JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DÉSIRÉ ANDRÉ

Mémoire sur les permutations quasi-alternées

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 1 (1895), p. 315-350.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1895_5_1__315_0>

Mémoire sur les permutations quasi-alternées;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

INTRODUCTION.

I. — Définitions préliminaires.

1. Considérons une permutation quelconque des n premiers nombres; et, dans cette permutation, retranchons chaque nombre du suivant. Nous obtenons une suite de $n - 1$ différences, les unes positives, les autres négatives.

La permutation considérée est *alternée*, lorsque cette suite de $n - 1$ différences ne présente que des variations.

La permutation est *quasi-alternée*, lorsque cette suite présente une permanence, et une seule.

2. D'après la définition des *maxima* et des *minima* que nous avons donnée dans notre *Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations* (¹), nous pouvons dire aussi :

Une permutation des n premiers nombres est alternée, lorsque tous les nombres qui la composent sont des maxima ou des minima;

Une permutation des n premiers nombres est quasi-alternée,

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, avril 1884.

lorsque, parmi les nombres qui la composent, il y en a un, et un seul, qui n'est ni un maximum ni un minimum.

3. On peut dire enfin, d'après la définition des *séquences* que nous avons donnée dans cette même *Étude :*

Les permutations alternées des n premiers nombres sont celles qui présentent chacune $n-1$ séquences;

Les permutations quasi-alternées, celles qui en présentent chacune $n-2$.

4. Les trois définitions qui précèdent sont équivalentes. A l'aide de l'une quelconque d'entre elles, on peut vérifier facilement que, parmi les permutations des huit premiers nombres,

$$3 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 7$$

est une permutation alternée; tandis que

$$3 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 7 \quad 6 \quad 8$$

est une permutation quasi-alternée.

II. — Objet du présent Mémoire.

5. Nous nous sommes occupés, à deux reprises différentes, des permutations alternées des n premiers nombres.

En 1881, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (¹), nous avons fait connaître les propriétés et la fonction génératrice du nombre de ces permutations.

En 1883, dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (²), nous avons déterminé la probabilité pour qu'une permutation donnée des n premiers nombres fût une permutation alternée.

(¹) *Mémoire sur le nombre des permutations alternées.*

(²) *Probabilité pour qu'une permutation...* (Séance du 5 novembre).

6. Dans le présent Mémoire, nous traitons ces mêmes questions, en une seule fois, pour les permutations quasi-alternées des n premiers nombres.

Considérant ces permutations quasi-alternées, nous choisissons nos notations et établissons notre formule fondamentale; nous déterminons les fonctions génératrices des nombres de ces permutations; nous donnons différentes relations entre ces fonctions et entre ces nombres; nous cherchons les propriétés asymptotiques de ces mêmes nombres lorsque n croît indéfiniment; nous trouvons enfin la probabilité pour qu'une permutation soit quasi-alternée, et nous faisons connaître la valeur asymptotique de cette probabilité.

7. Dans toutes les parties de ce travail, nous nous appuyons, d'une part, sur les résultats que nous avons obtenus touchant les permutations alternées; de l'autre, sur ceux que nous ont fournis nos recherches, soit anciennes, soit récentes, sur la théorie générale de la structure des permutations.

Nous arrivons par cette voie, relativement aux permutations quasi-alternées, à des propositions assez nombreuses, entièrement nouvelles, et qui nous paraissent intéressantes. Nous avons énoncé, pour la première fois, les principales d'entre elles dans une Note succincte, présentée à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1894.

CHAPITRE I.

NOTATIONS ET FORMULE FONDAMENTALE.

I. — Notations.

8. Dans tous nos Mémoires sur les permutations, nous avons désigné par $P_{n,s}$ le nombre des permutations des n premiers nombres qui présentent chacune s séquences.

Parmi les permutations des n premiers nombres, les permutations alternées, sont, avons-nous dit (**3**), celles qui présentent chacune $n-1$ séquences. Leur nombre sera donc désigné par $P_{n,n-1}$.

Parmi les permutations des n premiers nombres, les permutations quasi-alternées sont, avons-nous dit encore (**3**), celles qui présentent chacune $n-2$ séquences. Leur nombre sera donc désigné par $P_{n,n-2}$.

9. Nous avons appelé *triangle des séquences* (¹) le triangle

$$\begin{array}{llll}
P_{2,1}, & & & \\
P_{3,1}, & P_{3,2}, & & \\
P_{4,1}, & P_{4,2}, & P_{4,3}, & \\
P_{5,1}, & P_{5,2}, & P_{5,3}, & P_{5,4}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots,
\end{array}$$

où le nombre $P_{n,s}$ se trouve à la rencontre de la colonne de rang s avec la ligne de rang $n-1$.

On voit immédiatement, sur ce triangle, que les nombres des permutations alternées occupent, dans leurs lignes respectives, chacun la dernière place : ils constituent tous ensemble l'hypoténuse indéfinie du triangle.

On voit également que les nombres des permutations quasi-alternées, dans leurs lignes respectives, occupent chacun l'avant-dernière place; ils constituent tous ensemble la première parallèle à cette hypoténuse.

10. A l'aide de la considération des permutations symétriques, nous avons démontré (²) que $P_{n,s}$ est toujours un nombre pair. Il en est ainsi, en particulier, pour le nombre $P_{n,n-1}$ des permutations alternées et pour le nombre $P_{n,n-2}$ des permutations quasi-alternées.

Dans notre *Mémoire sur les permutations alternées,* par applica-

(¹) *Étude sur les maxima, minima, ...*
(²) *Étude sur les maxima, minima, ...*

tion de cette remarque, nous avons posé

$$P_{n,n-1} = 2A_n.$$

Nous posons à présent, de la même manière,

$$P_{n,n-2} = 2B_n.$$

11. Les entiers A forment la suite indéfinie

$$A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_5, \quad \ldots.$$

Le premier d'entre eux est A_2. Les symboles A_0, A_1 ne présentent par eux-mêmes aucun sens; on peut donc, par convention, leur donner des valeurs arbitraires : nous leur avons donné (¹), à l'un et à l'autre, pour valeur l'unité.

De même, les entiers B forment la suite indéfinie

$$B_3, \quad B_4, \quad B_5, \quad B_6, \quad \ldots.$$

Le premier d'entre eux est B_3. Les symboles B_0, B_1, B_2 n'ont par eux-mêmes aucun sens; on peut donc leur donner des valeurs arbitraires : pour des raisons que nous dirons bientôt, nous leur donnerons les valeurs -1, -1, 0.

II. — Formule fondamentale.

12. Pour étudier les nombres des permutations quasi-alternées, il nous suffit évidemment d'envisager les moitiés B de ces nombres.

