Catégories et systèmes complexes (I)
Introduction à la théorie des catégories

S. Dugowson

12 octobre 2011

Le présent document est disponible en ligne sur
`http://s.dugowson.free.fr/enseignement`

Parcours MSC = *modélisation des systèmes complexes.*
Enseignement MSSC = *modélisation et simulation des systèmes complexes.*

8 demi-journées (3h ou 3h30) :
- 1 séance introductive, par Jean-Yves Choley,
- 3 séances sur "catégories et systèmes complexes", par Stéphane Dugowson :
  - me 12 octobre 2011 après-midi,
  - me 2 novembre 2011 toute la journée.
- 4 séances sur l'utilisation des outils (Modelica, SysML, Catia V5, V6, MGS), par Régis Plateau.

1 Pourquoi les catégories ?

1.1 Grosses catégories

1.1.1 Structurer la pensée

- Au même titre que la logique et la théorie des ensembles, d'ailleurs liées aux catégories, les notions fondamentales de la théorie des catégories contribuent à la **formation générale de l'esprit**.
- Plus dynamique que la théorie des ensembles, elle peut en outre servir de **guide à l'élaboration de nouvelles théories**.

– Alors que les nouvelles théories et les nouveaux concepts foisonnent, et que ce foisonnement peut parfois décourager les plus motivés, la théorie des catégories, en nous demandant de mettre à jour les foncteurs en jeu, nous aide à **mettre de l'ordre** dans cette jungle et à mieux saisir la nature des **articulations entre les différentes théories**.

  Par exemple, le calcul des réseaux dynamiques, où collaborent parallèlement des systèmes embarqués, fait appel à des algèbres idempotentes, à situer par rapport aux demi-groupes, monoïdes et autres magmas.... (cf. Bertrand Ducourthial, qui sera à Supméca le 22 mai 2012 dans le cadre de notre journée "Mathématiques Innovantes")

  Autre exemple, en mécanique théorique, la rencontre le 16 décembre 2010 à Supméca avec P. Iglesias-Zemmour fût l'occasion de découvrir qu'il y avait un **foncteur** important de la catégorie des espaces difféologiques vers les espaces connectifs.

1.1.2 Informatique

En tant qu'utilisation de langages formels non ambigus, l'informatique, au même titre que l'automatique, entretient des relations profondes avec la logique. Celle-ci étant profondément liée à la théorie des catégories (même si ce n'est pas nécessairement le point de vue de tous les logiciens, et que tous les catégoriciens ne s'intéressent pas nécessairement à la logique).

Un ouvrage de référence sur les relations entre théorie des catégories et informatique est [1]. *Category Theory for Computing Science*, Barr & Wells

Les topos et l'informatique Le concept de topos est à l'intersection de la topologie et de la logique. Un topos est une catégorie qui fonctionne à peu près de la même manière que la catégorie des ensembles (celle-ci constitue un exemple fondamental de topos). Ce fonctionnement est suffisamment riche pour qu'une forme de logique, la logique interne du topos, lui soit associé.

Or, la logique entretient des relations étroites avec l'informatique. En outre, les logiques à l'œuvre en informatique ne sont généralement pas classique, mais plutôt intuitionnistes. Cela signifie notamment que, la notion de preuve s'identifiant à l'existence d'un algorithme, on ne peut de ce point de vue se contenter de preuves abstraites pour l'existence d'un objet : il faut le construire. Il se trouve que les logiques internes des topos sont, en général, intuitionnistes. Cela constitue un atout pour leur utilisation en informatique.

Mettant en avant ce qu'il appelle le *behaviorisme*[1] qui caractérise la théorie des catégories, c'est-à-dire le fait que les entités mathématiques ou

1. En français : comportementalisme.

informatiques ne sont pas tant définies par leur structure interne que par leur « comportement »vis-à-vis des autres entités, Alain Prouté mène des travaux en informatique et mathématiques faisant jouer un rôle central à la notion de topos.

