JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. JABLONSKI

Théorie des permutations et des arrangements circulaires complets

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 331-349.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__331_0>

Théorie des permutations et des arrangements circulaires *complets* (¹);

PAR M. E. JABLONSKI,

Professeur au lycée Charlemagne.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉTHODE POUR CALCULER LE NOMBRE DES PERMUTATIONS ET DES ARRANGEMENTS CIRCULAIRES AVEC RÉPÉTITIONS.

1. La théorie des permutations et des arrangements avec ou sans répétitions est complètement faite pour le cas où toutes les lettres qui les composent sont supposées placées en ligne droite ou plus généralement le long d'une ligne non fermée; pour rappeler cette distribution, on les appelle *rectilignes*. Lorsque les lettres sont supposées écrites le long d'une circonférence ou d'une ligne fermée quelconque, les permutations ou les arrangements sont dits *circulaires* et je ne crois pas que l'on ait encore résolu la question d'en déterminer le nombre, sauf dans le cas particulier où il n'y a pas répétition d'une ou de plusieurs lettres. C'est pour la solution générale de cette question que je vais exposer une méthode très élémentaire; je m'occuperai d'abord des permutations, puis des arrangements, cet ordre est ici nécessaire, et enfin, dans la seconde Partie de ce travail, je montrerai comment on peut réduire les résultats en formules générales.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (avril 1892).

2. *Permutations circulaires.* — Le cas où aucune lettre n'est répétée est bien connu : je vais le rappeler cependant, pour lui appliquer le mode de raisonnement qui m'a conduit à la solution de la question générale.

Soit Q_m le nombre des permutations circulaires de m lettres sans répétitions ; Q_{m-1} le même nombre pour $m-1$ lettres ; si l'on applique d'abord la méthode usitée pour les permutations rectilignes sans répétitions, on trouve la formule de récurrence

$$(1) \qquad Q_m = (m-1) Q_{m-1}.$$

Elle diffère de la formule connue pour les permutations rectilignes simples

$$P_m = m P_{m-1}.$$

La raison en est que $m-1$ lettres rangées en cercles présentent $m-1$ places seulement où l'on peut introduire la $m^{\text{ième}}$ lettre, tandis qu'elles en présentent m, lorsqu'elles sont disposées en ligne droite. De la formule (1), on tire

$$Q_m = 1.2.3\ldots(m-1) = (m-1)!$$

ou

$$(2) \qquad Q_m = \frac{P_m}{m}.$$

Cette méthode calquée sur celle qui sert pour les permutations rectilignes ne réussit plus lorsqu'il y a répétition d'une ou de plusieurs lettres, il faut se placer à un autre point de vue.

Concevons une permutation rectiligne simple de m lettres et écrivons ces lettres sur un cercle, dans l'ordre où on les lit de gauche à droite, nous aurons ainsi une permutation circulaire simple des mêmes lettres. Si au lieu de commencer la lecture par la première lettre à gauche, on la commence par une quelconque, en allant toujours de gauche à droite, et reprenant la lecture à partir de la première à gauche dès que l'on a atteint la dernière à droite, on retrouve toujours la même permutation circulaire : donc, comme on peut commencer la lecture à partir d'une quelconque des m lettres, on voit que chaque permutation rectiligne simple donne m fois la même permutation circulaire simple, d'où la relation

$$P_m = mQ_m,$$

c'est-à-dire la relation (2).

3. Le raisonnement précédent serait en défaut si deux lectures d'une même permutation rectiligne faites à partir de deux lettres de rangs différents, la première et celle de rang $p+1$, redonnaient la même permutation rectiligne, parce qu'alors on emploierait plusieurs fois cette même permutation rectiligne et il ne serait plus vrai de dire qu'une permutation rectiligne prise une seule fois donne m fois la même permutation circulaire. Cette circonstance se présente lorsque, les p premières lettres étant transportées dans leur ordre à la suite de la dernière, on retrouve la même permutation rectiligne, c'est-à-dire lorsque la permutation rectiligne considérée peut se partager exactement en groupes identiques de p lettres. Cela exige d'abord que p soit un diviseur de m et ensuite que chaque lettre soit répétée $\frac{m}{p}$ fois au moins; cette particularité ne se produit pas pour les permutations sans répétitions.

