффициентов $b_k(m)$ и $c_k(m)$ относительно среднего значения индекса k : $b_k(m) = b_{m/2-k+1}(m)$, $c_k(m) = c_{m/2-k}(m)$. Более того, тождество $c_{m/2}(m) = 1$ свидетельствует о независимости последнего множителя от m , позволяя вынести его значение равное 4

из под знака произведения. Указанные соотношения приводят к уменьшению максимального значения k в (3) вдвое, после чего оно может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & 2\left(c_{\lfloor m/4 \rfloor}^n(m) + 2 + \bar{c}_{\lfloor m/4 \rfloor}^n(m)\right)^{1-\delta(m/2)} \cdot \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor} \left(c_k^n(m) + 2 + \bar{c}_k^n(m)\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}\left(b_{\lfloor (m+2)/4 \rfloor}^n(m) - 2 + \bar{b}_{\lfloor (m+2)/4 \rfloor}^n(m)\right)^{\delta(m/2)} \cdot \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} \left(b_k^n(m) - 2 + \bar{b}_k^n(m)\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}\left(b_{\lfloor (m+2)/4 \rfloor}^n(m) + 2 + \bar{b}_{\lfloor (m+2)/4 \rfloor}^n(m)\right)^{\delta(m/2)} \cdot \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} \left(b_k^n(m) + 2 + \bar{b}_k^n(m)\right)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

из которого непосредственно следует зависимость $K_{m,n}$ от величины остатка от деления параметра m на 4.

Несмотря на громоздкую форму записи (13) его следует рассматривать как оптимизацию выражения (3) и применять для вычисления $K_{m,n}$ в больших графах даже при умеренных значениях m . Фактически, множители, стоящие перед знаком произведения, можно унифицировать, поскольку фигурирующие в них коэффициенты $b_k(m)$ и $c_k(m)$ также не зависят от m . Действительно, предположим, что $\delta(m/2) = 0$. В таком случае при $k = \lfloor m/4 \rfloor$ с учётом чётности m имеем

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{2\lfloor \frac{(m/2)}{2} \rfloor \pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{((m/2) - \delta(m/2))\pi}{m}\right) = 1.$$

Следовательно, $c_{\lfloor m/4 \rfloor}(m) = \sqrt{2} + 1$. Если же $\delta(m/2) = 1$, то, действуя аналогичным образом, нетрудно убедиться в том, что при $k = \lfloor (m+2)/4 \rfloor$

$$\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{(2\lfloor \frac{(m/2)+1}{2} \rfloor - 1)\pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{(m-2\lfloor \frac{(m/2)}{2} \rfloor - 1)\pi}{m}\right).$$

Опираясь на тождество $2\lfloor N/2 \rfloor = N - \delta(N)$, справедливое для всех натуральных N , приводим аргумент синуса к виду $(m/2 + \delta(m/2) - 1)\pi/m = \pi/2$, из которого сразу же следует равенство $b_{\lfloor (m+2)/4 \rfloor} = \sqrt{2} + 1$, позволяющее записать число паросочетаний в более простой форме

$$\begin{aligned} & 2\left((\sqrt{2} + 1)^n + 2 + (\sqrt{2} - 1)^n\right)^{1-\delta(m/2)} \cdot \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor} \left(c_k^n(m) + 2 + \bar{c}_k^n(m)\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}\left((\sqrt{2} + 1)^n - 2 + (\sqrt{2} - 1)^n\right)^{\delta(m/2)} \cdot \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} \left(b_k^n(m) - 2 + \bar{b}_k^n(m)\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}\left((\sqrt{2} + 1)^n + 2 + (\sqrt{2} - 1)^n\right)^{\delta(m/2)} \cdot \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} \left(b_k^n(m) + 2 + \bar{b}_k^n(m)\right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения N_3 нам понадобится следующая вспомогательная лемма

Лемма 5. В результате раскрытия всех скобок в произведении

$$\prod_{k=1}^M \left(b_k^n(m) - 2 + \bar{b}_k^n(m)\right)^2$$

количество отрицательных слагаемых окажется равным $(5^M - 1)/2$.

Доказательство. Поскольку все $b_k(m) > 0$, то отрицательные слагаемые могут образовываться только в результате умножения промежуточных выражений, состоящих из положительных термов, на -2 . При $M = 1$, возводя в квадрат единственный множитель, получаем 5 слагаемых, два из которых отрицательны. Добавление ещё одного множителя приведёт к выражению, содержащему $13 = (5^2 + 1)/2$ положительных слагаемых и $12 = (5^2 - 1)/2$ отрицательных.

Далее, действуя по индукции, предположим, что при $M = N$ трансформированное в сумму произведение будет состоять из $(5^N + 1)/2$ положительных термов и $(5^N - 1)/2$ отрицательных. Умножая это выражение ещё на один множитель, подсчитываем количество положительных слагаемых при $M = N + 1$: $3 \cdot (5^N + 1)/2 + 2 \cdot (5^N - 1)/2 = (5^{N+1} + 1)/2$. Оставшиеся $5^{N+1} - (5^{N+1} + 1)/2 = (5^{N+1} - 1)/2$ слагаемых будут отрицательны. \square

Уменьшение в 2 раза диапазона изменения индекса k , обусловленное переходом от (3) к (14), приводит к локализации аргумента функции синус, фигурирующей в коэффициентах $b_k(m)$ и $c_k(m)$, на интервале от 0 до $\pi/2$. Действительно, минимальное значение этого аргумента достигается при $k = 1$, составляя величину π/m для $b_1(m)$ и $2\pi/m$ для $c_1(m)$. В свою очередь, его максимальное значение для набора $b_k(m)$ с учётом чётности m оказывается равным

$$\frac{(2\lfloor m/4 \rfloor - 1)\pi}{m} = \frac{(m/2 - \delta(m/2) - 1)\pi}{m} = \frac{\pi}{2} - \frac{1 + \delta(m/2)}{m}\pi.$$

Согласно (14), в наборе $c_k(m)$ аргумент максимален при $k = \lfloor (m - 2)/4 \rfloor$, однако и в этом случае он не достигает значения $\pi/2$

$$\frac{2\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor \pi}{m} = \frac{(m - 2 - 2\lfloor \frac{m}{4} \rfloor)\pi}{m} = \frac{(m/2 + \delta(m/2) - 2)\pi}{m} = \frac{\pi}{2} - \frac{2 - \delta(m/2)}{m}\pi.$$

Монотонность синуса на рассматриваемом интервале означает, что все $b_k(m)$ различны. Таким же свойством обладают и коэффициенты $c_k(m)$. Если предположить, что при чётных m соотношения, подобные тем, которые рассматривались ранее для нечётных m , нетипичны, то произведения, образованные из произвольного набора коэффициентов $b_k(m)$ и $\bar{b}_k(m)$ с различными значениями индекса k , будут порождать геометрические прогрессии с уникальными показателями. Сказанное в полной мере относится и к аналогичным произведениям из $c_k(m)$ и $\bar{c}_k(m)$. В таком случае N_3 окажется хорошей оценкой сверху для порядка рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет выражение (14). Выбор N_3 в качестве оценки сверху допустим и при наличии нескольких соотношений между различными коэффициентами, входящими в (14), однако при таких обстоятельствах её качество может несколько ухудшиться. Исходя из той роли, которую играет N_3 , приведём значение этой величины в формулировке ещё одной вспомогательной леммы.

