GROTHENDIECK

Una guía a la obra matemática y filosófica

Fernando Zalamea

Grothendieck

Una guía a la obra matemática y filosófica

Fernando Zalamea

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá

2019

Diseño de cubierta

AZ Estudio (www.azestudio.com)

ISBN 978-958-48-5710-1

Impreso por Editorial Nomos

Impreso en Bogotá, Colombia

Es realmente por el descubrimiento sobre todo de preguntas nuevas, de nociones nuevas, o aún de puntos de vista nuevos, o de nuevos mundos, que mi obra matemática ha resultado ser fecunda.

Alexander Grothendieck (1984)

Contenido

Introducción

Esta monografía ofrece, por vez primera a nivel internacional, una visión de conjunto de la obra matemática y filosófica, publicada o distribuida, de Alexander Grothendieck (1928-2014). El volumen consta de tres partes centrales, dedicadas a pormenorizadas descripciones analíticas de sus trabajos, a lo largo de sus tres décadas principales de producción (1949-1957, 1958-1970, 1981-1991), así como de una cuarta parte adicional, donde se presentan algunas perspectivas sintéticas sobre la totalidad de la obra grothendieckiana. Entendida como *guía*, la monografía espera subrayar los aspectos más sobresalientes de los escritos de Grothendieck, indicando siempre con precisión los lugares exactos (libros, artículos, manuscritos, parágrafos, páginas) donde ocurren sus contribuciones.

En tal sentido, esta monografía invita a una *lectura detallada* de Grothendieck, lectura directa a la cual la guía no puede substituirse, de la misma manera que un esquemático *Guide Bleu*, por ejemplo, no puede subsanar el atento recorrido de un terreno rico, ondulado y quebrado, por parte del viajero. A pesar de ello, se ha realizado el mayor esfuerzo por acompañar al lector en la exploración de una obra formidable, tan extensa como profunda. Grothendieck se sitúa, al lado de Hilbert, como uno de los dos matemáticos mayores del siglo XX, y, por tanto, la amplitud y la originalidad de sus escritos superan nuestros restringidos conocimientos subdisciplinares. Una visión del conjunto de su obra requiere valentía, entusiasmo y, sobre todo, una considerable dosis de paciencia.

No obstante, Grothendieck insistía siempre en la *sencillez* de toda idea matemática profunda, y, en nuestra exposición, hemos tratado de ceñirnos a esa máxima esencial. Para ello, además de ofrecer una alta precisión descriptiva en el texto principal, el lector hallará *tres tipos de notas* a pie de página: notas donde se complementa y se ramifica el texto, notas donde se discute sistemáticamente la bibliografía secundaria y notas donde se explican, en forma autocontenida, los conceptos y los términos básicos en juego (para detalles, ver más abajo, en nuestra *Sección 0.3*, el apartado "Notas"). Así, funcionando en *varias escalas a la vez*, el lector podrá manejar diversos niveles de comprensión, que deberán acercarlo a la sencillez matemática propugnada por Grothendieck.

Una *guía* difícilmente puede ser leída de corrido. Aquí también, nuestra monografía incurre en esa dificultad, y creemos que resulta sobre todo de utilidad en lecturas *diagonales y zigzagueantes* bastante variadas: por capítulos o por secciones acotadas, por el rastreo continuo de las secciones sintéticas (una por capítulo), por momentos específicos o por épocas cronológicas, por niveles de notas a pie de página, por búsquedas en las bibliografías completas finales (primaria y secundaria, con remisiones a páginas en el texto), por los extensos índices onomástico y analítico, etc. En suma, el lector debe contar con suficientes herramientas –técnicas, conceptuales, metodológicas, históricas, filosóficas– para poder *navegar* con cierta comodidad por los mares grothendieckianos.

0.1 Nota biográfica sobre Alexander Grothendieck

Reproducimos aquí nuestro *Obituario* (*Lecturas matemáticas* 36(1) (2015): 93-112), presentado a la muerte de Grothendieck. Esta sección (sin referencias, introducidas luego en la monografía) sirve como *visión general* de su vida y obra. Por otro lado, al inicio de cada uno de los *Capítulos 1-15* abajo, ofrecemos detalladas informaciones adicionales sobre los *entornos cronológicos acotados* donde se sitúan los escritos de Grothendieck.

Alexander (alemán; Alexandre, francés) Grothendieck (Berlín, 28 Marzo 1928 – Saint-Girons, 13 Noviembre 2014) ha entrado ya en el aura mitológica de los grandes matemáticos de todos los tiempos. La potencia indomable de su personalidad y las características de su inagotable productividad –vaivén de extraordinaria finura técnica y originalísima profundidad conceptual– le sitúan, junto con Hilbert, como uno de los dos mayores matemáticos del siglo XX, fuente de preguntas y desarrollos cruciales para la matemática de los siglos venideros. Mente dotada de una rapidez inusual y capaz de adentrarse directamente en el corazón de los cuestionamientos esenciales de su disciplina, cambió en solo dos décadas (1950-1970) el panorama entero de las matemáticas, al introducir nuevas nociones de número (*esquemas*), espacio (*topos*) e invariantes de la forma (*motivos*), cuya herencia ha ido esclareciendo una impresionante sucesión de Medallistas Fields (Atiyah, Mumford, Deligne, Connes, Drinfeld, Kontsevich, Voevodsky, entre otros).

La vida de Grothendieck posee todos los ingredientes de una trágica narración novelesca. Hijo de Alexander (Sascha) Schapiro y Johanna (Hanka) Grothendieck, fotógrafo y escritora anarquistas, vive hasta los cinco años con ellos y con su hermana Maidi, nacida en matrimonio previo de Hanka, en un periodo pleno de armonía y riqueza emocional, tal como lo rememorará cincuenta años después en *Cosechas y siembras* [**1983-86**]. Sascha y Hanka deciden anteponer luego sus tareas revolucionarias a la crianza de los hijos, y parten en apoyo de la República en la Guerra Civil española, dejando a Alexander cerca de Hamburgo con la familia de un pastor protestante. Son años en los que el niño demuestra ya la característica pasión que gobernará todas sus acciones: se entusiasma con la rima y durante largos periodos habla solo en versos, resuelve e inventa crucigramas, escribe y exhibe, según uno de sus profesores, "un notable talento novelístico". En 1939, después de la derrota de la República en la Guerra Civil, se reúne con sus padres en el sur de Francia, antes de que se desmiembre de nuevo la familia: el padre es internado en el campo de concentración Le Vernet y luego deportado a Auschwitz (asesinado en 1942), mientras

Hanka y Alexander son enviados como "indeseables" al campo de Rieucros. Al disolverse Rieucros en 1942, Alexander termina sus estudios secundarios en el *Liceo Cévenol* en Le Chambon, donde confirma su temperamento rebelde y donde se apasiona por el latín y por el piano –signo de un temperamento musical que consumirá sus años doctorales en Nancy y que reaparecerá constantemente en su producción técnica y en su reflexión conceptual–. Entre 1945 y 1948 vive en Mairargues, un pequeño pueblo en medio de los viñedos, cerca de Montpellier donde realiza su Carrera de Matemáticas, en condiciones económicas difíciles, mientras ejerce de labriego en los campos. Autodidacta, afianza su independencia, y redescubre por sí solo la teoría de la medida de Lebesgue. No nota a sus profesores, ni es notado por ellos, hasta que un inspector del gobierno, André Magnier, detecta la genialidad del joven (a la sazón con veinte años) y le otorga una beca de estudios para París.