Nous commencerons cette étude en cherchant une formule reliant les nombres B, qui nous sont encore inconnus, aux nombres A, dont nous nous sommes déjà occupé.

13. Nous pourrions obtenir cette formule par des raisonnements directs, identiques, pour ainsi dire, à ceux dont nous nous sommes servis (²) pour établir la relation principale de la théorie des sé-

(¹) *Mémoire sur les permutations alternées.*

(²) *Étude sur les maxima, minima, ...*

quences. Malgré l'intérêt que présentent toujours les raisonnements combinatoires directs, nous n'opérerons point ainsi. Nous trouvons à la fois plus facile et plus rapide de partir de cette relation principale elle-même, et d'en déduire, comme cas particulier, la formule que nous nous proposons d'établir.

14. Notre relation principale est la relation

$$P_{n,s} = sP_{n-1,s} + 2P_{n-1,s-1} + (n-s)P_{n-1,s-2},$$

où n et s sont quelconques.

Remplaçons-y simultanément n par $n+1$, et s par n, elle devient

$$P_{n+1,n} = nP_{n,n} + 2P_{n,n-1} + P_{n,n-2}.$$

Mais il n'existe aucune permutation contenant autant de séquences que d'éléments. Donc $P_{n,n}$ est toujours nul, et la relation précédente se réduit à

$$P_{n+1,n} = 2P_{n,n-1} + P_{n,n-2}.$$

Mais nous avons posé plus haut

$$P_{n,n-1} = 2A_n, \qquad P_{n,n-2} = 2B_n.$$

Donc, finalement,

$$A_{n+1} = 2A_n + B_n.$$

Telle est notre *formule fondamentale*.

15. Résolue par rapport à B_n, cette formule nous donne

$$B_n = A_{n+1} - 2A_n.$$

Elle nous permettrait évidemment, si la suite indéfinie des entiers A était écrite sur une ligne, d'écrire aussitôt sur une autre la suite indéfinie des entiers B.

Elle suppose, d'ailleurs, que n soit égal ou supérieur à 3. Néanmoins, pour obtenir les valeurs qu'il convient d'attribuer aux symboles B_0, B_1, B_2, qui par eux-mêmes n'ont aucun sens, nous y remplacerons successivement n par 0, par 1 et par 2.

Ces substitutions nous donnent trois égalités, d'où nous tirons

$$B_0 = -1, \qquad B_1 = -1, \qquad B_2 = 0,$$

puisque A_0, A_1, A_2 et A_3 ont pour valeurs respectives 1, 1, 1 et 2.

16. Nous croyons devoir donner ici les valeurs des premiers nombres A et celles des premiers nombres B.

Les valeurs de $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_8$ sont respectivement

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 16, \quad 61, \quad 272, \quad 1385;$$

celles de $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_8$ sont respectivement

$$-1, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 6, \quad 29, \quad 150, \quad 841, \quad 5166.$$

Tous ces nombres, d'ailleurs, sauf A_0, A_1, B_0, B_1, B_2, ont chacun leurs doubles dans le triangle des séquences.

CHAPITRE II.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

I. — Fonction génératrice de B_n.

17. Dans notre *Mémoire sur les permutations alternées*, nous avons démontré que la série entière

$$A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

n'était autre chose que le développement de $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ suivant les puissances croissantes de la variable x.

18. Il suit de là que cette série entière est convergente toutes les fois que x, en valeur absolue, est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit aussi que la série

$$A_1 + A_2 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

dont les termes sont les dérivées, par rapport à x, des termes de la précédente, est convergente pour les mêmes valeurs de x; et qu'elle a pour somme la dérivée de $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, par rapport à x, c'est-à-dire la fonction

$$\frac{1}{2} \operatorname{séc}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

19. Cela posé, reportons-nous (**15**) à la formule qui nous donne B_n à l'aide de A_n et de A_{n+1}. Si l'on en multiplie les deux membres par $\frac{x^n}{n!}$, on trouve

$$B_n \frac{x^n}{n!} = A_{n+1} \frac{x^n}{n!} - 2 A_n \frac{x^n}{n!};$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\sum_0^\infty {}_n B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_0^\infty {}_n A_{n+1} \frac{x^n}{n!} - 2 \sum_0^\infty {}_n A_n \frac{x^n}{n!}.$$

Or, d'après ce qui précède (**17**) et (**18**),

$$\sum_0^\infty {}_n A_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2} \operatorname{séc}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

$$\sum_0^\infty {}_n A_n \frac{x^n}{n!} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Par conséquent

$$\sum_0^\infty {}_n B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2} \operatorname{séc}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2 \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$$

ou bien, après simplifications,

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \mathrm{B}_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}.$$

20. Le premier membre de cette dernière égalité n'est autre chose que la série

$$\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 \frac{x}{1!} + \mathrm{B}_2 \frac{x^2}{2!} + \mathrm{B}_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Cette série est donc le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la fonction placée au second membre.

De là ce théorème :

La fraction

$$\frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}$$

est la fonction génératrice des nombres B_n.

21. Ce résultat peut aussi, évidemment, s'énoncer de ces deux manières :

1° *Le nombre des permutations quasi-alternées de n éléments est égal au coefficient de* $\frac{x_n}{n!}$ *dans le développement, suivant les puissances croissantes de* x, *de la fraction*

$$2\,\frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x},$$

qui est le double de la fraction considérée plus haut (**20**);

2° *Cette fraction double est la fonction génératrice des nombres des permutations quasi-alternées.*

II. — Fonctions génératrices de $\mathrm{B}_{2\nu}$ et de $\mathrm{B}_{2\nu+1}$.

22. Pour obtenir la fonction génératrice des nombres $\mathrm{B}_{2\nu}$ et celle des nombres $\mathrm{B}_{2\nu+1}$, nous pourrions nous servir de la fonction génératrice des nombres $A_{2\nu}$ et de celle des nombres $A_{2\nu+1}$, que nous avons déterminées dans notre Mémoire *Sur les permutations alternées*.

Nous préférons tirer ces deux fonctions génératrices de la fonction génératrice trouvée précédemment (**20**) pour les nombres B_n.

23. Considérons d'abord les deux séries

$$B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$B_0 - B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} - B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

dont la seconde se déduit de la première par le changement du signe de la variable.

D'après ce qui précède (**18**), cette seconde série est, comme la première, convergente toutes les fois que la valeur absolue de x est inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

24. Si l'on désigne, pour abréger, par $\Phi(x)$ la fonction génératrice des nombres B_n, c'est-à-dire la somme de la première des deux séries qu'on vient d'écrire, la somme de la seconde sera évidemment $\Phi(-x)$.