4. Considérons maintenant les permutations rectilignes avec répétitions de plusieurs lettres

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad l,$$

respectivement répétées

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \lambda$$

fois, et soit

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda = m.$$

Leur nombre est, comme on le sait,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta\ldots1.2.3\ldots\lambda}$$

ou

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

J'examine d'abord le cas où

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots \quad \lambda$$

n'ont aucun diviseur commun autre que l'unité. Alors, comme dans le cas des permutations simples, il est impossible qu'une permutation rectiligne se partage en groupes identiques, car, chaque lettre devant être répétée le même nombre de fois dans chaque groupe, il faudrait que tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ fussent divisibles par un même nombre entier autre que l'unité, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte que, dans ce cas, le nombre des permutations circulaires avec les mêmes répétitions est encore égal au nombre des permutations rectilignes divisé par m, c'est-à-dire à

$$\frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}.$$

5. Supposons que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ n'aient qu'un seul diviseur premier commun d, il divise aussi leur somme m. Soient

$$\alpha = \alpha_1 d, \qquad \beta = \beta_1 d, \qquad \gamma = \gamma_1 d, \qquad \ldots,$$
$$\lambda = \lambda_1 d, \qquad m = m_1 d.$$

L'ensemble des permutations rectilignes peut se décomposer en deux catégories et deux seulement. D'abord les permutations rectilignes qui ne peuvent pas se partager en groupes identiques de m_1 lettres, puis celles où ce partage est possible, soient Q et Q_1 leurs nombres respectifs. On a évidemment

$$Q + Q_1 = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

puis, si l'on observe qu'il suffit, pour avoir toutes les permutations rectilignes de la seconde catégorie, de considérer toutes celles qui constituent un des groupes, on a

$$Q_1 = \frac{m_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!}.$$

Ces deux relations donnent Q et Q_1. Cela posé, chacune des Q permutations rectilignes de la première catégorie donne m fois la même permutation circulaire et chacune des Q_1 de la seconde catégorie donne m_1 fois la même permutation circulaire : donc le nombre cherché des permutations circulaires avec les mêmes répétitions est

$$\frac{Q}{m} + \frac{Q_1}{m_1};$$

chacune des parties de cette somme est nécessairement un nombre entier.

6. Supposons maintenant que $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ admettent deux diviseurs premiers communs d et d_1, soit

$$\begin{array}{lllll}
\alpha = \alpha_1 d, & \beta = \beta_1 d, & \ldots, & \lambda = \lambda_1 d, & m = m_1 d, \\
\alpha = \alpha_2 d_1, & \beta = \beta_2 d_1, & \ldots, & \lambda = \lambda_2 d_1, & m = m_2 d_1, \\
\alpha = \alpha_3 d d_1, & \beta = \beta_3 d d_1, & \ldots, & \lambda = \lambda_3 d d_1, & m = m_3 d d_1.
\end{array}$$

L'ensemble des permutations rectilignes peut se décomposer en quatre catégories :

1° Celles qui ne peuvent pas se partager en groupes identiques de lettres au nombre de m_1, ou de m_2 ou de m_3, soit Q leur nombre;

2° Celles qui se partagent en groupes identiques de m_1 lettres et pas moins, soit Q_1 leur nombre;

3° Celles qui se partagent en groupes identiques de m_2 lettres et pas moins, soit Q_2 leur nombre;

4° Enfin celles qui se partagent en groupes identiques de m_3 lettres et pas moins, soit Q_3 leur nombre.