La educación matemática de Grothendieck cambia radicalmente con su llegada, en 1949, al Seminario Cartan en la *École normale supérieure*. Como el mismo Grothendieck señala [**1983-86**, 1.18-19], no había oído hablar hasta entonces (!) de espacios topológicos, grupos, anillos, módulos, homología, etc. La fenomenal capacidad de Grothendieck se revela en el gigantesco salto matemático realizado entre su inocente ignorancia de 1949 (París) y su espectacular acumen técnico de 1953 (Nancy), cuando al terminar su Tesis Doctoral sobre *espacios nucleares* [**1949-53**] se ve convertido, en palabras de Schwartz, en "el primer especialista mundial" en la teoría de los *espacios vectoriales topológicos*, y, según Dieudonné, en el autor de una obra "solo comparable con Banach". Son famosas las anécdotas, corroboradas en años y lugares distintos por sus dos directores de tesis, de cómo Dieudonné, con su característico ímpetu, habría botado a la basura la larga reconstrucción de la medida de Lebesgue realizada por Grothendieck en Montpellier, para proponerle en cambio "problemas difíciles": una serie de catorce preguntas abiertas (alrededor de las cuales Schwartz estaría recibiendo en 1950 la Medalla Fields, buen indicador de la profundidad del tema), mitad de las cuales el joven resuelve en pocas semanas y todas ellas en un año más, dando lugar a "seis memorias, cada una de las cuales habría conformado una buena tesis". El periodo "analítico" de Nancy continúa en la Universidad de São Paulo, donde el apátrida Grothendieck consigue un trabajo postdoctoral entre 1953 y 1955. Realiza allí su monografía sobre espacios vectoriales topológicos [**1953d**] y escribe su fenomenal *Résumé* [**1953c**], un verdadero *tour de force* donde, a partir de un meticuloso estudio reticular-topológico-algebraico-categórico de las únicas 14 normas naturales sobre productos tensoriales de espacios de Banach, resuelve el *problema de Banach-Mazur* (caracterización de los espacios de Hilbert como L-subespacios y C-cocientes), propone el problema de *aproximación* (resuelto por Enflo en 1972), y presenta la famosa *desigualdad de Grothendieck*, cuyas enormes consecuencias (en los campos más disímiles: C^*-álgebras, geometría no conmutativa, mecánica cuántica, teoría de grafos, problema P=NP) renovarán, cincuenta años después, el estudio fino local de los espacios de Banach.

El año 1955 "marca un giro crucial" en su trabajo matemático: "el paso del «análisis» a la «geometría»" [**1983-86**, P.26]. De hecho, en menos de un semestre, en la Universidad de Kansas, a los 27 años, Grothendieck escribe las ideas principales de su extenso tratado sobre las *categorías abelianas* [**1955-56**] (el denominado *Tôhoku*), donde, según Mac Lane, aparece entonces la "noción de teoría de categorías como un tema propio de estudio" bajo la influencia de Grothendieck. Allí unifica la cohomología a coeficientes en un haz y la serie de *funtores derivados* de funtores de módulos, y resuelve en abstracto la existencia de *suficientes proyectivos e inyectivos* (procedentes de su *Tesis* y del *Résumé*) mediante la primera aparición de *axiomas infinitarios* en la teoría de categorías. Por otro lado, empieza a trabajar en su versión generalizada del teorema de Riemann-Roch [**1955-57**], una labor profunda de enlace entre lo lineal (dimensión vectorial de espacios de funciones meromorfas) y lo geométrico (género de curvas) que da lugar a la *K-teoría*, base del teorema del índice de Atiyah-Singer, uno de los resultados centrales de la matemática del siglo XX. Si tuviésemos tal vez que sintetizar la obra de Grothendieck, esta debería explicarse como una *suavización abstracta general del entronque entre Galois y Riemann*. En efecto, aunque Betti y Poincaré realizaron las primeras unificaciones de los dos grandes Maestros del XIX, estas se quedan cortas con respecto a la amplitud del programa grothendieckiano (nítidamente expresado en su conferencia plenaria del Congreso Internacional de Matemáticas [**1958**]), cuya nueva fundamentación del número (*esquemas*) y del espacio (*topos*) procederá de sus trabajos iniciales en teoría de categorías y geometría algebraica. Es también la época de su intensa conexión con Jean-Pierre Serre, su alter ego y "educador" matemático, de quien diría "todo lo que aprendí en «geometría» (en un sentido muy amplio, que engloba la geometría algebraica o analítica [*i.e.* de la variable compleja], la topología y la aritmética), lo aprendí de Serre, cuando no lo estudié por mí mismo" [**1983-86**, 3.555-556].

Grothendieck emprende entonces su titánica tarea de *reconstrucción de la geometría algebraica* a la manera categórica, con una inversión metodológica de hondas consecuencias para el desarrollo posterior del pensamiento matemático: no definir un objeto y explorar una estructura interna sobre el objeto, sino definir la categoría de todos los objetos similares y explorar (axiomáticamente) la estructura externa de la categoría; no entender un objeto *en sí*, sino un objeto *en múltiple* (a través de su funtor representable asociado). Este es el sentido de la famosa metáfora de la "marea subiente", donde se sumerge una nuez en un líquido que la cubra enteramente, para poder así disolver naturalmente su cáscara (sin destrozarla con un "martillo") y dejar emerger suavemente su fruto interior [**1983-86**, 3.553]. De la obra de Grothendieck –desde sus altos lineamientos generales, hasta sus concreciones técnicas más particulares– se desprende un paradigma fundamental, que podríamos denominar la práctica de una *matemática relativa* (asociada al "lenguaje módulo C" de Serre y a las categorías cociente [**1955-56**]). Las estrategias de Grothendieck pueden entenderse, de hecho, en un sentido conceptual, como cercanas a las modulaciones relativas introducidas por Einstein en la física. Tanto Einstein como Grothendieck manejan, de manera técnica, el marco del observador y las dinámicas parciales del agente en el conocimiento. En particular, en el hacer de Grothendieck, puede observarse, primero, una introducción de una red de incesantes traslados, traslaciones, traducciones de conceptos y objetos ("*tipos*") entre regiones aparentemente distantes de la matemática, y, segundo, una búsqueda igualmente incesante de invariantes, proto-conceptos y proto-objetos ("*arquetipos*") detrás de esa red de movimientos. En particular, los *haces* (objetos paradigmáticos para Grothendieck, desde su Tesis Complementaria para el Doctorado) permiten encarnar, en sus definiciones técnicas, asociadas a la continuación analítica y al paso de lo local a lo global, tanto el flujo, como el reposo.