D'ailleurs, d'après ce qu'on a déjà vu (**20**),

$$\Phi(x) = \frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}.$$

Il s'ensuit immédiatement

$$\Phi(-x) = \frac{1 - 2\cos x}{1 + \sin x}.$$

25. Ajoutons termes à termes les deux séries écrites ci-dessus (**23**). Nous obtenons, après division par 2, la série

$$B_0 + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_4 \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

qui ne présente plus comme coefficients que les nombres $B_{2\nu}$; qui est convergente dans les mêmes circonstances que les deux séries ajoutées, et qui a évidemment pour somme l'expression

$$\tfrac{1}{2}[\Phi(x)+\Phi(-x)].$$

Or, si l'on calcule cette expression, on trouve, après simplifications, le produit

$$(\text{séc}\, x-2)\,\text{séc}\, x.$$

Donc notre dernière série n'est autre chose que le développement de ce produit suivant les puissances croissantes de x. De là ce théorème :

Le produit

$$(\text{séc}\, x-2)\,\text{séc}\, x$$

est la fonction génératrice des nombres $B_{2\nu}$.

26. Ce résultat peut aussi s'énoncer de ces deux manières :

1° *Le nombre des permutations quasi-alternées de* 2ν *éléments est égal au coefficient de* $\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$ *dans le développement, suivant les puissances croissantes de* x, *du produit*

$$2(\text{séc}\, x-2)\,\text{séc}\, x,$$

qui est le double du produit considéré plus haut (**25**);

2° *Ce produit double est la fonction génératrice du nombre des permutations quasi-alternées de* 2ν *éléments.*

27. Revenons aux deux séries que nous avons ajoutées termes à termes (**23**), et retranchons termes à termes la seconde de la première. Nous trouvons, après division par 2, la série

$$B_1\frac{x}{1!}+B_3\frac{x^3}{3!}+B_5\frac{x^5}{5!}+\ldots,$$

qui ne présente plus comme coefficients que les nombres $B_{2\nu+1}$; qui est convergente dans les mêmes circonstances que les séries d'où on l'a tirée, et qui a évidemment pour somme l'expression

$$\tfrac{1}{2}[\Phi(x)-\Phi(-x)].$$

Or, si l'on calcule cette expression, on obtient, après simplifications, le produit

$$(\text{séc}\,x-2)\,\text{tang}\,x.$$

Donc notre dernière série n'est autre chose que le développement de ce produit suivant les puissances croissantes de x. De là ce théorème :

Le produit

$$(\text{séc}\,x-2)\,\text{tang}\,x$$

est la fonction génératrice des nombres $B_{2\nu+1}$.

28. Ce nouveau résultat peut aussi s'énoncer de ces deux manières :

1° *Le nombre des permutations quasi-alternées de* $2\nu+1$ *éléments est égal au coefficient de* $\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$ *dans le développement, suivant les puissances croissantes de* x, *du produit*

$$2(\text{séc}\,x-2)\,\text{tang}\,x,$$

qui est le double du produit considéré plus haut (**27**);

2° *Ce produit double est la fonction génératrice du nombre des permutations quasi-alternées de* $2\nu+1$ *éléments.*

CHAPITRE III.

RELATIONS DIVERSES.

I. — Relations entre différentes séries.

29. Avant tout, pour abréger, nous posons

$$A_0 + A_1\frac{x}{1!} + A_2\frac{x^2}{2!} + A_3\frac{x^3}{3!} + \ldots = \Phi(x),$$

$$A_0 + A_2\frac{x^2}{2!} + A_4\frac{x^4}{4!} + A_6\frac{x^6}{6!} + \ldots = \varphi_0(x),$$

$$A_1\frac{x}{1!} + A_3\frac{x^3}{3!} + A_5\frac{x^5}{5!} + A_7\frac{x^7}{7!} + \ldots = \varphi_1(x);$$

$$B_0 + B_1\frac{x}{1!} + B_2\frac{x^2}{2!} + B_3\frac{x^3}{3!} + \ldots = \Psi(x),$$

$$B_0 + B_2\frac{x^2}{2!} + B_4\frac{x^4}{4!} + B_6\frac{x^6}{6!} + \ldots = \psi_0(x),$$

$$B_1\frac{x}{1!} + B_3\frac{x^3}{3!} + B_5\frac{x^5}{5!} + B_7\frac{x^7}{7!} + \ldots = \psi_1(x).$$

30. Dans ces six égalités, les séries formant les premiers membres sont convergentes toutes les fois que x, en valeur absolue, est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Les fonctions qui en forment les seconds membres sont donc, lorsque cette condition est remplie, les sommes de ces différentes séries.

On peut dire aussi que les fonctions

$$\Phi(x), \quad \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x)$$

sont les fonctions génératrices respectives des nombres

$$A_n, \quad A_{2\nu}, \quad A_{2\nu+1};$$

et que les fonctions

$$\Psi(x), \quad \psi_0(x), \quad \psi_1(x)$$

sont les fonctions génératrices respectives des nombres

$$B_n, \quad B_{2\nu}, \quad B_{2\nu+1}.$$

D'ailleurs, en écrivant ces fonctions génératrices, nous supprimerons souvent x, nous bornant à écrire

$$\Phi, \quad \varphi_0, \quad \varphi_1; \qquad \Psi, \quad \psi_0, \quad \psi_1.$$

C'est une abréviation et une simplification.

31. Des six fonctions génératrices qui précèdent (**30**), les trois premières se rapportent aux nombres A; les trois dernières aux nombres B.

Nous avons donné les expressions de ces trois premières fonctions il y a déjà plusieurs années [1]. Nous venons de trouver à l'instant celles de ces trois dernières. Tous ces résultats se résument dans ces six égalités

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),\\
\varphi_0(x) &= \operatorname{séc} x,\\
\varphi_1(x) &= \operatorname{tang} x;\\
\Psi(x) &= \frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x},\\
\psi_0(x) &= (\operatorname{séc} x - 2)\operatorname{séc} x,\\
\psi_1(x) &= (\operatorname{séc} x - 2)\operatorname{tang} x.
\end{aligned}$$

32. On peut prendre ces égalités isolément. On peut les combiner aussi soit entre elles, soit avec les développements connus de $\sin x$ et de $\cos x$. En opérant de ces différentes manières, on peut obtenir de nombreuses relations.

Si l'on fait abstraction des trois dernières égalités, on obtient des relations entre les seules fonctions génératrices des nombres A.