On a évidemment

$$Q + Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

Si, au lieu des données $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ on prend $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, puis α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$ et enfin $\alpha_3, \beta_3, \ldots, \lambda_3$, que l'on répète le même raisonnement, on aura de même

$$Q_1 + Q_3 = \frac{m_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!},$$

$$Q_2 + Q_3 = \frac{m_2!}{\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!},$$

$$Q_3 = \frac{m_3!}{\alpha_3!\,\beta_3!\ldots\lambda_3!}.$$

Ces quatre relations déterminent les nombres Q, Q_1, Q_2, Q_3 et le nombre cherché des permutations circulaires avec les mêmes répétitions est

$$\frac{Q}{m} + \frac{Q_1}{m_1} + \frac{Q_2}{m_2} + \frac{Q_3}{m_3}.$$

7. Ce qui précède suffit pour faire comprendre la méthode; j'aborde le cas le plus général.

Soit d_n le plus grand commun diviseur des nombres

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \lambda,$$

et soient

$$1,\quad d_1,\quad d_2,\quad \ldots,\quad d_p,\quad \ldots,\quad d_n$$

tous les diviseurs de d_n, c'est-à-dire tous les diviseurs communs à α, β, ..., λ. Posons

$$\alpha = \alpha_p d_p, \qquad \beta = \beta_p d_p, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \lambda_p d_p, \qquad m = m_p d_p.$$

On peut toujours mettre tous les diviseurs de d_n dans un ordre tel que d_p n'ait aucun diviseur dans la suite des diviseurs de d_n qui soit d'indice supérieur à p, on sait d'ailleurs qu'il ne peut avoir aucun diviseur en dehors de cette suite; il en résultera que tous les diviseurs de $\frac{d_n}{d_p}$ sont parmi ceux de d_n dont l'indice est supérieur ou égal à p.

Cela posé, on peut partager l'ensemble des permutations rectilignes en autant de catégories qu'il y a de diviseurs de d_n, chaque catégorie étant caractérisée par ce fait qu'une permutation rectiligne qui en fait partie peut se partager en d_p groupes identiques de m_p lettres et pas moins; soit Q_p leur nombre. On a alors pour déterminer les nombres entiers Q_p au nombre de $n+1$, les $n+1$ équations linéaires

$$Q+Q_1+Q_2+\ldots+Q_p+\ldots+Q_n=\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

$$Q_1+\ldots+Q_i+\ldots+Q_n=\frac{m_1!}{\alpha_1!\,\beta!_1\ldots\lambda_1!},$$

$$Q_2+\ldots+Q_j+\ldots+Q_n=\frac{m_2!}{\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!},$$

....,

$$Q_n=\frac{m_n!}{\alpha_n!\,\beta_n!\ldots\lambda_n!};$$

d_i est l'un quelconque des diviseurs de $\frac{d_n}{d_1}$;

d_j est l'un quelconque des diviseurs de $\frac{d_n}{d_2}$;

....

Ces équations déterminent complètement les inconnues, car le déterminant principal se réduit à sa diagonale principale et est égal à $+1$.

Connaissant ces nombres, on a immédiatement le nombre demandé des permutations circulaires avec les mêmes répétitions, savoir

$$\frac{Q}{m}+\frac{Q_1}{m_1}+\frac{Q_2}{m_2}+\ldots+\frac{Q_p}{m_p}+\ldots+\frac{Q_n}{m_n};$$

chacune des parties de cette somme est un nombre entier.

La question est complètement résolue; nous verrons plus loin comment on peut exprimer le résultat par une formule simple.

8. *Arrangements circulaires avec répétitions.* — Je considère d'abord les arrangements rectilignes, c'est-à-dire tous les groupes de m lettres que l'on peut former avec p lettres distinctes $a, b, c, \ldots, l$ disposées en ligne droite et dont chacune peut être répétée jusqu'à m fois, de façon que deux groupes diffèrent soit par l'ordre, soit par le choix des lettres. On peut les décomposer en permutations avec répétitions de m lettres.