Después de la notable década de los cincuenta, se abren los famosos seminarios que tornarán al *Institut des Hautes Études Scientifiques* (*IHES*) en el primer centro mundial de la investigación matemática, y que terminarán de asegurar la Medalla Fields (1966) para Grothendieck (ver el recuento de su obra por Dieudonné, en Moscú, adonde Grothendieck no viajó en protesta por la barbarie estalinista). El *IHES*, abierto para Dieudonné, quien, con su enorme generosidad, había condicionado su contratación a aquella de Grothendieck, se convierte de hecho en el lugar soñado para la década mayor de la invención grothendieckiana. Gracias a su colaboración con Dieudonné, emerge el gigantesco *Elementos de Geometría Algebraica* (EGA) [**1959-64**], y, gracias a la colaboración con alumnos y colegas brillantes (Artin, Demazure, Gabriel, Verdier, Giraud, Deligne, Illusie, etc.), se construye el aún más monumental *Seminario de Geometría Algebraica* (SGA) [**1960-69**]. Situándose dentro de lo que luego llamaría Thom la "aporía fundadora de las matemáticas" –es decir, dentro de la irresoluble dialéctica contradictoria discreto/continuo–, Grothendieck inventa sus esquemas (aparición en 1958) como una herramienta muy potente para intentar resolver las *conjeturas de Weil* (1949). Por un lado, las conjeturas –lazos precisos entre lo discreto y lo continuo– intentan contar el número de puntos en ciertas variedades algebraicas sobre campos finitos, mediante funciones generadoras del tipo de las funciones zeta, provenientes de la intuición continua complejo-topológica de Riemann. Por otro lado, los esquemas, definidos como haces de anillos locales sobre el espectro topológico (ideales primos con topología de Zariski) de un anillo conmutativo unitario arbitrario, entroncan la visión de Riemann (anillos de meromorfas) y aquella de Galois-Dedekind (anillos de números algebraicos). Dwork (1960) demuestra la *racionalidad* de las funciones zeta, Grothendieck (1966) la *ecuación funcional* que las gobierna y Deligne (1974), el mayor alumno de Grothendieck, la adecuada *distribución de sus ceros* (lo que da lugar al conteo combinatorio de los puntos en la variedad). El resultado de Deligne es un verdadero *tour de force* técnico que le valdrá la Medalla Fields.

La matemática moderna, en la primera mitad del siglo XX, culminaba con la sorprendente prospección de Weil; impulsado por una muy fina intuición concreta y por una inusual capacidad para develar analogías en el cruce entre variedades algebraicas y topología, Weil había logrado enunciar con gran precisión sus conjeturas. La matemática contemporánea, en la segunda mitad del siglo XX, emerge en la obra de Grothendieck, y crea todo el aparataje de geometría algebraica que permite en cambio resolver esas conjeturas. Mientras que las topologías de Zariski sirven de mediaciones en el cruce (variedades algebraicas / topologías), y permiten enunciar las conjeturas, las cohomologías ("*étale*", l-ádica) de Grothendieck y de su escuela sirven de mediaciones en el cruce (esquemas / topos), permitiendo ahora resolverlas. Al extender las variedades algebraicas al ámbito de los esquemas, la riqueza de la invención genérica grothendieckiana no procede gratuitamente. De hecho, la generalización nunca se realiza sin adecuadas particularizaciones en mente (algo que se le ha criticado a Grothendieck, con total desconocimiento de causa), y se trata en realidad de un complejo proceso de ascenso y descenso que resulta estar siempre gobernado por consecuencias concretas del más alto valor matemático (son testigos los numerosos ejemplos de la década de los 1950, en análisis funcional, álgebra y variable compleja, y de la década de los 1980, en álgebra topológica).

Más allá de los haces como objetos singulares, la proto-topología que subyace a ciertas categorías de haces da lugar a los *topos de Grothendieck* (ideas implícitas en 1958, aparición explícita en 1962). En categorías con buenas propiedades de composicionalidad y cubrimiento, una topología abstracta (*topología de Grothendieck*) puede definirse mediante (sub)colecciones de morfismos que "empaten" bien las unas con las otras. Las categorías de prehaces (categorías de funtores a valores en la categoría de conjuntos) verifican esas buenas propiedades de composicionalidad y cubrimiento, y pueden definirse allí topologías de Grothendieck. Los topos proceden entonces de categorías de prehaces que se "sitúan" alrededor de una topología de Grothendieck (entornos categóricos llamados *sitios* – una simplificación posterior de los topos de Grothendieck son los topos elementales de Lawvere (1970), en donde las topologías abstractas pueden ser descritas, mediante el lema de Yoneda, gracias a un solo endomorfismo del clasificador de subobjetos, que calca las propiedades algebraicas de un operador de clausura). Suerte de universos paralelos para el desarrollo de las matemáticas, los topos son nuevos espacios categóricos, lo suficientemente amplios para poder desarrollar toda una tecnología sofisticada de lo relativo. Generalizando la acción de ciertos *grupoides* sobre las fibras de un haz, Grothendieck mueve los topos (ya no sólo entornos conjuntistas, sino topológicos, algebraicos, diferenciales, combinatorios, etc.) y estudia en forma genérica las acciones de variados funtores sobre clases muy amplias de topos. Los resultados no se dejan esperar, y en el ámbito geométrico genérico de los topos es donde ciertas obstrucciones cohomológicas desaparecen: donde Grothendieck puede desarrollar la cohomología apropiada del sitio "*étale*" –"liso", plano, sin ramificaciones, acercando una vez más la separabilidad de la teoría de Galois y la uniformización de las superficies de Riemann– que le permitirá a la escuela resolver las conjeturas de Weil.

La atención grothendieckiana al movimiento de los conceptos y objetos matemáticos va acompañada de una búsqueda oscilante de arquetipos para la razón y la imaginación matemática. Entre lo uno (la *forma*) y lo múltiple (las *estructuras*: esquemas, topos, etc.), Grothendieck descubre e inventa –dualidad fundamental de la filosofía matemática, magníficamente explorada en *Cosechas y siembras* [**1983-86**]– nuevas cohomologías como apropiados invariantes de la forma. Aunque los grupos de homología y cohomología para la topología algebraica tienden a verificar ciertas condiciones de univocidad, al pasar a la geometría algebraica las posibilidades de invarianzas cohomológicas se multiplican (Hodge, de Rham, cristalina, "*étale*", *l*-ádica, etc.), y Grothendieck propone entonces sus *motivos* (1965-70) [**1968**] como hondas estructuras genéricas subyacentes a las distintas cohomologías: el tema de los motivos "es como el corazón o el alma, la parte más escondida, la que se sustrae más a la mirada, dentro del tema de los esquemas, que se encuentra a su vez en el corazón mismo de mi nueva visión (...) Con el término de motivo, entiendo sugerir que se trata del «motivo común» (o de la «razón común») subyacente a esa multitud de invariantes cohomológicos diferentes (...) [que] serían como suertes de desarrollos temáticos diferentes –cada uno en el «tempo», en la «llave» y en el «modo» («mayor» o «menor») que le fuese propio– de un mismo «motivo de base»" [**1983-86**, P.45-46] (obsérvense el fondo propio del Romanticismo, la musicalidad omnipresente y el uso consistente de la matemática relativa). Considerada por un tiempo como dudosamente especulativa, la teoría motívica de Grothendieck ha adquirido sin embargo una firme base teoremática en las manos de Voevodsky, otro más de los Medallistas Fields descendientes de Grothendieck, quien propuso (1990-2000) nuevas formas de cirugía en una variedad algebraica, asociadas a nuevas estructuras topológicas para los objetos algebraicos (topologías finas de Grothendieck sobre sitios de esquemas), y quien se erigió como fundamentador alternativo de las matemáticas, con su teoría homotópica de tipos (HoTT, 2005-hoy), inspirada en gran parte en ideas iniciales de Grothendieck. Debe aquí observarse la espectacular influencia de Grothendieck en la escuela rusa (Gelfand, Manin, Drinfeld, Kontsevich, Voevodsky, etc.), que –como el Panorama Fields demuestra y a la par de la escuela francesa derivada también en buena medida de Grothendieck– merece considerarse como máxima expresión, volcada a las profundidades, de la matemática en los últimos cuarenta años.