Si l'on considére à la fois une, au moins, des trois premières éga-

---

[1] *Mémoire sur les permutations alternées.*

lités, avec une, au moins, des trois dernières, on obtient des relations entre les fonctions génératrices des nombres A et celles des nombres B.

Si l'on considère seulement les trois dernières égalités, on obtient des relations où n'entrent que les fonctions génératrices des nombres B.

33. Nous ne nous occuperons point des relations où ne figurent que les fonctions génératrices des nombres A, parce qu'elles se rapportent uniquement aux permutations alternées que nous avons étudiées autrefois d'une façon particulière.

Mais, parce qu'elles se rapportent, en tout ou en partie, aux permutations quasi-alternées, nous allons donner, d'abord, les plus simples des relations existant entre les fonctions génératrices des nombres A et celles des nombres B; ensuite, les plus simples des relations existant entre les fonctions génératrices des seuls nombres B.

34. Considérons les six égalités écrites précédemment (**34**).

En éliminant les lignes trigonométriques entre la quatrième et la première, nous trouvons la relation

$$2\Psi + 3 = (\Phi - 2)^2.$$

En éliminant ces mêmes lignes entre la deuxième égalité et la cinquième, nous obtenons la relation

$$\psi_0 + 1 = (\varphi_0 - 1)^2.$$

En combinant entre elles la deuxième, la troisième et la sixième de nos égalités, nous trouvons la relation

$$\psi_1 = (\varphi_0 - 2)\varphi_1.$$

En combinant entre elles la deuxième, la cinquième et la sixième, nous trouvons

$$(\psi_0 + \psi_1)(\psi_0 - \psi_1) = (\varphi_0 - 2)^2.$$

Enfin, en combinant la deuxième, la troisième, la cinquième et la sixième, nous trouvons la proportion

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} = \frac{\psi_1}{\varphi_1},$$

qui nous semble très remarquable.

35. Ces différentes relations ont été obtenues, toutes les cinq, par la considération simultanée d'une, au moins, de nos trois premières égalités (**31**) et d'une, au moins, des trois dernières. Ce ne sont pas les seules relations qu'on puisse obtenir ainsi; mais ce sont les plus simples. On peut remarquer que, si l'on considère chacun des binomes qu'elles renferment comme la somme d'une série, ces cinq relations ne sont autres choses que des *relations d'identité entre différentes séries*.

36. En considérant la quatrième de nos six égalités (**36**); y remplaçant Ψ par la somme des fonctions ψ_0, ψ_1, et dédoublant l'égalité ainsi obtenue, nous trouvons les deux relations

$$\psi_0 - 1 + 2\cos x = \psi_1 \sin x,$$
$$\psi_1 = \psi_0 \sin x.$$

En considérant isolément la cinquième de ces mêmes égalités (**31**), nous obtenons, par une transformation immédiate, la relation

$$(1 + \cos 2x)\psi_0 = 2 - 4\cos x.$$

En considérant de même la dernière, nous trouvons

$$(1 + \cos 2x)\psi_1 = 2\sin x - 2\sin 2x.$$

37. Les quatre relations que nous venons d'écrire ne renferment chacune que des fonctions génératrices des nombres B. Ce ne sont pas non plus les seules que l'on puisse déduire de la considération des trois dernières de nos égalités (**31**); mais ce sont les plus simples. Chaque membre de chacune d'elles peut être regardé comme la somme d'une série, ou comme le produit de deux pareilles sommes : ces quatre relations ne sont donc encore autres choses que des *relations d'identité entre différentes séries.*

II. — Relations entre les nombres B et les nombres A.

38. La relation la plus simple possible entre les nombres B et les nombres A est évidemment la relation

$$B_n = A_{n+1} - 2A_n,$$

que nous avons donnée précédemment (**14**), et qui sert de fondement à tout le présent Mémoire.

En partant des égalités ou relations que nous avons données aussi (**34**) entre les fonctions génératrices des nombres B et celles des nombres A, nous pouvons obtenir des relations nouvelles, encore assez simples, entre les nombres B et les nombres A.

39. Considérons d'abord l'égalité

$$2\Psi + 3 = (\Phi - 2)^2,$$

que nous avons établie plus haut (**34**). Elle exprime que la série

$$1 + 2B_1\frac{x}{1!} + 2B_2\frac{x^2}{2!} + 2B_3\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

est juste égale au carré de la série

$$-1 + A_1\frac{x}{1!} + A_2\frac{x^2}{2!} + A_3\frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans l'égalité considérée, et écrivant que, dans les deux membres de l'égalité résultante, les coefficients de x^n sont égaux, nous obtenons la relation

$$2\,\frac{B_n + A_n}{n!} = \frac{A_1}{1!}\,\frac{A_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A_2}{2!}\,\frac{A_{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{A_1}{1!},$$

qui peut s'écrire aussi

$$B_n = -A_n + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n-1}{}_t K_n^t A_t A_{n-t},$$

si l'on convient de désigner par K_p^q le nombre des combinaisons simples de p objets q à q.

Cette relation nous donne le nombre B_n en fonction des nombres A dont l'indice ne dépasse pas n. Elle subsiste pour toutes les valeurs de n, si l'on convient d'y annuler le $\sum$ lorsque n est égal soit à 0, soit à 1.

40. Considérons maintenant l'égalité

$$\psi_0 + 1 = (\varphi_0 - 1)^2.$$

Elle exprime que la série

$$B_4\frac{x^4}{4!} + B_6\frac{x^6}{6!} + B_8\frac{x^8}{8!} + \ldots$$

est juste égale au carré de la série

$$A_2\frac{x^2}{2!} + A_4\frac{x^4}{4!} + A_6\frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans l'égalité considérée, et écrivant que le coefficient de x^n est le même dans les deux membres de l'égalité ainsi obtenue, nous trouvons la relation

$$\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} = \frac{A_2}{2!}\frac{A_{2\nu-2}}{(2\nu-2)!} + \frac{A_4}{4!}\frac{A_{2\nu-4}}{(2\nu-4)!} + \ldots + \frac{A_{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}\frac{A_2}{2!},$$

qui peut s'écrire aussi

$$B_{2\nu} = -A_{2\nu} + \sum_{1}^{\nu}{}_t K_{2\nu}^{2t} A_{2t} A_{2\nu-2t},$$

si l'on convient de donner au symbole K_p^q la signification indiquée plus haut (**39**).

Cette relation nous donne, on le voit, le nombre $B_{2\nu}$ en fonction des nombres A dont l'indice est pair et non supérieur à 2ν. Elle subsiste pour toutes les valeurs de ν, si l'on convient encore d'annuler le $\sum$ lorsque ν est égal à zéro.