A cet effet, je considère tous les systèmes de solutions en nombres entiers positifs ou nuls de l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m,$$

où α, β, γ, ..., λ sont au nombre de p; je les appelle des *indices*.

Je ne prends parmi ces systèmes que ceux qui sont distincts, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent pas se déduire les uns des autres par une simple permutation des mêmes indices.

Soit k le nombre des indices d'un même système qui ne sont pas nuls, $k \leqq p$. Je prends k lettres parmi les p lettres données a, b, c, ..., l et je forme toutes les permutations avec répétitions de ces k lettres, où la première est répétée α fois, la seconde β fois, etc. Je fais cette même opération avec le même système d'indices sur tous les arrangements simples que je puis former avec les p lettres données, prises k à k, et j'ai ainsi toutes les permutations qui répondent à un même système d'indices, mais elles ne sont distinctes que si tous les indices du système considéré sont distincts.

Dans ce cas, le nombre total des permutations ainsi formées, qui répondent à un même système d'indices, est

$$p(p-1)\ldots(p-k+1)\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

Mais si les indices de ce système se partagent en q groupes : savoir, en i_1, i_2, i_3, ..., i_q égaux entre eux de façon que

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_q = k,$$

il faudra, pour avoir le nombre total de permutations distinctes répondant au système des indices, diviser le nombre précédemment trouvé par le produit

$$i_1!\, i_2! \ldots i_q!$$

ce qui donne l'expression générale de ce nombre

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{i_1!\, i_2!\ldots i_q!}\;\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

En calculant ce nombre pour chacun des systèmes distincts d'indices et les ajoutant on doit trouver le nombre des arrangements rectilignes avec répétitions, ou arrangements complets de p lettres m à m.

Cela est aisé à vérifier; on sait que ce nombre est p^m; or, si l'on développe

$$(a+b+c+\ldots+l)^m,$$

la somme précédemment formée est celle des termes distincts de ce développement; donc, si l'on fait

$$a=b=c=\ldots=l=1,$$

tous les termes se réduisant à l'unité, le développement se réduit au nombre des termes distincts et l'expression non développée se réduit à p^m.

Cela posé, pour un même système d'indices, on sait passer des permutations rectilignes, formées avec k lettres quelconques prises parmi les p lettres données, aux permutations circulaires de ces mêmes lettres avec les mêmes répétitions et en calculer le nombre. En multipliant ce nombre par

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{i_1!\,i_2!\ldots i_q!},$$

on aura le nombre des permutations circulaires de mêmes indices formées indistinctement avec toutes les lettres données, et enfin en faisant la somme de tous les résultats qui répondent à tous les systèmes distincts d'indices qui vérifient

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m,$$

on aura le nombre total des arrangements circulaires complets.

SECONDE PARTIE.

FORMULES GÉNÉRALES.

9. Soient α, β, $\ldots$, λ les indices d'une permutation et D leur plus grand commun diviseur, posons

$$\alpha=\alpha' \mathrm{D},\qquad \beta=\beta' \mathrm{D},\qquad \ldots,\qquad \lambda=\lambda' \mathrm{D},$$

les nombres entiers α', β', ..., λ' sont premiers entre eux. Faisons

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m=m'\mathrm{D}$$

et posons, quel que soit n,

$$\mathrm{P}(n)=\frac{(m'n)!}{(\alpha'n)!\,(\beta'n)!\ldots(\lambda'n)!}.$$

Nous avons vu dans la première Partie que si d_p est l'un quelconque des diviseurs de D, et si l'on désigne par $\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)$ le nombre des permutations rectilignes d'indices α, β, ..., λ qui peuvent se partager en d_p groupes identiques, et pas plus de $\left(m'\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)$ lettres, on a

$$\sum_1^{\mathrm{D}}\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{D}),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs de D, y compris 1 et D. Plus généralement, si n est l'un quelconque des diviseurs de D, on a

$$(\alpha)\qquad \sum_1^{n}\mathrm{Q}\left(\frac{n}{d_p}\right)=\mathrm{P}(n),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs d_p de D qui sont aussi diviseurs de n, y compris 1 et n.

