Le langage des catégories

Mathieu Bélanger

Séminaire de logique, UQAM, 30 novembre 2006

Lors de la dernière séance du séminaire, le théorème de Stone fut démontré[1] :

Théorème (Stone)**.** Tout treillis distributif (algèbre de Boole) $\langle A, \leq \rangle$ se plonge dans un treillis distributif (algèbre de Boole) de la forme $\langle \wp(X), \subseteq \rangle$ pour un ensemble X.

Dans la perspective de l'étude du théorème de représentation de Stone, l'utilité de la théorie des catégories découle de ce qu'elle fournit un langage répondant à la nécessité de distinguer différents types de treillis distributifs complets en fonction de leurs morphismes.

En effet, la théorie des catégories est souvent présentée comme une théorie qui, par opposition à la théorie des ensembles, met l'emphase sur les morphismes ou flèches entre les objets plutôt que sur les objets eux-mêmes. Comme l'écrit Mac Lane :

> Since a category consists of arrows, our subject could be described as learning how to live without elements, using arrows instead. [2]

Ainsi, dans ce qui suit, la théorie des catégories sera présentée dans l'optique d'un langage. Néanmoins, les quelques notions présentées ci-dessous permettent un premier contact avec l'univers des catégories.

1 La notion de catégorie

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathbf{C}$ consiste en

1. une collection d'*objets* A, B, C, $\ldots$;
2. une collection de *morphismes* f, g, $\ldots$ entre ces objets. Chaque morphisme f a un domaine $dom(f)$ et un co-domaine $cod(f)$ parmi les objets de la catégorie. Par exemple, étant donné un morphisme $f : A \to B$, $dom(f) = A$ et $cod(f) = B$;
3. une *opération de composition* qui associe à toute paire de morphismes f, g tels que $cod(f) = dom(g)$ un morphisme $g \circ f : dom(f) \to cod(g)$ respectant les propriétés suivantes :

[1] exposé de Jean-Pierre Marquis, 2006-11-16
[2] [Mac Lane 1998], p. vii.

(a) *associativité* : pour tous morphismes f, g et h tels que les compositions existent, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;

(b) *existence de l'identité* : pour tout morphisme $f : A \to B$, il existe des morphismes identité $id_A : A \to A$ et $id_B : B \to B$ tels que $f \circ id_A = f$ et $id_B \circ f = f$.

Des diagrammes d'objets et de morphismes sont souvent utilisés pour indiquer la composition de morphismes commute. Par exemple, pour des morphismes $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : A \to C$, le diagramme ci-dessous commute si $h = g \circ f$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Exemple. La catégorie **Set** a pour objets les ensembles et pour morphismes les fonctions.

Rappel. Un ensemble pré-ordonné $\langle X, R \rangle$ est un ensemble X muni d'une relation R réflexive et transitive, c'est-à-dire :

1. Pour tout $x \in X$, xRx ;
2. Pour tout x_1, x_2, $x_3 \in X$, si x_1Rx_2 et x_2Rx_3, alors x_1Rx_3.

Exemple. Soit $\langle X, R \rangle$ un ensemble pré-ordonné. Une catégorie s'obtient de la façon suivante :

1. Les objets sont les éléments de X.
2. Les morphismes $p \to q$ sont les paires (p, q) telles que pRq ;
3. Pour toutes paires (p, q) et (q, s), la transitivité du pré-ordre permet de définir une opération de composition $\circ$ car si pRq et qRs, alors pRs. D'où $(q, s) \circ (p, q) = (p, s)$;
4. La composition respecte les propriétés d'associativité et d'existence de l'identité :
   - Soient (p, q), (q, s) et (s, t) des morphismes. Alors, $\big((s, t) \circ (q, s)\big) \circ (p, q) = (p, t) = (s, t) \circ \big((q, s) \circ (p, q)\big)$.
   - Par réflexivité de la relation R, pour tout morphisme (p, q), il existe des morphismes (p, p) et (q, q) tels que $(p, q) \circ (p, p) = (p, q)$ et $(q, q) \circ (p, q) = (p, q)$

En simplifiant à l'extrême, une catégorie n'est rien de plus qu'une collection d'objets munie de morphismes entre ces mêmes objets. Il s'agit donc d'une structure mathématique extrêmement générale qui peut prendre une forme très compliquée, mais aussi très simple comme l'illustre l'exemple précédent. En mathématiques, la force du concept découle de ce que pour pratiquement tout type d'objet — ensemble, groupe, anneau, espace métrique, etc. —, une catégorie peut être définie.

Incidemment, les structures d'ordre et algébriques rencontrées tout au long du séminaire sont autant d'exemples de catégories :

Exemples.

1. La catégorie **Pos** des ensembles partiellement ordonnés dont les objets sont les ensembles partiellement ordonnés et les morphismes sont les fonctions préservant l'ordre.
2. La catégorie **Lat** des treillis dont les objets sont les treillis et les morphismes sont les homomorphismes de treillis, c'est-à-dire les fonctions préservant les opérations $\bigwedge$ et $\bigvee$.
3. La catégorie **DLat** des treillis distributifs dont les objets sont les treillis distributifs et les morphismes sont les homomorphismes de treillis distributifs, c'est-à-dire les homomorphismes préservant les opérations $\bigwedge$ et $\bigvee$ et la distributivité.
4. La catégorie **Bool** des algèbres de Boole dont les objets sont les algèbres de Boole et les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres de Boole, c'est-à-dire les homomorphismes de treillis préservant les compléments.
5. La catégorie **Heyt** des algèbres de Heyting dont les objets sont les algèbres de Heyting et les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres de Heyting, c'est-à-dire les homomorphismes de treillis distributifs préservant l'implication.

Comme le suggèrent les exemples ci-dessus, les morphismes d'une catégorie peuvent eux-mêmes disposer de propriétés. La notion d'isomorphisme représente un cas de morphisme particulièrement important entre objets d'une catégorie.

Définition 1.2. Soient $\mathbf{C}$ une catégorie. Un morphisme $f : A \to B$ est un *isomorphisme*, noté $f : A \xrightarrow{\sim} B$, si f est inversible, c'est-à-dire s'il existe une fonction $f^{-1} : B \to A$ telle que $f^{-1} \circ f = id_A$ et $f \circ f^{-1} = id_B$. Dans ce cas, les objets A et B sont dits *isomorphes*, noté $A \cong B$.

Exemple. Dans la catégorie des ensembles **Set**, un isomorphisme est une fonction bijective.

2 Quelques constructions catégoriques

À partir de la seule notion de catégorie, un certain nombre de constructions permettent d'obtenir d'autres catégories. Pour la suite des choses, deux se révéleront particulièrement importantes.

Pour les structures d'ordre, il suffisait de renverser la relation d'ordre pour obtenir une nouvelle structure, qualifiée de « duale »[3]. Par exemple, pour un

[3] cf. exposé de Jean-Pierre Marquis, 2006-10-19

ensemble partiellement ordonné $\langle A, \leq \rangle$, le dual A^{op} de A est le treillis $\langle A, \leq^{op} \rangle$ où $a \leq^{op} b$ si et seulement si $b \leq a$.

Ce procédé peut être transposé au niveau des catégories : il sera alors question de « renverser les flèches ».

Définition 2.1. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. La *catégorie duale* $\mathbf{C}^{op}$ se construit comme suit :

1. Les objets de $\mathbf{C}^{op}$ sont les objets de $\mathbf{C}$;
2. Tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathbf{C}$ donne lieu à un morphisme $f^{op} : B \to A$ de $\mathbf{C}^{op}$;
3. Pour tous morphismes f^{op} et g^{op}, la composition $f^{op} \circ g^{op}$ est définie dans $\mathbf{C}^{op}$ si et seulement si la composition $g \circ f$ est définie dans $\mathbf{C}$. Alors, $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$

À l'instar du produit cartésien en théorie des ensembles, il existe une notion de produit pour les catégories. En fait, le produit cartésien est un cas particulier de cette notion pour la catégorie **Set**.

Définition 2.2. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des catégories. La *catégorie produit* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ se construit comme suit :

1. Les objets de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ sont les paires (C, D) où C est un objet de $\mathbf{C}$ et D est un objet $\mathbf{D}$.
2. Les morphismes de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ sont les paires de morphismes $(f, g) : (C, D) \to (C', D')$.
3. Pour tout morphisme (f, g) et (f', g'), la composition $(f, g) \circ (f', g')$ est définie par $(f \circ f', g \circ g')$.

3 La notion de foncteur

En plus de tenir compte des flèches au sein d'une catégorie, la théorie des catégories considère également des flèches d'une catégorie à l'autre.

Définition 3.1. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories, un *foncteur* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une fonction associant

1. à tout objet C de $\mathbf{C}$ un objet $F(C)$ de $\mathbf{D}$;
2. à tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathbf{C}$ un morphisme $F(f) : F(A) \to F(B)$ de $\mathbf{D}$ tel que
   (a) Pour tout objet A de $\mathbf{C}$, $F(id_A) = id_{F(A)}$;
   (b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ lorsque la composition $g \circ f$ est définie.

Un foncteur « préserve » la structure de catégorie en quelque sorte.

Exemple. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Le foncteur identité $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est défini par $1_{\mathbf{C}}(A) = A$ et $1_{\mathbf{C}}(f) = f$.

Exemple. Soient $\langle P, \leq \rangle$ et $\langle Q, \sqsubseteq \rangle$ des ensembles partiellement ordonnés considérés en tant que catégories $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ respectivement. Un foncteur $F : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ est simplement une fonction d'ensembles monotone. En effet, soit $F : P \to Q$ une fonction monotone, c'est-à-dire une fonction pour laquelle $p \leq q$ implique $F(p) \sqsubseteq F(q)$.

- Pour tout $p \in P$, $F(p) \in Q$.
- Soit un morphisme $f : p \to q$ de $\mathbf{P}$. Alors, $p \leq q$ dans P. F étant une fonction monotone, $F(p) \sqsubseteq F(q)$. Donc, il existe un morphisme $F(f) : F(p) \to F(q)$ de $\mathbf{Q}$.
- Soit $p \in P$. Alors, $p \leq p$ car la relation $\leq$ est réflexive. Il existe donc un morphisme $id_p : p \to p$ dans $\mathbf{P}$. De plus, F étant monotone, $F(p) \sqsubseteq F(p)$ dans Q. D'où l'existence d'un morphisme $F(id_p) : F(p) \to F(p)$ tel que $F(id_p) = id_{F(p)}$ dans $\mathbf{Q}$.
- Soient $f : p \to q$ et $g : q \to s$ deux morphismes de $\mathbf{P}$. Alors, $p \leq q$ et $q \leq s$ dans P. D'une part, par transitivité de la relation $\leq$, $p \leq s$ dans P. F étant monotone, $F(p) \sqsubseteq F(s)$ dans Q. Il existe donc un morphisme $F(g \circ f) : F(p) \to F(s)$ dans $\mathbf{Q}$.
  D'autre part, il existe aussi des morphismes $F(f) : F(p) \to F(q)$ et $F(g) : F(q) \to F(s)$ dans $\mathbf{Q}$. Ces morphismes peuvent se composer en un morphisme $F(g) \circ F(f) : F(p) \to F(s)$. Par définition de la relation d'ordre, il existe au plus un morphisme entre toute paire d'objets, d'où $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Exemple. Soient $\mathbf{C}$ une catégorie et $\mathbf{1}$ la catégorie dont le seul objet est $\bullet$ et le seul morphisme est l'identité $id_\bullet : \bullet \to \bullet$. Le morphisme $! : \mathbf{C} \to \mathbf{1}$ associe

- à tout objet C de $\mathbf{C}$ l'unique objet $\bullet$ de $\mathbf{1}$
- à tout morphisme $f : C \to D$ de $\mathbf{C}$, l'unique morphisme $id_\bullet : \bullet \to \bullet$ de $\mathbf{1}$.

Exemple. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Le *foncteur diagonal* $\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ associe

- à tout objet C de $\mathbf{C}$ un objet (C, C) de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$;
- à tout morphisme $f : C \to D$ de $\mathbf{C}$ un morphisme $(f, f) : (C, C) \to (D, D)$ de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Définition 3.2.

- Un foncteur est dit *covariant* s'il assigne à un morphisme $f : A \to B$ un morphisme $F(f) : F(A) \to F(B)$, c'est-à-dire s'il préserve la direction des flèches.
- Inversément, un foncteur est *contravariant* s'il assigne à un morphisme $f : A \to B$ un morphisme $F(f) : F(B) \to F(A)$, c'est-à-dire s'il inverse les flèches.

Exemple. Soit **Set** la catégorie des ensembles. Les objets de cette catégorie sont les ensembles et ses morphismes sont les fonctions entre ensembles. Le foncteur de puissance contravariant $\bar{\wp} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ associe :

- à tout objet A de **Set** son ensemble de puissance $\wp(A)$;
- à tout morphisme $f : A \to B$ la fonction $\bar{\wp}(f) : \wp(B) \to \wp(A)$ qui associe à tout à tout sous-ensemble $X \subseteq B$ l'image inverse de X par la fonction f, c'est-à-dire $f^{-1}(X) \subseteq A$.

Remarque. Soient **C** et **D** deux catégories. Un foncteur contravariant n'est rien d'autre qu'un foncteur $F : C^{op} \to D$.

4 Les foncteurs adjoints

Définition 4.1. Soient $\langle P, \leq \rangle$ et $\langle Q, \sqsubseteq \rangle$ deux ensembles partiellement ordonnés. Une *connexion de Galois* est une paire de fonctions monotones $f^* : P \to Q$ et $f_* : Q \to P$ telles que pour tout $p \in P$ et $q \in Q$:

$$f^*(p) \sqsubseteq q \text{ si et seulement si } p \leq f_*(q)$$

f^* est l'*adjoint à gauche* de f_* et f_* est l'*adjoint à droite* de f^* ($f^* \dashv f_*$).

Il y a une relation de codépendance entre f^* et f_*.

Les ensembles partiellement ordonnés pouvant être considérés comme des catégories, il est possible d'exprimer directement la définition dans le langage des catégories.

Définition 4.2. Soient **P** et **Q** des ensembles partiellement ordonnés considérés en tant que catégories. Une *connexion de Galois* est une paire de foncteurs $f : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ et $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$, c'est-à-dire deux fonctions monotones $P \to Q$ et $Q \to P$, tel que pour tous objets p de **P** et q de **Q** :

$$\frac{f(p) \to q}{p \to g(q)} \Updownarrow$$

f est l'*adjoint à gauche* de g et g est l'*adjoint à droite* de f ($f \dashv g$).

En logique propositionnelle, les connexions de Galois jouent un rôle crucial notamment en raison de leur relation aux connecteurs logiques. En effet, pour un ensemble partiellement ordonné $\langle P, \leq \rangle$, les connecteurs logiques existent et sont bien définis sur P si certains adjoints existent.

Soit le foncteur $! : \mathbf{P} \to \mathbf{1}$. Par définition, un adjoint à gauche sera un foncteur $F : \mathbf{1} \to \mathbf{P}$ tel que pour tout objet X de **P** :

$$\frac{F(\bullet) \to X}{\bullet \to !(X)} \Updownarrow$$

En terme d'ensembles partiellement ordonnés, F est un adjoint à gauche si $F(\bullet) \leq X$ si et seulement si $\bullet \leq !(X)$. Par définition du foncteur $!$, $\bullet \leq !(X) = \bullet$ n'est rien d'autre que l'identité. Il faut donc que l'inégalité $F(\bullet) \leq X$ soit elle aussi toujours vraie. Ceci n'est possible que si $F(\bullet)$ est l'élément minimal de P, c'est-à-dire si $F(\bullet) = \bigwedge P$ car pour tout $X \in P$, $\bigwedge P \leq X$.

Similairement, un adjoint à droite sera un foncteur $G : \mathbf{1} \to \mathbf{P}$ tel que pour tout objet X de **P** :

$$\frac{!(X) \to \bullet}{X \to G(\bullet)}$$

$!(X) = \bullet \leq \bullet$ sera donc vrai si et seulement $X \leq G(\bullet)$, ce qui n'est possible que si $G(\bullet)$ est l'élément maximal du treillis, c'est-à-dire si $G(\bullet) = \bigvee P$ car pour tout $X \in P$, $X \leq \bigvee P$.

D'un point de vue logique, les adjoints à gauche et à droite du foncteur ! ne sont rien d'autre que $\bot$ et $\top$, c'est-à-dire $\bot \dashv\, !$ et $! \dashv \top$.

Soit le foncteur diagonal $\Delta : \mathbf{P} \to \mathbf{P} \times \mathbf{P}$. Par définition, un adjoint à gauche sera un foncteur $F : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ tel que pour tous objets X, Y, Z de $\mathbf{P}$:

$$\frac{F(X,Y) \to Z}{(X,Y) \to \Delta(Z)}$$

$$\frac{F(X,Y) \to Z}{(X,Y) \to (Z,Z)}$$

$$\frac{F(X,Y) \to Z}{X \to Z,\, Y \to Z}$$

En termes d'ensembles partiellement ordonnés, F est un adjoint à gauche de Δ si $F(X,Y) \leq Z$ si et seulement si $X \leq Z$ et $Y \leq Z$. Il en sera ainsi si $F(X,Y) = \bigvee\{X,Y\}$.

Similairement, un adjoint à droite sera un foncteur $G : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ tel que pour tous objets X, Y, Z de $\mathbf{P}$:

$$\frac{\Delta(Z) \to (X,Y)}{Z \to G(X,Y)}$$

$$\frac{(Z,Z) \to (X,Y)}{Z \to G(X,Y)}$$

$$\frac{Z \to X,\, Z \to Y}{Z \to G(X,Y)}$$

Cette condition sera respectée si $Z \leq X$ et $Z \leq Y$ si et seulement si $Z \leq G(X,Y)$. Ce sera le cas si $G(X,Y) \leq \bigwedge\{X,Y\}$.

Les adjoints à gauche et à droite de Δ peuvent également être interprétés logiquement. En effet, il s'agit respectivement de la disjonction et de la conjonction. Donc, $\vee \dashv \Delta$ et $\Delta \dashv \wedge$.

Il est également possible d'introduire le pseudo-complément relatif et le complément (respectivement l'implication et la négation en termes logiques) en tant que foncteurs adjoints. Il faut alors considérer un foncteur avec un paramètre.

Soit le foncteur $(- \wedge X) : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$. Un adjoint à droite de ce foncteur sera un foncteur $F(X, -) : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ tel que pour tous objets Y, Z de $\mathbf{P}$:

$$\frac{Y \wedge X \to Z}{Y \to F(X,Z)}$$

En termes d'ensembles partiellement ordonnés, $Y \wedge X \leq Z$ si et seulement si $Y \leq F(X,Z)$. Or, ceci n'est rien d'autre que la définition du pseudo-complément relatif $X \Rightarrow Z$.

En particulier, si $Z = \perp$, la situation est la suivante :

$$\frac{Y \wedge X \to \perp}{Y \to F(X, \perp)}$$

D'où $F(X, \perp) = X \Rightarrow \perp$, ce qui est la définition du complément $\bar{X}$.

D'un point de vue logique, ces adjoints correspondent respectivement à l'implication ($\Rightarrow$) et à la négation ($\neg$). Alors, $\wedge \dashv \Rightarrow$ et $(- \wedge \perp) \dashv (- \Rightarrow \perp)$.

Le fait que des ensembles partiellement ordonnés puissent être considérés comme des catégories suggère l'existence d'une notion catégorique générale correspondant à celle de connexion de Galois. Cette intuition conduit à la notion générale et d'autant plus fondamentale de foncteurs adjoints.

La notion de transformation naturelle sera nécessaire pour définir les foncteurs adjoints.

Définition 4.3. Soient $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ des foncteurs. Une *transformation naturelle* $\tau : F \stackrel{\cdot}{\to} G$ de F vers G est une fonction qui assigne à tout objet C de $\mathbf{C}$ un morphisme $\tau_C = \tau C : F(C) \to G(C)$ tel que pour tout $f : C \to D$, $\tau_D \circ Ff = Gf \circ \tau_C$. Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"] & FC \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, Rrightarrow, "Ff"'] & GC \arrow[d, Rrightarrow, "Gf"] \\ D & FD \arrow[r, "\tau_D"] & GD \end{tikzcd}$$

Définition 4.4. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories de même que $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ des foncteurs. F est un *adjoint à gauche* de G (et G un *adjoint à droite* de F), noté $F \dashv G$, si pour tous objets C de $\mathbf{C}$ et D de $\mathbf{D}$, il existe un isomorphisme naturel entre les morphismes

$$\frac{FC \xrightarrow{g} D}{C \xrightarrow{f} GD}$$

L'isomorphisme se veut naturel au sens qu'il ne dépend pas des objets C et D [4].

Alors, à tout morphisme g correspond un unique morphisme f et, à tout morphisme f correspond un unique morphisme g.

Exemple. Soient **Set** la catégorie des ensembles. Le foncteur image directe associe à tout ensemble A sont ensemble de puissance $\wp(A)$ et à tout morphisme $f : A \to B$ le morphisme $\wp(f) : \wp(A) \to \wp(B)$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \wp(f) : &\wp(A) \to \wp(B) \\ &X \mapsto f(X) \end{aligned}$$

[4] La condition d'être naturel est en fait plus complexe que ne le laisse entendre cette façon de l'exprimer.

Tel que défini précédemment, le morphisme de puissance contravariant associe à tout ensemble A son ensemble de puissance $\wp(A)$ et à tout morphisme $f : A \to B$ le morphisme $\bar{\wp}(f) : \wp(B) \to \wp(A)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bar{\wp}(f) : & \wp(B) \to \wp(A) \\ & Y \mapsto f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

Ces deux foncteurs sont adjoints :

$$\frac{X \subseteq f^{-1}(Y)}{f(X) \subseteq Y}$$

L'importance des foncteurs adjoints ne se limite pas à la logique propositionnelle ni même à la logique en général. En effet, les adjoints s'avèrent cruciaux pour la totalité des mathématiques. Voici deux courtes citations en ce sens :

> The isolation and explication of the notion of *adjointness* is perhaps the most profound contribution that category theory has made to the history of general mathematical ideas. [5]

> The notion of adjunction is arguably the most important concept unveiled by category theory. It is a general logical and mathematical concept that occurs everywhere and often marks an important and interesting connection between two objects of interest. [6]

Concrètement, l'importance des adjoints tient à ce que l'essentiel des concepts mathématiques fondamentaux peuvent être présentés en tant qu'adjoints.

Références

[Awodey & Bauer 2003] AWODEY, Steve & Andrej BAUER, *Lecture Notes : Introduction to Categorical Logic*, première partie, `http://www.andrew.cmu.edu/user/awodey/catlog/notes/`, 47 p.

[Goldblatt 2006] GOLDBLATT, Robert. *Topoi : The Categorical Analysis of Logic*, Mineolo, Dover Publications, édition revisée, 2006, 551 p.

[Johnstone 1982] JOHNSTONE, Peter T. *Stone Spaces*, Cambridge, Cambridge University Press, Cambridge studies in advanced mathematics 3, 1982, 370 p.

[Mac Lane 1998] MAC LANE, Saunders, *Categories for the Working Mathematicians*, 2e édition, New York, Springer, Graduate Texts in Mathematics 5, 1998, 314 p.

[Mac Lane & Mordijk 1992] MAC LANE, Saunders & Ieke MOERDIJK, *Sheaves in Geometry and Logic : A First Introduction to Topos Theory*, New York, Springer-Verlag, Universitext, 1992, 629 p.

[5] [Goldblatt 2006], p. 438.
[6] [Awodey & Bauer 2003], p. 24