41. Considérons l'égalité

$$\psi_1 = (\varphi_0 - 2)\varphi_1,$$

que nous avons établie plus haut (**34**). Elle exprime que la série

$$B_1 \frac{x}{1!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

est juste égale au produit des deux séries

$$A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + A_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$A_1 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

Portant ces séries à la place de leurs sommes dans l'égalité considérée, puis écrivant toujours que les coefficients de x^n dans les deux membres sont des nombres égaux, nous obtenons la relation

$$\frac{B_{2\nu+1} + A_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \frac{A_2}{2!}\,\frac{A_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \frac{A_4}{4!}\,\frac{A_{2\nu-3}}{(2\nu-3)!} + \ldots + \frac{A_{2\nu}}{(2\nu)!}\,\frac{A_1}{1!},$$

qui peut s'écrire aussi, avec nos notations habituelles,

$$B_{2\nu+1} = -A_{2\nu+1} + \sum_{1}^{\nu}{}_{t}\, K_{2\nu+1}^{2t} A_{2t} A_{2\nu+1-2t}.$$

Cette relation nous donne le nombre $B_{2\nu+1}$ en fonction des nombres A dont l'indice, pair ou impair, ne dépasse pas $2\nu+1$. Elle subsiste, d'ailleurs, pour toutes les valeurs de ν, si l'on convient encore d'annuler le $\sum$ dans le cas où ν est égal à zéro.

42. Reprenons les deux relations

$$B_{2\nu} = -A_{2\nu} + \sum_{1}^{\nu}{}_{t} K_{2\nu}^{2t} A_{2t} A_{2\nu-2t},$$

$$B_{2\nu+1} = -A_{2\nu+1} + \sum_{1}^{\nu}{}_{t} K_{2\nu+1}^{2t} A_{2t} A_{2\nu+1-2t},$$

que nous venons d'obtenir (**40** et **41**). Elles peuvent se réduire à une seule, qui est la relation

$$B_n = -A_n + \sum_{1}^{\nu}{}_{t} K_n^{2t} A_{2t} A_{n-2t},$$

dans laquelle ν désigne la partie entière de la moitié de n.

Il est à remarquer que cette relation unique ressemble beaucoup à la relation

$$B_n = -A_n + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n-1}{}_{t} K_n^t A_t A_{n-t},$$

que nous avons obtenue précédemment (**39**); mais que, dans les calculs, elle serait bien plus avantageuse, le $\sum$ qui y figure y présentant beaucoup moins de termes.

43. Quoi qu'il en soit, la relation que nous avons rappelée (**38**), et celles que nous avons établies ensuite, nous donnent chacune l'un des nombres B en fonction de deux ou plusieurs des nombres A. Nous ferons observer que la première de ces relations est linéaire par rapport aux nombres A; mais que toutes les suivantes sont du second degré par rapport à ces mêmes nombres.

Quant aux relations qu'on pourrait déduire des deux égalités

$$(\psi_0 + \psi_1)(\psi_0 - \psi_1) = (\varphi_0 - 2)^2,$$

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} = \frac{\psi_1}{\varphi_1},$$

elles seraient du second degré et par rapport aux nombres A et par rapport aux nombres B; elles présenteraient, par conséquent, une complication assez grande : nous ne les écrirons pas.

III. — Relations entre les nombres B.

44. Les relations que nous venons d'établir contiennent chacune un nombre B et plusieurs nombres A. Pour en obtenir qui ne contiennent que des nombres B, nous partirons des quatre égalités ou relations entre différentes séries que nous avons données précédemment (**36**) et où ne figurent point les fonctions génératrices des nombres A.

45. La première de ces égalités (**36**) est

$$\psi_0 - 1 + 2\cos x = \psi_1 \sin x.$$

Elle exprime que la série

$$(B_2 - 2)\frac{x^2}{2!} + (B_4 + 2)\frac{x^4}{4!} + (B_6 - 2)\frac{x^6}{6!} + (B_8 + 2)\frac{x^8}{8!} + \ldots$$

est le produit des deux séries

$$B_1\frac{x}{1!} + B_3\frac{x^3}{3!} + B_5\frac{x^5}{5!} + B_7\frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes, dans cette première égalité, et écrivant que, dans les deux membres de l'égalité nouvelle, les coefficients de x^n sont égaux, on trouve la relation

$$\frac{B_{2\nu} + (-1)^\nu . 2}{(2\nu)!} = \frac{B_{2\nu-1}}{1!(2\nu-1)!} - \frac{B_{2\nu-3}}{3!(2\nu-3)!}$$
$$+ \frac{B_{2\nu-5}}{5!(2\nu-5)!} - \ldots (-1)^{\nu-1}\frac{B_1}{(2\nu-1)!\,1!},$$

qui peut s'écrire aussi

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1} . 2 + \sum_0^{\nu-1}{}_t (-1)^t K_{2\nu}^{2t+1} B_{2\nu-1-2t},$$

si l'on convient de donner au symbole K_p^q sa signification habituelle.

Cette relation, on le voit, nous donne le nombre $B_{2\nu}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est impair et inférieur à 2ν. Elle est vraie pour toutes les valeurs de ν supérieures à zéro.

46. La deuxième des quatre égalités que nous considérons (**36**) est

$$\psi_1 = \psi_0 \sin x.$$

Elle exprime que la série

$$B_1 \frac{x}{1!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_5 \frac{x^5}{5!} + B_7 \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

est le produit des deux séries

$$B_0 + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_4 \frac{x^4}{4!} + B_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans cette deuxième égalité, puis opérant comme nous l'avons fait précédemment, nous trouvons la relation

$$\frac{B_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \frac{B_{\;\nu}}{1!(2\nu)!} - \frac{B_{2\nu-2}}{3!(2\nu-2)!} + \frac{B_{2\nu-4}}{5!(2\nu-4)!} - \ldots (-1)^{\nu} \frac{B_0}{(2\nu+1)!\,0!},$$

qui peut s'écrire aussi, à l'aide de nos notations habituelles,

$$B_{2\nu+1} = (-1)^{\nu-1} + \sum_{t}^{\nu-1}{}_{0} (-1)^t K_{2\nu+1}^{2t+1} B_{2\nu-2t}.$$

Cette relation nous donne le nombre $B_{2\nu+1}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est pair et inférieur à $2\nu+1$. Elle subsiste même dans le cas où ν est égal à zéro.