Le nombre à calculer des permutations circulaires d'indices α, β, ..., λ est

$$\sum_1^{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)}{m_p};$$

or

$$m_p=\frac{m}{d_p},$$

donc cette somme est

$$\frac{1}{m}\sum_1^{\mathrm{D}}\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)d_p,$$

étendue à tous les diviseurs d_p de D, y compris 1 et D.

10. Pour la solution de cette question que je généraliserai plus loin, M. C. Jordan a bien voulu m'indiquer tout le parti que je pouvais tirer d'un théorème général de la théorie des nombres, à savoir :

Si l'on désigne par $a, b, c, \ldots, l$ tous les diviseurs premiers absolus et distincts d'un nombre entier n et si l'on a

$$\sum_1^n \mathrm{R}(d_p) = \mathrm{S}(n),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs d_p de n, y compris 1 et n, et aussi

$$\sum_1^d \mathrm{R}(d_q) = \mathrm{S}(d),$$

d étant l'un quelconque des diviseurs de n et d_q l'un quelconque des diviseurs de n qui sont aussi diviseurs de d, on a

$$\mathrm{R}(n) = \mathrm{S}(n) - \sum \mathrm{S}\left(\frac{n}{a}\right) + \sum \mathrm{S}\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum \mathrm{S}\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots,$$

les sommes s'étendant ici aux combinaisons un à un, deux à deux, etc., des nombres $a, b, c, \ldots, l$.

Cherchons quelle est la fonction R telle que $\mathrm{S}(n) = n$, on a immédiatement

$$\mathrm{R}(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \ldots$$

ou

$$\mathrm{R}(n) = n\left(1 - \sum \frac{1}{a} + \sum \frac{1}{ab} - \sum \frac{1}{abc} + \ldots\right)$$

ou

$$\mathrm{R}(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

ou enfin

$$\mathrm{R}(n) = \varphi(n),$$

$\varphi(n)$ étant la fonction bien connue qui exprime combien il y a de nombres premiers avec n et moindres que n.

On a donc

$$\sum_1^n \varphi(d_p) = n$$

et aussi

$$\sum_1^{d_p} \varphi(d') = d_p,$$

d' étant l'un quelconque des diviseurs de d_p.

11. Cela posé, le nombre cherché des permutations circulaires peut s'écrire

$$\frac{1}{m}\sum_1^{D}\left[Q\left(\frac{D}{d_p}\right)\sum_1^{d_p}\varphi(d')\right];$$

d' étant l'un quelconque des diviseurs de d_p et d_p l'un quelconque des diviseurs de D, d' peut prendre toutes les valeurs des diviseurs de D et l'on peut se proposer d'ordonner les termes de cette somme par rapport aux valeurs que peut prendre $\varphi(d')$. Cherchons le groupe des termes correspondant à une valeur déterminée de d'. Le nombre d_p étant un multiple de d', posons

$$d_p = \varepsilon d',$$

ε étant entier, $\frac{D}{d_p}$ qui est entier devient

$$\frac{D}{d'}\frac{1}{\varepsilon},$$

donc ε est un diviseur du nombre entier $\frac{D}{d'}$ que je désignerai par δ'; et, réciproquement, à tout diviseur ε de ce nombre répond un terme contenant $\varphi(d')$ en facteur; la somme de pareils termes est donc

$$\varphi(d')\sum_1^{\delta'} Q\left(\frac{\delta'}{\varepsilon}\right)$$

ou, en vertu de l'égalité (α),

$$\varphi(d')P(\delta') \qquad (d'\delta' = D);$$

d'où cette formule très simple, pour le nombre cherché,

$$\frac{1}{m}\sum_{1}^{D} P(\delta)\varphi(d) \qquad (d\delta = D),$$

cette somme étant étendue à tous les diviseurs d de D, y compris 1 et D, en convenant de faire $\varphi(1) = 1$. De là ce théorème :

