# La Théorie des Ensembles et la Théorie des Catégories: Présentation de Deux Soeurs Ennemies du Point de Vue de leurs Relations avec les Fondements des Mathématiques

Jean-Yves Béziau*

## 1 Trois types de fondements des mathématiques

Qu'est-ce que les "fondements des mathématiques?" On peut distinguer trois types de fondement.

Donner un fondement aux mathématiques peut vouloir dire donner un groupe d'axiomes à partir desquels on peut déduire toutes les mathématiques. C'est ce que l'on peut appeler un *fondement axiomatique* des mathématiques. Ce genre d'approche a surtout été développé dans le cadre de la théorie des ensembles.

Une autre approche consiste à dégager et décrire les concepts fondamentaux des mathématiques et leur articulation, ce qui constitue une sorte de langage universel, à partir desquels on peut penser toutes les mathématiques. Il s'agit d'un *fondement conceptuel* des mathématiques. C'est la théorie des catégories qui représente le mieux ce genre d'abordage. Toutefois la théorie des catégories peut également servir de fondement axiomatique et la théorie des ensembles de fondement conceptuel. L'étude comparative de ces deux théories nous permettra de mieux comprendre les différences et relations entre fondement axiomatique et fondement conceptuel.

Enfin le troisième type de fondement que nous appellerons *fondement logique* des mathématiques consiste à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires. A priori ce fondement logique semble pouvoir s'opérer plus facilement à partir d'un fondement axiomatique, en montrant qu'un groupe d'axiomes censés axiomatiser les mathématiques est non contradictoire, si bien que la théorie des ensembles axiomatisée serait plus favorable à ce genre de fondement, nous montrerons cependant qu'il n'en est rien et que la théorie des catégories peut aussi servir de fondement logique.

*Ce travail a ete finance par une bourse de la FAPERJ.

## 2 ZF: une axiomatisation générale des mathématiques?

La théorie des ensembles joue à la fois le rôle d'une théorie axiomatique générale et d'un langage universel mais pas forcément simultanément et c'est là qu'il y a problème. Dire que l'on peut déduire toutes les mathématiques de la théorie des ensembles ZF est une affirmation tout à fait ambiguë.

D'une certaine façon c'est faux: on ne peut pas par exemple déduire les axiomes de la théorie des groupes des axiomes de ZF, ni non plus les axiomes de la géométrie Euclidienne. Ce qui est vrai c'est qu'un groupe est un ensemble, qu'une droite peut être considérée comme un ensemble et que que la notion d'ensemble est définie par les axiomes de ZF. Ce qui est vrai également c'est que la notion de nombre entier peut se définir à partir de la notion d'ensemble et que dans ce cas les axiomes de l'arithmétique se déduisent des axiomes de ZF, mais ce n'est pas le cas en général des axiomes de telle ou telle théorie mathématique.

Une théorie des ensembles comme ZF joue le rôle d'un langage universel si l'on considère que toutes les notions des mathématiques peuvent se réduire à la notion d'ensemble et que la notion d'ensemble est définie par ZF. Mais il est ambigu de dire que toutes les mathématiques se déduisent de ZF, car cela peut aussi bien signifier seulement cela que, par exemple, les axiomes de la théorie des groupes se déduisent de ZF, ce qui est faux.

## 3 Le double visage de la théorie des ensembles

La terminologie "théorie des ensembles" est confuse. D'une part il y a des théories des ensembles axiomatiques, comme ZF, VBG, NF, etc et d'autre part la théorie des ensembles intuitive ou naïve. Généralement on pense que la différence entre les deux est une question de degré de formalisation et que les théories des ensembles axiomatiques sont des représentations formelles de cette théorie intuitive. Mais la différence doit aussi être pensée du point de vue de la distinction entre fondement axiomatique et fondement conceptuel.

La théorie des ensembles intuitive a une dimension conceptuelle importante et c'est elle qui est importante aux yeux du mathématicien. Tous les mathématiciens utilisent d'une manière ou d'une autre la théorie des ensembles, mais avant tout comme langage: les mathématiciens ne s'intéressent pas en général aux théories axiomatiques des ensembles, à la question de comment prouver tel ou tel résultat à partir des axiomes de ZF.

La raison pour laquelle la terminologie "théorie des ensembles" est ambiguë est que la théorie des catégories peut aussi être considérée comme une représentation de la théorie des ensembles intuitive, représentation dans laquelle domine l'aspect conceptuel de cette théorie, par opposition aux représentations données par les théories des ensembles axiomatisées dans lesquelles prédomine l'aspect axiomatique.