El Mayo 68 francés revivió en Grothendieck las ansias libertarias de sus padres, pero, curiosamente, la situación se había invertido para entonces, y el enorme matemático, en su reducto del *IHES*, llegó a ser considerado como un "mandarín" reaccionario por parte de los estudiantes y fue duramente criticado en algunos debates de la época. Los cuestionamientos de la comunidad confluyeron sin duda con los suyos propios, y la susceptibilidad de Grothendieck debió alcanzar un límite difícil de manejar. Después de veinte años ininterrumpidos de trabajo insensato (dentro de los mitos de la época, se aseguraba que Grothendieck manejaba un ciclo vital de 27 horas sin dormir), Grothendieck tuvo que haber llegado a una saturación física y emocional que le desequilibró. Su renuncia al *IHES* en 1970 y su disparatada intervención en el Congreso Internacional de Matemáticos de Niza en el mismo año (organizado por un frustrado Dieudonné) le alejaron de la comunidad matemática. El hecho de que el *IHES* hubiese recibido apoyos económicos por parte del Ministerio de Defensa, comprometiendo la integridad y la libertad de sus profesores, parece haber sido solo la excusa final para la ruptura que el cuerpo y la mente le exigían al matemático. La década 1970-1980 constituye entonces un nuevo renacer, donde Grothendieck se abre a los movimientos ecologistas (líder y cofundador de *Survivre et vivre*, 1970-1975), a modos de existencia alternativos (vida en una comuna, donde tiene un hijo con su última compañera; en la época del *IHES* ya había tenido tres hijos con su esposa Mireille Dufour y otro antes con su casera en Nancy), a la acción humanitaria (viaje a Vietnam), a la filosofía oriental (conversión al Budismo). El mismo Grothendieck llama a estos años su periodo de "madurez", "un reencuentro con el «estado de infancia»", "una armonía del «yin» y del «yang» en mi ser" [**1983-86**, 3.466]. Desde entonces, Grothendieck realza la importancia de un profundo *vaivén yin-yang* en el quehacer matemático, donde se combinan, en los momentos de emergencia creativa, una componente femenina *yin* (ligada al descubrimiento y al corazón de las cosas), y, en los momentos de construcción arquitectónica, una componente masculina *yang* (más ligada a la invención y a la razón) [**1983-86**, 3.470-471].

Después del "gran giro" de 1970, y después de algunos intentos fracasados por trabajar en el CNRS y en el *Collège de France* (donde se le ofrece una cátedra de matemáticas, que debe sin embargo abandonar al dedicarla en parte a consideraciones ecologistas), Grothendieck regresa a la Universidad de Montpellier y ejerce allí una opaca e inconstante labor de profesor entre 1973 y 1984. Vendrán luego treinta años de trabajos en reclusión, en pequeños pueblos de los Pirineos, antes de su muerte. Dada la ingente actividad de Grothendieck (que no disminuye en su alejamiento de la comunidad) y dado el enorme lapso de tiempo transcurrido (¡treinta años son muchos para cualquiera y son muchísimos para Grothendieck!), es de esperarse que las cajas de manuscritos encontradas en su residencia constituyan un verdadero tesoro para las generaciones futuras (bajo la coordinación de Leila Schneps, la página *www.grothendieckcircle.org* sigue atentamente la herencia del matemático). Varios de esos manuscritos alcanzaron a ser circulados y conforman notables aportes tanto a la matemática [**1981**] [**1983**] [**1984**] [**1991**], como a la reflexión (de y sobre la) matemática [**1983-86**] [**1987**]. Entre esos trabajos, *Cosechas y siembras* deberá sin duda ser considerado como una de las más profundas disquisiciones que un matemático de estirpe nos haya jamás regalado sobre la constitución de su obra, en particular, y sobre la constitución de las matemáticas, en general. El *grupo de Grothendieck-Teichmüller* (descripción combinatoria del grupo de Galois de la clausura algebraica de los racionales y de sus acciones sobre espacios *moduli*) [**1981**], la *geometría anabeliana* (caracterización de variedades por medio de sus grupos fundamentales algebraicos) [**1981**], los *stacks* (generalizaciones de haces a *n-categorías*) [**1983**], los *dibujos de niños* (descripciones combinatorias de superficies de Riemann) [**1984**], la *topología moderada* (eliminación de artificiales obstrucciones conjuntistas y suavización de contraejemplos en topología) [**1984**] y los *derivadores* (formas de una nueva álgebra topológica, donde se unifican la homología y la homotopía) [**1991**], frutos de la inagotable inventividad de Grothendieck en los años 80, recelan aún muchos misterios para el siglo XXI.

En la inusual combinación de los más abstracto y lo más concreto radica la excepcionalidad de Grothendieck. Cinco de las fuerzas transversales y pendulares mayores en su obra (*multiplicación, abstracción, naturalización, transición, suavización*) recorren el vasto mundo de los campos matemáticos donde Grothendieck renovó completamente nuestra visión: espacios vectoriales topológicos y espacios de Banach, variable compleja y teoría de Riemann-Roch, teoría de categorías y álgebra homológica, esquemas y geometría algebraica, topos y herramientas finas de cohomología, motivos y operadores derivados, grupos de Galois y superficies de Riemann, formas combinatorias y torres de espacios de funciones meromorfas, dibujos de niños y topología moderada, etc. La unidad y la multiplicidad del pensamiento de Grothendieck han generado, en lo más alto, (1) una verdadera acción dialéctica que recorre toda la amplitud de las matemáticas, y, en lo más concreto, (2) algunas de las invenciones más originales de la segunda mitad del siglo XX. Grothendieck nos acerca así a la creatividad matemática en sus más áureas cimas y renueva una vez más el lema de Jacobi, "en honor del espíritu humano".

0.2 El *Seminario Grothendieck 2015-I a 2016-I*

A pesar de haber estudiado fragmentos de los topos y de las categorías abelianas desde nuestras tesis de maestría (1986) y doctorado (1990), nuestra lectura detallada progresiva de la obra de Grothendieck se ha desplegado esencialmente en los últimos quince años (2004-2019). Diversas etapas jalonaron esa tarea: *(i)* la escritura (2004-2008) de la monografía *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* (publicada en español 2009, traducción al inglés 2012, traducción al francés 2018), donde, sin haberlo imaginado en primera instancia, la figura central del texto resultó ser nítidamente Grothendieck, *(ii)* la elaboración de una larga serie de conferencias sobre la obra grothendieckiana (2006-2019), *(iii)* la realización de un seminario especializado (2015-2016), dedicado a leer con mucho cuidado a Grothendieck, *(iv)* la escritura final de esta monografía (2017-2019).

La base de este volumen constituye nuestro *Seminario Grothendieck 2015-I a 2016-I*, cuyos contenidos resumimos a continuación.

2015-I (Primera parte).

1 (2 feb). Mapa del seminario: el mayor matemático del siglo XX (primera parte 1928-1960).

2 (4 feb). Espacios vectoriales topológicos y espacios holomorfos: grandes conceptos y problemas.

3 (11 feb). Categorías abelianas y K-teoría: grandes conceptos y problemas.

4 (18 feb). 1950: el entorno filosófico, técnico y biográfico.

5 (25 feb). *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (Tesis Doctoral) (1949-1953).

6 (4 mar). *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* (1953).