On peut écouter sa conférence faite à Supméca le 16 décembre 2010 dans le cadre de la journée mathématiques innovantes sur :

`http://www.youtube.com/watch?v=kS8p6EUYBOw`

A titre d'exemple, A. Prouté demande à ses étudiants de prouver que la catégorie des systèmes dynamiques discret est un topos. Il en découle que la richesse logique du langage ensembliste peut être mise au service des systèmes dynamiques discrets [2]

Les co-algèbres Le thème des coalgèbres a été abordé par Guy Vidal-Naquet lors de la journée "Mathématiques et mécanique à Supméca" du 25 mai 2009 dans son exposé sur "Coalgèbres et observation". Sur ce type d'approches, on se rapportera par exemple à l'ouvrage de Bart Jacobs [2], disponible en ligne :

Introduction to Coalgebra. Towards Mathematics of States and Observations

J'avais abordé le thème des systèmes dynamiques (discrets) lors du séminaire d'été du LISMMA, dans mon exposé du 25 juin 2008 intitulé "*Outils catégoriels pour l'hétérogénéité : introduction aux coalgèbres*".

Dans le même esprit, mais plus spécifiquement orienté sur le chaos, voir par exemple [3].

1.1.3 Topologie algébrique

Questions de cohérence (maillages, spécifications....), caractérisation des espaces de phase,

En novembre 2009, j'avais présenté comme exemple d'application des méthodes de la topologie algébrique la vérification de la couverture d'une zone surfacique par un réseau de capteurs simples, dans [4], repose sur le calcul des groupes d'homologie d'un complexe simplicial *abstrait* particulier, dit *complexe de Čech*, associé à une famille d'ouverts particuliers (en l'occurrence, des disques) du domaine considéré.

Un des intérêt de la théorie des catégories est de fournir un cadre conceptuel cohérent et efficace pour se repérer en topologie algébrique. A ce sujet, je veux signaler que la topologie algébrique constitue un chapitre à part entière de la théorie des systèmes de production (manufacturing systems theory) tel que présentée par Øyvind Bjørke [5, 6]).

2. Soit dit en passant, ce serait plus délicat pour les systèmes dynamiques connectifs.

Un récent colloque insiste sur les applications de la topologie algébrique, en particulier en informatique, mais il est clair que les méthodes développées en informatique doivent intéresser tous ceux qui s'intéressent aux systèmes complexes. Je cite :

> ATMCS in Paris, France 7-11 2008 followed by ECM in Amsterdam, Netherlands 14-18 July 2005
>
> For a long time, algebraic topology has been regarded as an abstract branch of mathematics, remote from applications. This view is no longer correct : In recent years, there has been an increasing interest in potential applications of algebraic topology to various areas of computer science and engineering. It is the aim of the conference to gather researchers with an active interest in the interplay between this branch of mathematics and neighbouring disciplines in order to foster and further cooperation. The areas of focus for this conference include, but are not limited to, the following :
>
> – concurrency theory
> – rewriting systems
> – computational algebraic topology
> – visualization and image analysis
> – distributed computing
> – sensor networks

1.2 Petites catégories : entre monoïdes et graphes

1.2.1 Exemple : les systèmes évolutifs à mémoire (Ehresmann-Vanbremersch)

Faisant jouer un rôle fondamental à la notion de limite inductive, cette théorie fera l'objet d'une introduction (nécessairement très sommaire) dans la deuxième demi-journée de ce cours.

On peut voir ici la conférence donnée par Mme Ehresmann à Supméca, lors de la journée mathématiques innovantes du 16 décembre 2010 :

Voir `http://www.youtube.com/watch?v=Wu3g8hGFYZw`.

1.2.2 Intelligent Manufacturing Systems

Intelligent Manufacturing Systems. « Category Theory Based Approach for IMS Modelling », Jean-Pierre Lavigne, Frédérique Mayer, Pascal Lhoste (fondé sur le point de vue SEM de Mme Ehresmann, [7]).

1.3 Conclusion

Les notions de base de la théorie des catégories feront un jour partie du bagage mathématique élémentaire en sciences de l'ingénieur. D'ores et déjà, on peut repérer des utilisations des catégories dans des recherches appliquées.

Pour simplifier, on peut distinguer les grosses catégories, qui aident à se repérer dans l'univers mathématique, à préciser les relations entre les différentes théories, à élaborer de nouvelles théories mathématiques, et les petites catégories, qui constituent des outils de type algébriques. En fait, l'utilisation des catégories fait souvent appel à la fois à des petites et des grosses catégories. C'est le cas de mes recherches personnelles sur les dynamiques catégoriques connectives.

Après le premier cours consacré à la présentation des notions de base de la théorie des catégories, les deux séances suivantes seront consacrées respectivement à la théorie des systèmes évolutifs à mémoire (SEM) et à l'analogie électro-mécanique (pour laquelle l'appuie sur une base topologique se révèle bien utile, base topologique qui s'exprime par des complexes de chaînes et de co-chaînes constituant de bons exemples d'objets constituant des catégories intéressantes et que la théorie des catégories aide à comprendre et à situer).