Pour éviter cette ambiguïté, lorsque nous parlerons de théories axiomatiques des ensembles, nous parlerons en général de ZF, considérée comme un élément représentatif de ces théories, par opposition à la théorie des ensembles intuitive.

## 4 La théorie des catégories comme fondement conceptuel

La théorie des catégories est bien différente de ZF car elle est déductivement très pauvre: les axiomes sont très généraux et on ne peut pratiquement rien en déduire, pas même les axiomes de l'arithmétique, comme c'est la cas avec ZF. Un esprit corrompu par la pensée zermellienne pourrait penser que la théorie des catégories ne sert donc à rien.

Pourtant il est facile de comprendre son utilité et son avantage par rapport à la théorie des ensembles. Le but principal de la théorie des catégories est de caractériser la notion de structure dans la perspective des relations entre structures, les morphismes. La notion de structure paraît un fondement mathématique conceptuel plus intéressant que la notion d'ensemble. Dire qu'un groupe est un ensemble c'est ne presque rien dire, dire que c'est une structure, c'est déjà dire beaucoup plus. D'un certain point de vue, celui en particulier de la théorie des catégories, un ensemble est une structure dégénérée, triviale, une structure sans structure, le degré zéro de la structure. De même un bon nombre de notions fondamentales de la théorie intuitive des ensembles - application, injection, surjection, intersection, union, produit, etc - peuvent être vues comme des cas particuliers triviaux de concepts structuraux. La théorie des catégories est donc également une représentation de la théorie des ensembles intuitive. Dans ce cas la théorie des ensembles apparaît comme un fondement conceptuel ou plutôt le degré zéro du fondement conceptuel principal.

Inversement la notion de structure peut être conçue et définie à partir de la notion d'ensemble (ce qui ne veut pas dire que les axiomes de la théorie des catégories se déduisent de ZF!), mais la vision ensembliste de la structure n'est pas forcément la meilleure. Si la notion de structure semble d'une certaine manière la plus importante et si l'on peut se passer de la notion d'ensemble, pourquoi ne pas considérer la notion de structure comme "fondamentale" au lieu de la construire ou de la décomposer à partir de la notion d'ensemble?

De même qu'il y a une théorie intuitive des ensembles, il y a une théorie intuitive des structures qui peut être axiomatisée de différentes façons. La théorie des structures peut être axiomatisée dans le cadre d'une théorie des ensembles axiomatique, où les notions primitives sont celles d'ensemble et d'appartenance ou bien dans le cadre de la théorie des catégories, ou les notions primitives sont celles de structure et morphisme. Ce que nous appellerons dorénavant théorie des catégories est l'ensemble des théories axiomatiques ayant ces notions comme primitives, dont fait partie la théorie standard que nous dénoterons par EM par référence à ses créateurs, Eilenberg et MacLane.

On dit que les deux compères ont lancé cette expression par une sorte de dérision humoristique digne de Bourbaki: lorsqu'ils ont commencé à développer cette théorie, ils ont reçu les critiques de certains mathématiciens qui voyaient là une généralité absurde et inutile. Ils ont donc décidé d'employer l'expression "théorie des catégories" par référence à la théorie des catégories de Kant qui pour beaucoup est quelque chose d'abstrait, incompréhensible et inutile. Quoiqu'il en soit, cette expression évite l'ambiguïté que l'on trouve dans le cas de l'expression "théorie des ensembles", ce qui ne serait pas le cas s'ils avaient employé l'expression "théorie des structures".

Ce qui est intéressant avec la théorie des catégories c'est que la notion de structure est pensée à partir d'elle-même: une structure est pensée suivant un point de vue structural. Suivant un tel point de vue un objet est défini par sa manifestation au sein d'une structure. En théorie des catégories, une structure est définie comme objet d'une structure, appelée catégorie.

## 5 La théorie des catégories comme fondement axiomatique

La théorie des catégories peut également servir, tout aussi bien que la théorie des ensembles, de fondement axiomatique aux mathématiques. Pour ce faire on rajoute une série d'axiomes à EM et on obtient une théorie, que nous appellerons EML (par référence à Lawvere), dont les modèles sont des topos bien orientés avec choix et un objet entier naturel.