7 (11 mar). *Tôhoku*: categorías abelianas (1) (1955-1956).

8 (8 abr). *Tôhoku*: categorías abelianas (2) (1955-1956).

9 (6 may). *Rapport Riemann-Roch*: K-teoría (1955-1957).

10 (13 may). *Techniques de construction en géométrie analytique*: espacios de holomorfas (1961).

11 (20 may). *La clef des songes* (1987).

12 (27 may). Diagrama inicial de la creatividad en Grothendieck (fin de la primera parte).

2015-II (Segunda parte).

13 (10 ago). Mapa del seminario: el "niño" (1928-1958) y el "mandarín" (1958-1970).

14 (12 ago). La refundación de la geometría algebraica: grandes conceptos y problemas.

15 (19 ago). 1960: el entorno filosófico, técnico y biográfico.

16 (26 ago). *The cohomology theory of abstract algebraic varieties* (Edimburgo) (1958).

17 (2 sep). *EGA* (I: visión general) (1959-1964).

18 (9 sep). *EGA* (II: esquemas) (1959-1964).

19 (16 sep). *Récoltes et semailles* (I: esquemas, topos y motivos) (1983-1986).

20 (28 oct). *SGA* (I: visión general) (1960-1969).

21 (4 nov). *SGA* (II: topos) (1960-1969).

22 (11 nov). *Récoltes et semailles* (II: homología de la creatividad) (1983-1986).

23 (18 nov). Diagrama medio de la creatividad en Grothendieck (fin de la segunda parte).

2016-I (Tercera parte).

24 (1 feb). Mapa: (1) "niño", (2) "mandarín" y (3) "eremita" (1970-1991).

25 (3 feb). Estructuras universales en Galois y Riemann: grandes conceptos y problemas.

26 (10 feb.) Homología y homotopía categóricas: grandes conceptos y problemas.

27 (17 feb). *Motifs*: arquetipos de las (co)homologías (1965-1969).

28 (24 feb). 1970: el entorno filosófico, técnico y biográfico. *Survivre et vivre* (1970-1975).

29 (2 mar). *La longue marche à travers la théorie de Galois*: (1) geometría anabeliana (1981).

30 (9 mar). *La longue marche à travers la théorie de Galois*: (2) teoría de Teichmüller (1981).

31 (13 abr). *Pursuing stacks*: homotopía categórica "local" (1983).

32 (20 abr). *Esquisse d'un programme*: (1) teoría de Teichmüller y dibujos de niños (1984).

33 (27 abr). *Esquisse d'un programme*: (2) topología moderada y *stacks* (1984).

34 (11 may). *Les dérivateurs*: homotopía categórica "global" (1991).

35 (18 may). *Récoltes et semailles* (1983-1986) & *La clef des songes* (1987): metodología.

36 (25 may). Diagrama final de la creatividad en Grothendieck (fin de la tercera parte).

0.3 Este volumen

Enfoque.

Esta monografía se enmarca bajo algunos supuestos procedentes de nuestro *Seminario Grothendieck* recién descrito. Específicamente, creemos en *(i)* una enorme *coherencia* y una incesante *continuidad* en la obra de Grothendieck, presentes en nuestra exposición detallada (*Capítulos 1-15*) y subrayadas en los *Capítulos 16-17*; *(ii)* una *riqueza de tensiones y niveles* en el pensamiento grothendieckiano, donde se combinan abstracción y concreción, universalidad y particularidad, arquetipos y tipos, multiplicidad y unidad, continuidad y discreción, estructura y cálculo, tránsitos y obstrucciones, y donde cualquier seccionamiento debe considerarse solo *circunstancial*; *(iii)* una búsqueda incesante de nociones de *suavidad* en el hacer matemático de Grothendieck, tanto a través de sus construcciones (donde los *haces* y la variable compleja adquieren un papel primordial), como en sus métodos (la disolución categórica suave en las aguas, en vez del uso del buril y el martillo); *(iv)* un *equilibrio inventivo* entre las tres décadas 1949-1957, 1958-1970, 1981-1991, donde cada periodo es tan innovador y profundo como los demás (en contra de la recepción usual, donde se enfatiza sobremanera la época del *IHES* 1958-1970).

Organización y Método.

La monografía se divide en cuatro *Partes*, tres de ellas dedicadas enteramente a recorrer, en orden cronológico, los escritos conocidos de Grothendieck. Sus manuscritos inéditos, cuyo paradero final, en indeterminaciones de herencia, no ha sido fijado aún (2018), no entran por lo tanto en el recorrido que realizamos en este volumen. Es evidente que, en unos diez o veinte años, el conocimiento de esas cerca de 50.000 páginas inéditas deberá cambiar nuestra percepción del Maestro. No obstante, por el momento, la *Guía a la obra matemática y filosófica* que presentamos puede considerarse razonablemente completa hasta el año 1991. Quince *Capítulos* en las tres primeras *Partes* (*1949-1957, 1958-1970, 1981-1991*) se concentran en los textos mayores, matemáticos y filosóficos, de Grothendieck. La década del 70, más dedicada a su activismo ecológico y político, queda por fuera de este volumen, pero debe señalarse que, en un entendimiento integral del hombre, todo se interconecta, y convocamos en la tercera *Parte* algunos temas de la década del 70. Si las *Partes I-III* sirven de guía objetiva a la obra de Grothendieck, la *Parte IV* ofrece en cambio una lectura más personal de la información recabada. De hecho, si los *Capítulos 1-15* pueden verse como las *fibras verticales* de un haz, los *Capítulos 16-17* pueden entenderse como *secciones (locales o globales)* del haz, y los *Capítulos 18-19* pueden imaginarse como *ramificaciones* de esas secciones hacia los campos más vastos de la cultura (dentro de una imaginería extensa de hojas culturales diversas, en superficies de Riemann para el pensamiento).

Cada *Capítulo* de las tres primeras *Partes* se divide sistemáticamente en tres *Secciones*, ofreciendo, para cada texto escogido, un *análisis descriptivo* extenso, una *síntesis conceptual* más breve y un estudio más preciso de un *ejemplo ilustrativo.* El sentido de las subdivisiones, además de la claridad, consiste en permitir una *independencia* de lecturas por niveles. Las *Secciones x.1* (con $x = 1, \cdots, 15$) pueden ser leídas sin referirse a las otras secciones, y proveen una descripción, suficientemente neutra, de las muchas *técnicas* presentes en los trabajos de Grothendieck. Las *Secciones x.2* pueden ser a su vez recorridas aparte, para quien se interese sobre todo en las *ideas* centrales, matemáticas y filosóficas, en juego. Finalmente, las *Secciones x.3* complementan las *Secciones x.1*, para quien desee sumergirse, en cambio, en la riqueza grothendieckiana de algunos detalles matemáticos.

Notas.

El volumen incluye 1107 *notas a pie de página*, de tres tipos distintos.

• Notas referentes al *texto principal* (añadidos, desviaciones, reflexiones) [tipo 10, referenciadas con números, $1, 2, \cdots$, situadas en el *primer nivel* en la parte baja de la página; 880 notas denotadas 1-880]. Se trata aquí de un diálogo entre temas grothendieckianos complementarios y reflexiones propias del autor (FZ), tanto con respecto a la obra de Grothendieck, como con respecto a la monografía en curso. En particular, se hace referencia en este nivel a algunos trabajos de Grothendieck *no mencionados* en la bibliografía principal (*Obras de Grothendieck*, ver más abajo), así como a algunos manuscritos inéditos del *Archivo Grothendieck* (ver más abajo).