Théorème. — *Le nombre des permutations circulaires d'objets distincts répétés respectivement α, β, ..., λ fois est*

$$\frac{1}{m}\sum_{1}^{D} P\left(\frac{D}{d}\right)\varphi(d), \qquad \varphi(1) = 1,$$

où $m = \alpha + \beta + \ldots + \lambda$; D est le plus grand commun diviseur des nombres α, β, ..., λ; d l'un quelconque des diviseurs de D, y compris 1 et D. Le nombre entier $\varphi(d)$ est celui qui exprime combien il y a de nombres premiers avec d, moindres que d; enfin $P\left(\frac{D}{d}\right)$ est le nombre des permutations rectilignes des mêmes objets ayant pour indices

$$\frac{\alpha}{d}, \quad \frac{\beta}{d}, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda}{d}.$$

Il en résulte immédiatement pour les arrangements circulaires complets p à p de m objets distincts le théorème suivant :

Théorème. — *Le nombre des arrangements circulaires complets p à p de m objets distincts est*

$$\frac{1}{m} \mathbf{S} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{i_1!\, i_2! \ldots i_q!} \sum_{1}^{n} P\left(\frac{n}{d}\right)\varphi(d), \qquad \varphi(1) = 1.$$

La somme $\mathbf{S}$ s'étendant à tous les systèmes distincts d'indices ou solutions en nombres entiers et positifs de l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m,$$

k désigne le nombre des indices non nuls dans un même système, n le plus grand commun diviseur des indices d'une même solution et enfin les nombres $i_1, i_2, \ldots, i_q$, dont la somme est k, expriment combien dans un même système d'indices il y en a de même valeur.

Dans le cas particulier des arrangements circulaires simples, on a

$$k = m, \qquad i_1 = i_2 = \ldots = i_{q-1} = 0, \qquad i_q = m, \qquad n = 1;$$

donc le nombre des arrangements circulaires simples de p lettres m à m est

$$\frac{1}{m} p(p-1)\ldots(p-m+1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{m} A_p^m,$$

A_p^m représentant le nombre des arrangements rectilignes simples. C'est ce qu'il est facile de voir directement.

12. *Généralisations.* — Les questions particulières que nous avions en vue sont complètement résolues, mais je ne crois pas sans intérêt de montrer comment la méthode qui a réussi peut servir à résoudre des questions plus étendues.

Posons en général

$$(\beta) \qquad \sum_1^n Q\left(\frac{n}{d}\right) = P(n).$$

d étant l'un quelconque des diviseurs de n qui est lui-même l'un quelconque des diviseurs de D. Les nombres $Q\left(\frac{D}{d}\right)$ n'ont plus maintenant le sens particulier qu'on leur attribuait plus haut, ils sont seulement assujettis à être déterminés pour chaque valeur de d. Quant aux nombres $P(n)$, ils sont définis par l'égalité précédente (β).

Supposons que l'on veuille calculer

$$\sum_1^D Q\left(\frac{D}{d}\right) d',$$

où t est absolument quelconque. La marche à suivre est la même que plus haut; cherchons d'abord Q de façon que

$$\sum_1^n \mathrm{Q}\left(\frac{n}{d}\right) = n^t \qquad (d \text{ diviseur de } n).$$

En appliquant le théorème général, on a

$$\mathrm{Q}(n) = n^t\left(1 - \frac{1}{a^t}\right)\left(1 - \frac{1}{b^t}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{l^t}\right),$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant tous les diviseurs premiers distincts de n; nous la désignerons par

$$\varphi_t(n).$$

Pour $t = 1$, on retrouve la fonction connue

$$\varphi_1(n) \quad \text{ou} \quad \varphi(n).$$

Pour $t = 0$, on a, quel que soit t et $n \neq 1$,

$$\varphi_0(n) = 1 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^3 + \ldots = 0.$$

Mais, pour $n = 1$, il faut convenir que l'on aura toujours

$$\varphi_t(1) = 1,$$

quel que soit t.