L'avantage de la théorie des catégories est que l'on peut isoler le fondement conceptuel des mathématiques du fondement axiomatique, et que ce dernier, représenté par EML, apparaît comme prolongement du premier représenté par EM.

Dans le cas de la théorie des ensembles, cela paraît beaucoup plus difficile à réaliser: comment isoler les axiomes de la théorie des ensembles qui ne décrivent que l'aspect conceptuel de la notion d'ensemble?

Une partie des caractéristiques de la notion d'ensemble (intersection, union, etc) est fournie par le concept d'algèbre de Boole, mais d'une part certaines caractéristiques importantes lui échappent, comme le concept de fonction, et d'autre part il semble difficile de voir par exemple ZF comme une extension d'une axiomatique de l'algèbre de Boole.

## 6 La théorie des catégories présuppose-t-elle la théorie des ensembles?

Certains diront que EM est moins fondamentale que ZF car elle présuppose ZF ou une autre théorie des ensembles. Il s'agit d'une affirmation erronée. En fait EM présuppose ni plus ni moins que ce que présuppose ZF.

Si l'on considère EM et ZF d'un point de vue purement syntaxique, il s'agit de deux théories de même poids ontologique, pouvant s'énoncer toutes deux dans la logique du premier ordre. Du point de vue sémantique un modèle de EM est une structure dont le domaine est constitué d'objets, censés représenter des structures, qui sont reliés entre eux par une multi-relation, censée représenter des morphismes. Un modèle de ZF est également une structure, les objets de son domaine sont censés représenter des ensembles qui sont reliés entre eux par une relation binaire dite d'appartenance.

D'un point de vue sémantique ZF présuppose la notion de structure. Certains pourraient dire que ce n'est pas un problème car ZF permet de définir la notion de structure. Mais à celui qui dit que d'un point de vue sémantique EM présuppose la notion d'ensemble, on peut alors répondre la même chose: EM permet aussi de définir le notion d'ensemble.

En vérité d'un point de vue sémantique les deux théories se mordent la queue de la même façon. A une certaine époque un courant formaliste s'est imposé prétendant résoudre l'aporie sémantique: tout ne serait que symbole sans signification. Mais cette réduction syntaxique ne résout le problème que de façon illusoire, car la syntaxe elle-même présuppose une théorie. Il est impossible de partir de zéro, de générer l'être à partir du néant. Les formalistes prétendent en fait générer l'être à partir du presque-rien syntaxique. Mais en fait la syntaxe, si l'on y réfléchit deux minutes, n'est un presque-rien qu'en apparence.

La théorie des catégories semble a priori correspondre à une approche plutôt sémantique des mathématiques ou la notion de preuve apparaît seulement au second plan. La manière de raisonner du catégoricien peut paraître bizarre aux yeux de certains: il représente une série de diagrammes qui commutent et considère cela comme preuve. Cette façon imagée de raisonner ne correspond pas à l'idée que ce fait le logicien de la notion de preuve mathématique, conception que l'on pourrait qualifier de piétonnière: un alignement de formules pas à pas, ces pas correpondant à des règles logiques d'inférence. Cependant la conception du logicien apparaît assez éloignée de la pratique mathématique et d'autre part, ironiquement, la théorie des catégories est également utilisée comme outil en théorie de la démonstration. La notion de preuve piétonnière mathématique passe à la moulinette du catégoricien.

## 7 La question du fondement logique des mathématiques

Pour prouver qu'une théorie est non-contradictoire, il y a deux méthodes: la méthode sémantique qui consiste à exhiber un modèle, la méthode syntaxique qui consiste à raisonner sur des preuves formels. Du fait du second théorème d'incomplétude de Gödel, on sait qu'il ne peut y avoir aucune preuve absolue de la non-contradiction d'une théorie axiomatique des mathématiques.

D'après ce que nous venons de dire à la fin de la section précédente la théorie des catégories n'est pas forcément défavorisée, au niveau de la méthode syntaxique, puisqu'elle permet d'analyser de manière intéressante la notion de preuve syntaxique. D'un autre côté la notion d'ensemble une fois de plus apparaît extrêmement pauvre pour penser la notion de preuve: dire qu'une preuve est un ensemble de symboles, de formules c'est dire presque-rien. Un presque-rien qui ne sert à presque rien et dont le coût ontologique est assez élevé.