47. La troisième de nos quatre égalités (**36**) est l'égalité

$$(1+\cos 2x)\psi_0 = 2 - 4\cos x.$$

Elle exprime que la série

$$2 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots,$$

multipliée par la série

$$B_0 + B_2\frac{x^2}{2!} + B_4\frac{x^4}{4!} + B_6\frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

donne comme produit la série

$$-2 + 4\frac{x^2}{2!} - 4\frac{x^4}{4!} + 4\frac{x^6}{6!} - \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans notre troisième égalité, puis identifiant comme précédemment, nous trouvons la relation

$$\begin{aligned}2\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} - \frac{2^2}{2!}\frac{B_{2\nu-2}}{(2\nu-2)!} + \frac{2^4}{4!}\frac{B_{2\nu-4}}{(2\nu-4)!} + \ldots (-1)^\nu \frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}\frac{B_0}{0!}\\ = (-1)^{\nu-1}\frac{4}{(2\nu)!},\end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}.2 + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t 2^{2t+1} K_{2\nu}^{2t+2} B_{2\nu-2-2t}.$$

Cette relation nous donne $B_{2\nu}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est pair et inférieur à 2ν. Elle suppose essentiellement que ν soit égal ou supérieur à l'unité.

48. Prenons enfin la dernière de nos quatre égalités (**36**), c'est-à-dire l'égalité

$$(1+\cos 2x)\psi_1 = 2\sin x - 2\sin 2x.$$

Elle exprime que la série

$$2-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots,$$

multipliée par la série

$$B_1\frac{x}{1!}+B_3\frac{x^3}{3!}+B_5\frac{x^5}{5!}+B_7\frac{x^7}{7!}+\ldots,$$

donne comme produit le double de la série

$$\frac{1-2}{1!}x-\frac{1-2^3}{3!}x^3+\frac{1-2^5}{5!}x^5-\frac{1-2^7}{7!}x^7+\ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes, puis identifiant comme d'habitude, nous trouvons la relation

$$2\frac{B_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}-\frac{2^2}{2!}\frac{B_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}+\frac{2^4}{4!}\frac{B_{2\nu-3}}{(2\nu-3)!}-\ldots(-1)^\nu\frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}\frac{B_1}{1!}$$
$$=(-1)^\nu.2\frac{1-2^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

qui peut aussi s'écrire

$$B_{2\nu+1}=(-1)^\nu(1-2^{2\nu+1})+\sum_{0}^{\nu-1}{}_t(-1)^t 2^{2t+1}K_{2\nu+1}^{2t+2}B_{2\nu-1-2t}.$$

Cette relation nous donne le nombre $B_{2\nu+1}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est impair et inférieur à $2\nu+1$. Elle suppose ν au moins égal à l'unité.

49. Les quatre relations que nous venons d'obtenir entre les nombres B se rapportent toutes évidemment aux deux suites

$$B_0 \quad B_2 \quad B_4 \quad B_6 \quad \ldots,$$
$$B_1 \quad B_3 \quad B_5 \quad B_7 \quad \ldots,$$

formées, la première, par les nombres B d'indices pairs; la seconde, par les nombres B d'indices impairs. Ces mêmes relations présentent cette particularité remarquable d'être toutes les quatre linéaires par rapport aux nombres B. Elles forment, d'ailleurs, deux *couples* essentiellement différents, sur chacun desquels il convient de dire quelques mots.

50. Le premier *couple* est formé des deux premières (**45** et **46**) de nos relations, c'est-à-dire des deux relations

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}.2 + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t K_{2\nu}^{2t+1} B_{2\nu-1-2t},$$

$$B_{2\nu+1} = (-1)^{\nu-1} \quad + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t K_{2\nu+1}^{2t+1} B_{2\nu-2t}.$$

Ces deux relations résolvent deux problèmes en quelque sorte corrélatifs. Si nous nous reportons, en effet, aux deux suites considérées plus haut (**49**), chacune de ces relations nous donne un nombre quelconque d'une de ces suites en fonction de tous les nombres de l'autre qui présentent des indices moindres.

Ces deux relations, de plus, peuvent se ramener à une seule. Cette relation unique, qui les contient toutes deux, est la relation

$$B_n = (-1)^{\nu-1}.2^{2\nu+1-n} + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t K_n^{2t+1} B_{n-1-2t},$$

dans laquelle ν désigne la partie entière de la moitié de n.

51. Le second *couple* est formé des deux dernières (**47** et **48**) de nos relations, c'est-à-dire des relations

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}.2 \qquad + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t 2^{2t+1} K_{2\nu}^{2t+2} B_{2\nu-2-2t},$$

$$B_{2\nu+1} = (-1)^{\nu}(1 - 2^{2\nu+1}) + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t 2^{2t+1} K_{2\nu+1}^{2t+2} B_{2\nu-1-2t}.$$

Ces deux relations résolvent aussi deux problèmes corrélatifs. Si nous nous reportons, en effet, aux deux suites considérées plus haut (**49**), chacune de ces relations nous donne un nombre quelconque d'une de ces suites en fonction de tous les nombres de cette même suite qui le précèdent. Grâce à ces dernières relations, chacune de ces suites se trouve déterminée à la façon des séries récurrentes.

Ces deux relations, de plus, peuvent se ramener à une seule. Cette relation unique, qui les contient toutes deux, est la relation

$$B_n = (-1)^{n-\nu-1}(2^{2\nu+1-n} - 2^n B_{n-2\nu+2}) + \sum_0^{\nu-1}{}_t (-1)^t 2^{2t+1} K_n^{2t+2} B_{n-2-2t},$$

dans laquelle ν désigne, comme précédemment, la partie entière de la moitié de n.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES.

I. — Propriétés asymptotiques des nombres A.

52. Des deux égalités

$$\varphi_0(x) = \text{séc}\,x, \qquad \varphi_1(x) = \text{tang}\,x,$$

et des propriétés connues de sécx et de tang$x$, résultent les deux identités

$$\frac{1}{1^{2\nu+1}} - \frac{1}{3^{2\nu+1}} + \frac{1}{5^{2\nu+1}} - \ldots = \frac{A_{2\nu}}{(2\nu)!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu+1},$$

$$\frac{1}{1^{2\nu}} + \frac{1}{3^{2\nu}} + \frac{1}{5^{2\nu}} + \ldots = \frac{A_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu},$$

que nous avons utilisées autrefois [1], et où la lettre π désigne, comme d'habitude, le rapport de la circonférence au diamètre.

---

[1] Dans notre Note intitulée *Probabilité pour qu'une permutation ....*

53. Dans ces deux identités, chacun des seconds membres est de la forme

$$\frac{A_n}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1};$$

chacun des premiers membres tend vers l'unité lorsque ν, et par conséquent n, croît indéfiniment.

On a donc, identiquement,

$$\lim\left[\frac{A_n}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\right]=1,$$

lorsque n croît indéfiniment.