2 Définition des catégories

Remarque 1. Le présent document vise à servir de *support* à la partie du cours MSSC assurée par l'auteur. Il contient en particulier la *structure* du cours, mais la plupart des données présentées en cours ne sont pas reprises dans ce document. Les étudiants voudront bien se reporter d'une part à leurs notes de cours, d'autre part aux références indiquées, à commencer par celle-ci, disponible en ligne :

[8].

Définition 1. *Une catégorie* $\mathbf{A}$ *est la donnée d'une classe* $Ob(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_0$*, appelée classe des objets de la catégorie, et d'une classe* $Fl(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_1$*, appelée classe des flèches, telles que :*

- *toute flèche* f *a une source* $dom(f)$*, qui est un objet.*
- *toute flèche a un but* $cod(f)$*, qui est également un objet.*
- *pour tout objet* A*, il y a une flèche particulière* 1_A *admettant cet objet pour source et pour but, flèche appelée l'identité de l'objet.*
- *pour autant que leurs sources et leurs buts soient compatibles, les flèches se composent, et cette composition est associative.*

– *les flèches identités sont neutres (à gauche ou à droite, selon les situations).*

Remarque 2. La concaténation des mots, par exemple dans les monoïdes et en théorie des automates, s'écrit naturellement de gauche à droite : un lettre écrite à droite d'une autre s'applique après cette dernière.

Au contraire, la composition des flèches dans les catégories suit la notation usuelle pour la composition des applications : $f \circ g$ désigne l'application obtenue en appliquant d'abord g puis f.

La première notation nous paraît meilleure, mais l'usage a imposé la seconde. Afin d'utiliser néanmoins la première, nous pourrons noter $gf = f \circ g$ le fait d'appliquer d'abord g puis f.

Remarquer que pour l'action d'une application sur un élément de départ, la notation que nous préconisons reviendrait à écrire xf plutôt que $f(x)$. De fait, nous verrons que la notion d'élément d'un ensemble peut être généralisée dans les catégories par des flèches arrivant dans l'ensemble de départ de l'application considérée.

Les étudiants pourront éventuellement compléter leur compréhension de la définition d'une catégorie en se reportant à [8].

3 Exemples de catégories

On distingue les petites et les grosses catégories.

3.1 Petites catégories

Exemple 1. La catégorie vide.

Exemple 2. Catégories à un seul objet (monoides).

Définition 2. *On dit qu'un morphisme $f : A \to B$ est un* iso *s'il existe $g : B \to A$ tel que $fg = 1_A$ et $gf = 1_B$, où $fg = g \circ f$.*

Exemple 3. Les catégories dont toutes les flèches sont des isos sont appelées des *groupoïdes.* En particulier, les groupoïdes n'ayant qu'un seul objet s'identifient aux groupes.

Exemple 4. Les ensembles partiellement pré-ordonnés s'identifient aux (petites) catégories telles qu'entre deux objets quelconques il y a au plus une flèche. S'il n'y a pas d'iso autres que les identités, il s'agit alors d'un ensemble partiellement ordonné.

3.2 Grosses catégories

- catégorie des ensembles **Set**,
- catégorie des relations **Rel**,
- catégorie des groupes **Grp**,
- catégorie des ensembles partiellements ordonnés **PoSet**,
- catégories des espaces vectoriels réels **Vect**,
- catégorie des espaces topologiques **Top**,
- catégorie homotopique **hTop** (mêmes objets que **Top**),
- catégorie des (petites) catégories,
- etc...

4 Foncteurs

Parmi les grosses catégories, une attention particulière doit être portée aux catégories de catégories, par exemple la catégorie **Cat** des petites catégories, et plus généralement toute catégorie **CAT** de catégories pas trop grosses : les objets de telles catégories sont des catégories, et les flèches entre ces objets sont donc des flèches entre catégories, ce qu'on appelle des *foncteurs* :

Définition 3 (Foncteur)**.** *Un foncteur F d'une catégorie* **A** *vers une catégorie* **B** *consiste en la donnée de* deux *applications, parfois notées F_0 et F_1, mais souvent notées toutes deux F, telles que F_0 associe à tout objet de* **A** *un objet de* **B** *et F_1 associe à toute flèche de* **A** *une flèche de* **B***, en respectant les contraintes suivantes :*

- *pour toute flèche $f : A \to B$, on a $F_1(f) : F_0(A) \to F_0(B)$.*
- *pour tout objet A, $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$*
- *si fg existe (i.e. $cod(f) = dom(g)$), alors $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$.*

Exemple 5. Foncteurs d'oubli : de la catégorie des groupes, de celle des espaces topologiques, etc... dans celle des ensembles.