Лемма 6. *Выражение (14) образовано не более чем из*

$$\left(\frac{3^{\delta(m/2)}}{2} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-\delta(m/2)}\right)5^{\lfloor m/4 \rfloor} + \frac{1}{2}$$

различных геометрических прогрессий.

Доказательство. Раскрывая скобки в первом произведении, содержащем коэффициенты $c_k(m)$, получим не более чем $5^{\lfloor (m-2)/4 \rfloor}$ слагаемых. После умножения на множитель, стоящий перед этим произведением, их количество может возрасти до $3^{1-\delta(m/2)} \cdot 5^{\lfloor (m-2)/4 \rfloor}$.

В соответствии с леммой 5 второе произведение в (14) может разложиться на $(5^{\lfloor m/4 \rfloor} - 1)/2$ отрицательных слагаемых и $(5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1)/2$ положительных. Если $\delta(m/2) = 0$, то стоящие перед вторым и третьим произведениями множители обращаются в 1, а для каждого слагаемого

со знаком минус из второго произведения найдётся такое же положительное выражение, полученное при раскрытии скобок в третьем произведении. В результате подобного упрощения останутся только $(5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1)/2$ слагаемых, содержащих коэффициенты $b_k(m)$ и $\bar{b}_k(m)$. Когда $\delta(m/2) = 1$ необходимо определить количество положительных слагаемых, которые образуются в результате перемножения второго произведения в (14) на стоящий перед ним множитель. Соответствующая величина оказывается равной

$$2 \cdot \frac{5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1}{2} + \frac{5^{\lfloor m/4 \rfloor} - 1}{2} = \frac{3 \cdot 5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1}{2}.$$

Объединяя оба рассмотренных случая в один, получаем количество геометрических прогрессий, показатели которых образованы из $b_k(m)$ и $\bar{b}_k(m)$

$$\frac{3^{\delta(m/2)} \cdot 5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1}{2}.$$

С учётом вклада $c_k(m)$ значение N_3 может быть представлено в следующем виде:

$$(3^{\delta(m/2)} \cdot 5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1)/2 + 3^{1-\delta(m/2)} \cdot 5^{\lfloor (m-2)/4 \rfloor}.$$

Полученное выражение удобно привести к такой форме, чтобы наглядно проявлялась его асимптотика. Для этого воспользуемся легко проверяемым тождеством $\lfloor m/4 \rfloor - \lfloor (m-2)/4 \rfloor = 1 - \delta(m/2)$. Тогда, избавляясь от $\lfloor (m-2)/4 \rfloor$, после перегруппировки слагаемых получаем нужный результат

$$(3^{\delta(m/2)} \cdot 5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1)/2 + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-\delta(m/2)} \cdot 5^{\lfloor m/4 \rfloor}.$$

□

Упомянутая выше симметрия коэффициентов $b_k(m)$ позволяет оптимизировать формулу для подсчёта $K_{m,n}$ и в том случае, когда n нечётно. Вместо (2) даже при умеренных значениях m следует использовать выражение с меньшим количеством множителей

$$\left((\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n \right)^{\delta(m/2)} \cdot \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} \left(b_k^n(m) - \bar{b}_k^n(m) \right)^2. \quad (15)$$

Из (15) сразу же находится оценка сверху на N_2 . Величина этого параметра не превышает $2^{\delta(m/2)} \cdot 3^{\lfloor m/4 \rfloor}$. Более существенно, однако, то, что порядок рекуррентного соотношения не зависит от N_2 .

Утверждение 5. При чётных m последовательности $\{K_{m,n}\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, порядки которых не превышают $(3^{\delta(m/2)} + 2 \cdot (3/5)^{1-\delta(m/2)}) \cdot 5^{\lfloor m/4 \rfloor} + 1$.

Доказательство. Пусть $\bar{G}_m(z) = \bar{P}_m(z)/\bar{Q}_m(z)$ производящая функция последовательности, элементы которой при всех n находятся из выражения (14). Тогда в соответствии с леммой 6 $\deg \bar{Q}_m(z) \leq N_3$. Чётная подпоследовательность $\{K_{m,n}\}$ получается прореживанием (14) нулями и её производящая функция $\bar{G}_m^e(z)$ связана с $\bar{G}_m(z)$ простым соотношением $\bar{G}_m^e(z) = (\bar{G}_m(z) + \bar{G}_m(-z))/2$. Степень знаменателя этого выражения не превышает $2N_3$, т.е. величины указанной в формулировке утверждения.

Построим производящую функцию $\tilde{G}_m(z) = \tilde{P}_m(z)/\tilde{Q}_m(z)$ ещё одной последовательности, заменив (14) на (15). В данном случае $\deg \tilde{Q}_m(z) \leq N_2 < N_3$ при всех чётных m . Выделение нечётной подпоследовательности $\{K_{m,n}\}$ также требует прореживания (15) нулями, что

в терминах производящих функций соответствует переходу от $\tilde{G}_m(z)$ к $\tilde{G}_m^o(z) = (\tilde{G}_m(z) - \tilde{G}_m(-z))/2$. Степень знаменателя $\tilde{G}_m^e(z) + \tilde{G}_m^o(z)$ не превышает $2N_2 + 2N_3$, поэтому если бы коэффициенты (4) в формулах (14) и (15) были независимы, то именно эта величина и являлась бы оценкой порядка рекуррентного соотношения. Однако использование в обеих формулах одного и того же набора коэффициентов $b_k(m)$ приводит к тому, что множество показателей геометрических прогрессий $\lambda_j(m)$, из которых образовано выражение (15), является подмножеством соответствующих показателей для (14). В таком случае знаменатель $\tilde{G}_m^o(z)$ оказывается делителем знаменателя $\tilde{G}_m^e(z)$, поэтому порядок соотношения не может превышать $\max(2N_2, 2N_3) = 2N_3$. \square

Несмотря на то, что на практике приведенная в утверждении оценка не достигается, её точность достаточно высока. Например, при $m = 18$ получим $q_{18} \leq 3126$, а при $m = 20$ будет выполняться неравенство $q_{20} \leq 6876$. Сравнение этих величин с данными из таблицы 2 свидетельствует о быстром убывании погрешности с ростом m . Использование данной оценки позволило избежать вычисления избыточных элементов $\{K_{m,n}\}$ на этапе реконструкции рекуррентного соотношения.