• Notas referentes a la *bibliografía secundaria* (fuentes alternas, contrastaciones, adiciones) [tipo 9, referenciadas con números romanos en minúscula, *i, ii*, $\cdots$, situadas en el *segundo nivel* en la parte baja de la página; 164 notas denotadas *i-clxiv*]. *Toda la bibliografía secundaria sobre Grothendieck usada en esta monografía aparece sistemáticamente en este nivel.* En particular, se hace referencia aquí a hechos diversos de la vida reportados por los biógrafos y se mencionan aportes técnicos propios de la bibliografía secundaria.

• Notas referentes a la *técnica matemática* (definiciones, resultados, conceptualizaciones) [tipo 8, referenciadas con números romanos en mayúscula, I, II, $\cdots$, situadas en el *tercer nivel* en la parte baja de la página; 63 notas denotadas I-LXIII]. Se busca aquí ofrecer suficiente información técnica autocontenida, no discutida en los otros niveles y, a menudo, posterior a la época o al estilo de Grothendieck. Los datos en este tercer nivel proceden de la formación del autor (FZ) o del *folklore* matemático, y deben distinguirse de las entradas tomadas de otros autores (registradas en el segundo nivel).

De esta manera, se espera proveer la mayor claridad posible al lector, otorgando, en un primer nivel, comentarios y añadidos al texto principal, en un segundo nivel, referencias consistentes a la literatura secundaria sobre Grothendieck, y en un tercer nivel, fragmentos de información para facilitar la lectura del volumen. Este tercer nivel supondrá (y no recordará) un cierto conocimiento de matemáticas básicas (a nivel de la Carrera de Matemáticas: cursos de lógica; teoría de números; grupos, anillos y campos; topología; variable compleja; geometría diferencial; análisis funcional), pero intentará cubrir en cambio aquellos temas que deban considerarse propios de estudios superiores. Sin embargo, de manera *no sistemática*, para no cargar excesivamente el texto, haremos incursiones también en temas elementales de la matemática, cuando el énfasis lo requiera. Sin haberlo buscado expresamente, la *disposición tipográfica* de las notas a pie de página convoca la imagen de los *diversos niveles o estratos de un haz*, que se *pliegan* y *despliegan* sobre el texto principal, y remite así, en una práctica subliminal, al concepto esencial de haz sin el cual los trabajos de Grothendieck serían incomprensibles.

Referencias e índices.

Para mayor comodidad del lector, la *Bibliografía* ha sido dividida en dos partes: *Obras de Grothendieck* y *Bibliografía secundaria.* Las referencias a las *Obras de Grothendieck* ocurren en medio del texto, remitiendo a los *años de creación* de sus trabajos, entre paréntesis cuadrados, en negritas (*e.g.* [**1949-53**]). Como ya señalado, otras referencias a trabajos de Grothendieck no listados en las *Obras* ocurren en el primer nivel de notas a pie de página. Las referencias a la literatura secundaria, finalmente, ocurren siempre en el segundo nivel de las notas a pie de página. Todas las entradas en la *Bibliografía* (primaria o secundaria) remiten a las páginas del texto principal donde las referencias son mencionadas, lo que permite diversos seguimientos transversales.

Por otra parte, los *Índices onomástico y analítico* deben considerarse como herramientas esenciales para rastrear ideas y técnicas en una *Guía* como esta. En efecto, una lectura de corrido de esta monografía (suerte de *sección global*) resulta prácticamente imposible, y requiere apoyarse en la mirada parcial de múltiples fragmentos cronológicos, conceptuales, técnicos (suerte de *secciones locales*), para los cuales los *Índices* resultan ser de suma utilidad. Obsérvese que el *Índice onomástico* no incluye los nombres de autores referidos en la *Bibliografía secundaria*, pues esta a su vez reenvía a las páginas precisas donde esos textos y autores son citados.

Archivos Grothendieck.

La escritura de esta monografía (2017-2019) se ha visto beneficiada con la aparición (Mayo 2017) de una digitalización, disponible al público, de los *Archives Grothendieck* en la Universidad de Montpellier (ver referencia [**IMAG**] en la *Bibliografía*, bajo la rúbrica *Obras de Grothendieck*). Aunque nuestro objetivo ha sido el de proveer una guía para la *obra publicada* de Grothendieck (o ampliamente *distribuida*, como los manuscritos de la década de los 1980s), hemos hecho el ejercicio de contrastar, en lo posible, algunos de los manuscritos de los archivos con los textos principales. Esto ocurre en las *Partes II y III* de nuestro trabajo, ya que los archivos recuperados y digitalizados recorren sobre todo el periodo 1960-1990. Esos ejercicios de contraste ocurren sistemáticamente en el *primer nivel de las notas a pie de página*, acompañados de referencias a la sigla [**IMAG**]. Es muy interesante el acceso directo a las *formas tangibles de escritura* de Grothendieck, donde se expresan bien su rapidez de pensamiento (caligrafía esquemática muy recostada) y su apertura inventiva (tachones, correcciones, cambios, reincidencias).

Agradecimientos.

A mis Maestros, Xavier Caicedo y Ernest Manes, quienes hace ya treinta y cinco años me abrieron los mundos de los topos y las categorías abelianas, semillas que poco a poco me envolvieron en el pensamiento fascinante de Grothendieck. A César Gómez, Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, quien siempre me apoyó durante el periodo más intenso (2015-2018) de mis trabajos grothendieckianos. A quienes me acompañaron fielmente durante el *Seminario Grothendieck 2015-I a 2016-I*: profesores (en particular, Lorenzo Acosta, Bernarda Aldana, Yolima Álvarez, Carlos Cardona, Asdrúbal Moreno, Reinaldo Montañez, Natalia Palomá, Lucio Fernando Ruíz, Francisco Vargas) y estudiantes (en particular, Viviana Buitrago, Daniel Cárdenas, Edna Forero, Catalina García, Alexander Garzón, Lorena Ham, Edwin Lara, Christian Nolasco, Óscar Ramírez, Diego Reyes, Bibiana Riaño, Yesid Sánchez).

A mis estudiantes de tesis en temas grothendieckianos: en matemáticas (Gustavo Arengas, Juan Sebastián Arias, Angie Hugueth, Diego Manco, Eyder Martínez, Walter Páez, Yuri Poveda, Nicolás Ramírez, Jaime Robayo) y en filosofía (Nancy Durán, Daniel Rosiak). A Michael Wright, quien se empeñó en querer filmar el *Seminario Grothendieck 2015-I a 2016-I*. A Nicolás Ramírez, quien realizó esas filmaciones y estuvo atento a producir las preguntas más incisivas. A Estefanía Cubaque, mi "escribana" a lo largo de seis de los siete años de mi *Seminario de Filosofía Matemática 2012-2018*, donde se inscribieron mis trabajos sobre Grothendieck. A varios integrantes que han conformado una verdadera comunidad grothendieckiana: Sylvie Paycha, por compartir su fina sensibilidad alrededor del ser humano Grothendieck, Leila Schneps, por incluir los pdfs de mi *Seminario Grothendieck 2015-I a 2016-I* en su página del *Grothendieck Circle*, Giuseppe Longo, por diversas conversaciones topósicas y filosóficas estimulantes, y Guerino Mazzola, por su entusiasmo contagioso y por su gran obra, *The Topos of Music*, hasta el momento la mayor aplicación del pensamiento grothendieckiano a la cultura en general.

A diversos colegas que me invitaron a ofrecer *cursillos* sobre Grothendieck mientras este libro se fraguaba: Christopher Vitale (Pratt Institute 2015), Rossella Fabbrichesi y Florinda Cambria (Mechrì–Milano 2017), Catalina Hynes (Universidad de Tucumán 2017), Alejandro Garciadiego (Universidad Nacional Autónoma de México 2018), Fred Moten (New York University 2019). A otros queridos colegas que me invitaron a realizar *conferencias* grothendieckianas a lo largo de una década: Yuri Poveda (Universidad Tecnológica de Pereira 2006), Mary Falk de Losada (Universidad Pedagógica 2006), Clara Neira (Universidad Nacional de Colombia 2007), Jean-Pierre Marquis (Université de Montréal 2008), Jesús Hernando Pérez (Universidad Sergio Arboleda 2008), Hourya Sinaceur (École normale supérieure 2010), Luke (Lucca) Fraser (Jan van Eyck Institute Maastricht 2011), Andrés Villaveces (Universidad Nacional de Colombia 2012), Colectivo *Don't Panic* (Biblioteca Luis Ángel Arango 2013), Luis Carlos Arboleda (Universidad del Valle 2013), Carmen Samper (Universidad Pedagógica 2015), Jaime Robayo (Fundación Universitaria Los Libertadores 2015), Alejandro Garciadiego (Universidad Nacional Autónoma de México 2015), Lorenzo Acosta (Universidad Nacional de Colombia 2015), Reinaldo Montañez (Universidad Nacional de Colombia 2016), Nicolás Salazar (Oxford University 2016), Franck Jedrzekewski (Collège International de Philosophie 2016), Karine Chemla (Université Paris VII 2016), Giovanni Maddalena (Università di Torino 2016), Bruno D'Amore (Università di Bologna 2016), Rosa Calcaterra (Università Roma Tre 2017), Frédéric Jäeck (École normale supérieure 2018), Jana Beránková (Prague National Gallery 2018). La riqueza vital e intelectual de mis oyentes en esos lugares (recuerdo en especial a Michael Friedman, Paco Larrión, Emilio Lluis, Egidio Meazza, Michela Torri, Dimitris Tsementzis, Melisa Vivanco, Rebecca Warzer) me impulsó sobremanera. La experiencia de recorrer espacios donde la figura de Grothendieck entusiasmaba a los auditorios fue vital para escribir esta monografía. Sin duda, casi físicamente, las *mareas grothendieckianas* me sumergieron y me conmovieron en lo más hondo.

Agradecimientos especiales a Charles Alunni, Gabriel Catren, Alex Cruz, Bruno D'Amore, Giovanni Maddalena, Alejandro Martín, Jaime Nubiola, Arnold Oostra, Carlos Tapia y Andrés Villaveces, con quienes mantuve diálogos constantes sobre Grothendieck en la última década. En particular, las íntimas resonancias con Cruz, Oostra y Villaveces fueron determinantes para la realización de este trabajo; su impulso y su confianza me mantuvieron a flote en muchos momentos arduos de una demandante labor. Finalmente, dedico este volumen a mi esposa Maria Elsa, quien siempre me apoyó con cariño y convicción en las demasiadas horas robadas por mis labores, dispuso alrededor mío todo el necesario ambiente material y espiritual para poder trabajar con ahínco, y efectuó una lectura formal completa final de la monografía, así como a mi hijo Federico, generoso acompañante y lector crítico de los primeros capítulos de este libro, productor y corrector de las plantillas TeX del volumen, ejemplo de rigor, equilibrio y ponderación, y a quien, en todos los aspectos de la vida y de la inteligencia, le debo muchísimo más de lo que aquí podría expresar.

Parte I

1949–1957

1

Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires (1949-53)

La *Tesis Doctoral* [**1949-53**] sitúa a Grothendieck entre los más brillantes matemáticos de su generación. Es bien conocida la historia[i] según la cual el joven recalcitrante que había pasado el año 1948-49 en el *Seminario Cartan* es enviado a Nancy en 1949, y sus mentores, Schwartz y Dieudonné, le asignan catorce problemas abiertos para intentar calmar su frenesí matemático. Al año los ha ya resuelto todos, y tiene a su haber, según el testimonio de Schwartz, numerosas investigaciones que le podrían valer por varias tesis. La *Tesis Doctoral*, desarrollo de esas investigaciones, es defendida en 1953 y publicada en 1955 por la *American Mathematical Society*. Estudiaremos en este primer capítulo esa *Tesis*, aprovechando también un resumen de los resultados aparecido en los *Annales de l'Institut Fourier* [**1952a**], y una presentación realizada en el *Seminario Bourbaki* [**1952b**].

---

i W. Scharlau. *Who is Alexander Grothendieck? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude. A Biography. Part 1: Anarchy.* Norderstedt: Herstellung und Verlag, 2011, pp. 182-183; G. Bringuier. *Alexandre Grothendieck. Itinéraire d'un mathématicien hors normes.* Toulouse: Privat, 2015, pp. 38-39.

1.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

La monografía publicada por la *American Mathematical Society* reproduce la *Tesis Doctoral* [**1949-53**]. La *Tesis* fue defendida el 28 de Febrero de 1953, ante un jurado compuesto por Henri Cartan (*Président*), Laurent Schwartz (*Rapporteur*) y Gustave Choquet (*Examinateur*)[1][ii]. En su autobiografía, Schwartz recuerda los inicios de las labores matemáticas de Grothendieck en Nancy, que le llevarían a especializarse en los espacios vectoriales topológicos[iii]. Se puede marcar entonces 1949 como el año cuando empieza a trabajar en su *Tesis*, y que da lugar, en 1950, a las primeras notas breves sobre el tema[2][iv]. Por otro lado, parece existir un giro, en 1951, hacia la aparición específica de los espacios nucleares[v]. En cualquier caso, en dos ocasiones, el mismo Grothendieck deja por escrito que ha obtenido básicamente sus resultados en 1951: una mención al "otoño 1951" [**1952a**, 71]

[1] Un ejemplar se encuentra aún disponible (2016) y accesible al público en la Biblioteca de Jussieu, en París. En la portada de la *Tesis* se observa cómo, tachados en rojo, a mano, Schwartz pasa de ser *Président* a *Rapporteur*, mientras que Cartan se transforma, de *Examinateur*, en *Président*.

[2] Los primeros textos publicados de Grothendieck aparecen en los *CRAS, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences*, 1950-1951, sobre espacios vectoriales topológicos, duales, compacidad, patologías y productos tensoriales. Específicamente ocurren "la compleción del dual de un espacio vectorial localmente convexo" (*CRAS*, 13 Febrero 1950), "criterios generales de compacidad en espacios vectoriales localmente convexos" y "patologías" (*CRAS*, 30 Octubre 1950), "resultados sobre espacios vectoriales topológicos" (*CRAS*, 15 Octubre 1951), "productos tensoriales topológicos" (*CRAS*, 3 Diciembre 1951). La frenética actividad matemática de Grothendieck se acompaña así también de constantes exposiciones públicas.

[ii] Para otras precisiones (Gustave Choquet erróneamente denominado "Georges" Choquet, Bernard Malgrange recordando su presencia en la defensa de Tesis), véase L. Schneps. *Grothendieck – Mathematics.* Preprint. URL: https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Mathematics/chap3.pdf, Chap. 3, p. 10.