En ce qui concerne la méthode sémantique, ZF fournit un fondement logique aux mathématiques pas très satisfaisant. Il existe certes un modèle relativement intuitif de ZF dont l'idée de base est ce que l'on appelle le concept itératif d'ensemble. De ce point de vue ZF apparaît comme une généralisation de l'arithmétique, ce qui n'est pas vraiment étonnant puisqu'à l'origine Cantor concevait les nombres transfinis comme une prolongation des entiers naturels. Toutefois l'idée Cantorienne d'un "après-tout", d'un objet qui vient après une série infinie d'autres objets, qui apparaît dans le modèle standard comme l'objectification d'un infini potentiel, est loin d'être au-dessus de tout soupçon. Elle ne paraît pas complétement claire et évidente. Or donner une preuve sémantique de la non-contradiction d'une théorie c'est justement fournir une image claire et évidente d'un modèle de la théorie. Une autre critique que l'on peut porter à ZF est que ce modèle intuitif qui assurerait la non-contradiction des mathématiques ne reflète que très partiellement *l'univers mathématique*, et fonder logiquement les mathématiques c'est s'assurer de la non-contradiction de l'univers mathématique.

Une approche conceptuelle paraît a priori plus intéressante pour assurer le fondement logique de l'univers mathématique, puisqu'elle rend mieux compte de cet univers. La théorie des catégories présente ici plusieurs avantages. Tout d'abord, comme nous l'avons remarqué elle permet de différencier le fondement conceptuel du fondement axiomatique. Il y a peu de doute sur la non contradiction de EM, un modèle intuitif de EM est une sorte de graphe, image plus que claire et évidente. Or un grand nombre de concepts centraux des mathématiques peuvent être construits à partir de EM et leur non-contradiction est donc évidente. Les choses se compliquent un peu lorsque l'on passe à une théorie plus complexe à partir de laquelle on veut "déduire" non plus seulement des concepts mais aussi des théorèmes mathématiques. Mais même à ce niveau là, la situation paraît avantageuse, car un modèle de EML paraît une meilleure représentation de l'univers mathématique. L'idée d'un modèle de

EML est d'une certaine façon plus compliquée que celle d'un modèle intuitif de ZF mais elle a l'avantage de ne pas inclure l'idée farfelue et douteuse de Cantor d'un après-tout.

On notera que la distinction entre preuve syntaxique et preuve sémantique de non-contradiction est quelque peu artificielle. Par exemple Gentzen appuie sa fameuse preuve syntaxique de la non-contradiction de l'arithmétique sur la sémantique de la théorie des ensembles, sur l'idée de l'après-tout Cantorien dont il essaye d'éliminer l'aspect infinitaire pour le remplacer par un aspect d'ordre.

Nous terminerons en faisant quelques remarques sur deux moments importants de l'histoire des mathématiques modernes qui ont rapport avec les fondements des mathématiques, la théorie des ensembles et la théorie des catégories.

## 8 L'architecture des mathématiques de Bourbaki

La question du fondement logique n'a jamais intéressé directement Bourbaki. On trouve par contre chez Bourbaki à la fois un fondement conceptuel et un fondement axiomatique des mathématiques. Mais l'incapacité de Bourbaki à établir une relation cohérente entre ces deux fondements a grandement contribué à diminuer son rôle de fondateur.

Bourbaki, plus que n'importe qui, a promu le concept de structure. En fait c'est Bourbaki qui a proposé de reconstruire et repenser toutes les mathématiques à partir du concept de structure. Mais s'agissait-il d'un fondement axiomatique ou d'un fondement conceptuel?

Plutôt d'un fondement conceptuel. Dans son célèbre article sur l'architecture des mathématiques, Bourbaki propose de reconstruire toutes les mathématiques à partir de trois structures mères: les structures algébriques, les structures topologiques et les structures d'ordre. Dans cet article informel, aucun détail technique n'est présenté, et on ne sait pas quelle va être la contrepartie mathématique de ce beau discours parabolique.

En fait ce que l'on trouve chez Bourbaki est une théorie des structures logico-ensembliste. Une construction formelle considérée par certains comme la partie la plus laide de son oeuvre. Cette théorie est présentée dans le Chapitre IV de son livre sur la théorie des ensembles. Le fait que ce Chapitre intitulé "Structures" soit inclu dans un ouvrage intitulé *Théorie des ensembles* est assez significatif, mais que l'on ne se méprenne pas sur cette signification. Dans cet ouvrage Bourbaki présente un fondement axiomatique ensembliste des mathématiques: une théorie axiomatique des ensembles. Mais sa théorie des structures ne se déduit pas de cette théorie axiomatique, pas plus que la théorie des groupes. Par contre, la notion de structure est construite à partir de la notion d'ensemble définie par cette théorie axiomatique.