Cela posé, en raisonnant comme plus haut, on a

$$(\gamma) \qquad \sum_1^{\mathrm{D}} \mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d}\right) d^t = \sum_1^{\mathrm{D}} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{D}}{d}\right) \varphi_t(d).$$

L'arbitraire laissé pour le choix des fonctions Q permet de déduire de cette égalité générale une infinité de relations, nous allons en examiner quelques-unes.

13. Appliquons-la d'abord à trouver des relations entre les fonctions $\varphi_t(n)$. A cet effet, faisons

$$Q'\left(\frac{n}{d}\right) = Q\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{n}{d}\right)^\theta,$$

θ étant quelconque, on a

$$\sum_1^D Q'\left(\frac{D}{d}\right) d^t = \sum_1^D Q\left(\frac{D}{d}\right) D^\theta d^{t-\theta} = D^\theta \sum_1^D Q\left(\frac{D}{d}\right) d^{t-\theta}$$

ou

$$\sum_1^D Q'\left(\frac{D}{d}\right) d^t = D^\theta \sum_1^D P\left(\frac{D}{d}\right) \varphi_{t-\theta}(d).$$

D'autre part, si l'on fait

$$P'(n) = \sum_1^n Q'\left(\frac{n}{d}\right),$$

on a aussi

$$\sum_1^D Q'\left(\frac{D}{d}\right) d^t = \sum_1^D P'\left(\frac{D}{d}\right) \varphi_t(d) = D^\theta \sum_1^D P\left(\frac{D}{d}\right) \varphi_{t-\theta}(d)$$

ou

$$\sum_1^D P'(\delta)\, \varphi_t(d) = D^\theta \sum_1^D P(\delta)\, \varphi_{t-\theta}(d) \qquad (d\delta = D).$$

Mais on a aussi

$$P'(\delta) = \sum_1^\delta Q'\left(\frac{\delta}{d'}\right) \qquad (d' \text{ diviseur de } \delta, \text{ qui est diviseur de } D)$$

ou

$$P'(\delta) = \sum_1^\delta Q\left(\frac{\delta}{d'}\right)\left(\frac{\delta}{d'}\right)^\theta = \delta^\theta \sum_1^\delta Q\left(\frac{\delta}{d'}\right) d'^{-\theta}$$

ou, en vertu de (γ),

$$P'(\delta) = \delta^\theta \sum_1^\delta P\left(\frac{\delta}{d'}\right) \varphi_{-\theta}(d').$$

On a donc l'égalité fondamentale

$$D^\theta \sum_1^D P(\delta)\,\varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^D \left[\delta_1^\theta \sum_1^D P(\delta')\,\varphi_{-\theta}(d')\right]\varphi_t(d_1)$$

$$(d\delta = d_1\delta_1 = D \text{ et } d'\delta' = \delta_1).$$

Ordonnons le second membre par rapport aux valeurs de $P(\delta')$ lorsque δ' prend toutes les valeurs des diviseurs de D; si l'on fait

$$\delta' = \delta, \qquad \delta_1 = d'\delta,$$

on a

$$d_1 = \frac{D}{\delta}\frac{1}{d'} = \frac{d}{d'}:$$

donc d' est un diviseur de d et réciproquement à tout diviseur d' de d répond dans le second membre au terme en $P(\delta)$ et l'on a

$$D^\theta \sum_1^D P(\delta)\,\varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^D \left[P(\delta) \sum_1 \delta^\theta d'^\theta \varphi_{-\theta}(d')\,\varphi_t\left(\frac{d}{d'}\right)\right].$$