Основные свойства рекуррентных соотношений можно вывести непосредственно из явных формул для $K_{m,n}$. В частности, инвариантность (9) относительно замены $b_k(m)$ на $\bar{b}_k(m)$, и наоборот, означает, что каждому отличному от 1 корню характеристического полинома $\tilde{\lambda}(m)$ можно поставить в соответствие другой корень, равный по величине $1/\tilde{\lambda}(m)$. Данное свойство свидетельствует о наличии тесной связи между $Q_m(z)$ и $Q_m(1/z)$. Фактические расчёты показывают, что равенство $Q_m(z) = -z^{qm}Q_m(1/z)$ выполняется при всех нечётных m . Отсюда также следует нечётность порядка соотношения в том случае, если m нечётно.

Поскольку при фиксированном m коэффициенты $b_k(m) > 0$, то из (9) вытекает положительность всех корней характеристического полинома. Наличие в каждом множителе (9) константы, которая не зависит от n , означает, что $1 - z$ является делителем $Q_m(z)$. Опираясь на структуру выражения (9), можно получить ещё одно соотношение между коэффициентами числителя и знаменателя производящей функции: $P_m(1) = -2^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \cdot Q'_m(1)$. Это соотношение может оказаться полезным, как для верификации найденных производящих функций, так и для демонстрации экспоненциальной зависимости коэффициентов от параметра m .

Если m чётно, то вместо (2) и (3) стоит воспользоваться формулами (14) и (15). Такой подход позволит более наглядно показать зависимость результатов от величины $\delta(m/2)$. Поскольку при чётных m также сохраняется инвариантность явных формул как относительно набора коэффициентов $b_k(m)$, так и $c_k(m)$, то можно рассчитывать на связь между знаменателем производящей функции и характеристическим полиномом. Когда m кратно 4 это приводит к такому же равенству, как и для нечётных m : $Q_m(z) = -z^{qm}Q_m(1/z)$. Если же $m \bmod 4 = 2$, то $Q_m(-z) = -z^{qm}Q_m(1/z)$. Указанные свойства имели место для всех изученных значений m .

Несмотря на положительность $b_k(m)$ и $c_k(m)$ знаменатели $Q_m(z)$ при чётных m имеют отрицательные корни. Их наличие обусловлено «расслоением» $\{K_{m,n}\}$ на две подпоследовательности, элементы которых вычисляются по различным формулам. Обращаясь ещё раз к способу построения производящей функции $\tilde{G}_m^e(z)$ из утверждения 5, можно предположить, что значительная часть корней разбивается на пары чисел, отличающиеся только знаком. Именно такая картина и была выявлена в ходе выполнения расчётов. Например, при $m = 4$ корнями $Q_4(z)$ являются $\pm(\sqrt{2} + 1)$, $\pm(\sqrt{2} - 1)$, ± 1 .

Ситуация с корнями станет более понятной если обратить внимание на тесную связь торов с цилиндрами $C_m \times P_n$. Пусть $Q_m^C(z)$ — производящая функция для числа паросочетаний в указанном семействе графов, а z_m^0 — минимальный положительный корень $Q_m^C(z)$. Известно,

что $Q_m^C(z)$ всегда можно разложить на несколько множителей с целыми коэффициентами. Обозначим через $V_m(z)$ тот из них, у которого один из корней равен z_m^0 . Целесообразность введения специального термина обусловлена, прежде всего, тем, что $V_m(z)$ является также одним из множителей $Q_m(z)$. Например, $Q_4(z) = (1-z)(1+z)(1-2z-z^2)(1+2z-z^2)V_4(z)$, где $V_4(z) = 1-4z+z^2$.

Явные формулы для $K_{m,n}$ указывают на то, что при факторизации в $\mathbb{Z}[z]$ множитель $V_m(-z)$ возникнуть не может. В таком случае разность между количеством положительных и отрицательных корней $Q_m(z)$ определяется исключительно свойствами $V_m(z)$. Когда значение m кратно 4, все корни $V_m(z)$ положительны, поэтому интересующая нас разность равна $\deg V_m(z)$. Следует отметить, что $\deg V_m(z)$ чётно, поскольку каждому корню этого многочлена можно поставить в соответствие обратный по величине корень.

Если же $\delta(m/2) = 1$, то $\deg V_m(z)$ по-прежнему чётно. Корни $V_m(z)$ можно собрать попарно так, чтобы в каждой паре они были не только обратны по величине, но и противоположны по знаку. При таком сценарии равное число корней каждого знака имеет как множитель $V_m(z)$, так и сам знаменатель $Q_m(z)$. Для иллюстрации данного свойства положим $m = 6$. Полином $V_6(z) = 1 - 6z - 3z^2 + 6z^3 + z^4$ имеет два положительных корня $(\sqrt{2}-1)(3 \pm \sqrt{5})/2$ и два отрицательных $-(\sqrt{2}+1)(3 \mp \sqrt{5})/2$. Обращение к последовательности A232804 в OEIS позволяет убедиться в том, что $Q_6(z)$ имеет по 11 корней каждого знака.

Поскольку единица не может быть корнем $V_m(z)$, то $1-z$ и $1+z$ будут делителями $Q_m(z)$ при всех чётных m . Сравнение полученных в ходе выполнения работы $Q_m(z)$ со знаменателями производящих функций на цилиндрах позволила выявить закономерность более общего характера: $Q_m^C(z)$ оказались делителями $Q_m(z)$ для всех изученных значений m . В принципе, оценка порядка соотношения в утверждении 5 допускает улучшение на величину $\deg V_m(z)$, однако поиск явной зависимости этой величины от m наталкивается на трудности, связанные с возможным существованием особых значений m .

Завершая обсуждение результатов данного раздела, хотелось бы отметить, что значительную часть рекуррентных соотношений и производящих функций не удалось разместить в основном тексте работы по причине их громоздкости. Автор готов предоставить все имеющиеся у него данные любому заинтересованному читателю.

6. АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ПАРСОЧЕТАНИЙ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

Рассмотрим, как меняются элементы последовательностей $\{K_{m,n}\}$ при больших n . В предыдущем разделе уже отмечалось, что явные выражения для числа паросочетаний можно представить в виде линейной комбинации геометрических прогрессий с различными показателями $\sum_j \alpha_j(m) \lambda_j^n(m)$, поэтому нахождение асимптотики $\tilde{K}_{m,n}$ предполагает поиск наибольшего по величине $\lambda_j(m)$, которое будем обозначать $\lambda(m)$.

Начнём с более простого случая нечётных m , так как (9) содержит только один набор коэффициентов $b_k(m)$. С учётом диапазона изменения индекса k в (9) замечаем, что аргумент функции синус всегда положителен. Тогда $b_k(m) > 1$ при всех $1 \leq k \leq \lfloor m/2 \rfloor$, а $\bar{b}_k(m) < 1$. Принимая во внимание чётность n , перепишем (9) в виде

$$2 \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left(b_k^{n/2}(m) + \bar{b}_k^{n/2}(m) \right)^2.$$

В соответствии с замечанием, сделанным в конце подраздела 3.2, приведенное выражение является элементом $K_{m,n/2}$. Удваивая величину n и выбирая из каждого множителя макси-

мальное слагаемое, получаем асимптотику числа паросочетаний при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{K}_{m,n} = 2 \left(\prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} b_k^2(m) \right)^n = 2\lambda^n(m).$$

В записи последнего равенства учтено, что $K_{m,n}$ при нечётных m обозначает количество паросочетаний в графе $C_m \times C_{2n}$. Тогда $\alpha(m) = 2$, а для произведения, через которое выражается $\lambda(m)$, удобно ввести специальное обозначение $\Lambda_b(m) = \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} b_k(m)$. Нижним индексом будем обозначать набор коэффициентов, являющихся множителями $\Lambda(m)$. В дальнейшем будем повсеместно использовать более компактную форму записи $\lambda(m) = \Lambda_b^2(m)$.

Для того чтобы выразить $\tilde{K}_{m,n}$ непосредственно через параметры тора нам потребуется ещё и асимптотика $\Lambda_b(m)$. По причине экспоненциального роста этой функции предпочтительнее изучать поведение $\ln \Lambda_b(m)$, опираясь на формулу суммирования Эйлера-Маклорена

$$\sum_{k=1}^M f(a+kh) = \frac{1}{h} \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{2}(f(b)-f(a)) + \frac{h}{12}(f'(b)-f'(a)) - \frac{h^3}{720}(f'''(b)-f'''(a)) + O(h^5), \quad (16)$$

в которой верхняя граница интегрирования связана с количеством слагаемых в сумме соотношением $b-a = Mh$. Приведенная в (16) оценка точности будет иметь место для произвольной функции $f(t)$, обладающей на интервале (a, b) производными любого порядка. В интересующем нас случае $f(t) = \ln(\sin t + \sqrt{1 + \sin^2 t})$, поэтому условие применения (16) выполнено.

Наборы коэффициентов $b_k(m)$ на торах и цилиндрах одинаковы, что позволяет воспользоваться для оценки $\ln \Lambda_b(m)$ полученными ранее результатами. Три первых слагаемых в правой части (16) были найдены в [12] с точностью до $O(1/m^5)$

$$\frac{Gm}{\pi} + \frac{\pi}{12m}(2 - 3\delta(m)) + \frac{\pi^3}{24m^3}(2 - \delta(m)),$$

однако этого оказалось недостаточно для корректного учёта вклада величин, пропорциональных $1/m^3$, поскольку $h = 2\pi/m$. Для достижения желаемой точности вычислим четвёртое слагаемое, положив, как и в [12],

$$a = -\frac{\pi}{m}, \quad b = \pi - \frac{\pi(1 + \delta(m))}{m}.$$

Трижды дифференцируя $f(t)$, получаем $f'''(t) = -2 \cos(t) \cos(2t) / (1 + \sin^2(t))^{5/2}$. Чётность $f'''(t)$ позволяет ограничиться только первым слагаемым при его разложении по обратным степеням m . Следующее слагаемое будет уже пропорционально $1/m^2$, а после домножения на h^3 его вклад можно оценить как $O(1/m^5)$. В таком случае

$$f'''(a) = -2 + O(1/m^2), \quad f'''(b) = 2 + O(1/m^2), \quad f'''(b) - f'''(a) = 4 + O(1/m^2).$$

Подставляя полученную разность в четвёртое слагаемое правой части (16), приходим к уточнённой версии асимптотики $\ln \Lambda_b(m)$

$$\ln \Lambda_b(m) = \frac{Gm}{\pi} + \frac{\pi}{12m}(2 - 3\delta(m)) + \frac{\pi^3}{360m^3}(14 - 15\delta(m)) + O(1/m^5). \quad (17)$$

Из (17) нетрудно получить асимптотику и для самой функции $\Lambda_b(m)$

$$\Lambda_b(m) = \exp\left(\frac{Gm}{\pi}\right) \left(1 + \frac{\pi}{12m}(2 - 3\delta(m)) + \frac{\pi^2}{288m^2}(2 - 3\delta(m))^2 + O(1/m^3)\right). \quad (18)$$

Точность, с которой было вычислено выражение (17), позволяет добавить к (18) ещё несколько слагаемых. Однако для количественных оценок при нечётных m вполне допустимо использовать и (18). Действительно, при $\delta(m) = 1$ первая поправка оказывается равной $-\pi/(12m)$. Для $m = 5$ её величина составляет всего -0.052 . Учёт второго поправочного члена, который равен половине квадрата первого, уменьшает относительную погрешность вычисления $\Lambda_b(m)$ до 10^{-3} . Сплошная кривая, показанная на рисунке 1 слева, как-раз-таки и соответствует удержанию в (18) только одного поправочного члена, демонстрируя высокую точность этого разложения даже в области умеренных значений параметра m .