Notre conclusion est que Bourbaki a bien été le premier a promouvoir la notion de structure comme fondement conceptuel des mathématiques, mais il s'est un peu emmêlé les pédales, ou du moins il a été victime de l'esprit qui dominait à son époque, celui de la théorie des ensembles axiomatique. Et c'est en fait Eilenberg et MacLane qui ont réellement concrétisé le fondement Bourbakiste des mathématiques avec la théorie des catégories. En ce sens ils ont été plus Bourbakistes que Bourbaki.

## 9 L'algèbre universelle de Birkhoff

Dans les années trente Garrett Birkhoff a développé une théorie qui peut être considérée comme l'embryon du fondement conceptuel structuraliste des mathématiques.

Birkhoff définit une algèbre abstraite simplement comme une structure composée d'un domaine et d'une famille d'opérations définies sur ce domaine. C'est un exemple intéressant de fondement conceptuel. Birkhoff ne donne aucun groupe d'axiomes valables pour toutes les structures algèbriques. Il était arrivé à la conclusion, par le développement de sa théorie des treillis, qu'il ne pouvait pas y avoir de tels axiomes. Ce que propose Birkhoff est une serie de concepts définis à partir de cette idée d'algèbre abstraite.

La définition d'algèbre abstraite de Birkhoff est informelle, elle s'effectue au sein d'une théorie intuitive qui peut être représentée aussi bien par une théorie des ensembles, qu'une théorie des structures. Mais c'est cette dernière qui semble plus adéquate. L'algèbre universelle se formalise particulièrement bien au sein de la théorie des catégories, qui correspond à son esprit conceptuel.

## 10 Bibliographie

P. Benacerraf & H. Putnam (eds), *Philosophy of mathematics*, Second Edition, CUP, Cambridge, 1983.

G. Birkhoff, "Universal algebra", in *Collected papers of G. Birkhoff*, G. -C. Rota and J. S. Oliveira (eds), Birkhäuser, Basel, 1987, pp.111-115.

G. Boolos, "The iterative concept of set", in Benacerraf & Putnam, 1983, pp.486-502.

J. -Y. Béziau, "The mathematical structure of logical syntax", in *Advances in contemporary logic and computer science*, AMS, Providence, 1999, pp.3-16.

N. Bourbaki, "Foundations of mathematics for the working mathematician", *Journal of Symbolic Logic*, 14 (1949), pp.1-8.

N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1954.

N. Bourbaki, "L'architecture des mathématiques" in *Le Lionnais*, 1998, pp.35-47.

H. Cartan, "Sur le fondement logique des mathématiques", *Revue Scientifique*, 1 (1943), pp.3-11.

L. Corry, "Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure", *Synthese*, 92 (1992), pp.315-348.

L. Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, Boston, 1996.

J. Dieudonné, "La difficile naissance des structures mathématiques (1840-1940)", in *La culture scientifique dans le monde contemporain*, V.Mathieu & P.Rossi (eds), Scientia, 1979, pp.9-26.

J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris, 1987.

G. Gentzen, "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, 39 (1934), pp.176-210 & pp.405-431.

A. Lautman, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, Hermann, Paris, 1933.

F. W. Lawvere & S. H. Schanuel, *Conceptual mathematics – A first introduction to categories*, CUP, Cambridge, 1997.

F. Le Lionnais (ed), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Second Edition, Hermann, Paris, 1998.

S. Mac Lane, *Mathematics: form and function*, Springer, Berlin, 1986.

S. Mac Lane, "Structure in mathematics", *Philosophia Mathematica*, 4 (1996), pp.174-183.

J. -P. Marquis, "Category theory and the foundations of mathematics: philosophical excavations", *Synthese*, 103 (1995), pp.229-254.

B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, Second Edition, Allen & Unwin, London, 1920.

T. Tymoczko (ed), *New directions in the philosophy of mathematics*, Second Edition, PUP, Princeton, 1998.

Jean-Yves Béziau
Laboratório Nacional de Computação Científica
Av. Getúlio Vargas 333
25651-070 Petrópolis, RJ, Brasil
jyb@lncc.br