Exemple 6. Un diagramme dans une catégorie peut être vu comme un foncteur vers cette catégorie (pourquoi ?)

5 Transformations naturelles

Étant données deux catégories **C** et **D**, les foncteurs de la première dans la seconde constituent les objets d'une catégorie, dite catégorie des foncteurs de **C** dans **D**. Autrement dit, entre deux foncteurs $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, il y a des flèches « de deuxième niveau », et ces flèches se composent. Ces flèches entre foncteurs sont appelées des transformations naturelles.

Définition 4. *Une transformation naturelle $\alpha : F \to G$, où F et G sont des foncteurs $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est la donnée, pour chaque objet C de $\mathbf{C}$, d'une application $\alpha_C : FC \to GC$ telle que le diagramme suivant soit commutatif dans tous les cas :*

$$\forall (f : C \to C') \in \mathbf{C}_1, \alpha_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_C$$

La catégorie des foncteurs de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ est notée $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$.

6 Catégories opposées, dualité

Définition 5. *La catégorie opposée $\mathbf{C}^\circ$ d'une catégorie donnée $\mathbf{C}$ est la catégorie ayant les mêmes objets, et telle que les $\mathbf{C}^\circ$-flèches de A vers B sont les $\mathbf{C}$-flèches de B vers A, la composition des $\mathbf{C}^\circ$-flèches consistant à effectuer dans l'ordre inverse la composition des $\mathbf{C}$-flèches correspondantes.*

Remarque 3. Une dualité est la donnée d'un foncteur constituant une équivalence entre une catégorie et sa catégorie opposée, autrement dit c'est une auto-équivalence contravariante sur une catégorie.

Sur la dualité, on pourra consulter la sixième des *Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM*[3] d'Yves André.

7 Limites et colimites

La notion de limite (ou limite projective) d'un diagramme dans une catégorie généralise à la fois celle de produit cartésien de plusieurs ensembles ou espaces vectoriels, de produit fibré, de borne inférieure dans un ensemble partiellement ordonné (p.ex. le PGCD, l'intersection d'une famille de parties, etc...), d'égalisateur (noyau), d'objet final, etc... La notion, duale, de colimite (ou limite inductive) généralise les notions d'unions disjointes et de sommes amalgamées de plusieurs ensembles, de borne sup (PPCM, union d'une famille de parties, etc...), de quotient, d'objet initial, etc...

7.1 Limites

Expliquons la définition donnée sur Wikipedia : Limit_(category_theory).

Définition 6. *Let $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ be a diagram of type $\mathbf{J}$ in a category $\mathbf{C}$. A cone to F is an object N of $\mathbf{C}$ together with a family $\psi_X : N \to F(X)$ of morphisms indexed by the objects of $\mathbf{J}$, such that for every morphism $f : X \to Y$ in $\mathbf{J}$,*

3. `http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/EcoleYA.html`

we have $F(f) \circ \psi_X = \psi_Y$. A limit of the diagram $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ is a cone (L, ϕ) to F such that for any other cone (N, ψ) to F there exists a unique morphism $u : N \to L$ such that $\phi_X \circ u = \psi_X$ for all X in $\mathbf{J}$.

7.2 Exemple de limites

- produits : produit cartésien d'ensembles, d'espaces vectoriels, borne supérieure dans un ensemble partiellement ordonné (pgcd d'entiers, intersection de parties, etc...)
- égaliseur
- objet final (singleton, 1, espace nul,...)

7.3 Colimites

Remarque : la notion de colimite joue un rôle fondamental dans la théorie des systèmes évolutifs à mémoire.

Définition 7 (Colimite d'un diagramme)**.** *La définition est duale de celle de limite.*

7.3.1 Exemple de colimites

Exemple de colimites (= limites inductives) :
- coproduits : union disjointe d'ensembles, somme directe de deux espaces vectoriels (= produit cartésien !), borne inférieure dans un ensemble partiellement ordonné (ppcm d'entiers, union de parties, etc...)
- co-égaliseur
- objet initial (ensemble vide, 0, espace nul,...)