Cette égalité ayant lieu non seulement pour D mais pour tous les diviseurs, on en conclut

$$D^\theta \varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^d \delta^\theta d'^\theta \varphi_{-\theta}(d')\,\varphi_t\left(\frac{d}{d'}\right) \qquad (d' \text{ diviseur de } d)$$

ou

$$\varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^d \left(\frac{d'}{d}\right)^\theta \varphi_{-\theta}(d')\,\varphi_t\left(\frac{d}{d'}\right).$$

Mais $\frac{d}{d'}$ est aussi l'un quelconque des diviseurs de d : donc enfin

$$\varphi_{t-\theta}(n) = \sum_1^n \varepsilon^{-\theta} \varphi_t(\varepsilon)\,\varphi_{-\theta}\left(\frac{n}{\varepsilon}\right),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs ε du nombre entier n, y compris 1 et n.

Les indices t et θ sont quelconques, mais il faut se rappeler que, pour $t = 0$ ou $\theta = 0$, $\varphi_0(\varepsilon)$ est nul, sauf pour $\varepsilon = 1$ auquel cas il est égal à 1.

Si l'on fait $\theta = -1$, on a

$$\varphi_{t+1}(n) = \sum_1^n \varepsilon \varphi_t(\varepsilon)\varphi\left(\frac{n}{\varepsilon}\right).$$

D'où l'on voit que l'on peut exprimer φ_t au moyen de sommes ne dépendant que de φ_1 si t est un entier quelconque.

14. Comme seconde application, faisons

$$Q\left(\frac{n}{d}\right) = 1 \qquad \text{(quel que soit } d, \text{ diviseur de } n \text{ diviseur de D);}$$

alors

$$P(n) = N(n),$$

en désignant ainsi le nombre des diviseurs de n : donc

$$\sum_1^D Q\left(\frac{D}{d}\right)d^t = \sum_1^D N(\delta)\varphi_t(d) \qquad (d\delta = D)$$

ou

$$\sum_1^D d^t = \sum_1^D N(\delta)\varphi_t(d).$$

Le premier membre est la somme des puissances $t^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de D, elle s'exprime au moyen des nombres N et φ_t.

En particulier, si $t = 1$,

$$\sum_1^D d = \sum_1^D N(\delta)\varphi(d).$$

Faisons, en particulier, $D = a^\alpha$, a étant premier absolu et α entier, on a $d = a^{\alpha'}$, α' ayant toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha$: donc

$$\sum_{0}^{\alpha} a^{\alpha'} = 1 + a + \ldots + a^{\alpha} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

$$\varphi(a^{\alpha'}) = a^{\alpha'}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

et

$$N(\delta) = N(a^{\alpha - \alpha'}) = (\alpha - \alpha' + 1),$$

sauf pour $\alpha' = 0$; donc

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} = \alpha + 1 + \sum_{\alpha'=1}^{\alpha'=\alpha} (\alpha + 1 - \alpha') a^{\alpha'}\left(1 - \frac{1}{a}\right);$$

elle a lieu quels que soient le nombre premier a et l'entier α : donc elle subsiste quels que soient les nombres a et α; c'est une identité algébrique.

15. On peut ainsi déduire des formules générales de sommation exposées plus haut une infinité d'identités; j'observe même que les formules établies jusqu'ici en considérant les diviseurs d'un entier D subsistent si l'on considère un polynôme quelconque entier en x; seulement il faut, pour préciser, convenir de réduire toujours à $+1$ le coefficient du terme de plus haut degré, non seulement dans ce polynôme, mais dans tous ses diviseurs. Il résulte alors des formules données plus haut une infinité de formules de transformations algébriques; les fonctions φ n'ont plus maintenant la même signification qu'en Arithmétique, mais leur forme subsiste.