54. Considérons cette dernière égalité. Si nous posons

$$\lambda_n = n!\,2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1},$$

elle peut s'écrire

$$\lim\frac{A_n}{\lambda_n}=1.$$

Or, lorsque n croît indéfiniment, A_n est un infiniment grand. Donc λ_n en est un autre; et le rapport de λ_n à A_n tend vers la limite 1.

Nous exprimerons ce fait, sous forme de théorème, de cette nouvelle manière :

Lorsque n croît indéfiniment, le nombre λ_n, défini par l'égalité

$$\lambda_n = n!\,2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1},$$

est une valeur asymptotique de A_n.

55. Cet énoncé nous montre bien dans quel sens nous prenons la locution *valeur asymptotique*. Il est clair, puisque le nombre A_n est la moitié du nombre $P_{n,n-1}$, que nous pouvons dire, en conservant le sens de cette locution :

Le nombre $2\lambda_n$ est une valeur asymptotique du nombre des permutations alternées de n éléments.

56. Écrivons les trois égalités

$$\lim\left[\frac{A_n}{n!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\right]=1,$$

$$\lim\left[\frac{(n+1)!}{A_{n+1}}\,2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2}\right]=1,$$

$$\lim\frac{n}{n+1}=1,$$

dont la deuxième se déduit facilement de la première et dont la troisième est évidente ; puis multiplions-les membres à membres. Toutes réductions faites, nous trouvons

$$\lim\left[\frac{A_n}{A_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right]=1.$$

Or, dans cette égalité nouvelle, la quantité entre crochets n'est autre chose que le quotient de la première par la seconde des deux expressions

$$\frac{A_n}{A_{n+1}},\quad \frac{\pi}{2n}.$$

Ces deux expressions, lorsque n croît indéfiniment, sont deux infiniment petits. Leur rapport tend vers l'unité. Il est naturel de prendre $\frac{1}{n}$ pour l'infiniment petit principal. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de A_n à A_{n+1} est un infiniment petit, qui a pour valeur principale le rapport de π à $2n$.

Il est, d'ailleurs, évident que l'on peut, dans cet énoncé, remplacer le rapport de A_n à A_{n+1} par celui de $P_{n,n-1}$ à $P_{n+1,n}$.

57. L'égalité

$$\lim\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right)=1,$$

dont nous venons de faire usage, nous donne immédiatement ce nouveau théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression α_n, définie par *l'égalité*

$$\alpha_n = 2n \frac{A_n}{A_{n+1}},$$

tend vers la limite π.

D'ailleurs il est encore évident qu'on peut remplacer, dans cette expression de α_n, les nombres A_n, A_{n+1} par les nombres $P_{n,n-1}$, $P_{n+1,n}$.

II. — Propriétés asymptotiques des nombres B.

58. Comme le présent Mémoire a pour objet l'étude des permutations quasi-alternées et, par conséquent, celle des nombres B, le paragraphe précédent, où il n'est question que des nombres A, pourra sembler une simple digression. En réalité, ce paragraphe nous était nécessaire, car c'est des propriétés asymptotiques des nombres A que nous allons déduire celles des nombres B.

59. Pour y arriver, considérons (**14**) la formule

$$A_{n+1} = 2A_n + B_n,$$

qui est le fondement de nos recherches sur les permutations quasi-alternées. Nous en tirons facilement l'égalité

$$n\left(1 - \frac{B_n}{A_{n+1}}\right) = 2n \frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut (**57**), lorsque n croît indéfiniment, le second membre de cette égalité tend vers π, c'est-à-dire vers une limite finie. Le premier membre tend vers cette même limite. Or, son premier facteur, n, est un infiniment grand. Donc son second facteur, c'est-à-dire la quantité entre parenthèses, est un infiniment petit. Donc finalement

$$\lim \frac{B_n}{A_{n+1}} = 1.$$

Il suit de là que le rapport de l'infiniment grand A_{n+1} à l'infiniment grand B_n a pour limite l'unité. Donc

Lorsque n croît indéfiniment, A_{n+1} *est une valeur asymptotique de* B_n.

60. Si nous nous rappelons que A_{n+1} est (**10**) la moitié de $P_{n+1,n}$, et que B_n est (**10**) la moitié de $P_{n,n-2}$, nous voyons immédiatement que ce théorème peut s'énoncer sous cette nouvelle forme :

Lorsque n croît indéfiniment, le nombre des permutations alternées de n + 1 éléments est une valeur asymptotique du nombre des permutations quasi-alternées de n éléments.

Ce nouvel énoncé montre, bien mieux, selon nous, que le précédent, l'importance de ce remarquable théorème.

61. Nous pouvons donner aussi, en fonction de n, une valeur asymptotique de B_n. D'après ce qui précède (**54**), en effet, λ_{n+1} est une valeur asymptotique de A_{n+1}. Donc :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression λ_{n+1}, *définie par l'égalité*

$$\lambda_{n+1} = (n+1)!\, 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2},$$

est une valeur asymptotique du nombre B_n.

Il en résulte, d'ailleurs, cette conséquence immédiate :

Le nombre $2\lambda_{n+1}$ *est une valeur asymptotique du nombre* $P_{n,n-2}$.

62. Écrivons les quatre égalités

$$\lim\left(\frac{A_{n+1}}{A_{n+2}}\,\frac{2n+2}{\pi}\right) = 1,$$

$$\lim\frac{B_n}{A_{n+1}} = 1,$$

$$\lim\frac{A_{n+2}}{B_{n+1}} = 1,$$

$$\lim\frac{n}{n+1} = 1,$$

dont les trois premières résultent de ce qui précède (**56** et **59**), et dont la quatrième est évidente; puis multiplions-les membres à membres. Toutes réductions faites, nous trouvons l'équation nouvelle

$$\lim\left(\frac{B_n}{B_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1,$$

qui nous donne immédiatement cette proposition :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de B_n à B_{n+1} est un infiniment petit qui a pour valeur principale le rapport de π à $2n$.

Il est, d'ailleurs, évident qu'on peut, dans cet énoncé, remplacer B_n et B_{n+1} respectivement par $P_{n,n-2}$ et $P_{n+1,n-1}$.

63. Cette même égalité

$$\lim\left(\frac{B_n}{B_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1$$

nous donne encore ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression β_n, définie par l'égalité

$$\beta_n = 2n\,\frac{B_n}{B_{n+1}}$$

tend vers la limite π.

D'ailleurs, il est encore évident qu'on peut, dans l'expression de β_n remplacer B_n et B_{n+1} respectivement par $P_{n,n-2}$ et $P_{n+1,n-1}$.

64. Prenons enfin, simultanément, les deux égalités

$$\lim\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1,$$

$$\lim\frac{A_{n+1}}{B_n} = 1;$$

et multiplions-les membres à membres. Nous trouvons la relation

$$\lim\left(\frac{A_n}{B_n}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1;$$

d'où nous déduisons ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de A_n *à* B_n *est un infiniment petit qui a pour valeur principale le rapport de* π *à* $2n$.

65. Ce théorème entraîne immédiatement celui-ci :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression γ_n, *définie par l'égalité*

$$\gamma_n = 2n\frac{A_n}{B_n},$$

tend vers la limite π.

66. On peut remarquer, d'ailleurs, touchant ces deux derniers théorèmes :

D'abord que, dans l'énoncé de chacun d'eux, on peut remplacer A_n et B_n respectivement par $P_{n,n-1}$ et $P_{n,n-2}$;

Ensuite que, parmi tous les théorèmes que nous venons d'établir, ces deux derniers sont les seuls où les nombres A et B qui y figurent soient, dans le triangle des séquences, placés sur une même ligne.

67. Rapprochons enfin les différents résultats que nous avons obtenus, tant dans le présent paragraphe que dans le précédent. Nous arrivons à ces deux théorèmes, dont le second n'est qu'une conséquence du premier, et qui nous semblent fort remarquables :

1° *Lorsque n croît indéfiniment, les trois rapports*

$$\frac{A_n}{A_{n+1}},\quad \frac{B_n}{B_{n+1}},\quad \frac{A_n}{B_n}$$

sont trois infiniment petits ayant la même valeur principale, et cette valeur principale n'est autre chose que le rapport de π *à* $2n$;

2° *Lorsque n croît indéfiniment, les trois expressions*

$$2n\frac{A_n}{A_{n+1}},\quad 2n\frac{B_n}{B_{n+1}},\quad 2n\frac{A_n}{B_n}$$

tendent toutes les trois vers la même limite; et cette limite n'est autre chose que le nombre π.

CHAPITRE V.

QUESTION DE PROBABILITÉS.

I. — Détermination de la probabilité z_n.

68. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 5 novembre 1883, nous avons supposé qu'on prenait une permutation au hasard, parmi les permutations des n premiers nombres, puis nous avons fait connaître : en premier lieu, la probabilité pour que cette permutation fût une permutation alternée; en second lieu, une valeur asymptotique de cette probabilité lorsque n croît indéfiniment.

Nous nous proposons maintenant de chercher la probabilité pour que cette même permutation soit une permutation quasi-alternée, et de déterminer une valeur asymptotique de cette nouvelle probabilité, dans le cas encore où n croît indéfiniment.

69. Considérons le système complet des permutations des n premiers nombres. Le nombre total de ces permutations est $n!$ Le nombre de celles qui sont quasi-alternées est $P_{n,n-2}$. Si donc nous désignons par z_n la probabilité pour qu'une permutation de n éléments soit une permutation quasi-alternée, nous avons, d'après la définition même de la probabilité,

$$z_n = \frac{P_{n,n-2}}{n!}.$$

Or, comme nous le savons (**10**),

$$P_{n,n-2} = 2B_n.$$

Donc

$$z_n = \frac{2B_n}{n!}.$$

Nous sommes, par conséquent, ramenés à la considération des nombres B.

70. Nous avons montré, dans le cours du présent travail (**19**), que, pour toute valeur de n, le nombre B_n était le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement, suivant les puissances croissantes de x, du quotient

$$\frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}.$$

Il s'ensuit immédiatement ce théorème :

La probabilité pour qu'une permutation des n premiers nombres soit une permutation quasi-alternée est juste le double du coefficient de x^n dans le développement du quotient précédent suivant les puissances croissantes de x.

71. Cette valeur de la probabilité z_n est tout à fait générale. Si l'on distingue deux cas, selon que n est pair ou impair, on déduit des fonctions génératrices de $B_{2\nu}$ et de $B_{2\nu+1}$ ces deux nouveaux théorèmes, qui ne sont que des corollaires du précédent :

1° *La probabilité pour qu'une permutation des 2ν premiers nombres soit une permutation quasi-alternée est juste le double du coefficient de $x^{2\nu}$ dans le développement du produit*

$$(\text{séc}\, x - 2)\,\text{séc}\, x,$$

suivant les puissances croissantes de x;

2° *La probabilité pour qu'une permutation des $2\nu + 1$ premiers nombres soit une permutation quasi-alternée est juste le double du coefficient de $x^{2\nu+1}$ dans le développement du produit*

$$(\text{séc}\, x - 2)\,\text{tang}\, x,$$

suivant les puissances croissantes de x.

72. Nous connaissons ainsi la probabilité cherchée z_n. Il serait évidemment facile de la mettre sous la forme soit d'une dérivée, soit d'une intégrale définie. Nous nous dispenserons de ces calculs, qui n'ajouteraient rien à nos résultats.

II. — Valeur asymptotique de z_n.

73. Pour obtenir une valeur asymptotique de z_n, lorsque n croît indéfiniment, nous écrivons les trois égalités

$$\lim \left[\frac{A_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\right] = 1,$$

$$\lim \frac{B_n}{A_{n+1}} = 1,$$

$$\lim \frac{n+1}{n} = 1,$$

dont les deux premières résultent de ce qui précède (**53** et **59**), et dont la troisième est évidente; puis nous les multiplions membres à membres. Toutes réductions faites, nous trouvons l'égalité nouvelle

$$\lim \left[\frac{B_n}{n!}\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\right] = 1.$$

74. D'après ce que nous avons vu plus haut (**69**),

$$B_n = \frac{1}{2} n!\, z_n.$$

Portant cette valeur de B_n dans la dernière des égalités précédentes (**73**), nous arrivons à l'égalité finale

$$\lim \left[z_n \frac{1}{4n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\right] = 1.$$

Or, dans cette nouvelle relation, la quantité entre crochets n'est autre chose que le rapport de z_n à $4n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2}$. Ce rapport ayant pour limite l'unité, nous pouvons énoncer ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, la probabilité pour qu'une permutation des n premiers nombres soit une permutation quasi-alternée *est un infiniment petit dont le rapport au produit infiniment petit*

$$4n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2}$$

a pour limite l'unité.

75. Étendant aux infiniment petits une locution que nous n'avons employée jusqu'ici que pour les infiniment grands, nous pouvons dire aussi que ce produit est une *valeur asymptotique* de la probabilité z_n.

Il est à remarquer que cette valeur asymptotique est relativement simple. Il est à remarquer aussi qu'elle est toujours incommensurable, bien que, par sa nature même, la probabilité z_n soit, au contraire, toujours commensurable.