8 Monos, épis

Les monos sont une généralisation des injections.

Les épis sont une généralisation des surjections.

Mais attention, par exemple dans la catégorie (Top), on trouve facilement des contre-exemples illustrant les non-implications suivantes :

$$mono + epi \nRightarrow bijectif \nRightarrow iso$$

9 Adjonction

Cette notion fondamentale de la théorie des catégories peut être définie de plusieurs façons équivalentes. Je doute que nous ayons le temps de développer ce thème en cours, d'autant que l'exposé peut assez rapidement devenir assez technique.

Pédagogiquement, une bonne façon d'aborder cette notion est de se limiter dans un premier temps aux applications (croissantes) entre ensembles pré-ordonnés. C'est ce que fait Alain Prouté dans son *Introduction à la logique catégorique*, télécharger ici `http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf`, page 15.

Nous nous limiterons ici à une présentation intuitive, avec l'idée d'une bijection naturelle entre les ensembles $Hom(FY, X)$ et $Hom(Y, GX)$.

Parmi les exemples les plus importants, notons en particulier

- l'engendrement libre de structures comme adjoint à gauche des foncteurs d'oubli,
- opérations supportant la *curryfication*[4] : le produit (tensoriel) comme adjoint à gauche de foncteurs de type $hom(-,\dot{})$.

Pour plus de précisions, voir par exemple

`http://en.wikipedia.org/wiki/Adjoint_functors`.

10 Quelques mots sur les topos

10.1 Exemple de topos : les préfaisceaux d'ensembles

Une catégorie fonctorielle de la forme $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$ avev $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ est un topos, dit topos des *préfaisceaux* d'ensembles sur $\mathbf{D}$.

11 Catégories enrichies

11.1 L'idée

$$\mathbf{C}(A, B) \in Ob(\mathbf{V})$$

Rq : Bien entendu, il faut que la composition des morphismes soit compatible avec la structure de $\mathbf{V}$, qui doit donc être une catégorie monoidale...

4. Selon `http://fr.wikipedia.org/wiki/Curryfication`, la curryfication désigne l'opération qui fait passer d'une fonction à plusieurs arguments à une fonction à un argument...

11.2 Exemple 1 : catégories abéliennes

V = **Ab** (et le produit tensoriel est le produit tensoriel des groupes abéliens). Morphisme nul. Il faut en plus toutes les limites et colimites finies existent (-¿ objet nul), que tout mono soit un noyau et tout épi un conoyau.

Exemple fondamental de catégorie abélienne : catégorie des **A**−modules sur un anneau **A** (par exemple **Ab**).

11.3 Exemple 2 : les 2-catégories

V = **Cat**.

Exemple : **Cat** (et **CAT**...)

12 La prochaine fois...

12.1 Catégories et Systèmes évolutifs à mémoire

Cours du 2 novembre 2011.

12.2 Catégories, topologie et analogies électro-mécaniques

cours du 2 novembre 2011.

Table des matières

Références

[1] M. Barr and C. Wells. *Category Theory for Computing Science*. Prentice Hall, 1990.

[2] B. Jacobs and J. Rutten. A tutorial on (co) algebras and (co) induction. In *EATCS Bulletin*. Citeseer, 1997. `http://fldit-www.cs.uni-dortmund.de/~peter/JacobsCoalg.pdf`.

[3] Jonathan Jaquette. Category theory pertaining to dynamical systems, may 2009. `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/Final_Topics_Paper_on_Catos.pdf`.

[4] V. De Silva and R. Ghrist. Homological sensor networks. *Notices of the American Mathematical Society*, 54(1) :10, 2007.

[5] Ø. Bjørke. *Manufacturing Systems Theory – A Geometric Approach to Connection*. Tapir publisher, 1995.

[6] Régis Plateaux, Olivia Penas, Alain Rivière, and Jean-Yves Choley. A need for the definition of a topological structure for the complex systems modelling (de la nécessité de la définition d"une structure topologique pour la modélisation de systèmes complexes), 2007. http://www.supmeca.fr/cpi2007/articles2007/CPI2007-032-Plateaux.pdf.

[7] Andrée Ehresmann and J.P. Vanbremeersch. *Memory evolutive systems (hierarchy, emergence, cognition)*, volume 4 of *Studies in multidisciplinarity*. Elsevier, 2007. http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr/FrintroT.htm.

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory.