Conspectus materiae tomi XLIV, fasciculi 3

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange | Address of the Editorial Board and of the exchange | Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches | Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-05663-0 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers

par

JEAN LOUIS NICOLAS (Limoges)

1. Introduction. Désignons par $\Omega(n) = \sum_{p^a \| n} a$ le nombre de diviseurs de n comptés avec leur multiplicité. On définit:

$$\mathcal{N}(x, k) = \{n \leqslant x \mid \Omega(n) = k\},$$
$$N(x, k) = \operatorname{Card} \mathcal{N}(x, k),$$
$$\mathcal{S}(x, k) = \{n \leqslant x \mid \Omega(n) \geqslant k\},$$
$$S(x, k) = \operatorname{Card} \mathcal{S}(x, k).$$

Dans tout cet article on écrira l à la place de $\log\log x$.

En 1900, E. Landau a démontré comme corollaire du théorème des nombres premiers que, pour k fixé,

$$N(x, k) \sim \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{x}{\log x} \frac{l^{k-1}}{(k-1)!}$$

(cf. [7], § 56). Cette formule avait été conjecturée par Gauss (cf. [2], Introduction). En 1917, Hardy et Ramanujan dans leur célèbre mémoire „The normal number of prime factors of a number n" ont donné une majoration de $N(x, k)$ (cf. [12]).

Soit F la fonction définie pour $|z| < 2$, par

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p (1-1/p)^z (1-z/p)^{-1}$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers. En 1953, L. G. Sathe (cf. [13]) démontrait que, pour $k \leqslant (2-\varepsilon) l$, on a:

$$N(x, k) \sim F(k/l) \frac{l^{k-1} x}{(k-1)! \log x}$$

étendant ainsi un résultat de P. Erdös qui avait considéré le cas $k - l = O(\sqrt{l})$; (cf. [3]).

A la suite de l'article de L. G. Sathe, A. Selberg démontrait la formule (cf. [14]):

$$\sum_{n \leqslant x} z^{\Omega(n)} = xzF(z)(\log x)^{z-1} + O\left(x(\log x)^{\operatorname{Re} z - 2}\right) \quad \text{où } x \geqslant 2, \tag{1}$$

et où le „O" est uniforme dans tout disque $|z| \leqslant R$ avec $R < 2$.

La formule (1) permettait à A. Selberg de retrouver le résultat de L. G. Sathe, et de préciser le comportement de $N(x, k)$ lorsque $(2-\varepsilon)l \leqslant k \leqslant Bl$. Il signale notamment que:

$$N(x, k) \sim C(x \log x)/2^k$$

pour $(2+\varepsilon)l \leqslant k \leqslant Bl$, où B est un nombre réel arbitraire.

La formule (1) a été généralisée de plusieurs façons par H. Delange (cf. [1]).

En 1978, G. Kolesnik et E. G. Strauss, ont donné (cf. [6]) une estimation asymptotique de $N(x, k)$ sous la forme d'une somme double, mais dont les termes sont difficilement comparables. P. Erdös et A. Sarközy ont démontré dans [5]:

$$S(x, k) = O\left((x \log x) k^4/2^k\right)$$

uniformément pour tout x et k. Et K. Norton (cf. [10]) a démontré:

$$S(x, k) = O\left((x \log x)\sqrt{l}/2^k\right)$$

et annoncé que l'ordre de grandeur de $S(x, k)$ était $x(\log x)2^{-k}$ pour $l \leqslant k \leqslant (1-\varepsilon)(\log x)/\log 2$ et x assez grand.

Nous démontrerons:

THÉORÈME. *Soit* $B > 2$. *Il existe* b, $0 < b < 1$ *tel que l'on ait uniformément pour* $x \geqslant 3$ *et* $Bl \leqslant k \leqslant (\log x)/\log 2$:

$$N(x, k) = C(x/2^k)\log(x/2^k) + O\left((x/2^k)\log^b(3x/2^k)\right) \tag{2}$$

avec

$$C = (1/4)\prod_{p>2}\left(1 + 1/(p(p-2))\right) = 0{,}378694.$$

Dans un exposé au colloque d'Orsay (juin 1982) en l'honneur de H. Delange (cf. [8]), une estimation de $N(x, k)$ donnant le même terme principal que (2), mais avec un reste moins bon, avait été présentée. La démonstration reposait sur la formule:

$$N(x, k) = \sum_{m=0}^{k} N'(x/2^{k-m}, m) \tag{3}$$

où $N'(y, m) = \operatorname{Card}\{n \leqslant y,\ n \text{ impair},\ \Omega(n) = m\}$.

La formule (3) s'obtient en regroupant les $n \in \mathcal{N}(x, k)$ qui sont divisibles exactement par la même puissance de 2.

On évalue ensuite $N'(y, m)$ grâce à une extension de la formule de Selberg (cf. [1]), qui permet d'évaluer $\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv 1 \bmod 2}} z^{\Omega(n)}$. On remarque enfin que dans la sommation de la formule (3) les termes les plus importants sont ceux pour lesquels m est voisin de $2l$; en quelque sorte, l'élément normal de $\mathcal{N}(x, k)$, lorsque $k \geqslant (2+\varepsilon)l$, s'écrit $n = 2^a n'$ avec n' impair et $\Omega(n') \sim 2l$.

La démonstration que nous allons donner de la formule (2) est due à G. Halász. Cette démonstration est plus simple, elle est élémentaire, c'est-à-dire qu'elle n'utilise pas de variables complexes, et surtout elle donne un meilleur reste. Je remercie très vivement G. Halász de me permettre de la reproduire ici.

L'idée de base est d'écrire $n = 2^\alpha m$, m impair. On a alors $\Omega(n) = \alpha + \Omega(m)$ et on en déduit:

$$N(x, k) = \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m2^{k-\Omega(m)} \leqslant x \\ \Omega(m) \leqslant k}} 1 = T_1 - T_2 \tag{4}$$

avec

$$T_1 = Q_1(x/2^k) \quad \text{et} \quad Q_1(y) = \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ \psi(m) \leqslant y}} 1,$$

$$T_2 = Q_2(x/2^k) \quad \text{et} \quad Q_2(y, k) = \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ \psi(m) \leqslant y \\ \Omega(m) > k}} 1,$$

où on a posé, pour simplifier l'écriture $\psi(m) = m2^{-\Omega(m)}$.

La fonction ψ est complètement multiplicative, et tend vers $+\infty$ sur les nombres impairs. Le théorème résultera de (4), d'une estimation de $Q_1(y)$ et d'une majoration de $Q_2(y, k)$.

2. Quelques lemmes.

LEMME 1. *Soit* $r > 0$. *Soit* $\psi(m) = m2^{-\Omega(m)}$. *On a*:

$$U(r, x) = \sum_{\psi(m) \leqslant x}{}' r^{\Omega(m)} \log \psi(m) = \sum_{\psi(m) \leqslant x}{}' r^{\Omega(m)} \sum_{\substack{p, k \\ p \geqslant 3 \\ (p/2)^k \leqslant x/\psi(m)}} r^k \log(p/2)$$

où l'accent indique que l'on somme uniquement sur les nombres impairs.

Démonstration. Par analogie avec la fonction de Von Mangoldt, définissons la fonction $\lambda(n)$ par:

$$\lambda(n) = \begin{cases} \log(p/2) & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de nombre premier.} \end{cases}$$

On a alors

$$\log \psi(m) = \sum_{d\mid m} \lambda(m/d)$$

et

$$U(r, x) = \sum_{\psi(m)\leqslant x}{}' r^{\Omega(m)} \sum_{d\mid m} \lambda(m/d).$$

Lorsque d divise m, si m est impair, d l'est aussi et $\psi(d) \leqslant \psi(m)$; on a donc:

$$U(r, x) = \sum_{\psi(d)\leqslant x}{}' \sum_{\substack{\psi(m)\leqslant x\\ d\mid m}}{}' r^{\Omega(m)} \lambda(m/d)$$

$$= \sum_{\psi(d)\leqslant x}{}' r^{\Omega(d)} \sum_{\psi(d')\leqslant x/\psi(d)}{}' r^{\Omega(d')} \lambda(d')$$

et comme $\lambda(d')$ est non nul seulement lorsque d' est une puissance d'un nombre premier $\neq 2$, cela achève la démonstration du lemme.

Lemme 2. *Soit r un nombre réel tel que $1 \leqslant r < 3/2$. Soit $\theta'(x) = \sum_{p\leqslant x} \log(p/2)$. Alors on a:*

$$V(x) = \sum_{k\geqslant 1} r^k \theta'(2x^{1/k}) = r\theta'(2x) + O\big((\log x)\, x^{\max(1/2, \log r/\log(3/2))}\big).$$

Démonstration. Soit $\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p$ la fonction usuelle de Chebyshev. On a: $\theta'(x) \leqslant \theta(x) = O(x)$; on en déduit:

$$V(x) = r\theta'(2x) + \sum_{k=2}^{\log x/\log(3/2)} r^k \theta'(2x^{1/k}) = r\theta'(2x) + O\Big(\sum_{k=2}^{\log x/\log(3/2)} r^k x^{1/k}\Big).$$

Or $r^k x^{1/k}$ étant convexe en k, on a, pour $2 \leqslant k \leqslant \log x/\log(3/2)$

$$r^k x^{1/k} \leqslant \max\big(r^2 x^{1/2}, (3/2)\, x^{\log r/\log(3/2)}\big).$$

Lemme 3. *On a:*

$$\sum_{m\leqslant x}{}' \frac{2^{\Omega(m)}}{m} = \frac{C}{2}\log^2 x + O(\log x) \tag{5}$$

et

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}{}' \frac{1}{\psi(m)} = \frac{C}{2}\log^2 x + O(\log x \log\log x) \tag{6}$$

où C est la constante définie dans le théorème, $\psi(m) = m2^{-\Omega(m)}$ et l'accent indique que l'on somme sur les nombres impairs.

Démonstration. Soit $\tau(n) = \sum_{d\mid n} 1$, et $\chi(n)$ la fonction caractéristique

des nombres impairs. Avec la convolution des fonctions arithmétiques, on définit la fonction h par:

$$\chi(n)\, 2^{\Omega(n)} = (\tau * h)(n).$$

La série de Dirichlet associée

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{h(n)}{n^s} = \Big(\prod_{p\geqslant 3}\Big(1 + \frac{1}{p^{2s} - 2p^s}\Big)\Big)\Big(1 - \frac{1}{2^s}\Big)^2 \tag{7}$$

est convergente pour $\operatorname{Re} s > 1/2$.

Enfin, de la formule classique: $\sum_{n\leqslant x} \tau(n) = x\log x + O(x)$ on déduit facilement:

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\tau(n)}{n} = \tfrac{1}{2}\log^2 x + O(\log x).$$

On a alors:

$$\sum_{m\leqslant x}{}' \frac{2^{\Omega(m)}}{m} = \sum_{n\leqslant x} \chi(n) \frac{2^{\Omega(n)}}{n} = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} \sum_{d\mid n} h(d)\tau(n/d)$$

$$= \sum_{d\leqslant x} h(d) \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d\mid n}} \frac{1}{n}\tau\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d\leqslant x} \frac{h(d)}{d} \sum_{d'\leqslant x/d} \frac{1}{d'}\tau(d')$$

$$= \sum_{d\leqslant x} \frac{1}{2}\frac{h(d)}{d}\Big(\log^2\frac{x}{d} + O\Big(\log\frac{x}{d}\Big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\log^2 x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{d} - \frac{1}{2}\log^2 x \sum_{d>x} \frac{h(d)}{d} + O(\log x) \sum_{d\leqslant x} \frac{h(d)\log d}{d} +$$

$$+ O\Big(\sum_{d\leqslant x} \frac{h(d)}{d}\log^2 d\Big) + O\Big(\log x \sum_{d\leqslant x} \frac{h(d)}{d}\Big) + O\Big(\sum_{d\leqslant x} \frac{h(d)\log d}{d}\Big).$$

Le premier terme de cette somme est d'après (7) avec $s = 1$, $(C/2)\log^2 x$. Tous les autres sont $O(\log x)$ en tenant compte du fait que les séries $\sum \frac{h(d)\log d}{d}$ et $\sum \frac{h(d)\log^2 d}{d}$ convergent et que

$$\sum_{d>x} \frac{h(d)}{d} < \frac{1}{\log x} \sum_{d>x} \frac{h(d)}{d}\log d = O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Cela démontre (5). Pour la démonstration de (6), on a d'abord la minoration évidente, puisque $\psi(m) \leqslant m$:

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}{}' \frac{1}{\psi(m)} \geqslant \sum_{m\leqslant x}{}' \frac{1}{\psi(m)} = \sum_{m\leqslant x}{}' \frac{2^{\Omega(m)}}{m} \geqslant \frac{C}{2}\log^2 x + O(\log x). \tag{8}$$

Pour obtenir une majoration, on considère d'abord la somme, où α est un paramètre:

$$\sum_{\substack{\psi(m)\leqslant x\\ \Omega(m)\geqslant \alpha l}}' \frac{1}{\psi(m)} \leqslant \frac{1}{(\log x)^{\alpha\log(4/3)}} \sum_{\psi(m)\leqslant x}' \frac{(4/3)^{\Omega(m)}}{\psi(m)}$$
$$\leqslant \frac{1}{(\log x)^{\alpha\log(4/3)}} \prod_{2<p\leqslant 2x} \frac{1}{1-8/(3p)}$$
$$\leqslant \frac{1}{(\log x)^{\alpha\log(4/3)}} \prod_{p\leqslant 2x} \left(\frac{1}{1-1/p}\right)^{8/3}$$
$$\leqslant (\log x)^{8/3-\alpha\log(4/3)} = O(1)$$

si l'on choisit $\alpha = 8/(3\log(4/3))$.

On en déduit

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}' \frac{1}{\psi(m)} = \sum_{\substack{\psi(m)\leqslant x\\ \Omega(m)\leqslant \alpha l}}' \frac{1}{\psi(m)} + O(1) \leqslant \sum_{m\leqslant x(\log x)^{\alpha\log 2}}' \frac{1}{\psi(m)} + O(1)$$

puisque $\psi(m)\leqslant x$ et $\Omega(m)\leqslant \alpha l$ entraînent $m\leqslant x(\log x)^{\alpha\log 2}$. A l'aide de (5) on conclut:

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}' \frac{1}{\psi(m)} \leqslant \frac{C}{2}\log^2\left(x(\log x)^{\alpha\log 2}\right) + O(\log x)$$

ce qui, avec (8) achève la démonstration de (6).

LEMME 4. *Soit r un nombre réel, $1\leqslant r<3/2$. On a pour tout $x\geqslant 1$:*

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}' r^{\Omega(m)} = O\left(x(\log 3x)^{2r-1}\right)$$

où l'accent indique que l'on somme sur les nombres impairs, et $\psi(m) = m2^{-\Omega(m)}$.

Démonstration. On commence par majorer la quantité:

$$U(r,x) = \sum_{\psi(m)\leqslant x}' r^{\Omega(m)} \log\psi(m).$$

Par le lemme 1, on a:

$$U(r,x) = \sum_{\psi(m)\leqslant x}' r^{\Omega(m)} \Big(\sum_{k\geqslant 1} r^k \theta'\big(2(x/\psi(m)^{1/k})\big)\Big);$$

et par le lemme 2,

$$U(r,x) \leqslant \sum_{\psi(m)\leqslant x}' r^{\Omega(m)} \theta'\left(2x/\psi(m)\right).$$

On a ensuite, en utilisant la majoration de Chebyshev:

$$U(r,x) \ll x \sum_{\psi(m)\leqslant x}' \frac{r^{\Omega(m)}}{\psi(m)} \leqslant x \prod_{3\leqslant p\leqslant x} \frac{1}{1-2r/p}$$
$$\ll x \prod_{p\leqslant x} \left(\frac{1}{1-1/p}\right)^{2r} = O\left(x(\log x)^{2r}\right)$$

en utilisant la formule de Mertens.

Il vient ensuite, pour $x>1$:

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}' r^{\Omega(m)} = 1 + \int_{3/2^-}^{x} \frac{d[U(r,x)]}{\log t} = O(1) + \frac{U(r,x)}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{U(r,t)\,dt}{t\log^2 t}$$
$$= 1 + O\left(x(\log x)^{2r-1}\right) = O\left(x(\log 3x)^{2r-1}\right).$$

LEMME 5. *On a:*

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}' 1 = Cx\log x + O(x\log\log 3x)$$

avec $\psi(m) = m2^{-\Omega(m)}$. L'accent signifie que l'on somme sur les nombres impairs.

Démonstration. On a d'abord, par les lemmes 1 et 2, avec $r=1$:

$$U(1,x) = \sum_{\psi(m)\leqslant x}' \log\psi(m) = \sum_{\psi(m)\leqslant x}' \sum_{k\geqslant 1} \theta'\left(2(x/\psi(m)^{1/k})\right)$$
$$= \sum_{\psi(m)\leqslant x}' \left(\theta'\left(\frac{2x}{\psi(m)}\right) + O\left(\log\frac{x}{\psi(m)}\sqrt{x/\psi(m)}\right)\right)$$

et en utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme:

$$\theta(y) = y + O\left(1/\log(2+y)\right)$$

valable pour tout $y\geqslant 1$, on obtient:

$$\theta'(y) = \theta(y) - \Big(\sum_{p\leqslant y}\log 2\Big),$$

ce qui entraîne:

$$U(1,x) = 2x\sum_{\psi(m)\leqslant x}' \frac{1}{\psi(m)} + O\left(R(x)\right) \tag{9}$$

avec

$$R(x) = \sum_{\psi(m)\leqslant x}' \frac{1}{\psi(m)\log\left(2+x/\psi(m)\right)}.$$

Si l'on pose $A(x) = \sum_{\psi(m)\leqslant x}' 1/\psi(m)$, on a d'après le lemme 4 avec $r = 1$, $A(x) = O(x\log 3x)$ et

$$R(x) = \int_{1^-}^{x} \frac{d[A(t)]}{t\log(2+x/t)},$$

$$R(x) = \frac{A(x)}{x\log 3} + \int_{1}^{x} \frac{A(t)\left(\log(2+x/t) - x/(2t+x)\right)}{t^2\log^2(2+x/t)}\,dt.$$

Or on a toujours, pour $u \geqslant 1$, $\log(2+u) - u/(2+u) \geqslant 0$. Par conséquent,

$$R(x) = \frac{A(x)}{x\log 3} + O\left(I(x)\right)$$

avec:

$$I(x) = \int_{1}^{x} \frac{A(t)}{t^2\log(2+x/t)}\,dt.$$

Il vient ensuite,

$$I(x) \leqslant (\log 3x)\int_{1}^{x} \frac{dt}{t\log(2+x/t)} = x\log 3x \int_{3}^{2+x/2} \frac{du}{(u-2)\log u}$$

$$\leqslant 3x\log 3x \int_{3}^{2+x/2} \frac{du}{u\log u} \leqslant 3x(\log 3x)\log\log 3x.$$

La relation (9) devient alors, compte tenu du lemme 3:

$$U(1, x) = Cx\log^2 x + O\left(x(\log 3x)\log\log 3x\right).$$

On conclut en remarquant que:

$$\sum_{\psi(m)\leqslant x}' 1 = 1 + \int_{3/2^-}^{x} \frac{d[U(1, t)]}{\log t} = O(1) + \frac{U(1, x)}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{U(1, t)\,dt}{t\log^2 t}.$$

3. Démonstration du théorème. En reprenant les notations de (4), le lemme 5 nous donne:

$$T_1 = C\frac{x}{2^k}\left(\log\frac{x}{2^k} + O\left(\log\log 3\frac{x}{2^k}\right)\right). \tag{10}$$

On a ensuite, pour un r fixé, $1 < r < 3/2$:

$$Q_2(y, k) = \sum_{\substack{\psi(m)\leqslant y\\ \Omega(m)>k}}' 1 \leqslant r^{-k} \sum_{\psi(m)\leqslant y}' r^{\Omega(m)} = O\left(y(\log 3y)^{2r-1-B\log r}\right)$$

par le lemme 4 et en tenant compte de l'hypothèse $k \geqslant Bl$ et de $y \leqslant x$.

On considère alors 3 cas:

1. $B < 3$. On choisit $r = B/2$. On a alors:

$$T_2 = O\left(x2^{-k}(\log 3x2^{-k})^b\right)$$

avec $b = B(1+\log 2) - 1 - B\log B$.

2. $3 \leqslant B \leqslant 2/\log(3/2)$. On choisit $r = \frac{3}{2} - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. On a alors:

$$T_2 = O\left(x2^{-k}(\log 3x2^{-k}\right)^b$$

pour n'importe quel $b > 2 - B\log(3/2)$.

3. $B > 2/\log(3/2) = 4{,}93\ldots$ On choisit $r = \frac{3}{2} - \varepsilon$, mais alors T_2 est négligeable devant le reste de (10) et on a:

$$N(x, k) = Cx2^{-k}\left(\log(x2^{-k}) + O\left(\log\log(3x2^{-k})\right)\right).$$

N'importe quel $b > 0$ convient alors dans le théorème.

Remarques. Il est possible par des méthodes analytiques d'obtenir pour T_1 un développement asymptotique plus long que (10), et de même d'obtenir un équivalent de T_2. Mais malheureusement la méthode ci-dessus, qui convient pour la fonction $\Omega(n)$ complètement additive, ne s'adapte pas par exemple à la fonction $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$. Pour cette fonction, les meilleurs résultats actuellement connus sont [4], [10] et [11].

References

[1] H. Delange, *Sur des formules de Atle Selberg*, Acta Arith. 19 (1971), p. 105–146.

[2] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic number theory I et II*, Springer Verlag 1980, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, n° 239–240.

[3] P. Erdös, *On the integers having exactly K prime factors*, Ann. of Math. (2), 49 (1948), p. 53–66.

[4] P. Erdös et J. L. Nicolas, *Sur la fonction: nombre de facteurs premiers de n*, Enseignement Math. 27 (1981), p. 3–27.

[5] P. Erdös and A. Sarközy, *On the number of prime factors of integers*, Acta Sci. Math. 42 (1980), p. 237–246.

[6] G. Kolesnik and E. G. Strauss, *On the distribution of integers with a given number of prime factors*, Acta Arith. 37 (1980), p. 181–199.

[7] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Chelsea Publishing Company, 1953.

[8] J. L. Nicolas, *Autour de formules dues à A. Selberg*, Colloque en l'honneur de H. Delange, juin 1982, Publication de l'Université Paris Sud — Orsay.

[9] K. K. Norton, *On the number of restricted prime factors of an integer, I*, Illinois J. Math. 20 (1976), p. 681–705.

[10] — *On the number of restricted prime factors of an integer, III*, Enseignement Math. 28 (1982), p. 31–52.

[11] C. Pomerance, *On the distribution of round numbers*, Abstracts A.M.S. 3 (1982), p. 414.
[12] S. Ramanujan, *Collected Papers*, Chelsea Publishing Company, 1962.
[13] L. G. Sathe, *On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors*, J. Indian Math. Soc. 17 (1953), p. 63–141; 18 (1954); p. 27–81.
[14] A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, ibid. 18 (1954), p. 83–87.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE LIMOGES
123 Avenue Albert Thomas
F-87060 Limoges Cédex
France

Reçu le 19. 11. 1982
et dans la forme modifiée le 18. 7. 1983 (1327)

ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

Zur diophantischen Approximation von zwei reellen Zahlen

von

PETER THURNHEER (Zürich)

I. Einleitung, Resultat. Nach einem Satz von Dirichlet existieren zu gegebenen reellen Zahlen α, β unendlich viele, vom Ursprung verschiedene Gitterpunkte $\mathfrak{x} = (a, b)$, für die gilt

$$\|\alpha a+\beta b\| \leqslant \langle \mathfrak{x}\rangle^{-2},$$

wobei $\|\cdot\|$ den Abstand von der nächsten ganzen Zahl bezeichnet und $\langle \mathfrak{x}\rangle := \max(|a|, |b|)$ ist. Im folgenden wird ein analoges Resultat bewiesen, wobei aber die Wahl der Gitterpunkte $\mathfrak{x}$ eingeschränkt wird auf gewisse Teilgebiete von $\boldsymbol{R}^2$.

Sei $\boldsymbol{R}^2 := \{\mathfrak{y} \mid \mathfrak{y} = (\xi_1, \xi_2)\}$. Für nicht negative ϱ, τ setzt man

$$\Phi_0(\varrho, \tau) := \{\mathfrak{y} \mid |\xi_2| < |\xi_1|^{\varrho}\} \cup \{\mathfrak{y} \mid |\xi_1| < |\xi_2|^{\tau}\}.$$

Es bezeichne $\Phi(\varrho, \tau)$ das Bild von $\Phi_0(\varrho, \tau)$ unter einer beliebig vorgegebenen, regulären linearen Transformation. Im weitern seien $c_1, c_2, \ldots$ positive Schranken, die höchstens von α, β und $\Phi(\varrho, \tau)$ abhängen.

SATZ. *Sei $\varrho > 1$, $\tau \geqslant 0$ und $1 < t \leqslant r \leqslant 2$, wobei gelte*

$$(1-\tau)\{\varrho(t^2r-tr-t-r-1)+t^2\}+(1-\varrho)(t^2-1) \leqslant 0. \tag{1}$$

Zu gegebenen reellen Zahlen α, β existieren dann unendlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{x} = (a, b)$ mit entweder

$$\mathfrak{x} \in \Phi(\varrho, 0) \quad \textit{und} \quad \|\alpha a+\beta b\| \leqslant c_1 \langle \mathfrak{x}\rangle^{-r}, \tag{2}$$

oder

$$\mathfrak{x} \in \Phi(1, \tau) \quad \textit{und} \quad \|\alpha a+\beta b\| \leqslant c_2 \langle \mathfrak{x}\rangle^{-t}. \tag{3}$$

Die im folgenden Korollar angegebenen Spezialfälle erhält man aus dem Satz, wenn man wählt $\varrho = 7/4$, $\tau = 0$, $r = t = 2$, beziehungsweise $1 < \varrho \leqslant 7/4$, $\tau = (7-4\varrho)/(4-\varrho)$, $r = t = 2$, beziehungsweise $1 < \varrho \leqslant 7/4$, $\tau = 0$, $r = t = s(\varrho)$, wobei $s(\varrho)$ die grösste reelle Nullstelle des Polynoms