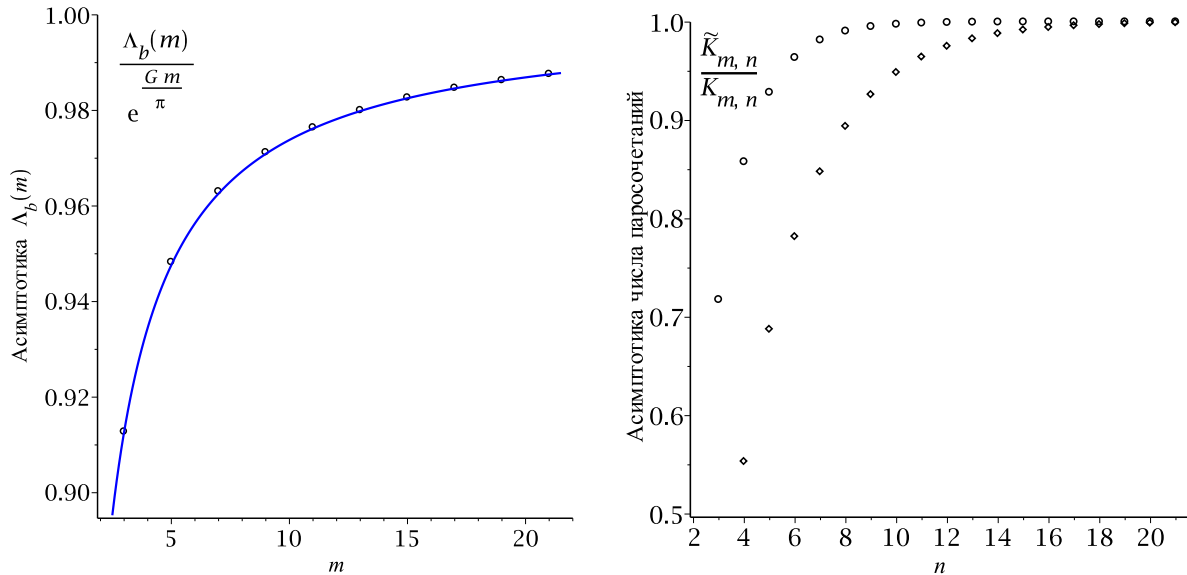


Рис. 1. Паросочетания на торах $C_m \times C_{2n}$ при нечётных m . Слева: асимптотика $\Lambda_b(m)$. Справа: отношение асимптотики $\tilde{K}_{m,n}$ к точному числу паросочетаний при фиксированных $m = 9(\circ)$ и $m = 17(\diamond)$.

Несомненным достоинством использования $\Lambda_b(m)$ является простота вычисления этой функции при всех разумных m . Данное обстоятельство позволяет рассматривать $\tilde{K}_{m,n}$ в качестве удобной для практических применений оценки числа паросочетаний даже при небольших значениях параметров семейства графов. Несмотря на то, что возможность использования $\tilde{K}_{m,n}$ формально предполагает выполнение условия $n \gg m$, фактический переход к асимптотическому режиму происходит гораздо быстрее. Как показывают результаты иллюстративных расчётов, приведенные на рисунке 1 справа, с приемлемой точностью можно воспользоваться $\tilde{K}_{m,n}$ уже в том случае, когда $n > m$.

Зависимость $\Lambda_b(m)$ позволяет полностью охарактеризовать асимптотику $\tilde{K}_{m,n}$ и в тех случаях, когда m чётно, а n — нечётно. В соответствии с (2) величина $\alpha(m) = 1$. Максимальное значение корня оказывается равным $\lambda(m) = \Lambda_b(m)$.

Наиболее существенные различия в асимптотике $\tilde{K}_{m,n}$ обусловлены изменением поведения $\Lambda_b(m)$. При чётных m первый и второй поправочные члены в (18) положительны, поэтому отношение $\Lambda_b(m)/\exp(Gm/\pi)$ монотонно убывает. Удвоенное значение первого поправочного члена по сравнению с рассмотренной ранее ситуацией проявляется в замедлении выхода на асимптотику. Результаты расчётов, показанные на рисунке 2 слева, свидетельствуют о том, что в отличие от случая нечётных m двух первых слагаемых в (18) уже недостаточно для эффективной оценки $\Lambda_b(m)$ при небольших m . В то же время, опираясь на точное значение

$\Lambda_b(m)$, можно, как и случае нечётных m , достаточно точно находить число паросочетаний в графах $C_m \times C_n$ уже при $n > m$ (см. рис. 2 справа).

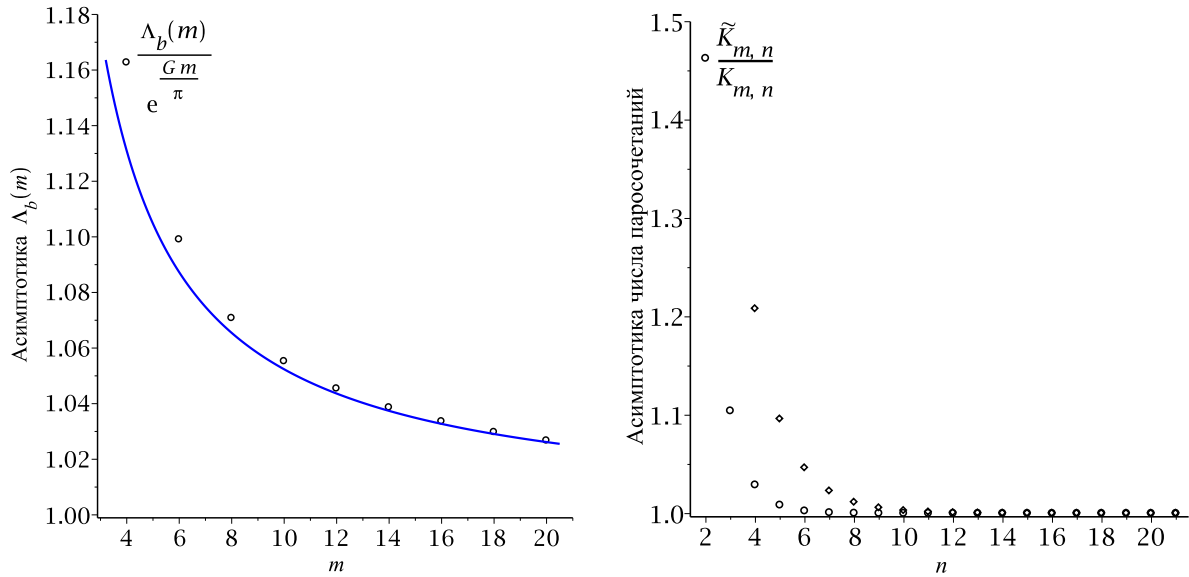


Рис. 2. Паросочетания на торах при чётных m . Слева: асимптотика $\Lambda_b(m)$. Справа: отношение асимптотики $\tilde{K}_{m,n}$ к точному числу паросочетаний в графах $C_m \times C_{2n+1}$ при $m = 10$ (○) и $m = 18$ (◇).

Когда оба параметра тора чётны сведение асимптотики $\tilde{K}_{m,n}$ к рассмотренным ранее случаям невозможно. Действительно, при $n \rightarrow \infty$ первое слагаемое в (3) оценивается величиной $\frac{1}{2}\Lambda_c^n(m)$, в то время как сумма двух оставшихся стремится к $\Lambda_b^n(m)$. Для нахождения $\tilde{K}_{m,n}$ требуется сравнение $\Lambda_b(m)$ с $\Lambda_c(m)$. Непосредственное вычисление двух указанных величин в изученном в данной работе диапазоне изменения параметра m позволило убедиться в выполнении неравенства $\Lambda_b(m) > \Lambda_c(m)$ для всех чётных m . Однако отношение $\Lambda_b(m)/\Lambda_c(m)$ лишь незначительно превышает 1 (например, $\Lambda_b(16)/\Lambda_c(16) \approx 1.1$) и по мере увеличения m имеет тенденцию к убыванию. В сложившейся ситуации окончательный вывод о том, какая из двух величин вносит определяющий вклад в число паросочетаний, может быть сделан только при наличии асимптотики $\Lambda_c(m)$.

6.1. Асимптотика $\Lambda_c(m)$

Так же как и при нахождении асимптотики $\Lambda_b(m)$ воспользуемся формулой суммирования Эйлера-Маклорена (16). Это позволит воспользоваться некоторыми полученными выше результатами, поскольку функция $f(t)$ и величина h оказываются теми же самыми. Дополнительное упрощение вычислений возникает вследствие равенства 0 параметра a , позволяя избавиться от разложения в ряды по обратным степеням m самой функции $f(t)$, а также её производных в окрестности точки a . Значение b записывается следующим образом:

$$b = \frac{2\pi \lfloor m/2 \rfloor}{m} = \pi - \frac{\pi\delta(m)}{m}.$$

Поскольку нас интересует асимптотика при чётных m , то можно было бы положить $\delta(m) = 0$. Однако поведение $\Lambda_c(m)$ в случае, когда m велико представляет интерес и при решении ряда других задач, выходящих за рамки данной работы, поэтому построим разложение пригодное для всех m .

Первое слагаемое в правой части (16) представим в виде

$$\frac{m}{2\pi} \left(\int_0^\pi f(t) dt - \int_b^\pi f(t) dt \right) = \frac{m}{2\pi} \left(2G - \int_0^{\pi\delta(m)/m} f(t) dt \right).$$

В ходе преобразований мы воспользовались найденным ранее значением первого интеграла, а также сделали замену переменных, позволяющую заменить $f(t)$ отрезком степенного ряда. С точностью до членов порядка $O(1/m^5)$ получаем

$$\frac{m}{2\pi} \left(2G - \int_0^{\pi\delta(m)/m} \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^5 \right) dt \right) = \frac{Gm}{\pi} - \frac{\pi\delta(m)}{4m} + \frac{\pi^3\delta(m)}{24m^3} + O\left(\frac{1}{m^5}\right). \quad (19)$$

Нахождение второго слагаемого в (16) облегчается за счёт того, что $f(a) = 0$. Оценка оставшейся составляющей, которая равна $f(b)/2$, выполняется путём удержания нужного числа членов степенного ряда $f(t)$

$$\frac{1}{2}f(b) = \frac{1}{2} \ln \left(\sin\left(\frac{\pi\delta(m)}{m}\right) + \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi\delta(m)}{m}\right)} \right) = \frac{\pi\delta(m)}{2m} - \frac{\pi^3\delta(m)}{6m^3} + O\left(\frac{1}{m^5}\right). \quad (20)$$

Для вычисления вклада третьего слагаемого в правой части (16) нам потребуется знание производной $f'(t) = \cos(t)/\sqrt{1 + \sin^2(t)}$. С учётом того, что

$$f'(b) = -\frac{\cos\left(\frac{\pi\delta(m)}{m}\right)}{\sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi\delta(m)}{m}\right)}} = -1 + \frac{\pi^2\delta(m)}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^4}\right), \quad f'(a) = 1,$$

получаем

$$\frac{h}{12} (f'(b) - f'(a)) = -\frac{\pi}{3m} + \frac{\pi^3\delta(m)}{6m^3} + O\left(\frac{1}{m^5}\right). \quad (21)$$

Как уже отмечалось ранее, корректный учёт вклада величин, пропорциональных $1/m^3$, требует оценки четвёртого слагаемого в (16). Третья производная $f(t)$ была вычислена в процессе нахождения $\Lambda_b(m)$. Подставляя в это выражение значение $a = 0$, приходим к следующему результату: $f'''(a) = -2$. При вычислении $f(b)$ чётность $f'''(t)$ позволяет ограничиться первым членом разложения по обратным степеням m : $f(b) = 2 + O(1/m^2)$. После домножения на множитель h^3 получаем искомую величину с точностью $O(1/m^5)$

$$\frac{h^3}{720} (f'''(b) - f'''(a)) = \frac{2\pi^3}{45m^3} + O\left(\frac{1}{m^5}\right). \quad (22)$$

Вычитая (22) из суммы значений (19), (20) и (21), приходим к аналогу выражения (17) для $\Lambda_c(m)$

$$\ln \Lambda_c(m) = \frac{Gm}{\pi} - \frac{\pi}{12m} (4 - 3\delta(m)) - \frac{\pi^3}{360m^3} (16 - 15\delta(m)) + O(1/m^5). \quad (23)$$

Выпишем асимптотику $\Lambda_c(m)$ с той же точностью, что и $\Lambda_b(m)$

$$\Lambda_c(m) = \exp\left(\frac{Gm}{\pi}\right) \left(1 - \frac{\pi}{12m} (4 - 3\delta(m)) + \frac{\pi^2}{288m^2} (4 - 3\delta(m))^2 + O(1/m^3) \right). \quad (24)$$

Соотношения (18) и (24) позволяют выяснить чему равно $\lambda(m)$ при чётных значениях параметров тора. Подставляя в (18) вместо $\delta(m)$ нулевое значение, замечаем, что первый поправочный член асимптотического разложения положителен. Следовательно, при больших m будет выполняться неравенство $\Lambda_b(m) > \exp(Gm/\pi)$. Если же аналогичную подстановку применить к (24), то знак первого поправочного члена окажется отрицателен, то есть $\Lambda_c(m) < \exp(Gm/\pi)$ при $m \rightarrow \infty$. Фактически, выполненные в данном подразделе расчёты приводят к следующему выводу

Лемма 7. Неравенство $\Lambda_b(m) > \Lambda_c(m)$ справедливо для всех достаточно больших чётных значений m .

Если же вывод леммы дополнить результатами непосредственных вычислений $\Lambda_b(m)$ и $\Lambda_c(m)$ при небольших m , то можно сформулировать более сильное утверждение

Утверждение 6. Неравенство $\Lambda_b(m) > \Lambda_c(m)$ справедливо для всех чётных значений m , причём при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\Lambda_b(m)}{\Lambda_c(m)} = 1 + \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi^2}{8m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \tag{25}$$

Разложение в правой части (25) следует непосредственно из (18) и (24), а положительные значения его первых коэффициентов приводят к монотонному убыванию отношения рассматриваемых величин с ростом m . Сравнимые значения коэффициентов при степенях $1/m$ и $1/m^2$ приводят к тому, что в случае удержания только первого поправочного члена в правой части (25) (синяя сплошная кривая на рис. 3 слева) погрешность вычислений в области небольших m может оказаться существенной. Учёт всех слагаемых в правой части (25) (красная штрихпунктирная линия) обеспечивает хорошую точность при всех $m > 10$.

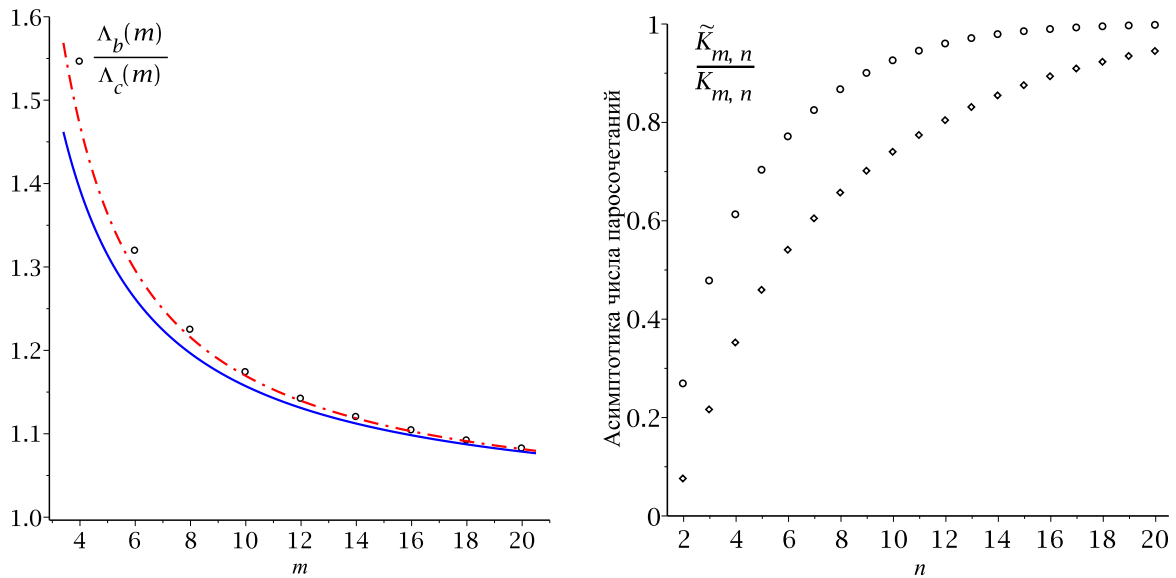


Рис. 3. Паросочетания на торах при чётных m . Слева: отношение $\Lambda_b(m)/\Lambda_c(m)$. Справа: отношение асимптотики $\tilde{K}_{m,n}$ к точному числу паросочетаний в графах $C_m \times C_{2n}$ при $m = 10$ (\circ) и $m = 18$ (\diamond).

Поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda_b(m)/\Lambda_c(m) = 1$, то по мере увеличения m и при выполнении условия $m \approx n$ вклад в $K_{m,n}$ первого слагаемого (3) оценивается величиной $\frac{1}{2}\Lambda_c^n(m)$. В то же время два оставшихся слагаемых в сумме примерно равны $\Lambda_b^n(m)$. Если $\Lambda_c(m) \approx \Lambda_b(m)$, то разумной оценкой величины $\tilde{K}_{m,n}/K_{m,n}$ будет $2/3$ (см. рис. 3 справа). Другими словами, чётность обоих параметров тора существенно замедляет переход к асимптотическому режиму по сравнению со случаем, когда один из параметров нечётен.

В завершении данного раздела отметим, что, несмотря на разбиение $\{K_{m,n}\}$ на две подпоследовательности, их асимптотика оказывается одинаковой $\tilde{K}_{m,n} = \lambda^n(m)$, где $\lambda(m) = \Lambda_b(m)$.

А. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ $G_9(z)$

$$G_9(z) = \frac{P_9(z)}{Q_9(z)}$$

$$\begin{aligned}
P_9(z) = & 2z^2(70225 - \\
& 38723882z + \\
& 9646262071z^2 - \\
& 1459414149581z^3 + \\
& 151742515501714z^4 - \\
& 11616039877693763z^5 + \\
& 684300933857241565z^6 - \\
& 31998461522986371146z^7 + \\
& 1215308433846798001411z^8 - \\
& 38162691197595362308682z^9 + \\
& 1004947146418368127582156z^{10} - \\
& 22450548519757025945625422z^{11} + \\
& 429608768198999339664877606z^{12} - \\
& 7099277842055156598770553212z^{13} + \\
& 102016332581339426722191481498z^{14} - \\
& 1282470096995630479177748211602z^{15} + \\
& 14178084536359046407979075722312z^{16} - \\
& 138475305673366360084132131630182z^{17} + \\
& 1199690027182923144796511836779418z^{18} - \\
& 9252657018626830082970953628233948z^{19} + \\
& 63731327762544815273371873573996222z^{20} - \\
& 393160174191069598079276949516989342z^{21} + \\
& 2177852073567159262482423342981975244z^{22} - \\
& 10857466566362228494890233971017077474z^{23} + \\
& 48816688282424989160003213556320668978z^{24} - \\
& 198315366068811181261785074172674631032z^{25} + \\
& 729155699495599243779915671557238838550z^{26} - \\
& 2430044771206153939373752231251986176946z^{27} + \\
& 7350647965235967741490178646713858612332z^{28} - \\
& 20205986468472149897474643717685250796614z^{29} + \\
& 50529669035699675852546882426373837132958z^{30} - \\
& 115064359684443648068134472705505263269436z^{31} + \\
& 238797482449883635362325828166246714536930z^{32} - \\
& 451994624815839067932639690545011762141946z^{33} + \\
& 78077785631591940954707187286596782563800z^{34} - \\
& 1231534039589436378393002199950462575675454z^{35} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1774533441650068332153239671389298218727036z^{36} - \\
& 2336662893332088811102569417177453198253664z^{37} + \\
& 2812547115306764926394698481637356241632716z^{38} - \\
& 3095112997191759585158607155093819582419784z^{39} + \\
& 3114376954366782482220609955171217711606464z^{40} - \\
& 2865451576359108970689885511195643416371416z^{41} + \\
& 2410548066135592383231984790690410998142220z^{42} - \\
& 1853860692297707755498520794162237783921964z^{43} + \\
& 1303102112014027870111746161212946129468860z^{44} - \\
& 836920778874357412285933596826986037994558z^{45} + \\
& 490932015613220911099019667243517968621508z^{46} - \\
& 262891667965483413832253573284824788852234z^{47} + \\
& 128439133705160454178042461458846460785362z^{48} - \\
& 57211982111248658031866178466031864195348z^{49} + \\
& 23216933764898989630275705849983796825838z^{50} - \\
& 8575563622579911486210233733332693415638z^{51} + \\
& 2880193086710173456233164296362494543224z^{52} - \\
& 878595006459667831994303451260912276690z^{53} + \\
& 243115620824617545053516609489436630646z^{54} - \\
& 60936805313912725571081969686748302340z^{55} + \\
& 13813573247766453190054641340195079890z^{56} - \\
& 2827048518343818192324991735610283746z^{57} + \\
& 521337910066955442526431440352893908z^{58} - \\
& 86442909230421659852137189679952926z^{59} + \\
& 12856560749694574503026517722106718z^{60} - \\
& 1710605022324843238117895747460632z^{61} + \\
& 203008885426562975632273699620538z^{62} - \\
& 21417993063031761696727522890182z^{63} + \\
& 2001346375586546516018858523652z^{64} - \\
& 164937941234015130772557510242z^{65} + \\
& 11931789521647433267727805546z^{66} - \\
& 753562509389781960370091828z^{67} + \\
& 41290843302366951645130390z^{68} - \\
& 1948824435644578750714526z^{69} + \\
& 78560952929954723492968z^{70} - \\
& 2677994594577688375946z^{71} + \\
& 76270423325786632483z^{72} - \\
& 1788319697505807254z^{73} + \\
& 33888156079831405z^{74} - \\
& 506734149872747z^{75} + \\
& 5789617736206z^{76} - \\
& 48272722661z^{77} + \\
& 273513607z^{78} - \\
& 927482z^{79} + \\
& 1393z^{80}
\end{aligned}$$

$$Q_9(z) = (1-z)(1-5z+z^2)(1-12z+48z^2-77z^3+48z^4-12z^5+z^6)$$

$$\begin{aligned}
& (1 - 53z + 649z^2 - 2597z^3 + 4009z^4 - 2597z^5 + 649z^6 - 53z^7 + z^8) \\
& (1 - 60z + 1248z^2 - 11350z^3 + 48852z^4 - 112140z^5 + 146907z^6 - \\
& 112140z^7 + 48852z^8 - 11350z^9 + 1248z^{10} - 60z^{11} + z^{12}) \\
& (1 - 45z + 738z^2 - 5740z^3 + 23445z^4 - 53487z^5 + 70257z^6 - \\
& 53487z^7 + 23445z^8 - 5740z^9 + 738z^{10} - 45z^{11} + z^{12}) \\
& (1 - 265z + 17736z^2 - 457655z^3 + 5699687z^4 - 38357160z^5 + 146975161z^6 - \\
& 327381265z^7 + 427427424z^8 - 327381265z^9 + 146975161z^{10} - 38357160z^{11} + \\
& 5699687z^{12} - 457655z^{13} + 17736z^{14} - 265z^{15} + z^{16}) \\
& (1 - 225z + 18999z^2 - 797450z^3 + 18841059z^4 - 272288025z^5 + 2549316421z^6 - \\
& 16098271740z^7 + 70565962932z^8 - 219093203450z^9 + 488309647878z^{10} - \\
& 787642468470z^{11} + 923330263276z^{12} - 787642468470z^{13} + 488309647878z^{14} - \\
& 219093203450z^{15} + 70565962932z^{16} - 16098271740z^{17} + 2549316421z^{18} - \\
& 272288025z^{19} + 18841059z^{20} - 797450z^{21} + 18999z^{22} - 225z^{23} + z^{24})
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перепечко С.Н. Комбинаторные свойства задачи о димерах на торах. *Математическая физика и её приложения. Материалы четвёртой межд. конф.* Самара: СамГТУ, 2014, стр. 280–281.
2. Караваев А.М., Перепечко С.Н. Производящие функции в задаче о димерах на прямоугольных сеточных графах. *Информационные процессы*, 2013, том 13, №4, стр. 374–400.
3. Kasteleyn P.W. The statistics of dimers on a lattice. *Physica*, 1961, vol. 27, pp. 1209–1225.
4. Перепечко С.Н. Количество совершенных паросочетаний в одном семействе ленточных графов. *Информационные процессы*, 2014, том 14, №4, стр. 340–356.
5. Temperley H.N.V., Fisher M.E. Dimer problem in statistical mechanics — an exact result. *Philosophical Magazine*, 1961, vol. 6, pp. 1061–1063.
6. Klarner D., Pollack J. Domino tilings of rectangles with fixed width. *Discrete Mathematics*, 1980, vol. 32, pp. 45–52.
7. Hosoya H. Matchings and symmetry of graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 1986, vol. 12, No. 1–2, pp. 271–290.
8. Izmailian N.Sh., Oganessian K.B., Hu C.-K. Exact finite-size corrections of the free energy for the square lattice dimer model under different boundary conditions. *Physical Review E*, 2003, vol. 67, art. 066114.
9. Fisher M.E. Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. *Physical Review*, 1961, vol. 124, pp. 1664–1672.
10. Pachter L. Combinatorial approaches and conjectures for 2-divisibility problems concerning domino tilings of polyominoes. *Electronic Journal of combinatorics*, 1997, vol.4, art.#R29.
11. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. The OEIS Foundation, режим доступа: <http://oeis.org>.
12. Перепечко С.Н. Асимптотика числа димеров на цилиндрах. *Математика, её приложения и математическое образование. Материалы V международной конф.* Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2014, стр. 266–271.

The number of perfect matchings on $C_m \times C_n$ graphs**S.N.Perepechko**

The efficiency of the formulas for the number of perfect matchings on tori $C_m \times C_n$, suitable for carrying out calculations on large graphs is discussed. A set of recurrence relations for a fixed value of the parameter $m \leq 20$ are found and their basic properties are explored. Upper bound on the order of recurrence relation is established as a function of m . The asymptotic behavior of the number of perfect matchings is found for fixed values of m .

KEYWORDS: perfect matchings, matching counting, recurrence relations, generating functions.