[iii] Scharlau observa cómo Schwartz confunde el año 1949, ver Scharlau, óp.cit., pp. 182-83.

[iv] Grothendieck también fue presentado como "cobaye" (conejillo de indias) en el grupo Bourbaki desde Febrero de 1950, y obtuvo una beca del *CNRS* desde otoño de 1950. Véase Schneps, óp.cit. pp. 3, 5.

[v] Esto aparece documentado en una carta de Schwartz a Grothendieck desde Brasil, véase ibíd., p. 8.

y una indicación de que su trabajo ha sido "concebido independientemente de Ruston" (1951) [**1949-53**, 1ª parte, 4].

Resumen mínimo.

La *Tesis* se divide en una *Introducción*, un *"Capítulo 1"* y un *"Capítulo 2"* . La *Introducción* [**1949-53**, 1ª parte, 3-27] plantea el "estudio sistemático" de productos tensoriales topológicos y de "una nueva clase notable", los espacios nucleares [**1949-53**, 1ª parte, 3]. Una perspectiva global surge al observar *todos* los espacios vectoriales topológicos localmente convexos "generales" [**1949-53**, 1ª parte, 4]. Grothendieck introduce entonces notaciones, límites inductivos, casos especiales, recordatorios. El *"Capítulo 1" ("Teoría general de los productos tensoriales topológicos")* [**1949-53**, 1ª parte, 28-191] incluye: §1. Producto proyectivo: generalidades, definiciones, propiedades de permanencia (clausura de construcciones categóricas). §2. Casos especiales (tipo Fréchet, tipo sumabilidad). §3. Variantes diversas de productos tensoriales: producto inductivo, operadores de Fredholm, topologías varias en el producto tensorial. §4. Dualidad: formas bilineales y lineales. §5. Problemas de aproximación. El *"Capítulo 2" ("Teoría de los espacios nucleares")* [**1949-53**, 2ª parte, 3-140] se divide en: §1. Clases notables de operadores de Fredholm. §2. Teoría "interna" de los espacios nucleares: definiciones, caracterizaciones, propiedades de permanencia, ejemplos. §3. Producto tensorial topológico de un espacio nuclear por un espacio localmente convexo: extensión (ascenso, relevo), permanencia, dualidad, casos funcionales usuales. §4. Producto tensorial de espacios tipo Fréchet y distribuciones: consideraciones generales y contraejemplos, espacios escalonados, aplicaciones, "preguntas no resueltas".

Algunas características propias del trabajo revelan una escritura *à la* Bourbaki (primera Tesis Doctoral de un matemático excepcional con ese estilo), una habilidad inventiva del lenguaje (red de definiciones apropiadas), un esclarecimiento de situaciones generales y posteriores aplicaciones, una discriminación exacta (descenso) de equivalencias, suficiencias y necesidades entre los conceptos introducidos, un entendimiento de la pluralidad (categorías) y una construcción de bordes (tipos) a partir de límites (arquetipos).

Descripción más extensa.

Introducción.

Grothendieck explica cómo el objetivo del trabajo "consiste en un estudio sistemático del producto tensorial[I], convenientemente topologizado, de dos espacios topológicos localmente convexos[II] (Cap. 1), y de una nueva clase notable de espacios localmente convexos, los *espacios nucleares*[III] (Cap. 2)" [**1949-53**, 1ª parte, 3]. Por otro lado, indica cómo sus "investigaciones tuvieron como origen[3] esclarecer y generalizar las propiedades muy especiales que parecían poseer ciertos espacios de funciones infinitamente diferenciables

[3] Véase *Nota v* arriba, p. 28.

[I] El *producto tensorial* es una construcción universal que permite transformar lo bilineal en lo lineal. Específicamente, si A y B son dos estructuras algebraicas que permitan hablar de linealidad (módulos o espacios vectoriales, por ejemplo), el producto tensorial $A \otimes B$ verifica la propiedad universal de que las transformaciones bilineales definidas en $A \times B$ (producto cartesiano usual) se corresponden (biyectiva y naturalmente) con transformaciones lineales definidas en $A \otimes B$. Esta caracterización *externa* ("categórica") se puede describir *internamente*, en forma equivalente, mediante *tensores*: $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$, donde los $a \otimes b$ ($a \in A, b \in B$) son clases de equivalencia con respecto a una congruencia que preserve sumas vectoriales y multiplicaciones escalares sobre el objeto libre generado por $A \times B$. Los productos tensoriales fueron una de las herramientas preferidas de Grothendieck y aparecerán consistentemente a lo largo de toda su obra.

[II] Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial dotado de una topología para la cual la suma vectorial y la multiplicación escalar son (uniformemente) continuas. Ejemplos esenciales son los espacios de Hilbert y de Banach (normados) y los espacios de funciones holomorfas (no normados). Un espacio vectorial topológico es, además, *localmente convexo* si la topología es definible por una familia de seminormas ($s_i : i \in I$) (es decir, donde $s_i(v) = 0$ no implica necesariamente $v = 0$). El nombre proviene de que esos espacios poseen (equivalentemente) una base local alrededor de 0 formada por vecindades absolutamente convexas (convexas, que contienen además sus radios relativos de longitud 1) y absorbentes (unión de sus homotecias cubre el espacio).

[III] Un *espacio nuclear* es un espacio vectorial topológico localmente convexo donde las bolas unidad de las seminormas ($B_q = \{v : s_q(v) \leq 1\}$) son rápidamente decrecientes, es decir, $\forall B_q \exists B_p \subseteq B_q$, B_p "infinitesimal" dentro de B_q. Los ejemplos esenciales de espacios nucleares son los espacios de funciones *suaves* sobre una variedad compacta, el espacio de las funciones holomorfas enteras de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, o los espacios de "Schwartz" (funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ con derivadas parciales rápidamente decrecientes).

en virtud del «teorema de los núcleos»[IV] de L. Schwartz" [**1949-53**, 1ª parte, 3]. Así, desde el inicio, al abordar los productos tensoriales, los espacios vectoriales topológicos localmente convexos, los espacios nucleares, y los espacios de alta diferenciabilidad, vemos cómo Grothendieck se esfuerza por develar los *comportamientos estructurales* subyacentes a ciertas propiedades de *suavidad* en los objetos matemáticos. El caso particular del "espacio de funciones holomorfas sobre una variedad holomorfa" [**1949-53**, 1ª parte, 3], espacio nuclear con todas las propiedades de suavidad deseadas, acompañará a Grothendieck a lo largo de toda su vida matemática. De hecho, Grothendieck hace referencia a un trabajo en el *Journal de Crelle* sobre el espacio de holomorfas, "estudiado de manera muy detallada" [**1953a**], [**1953b**][4], previamente, o paralelamente, a la *Tesis*.

La búsqueda de una "buena formulación de la noción general de «espacio nuclear»" [**1949-53**, 1ª parte, 3], que englobe los casos anteriores de suavidad en espacios de dimensión infinita, se torna entonces en tarea central. En realidad, develar aquello "escondido" [**1949-53**, 1ª parte, 3] tras las apariencias será siempre uno de los motores mayores de la inventividad grothendieckiana. La formulación de esa noción general se eleva sobre la

---

4 Volveremos sobre esto en el *Capítulo 6*. La variable compleja, como *paradigma de suavidad*, está ligada también a una de sus primeras presentaciones en el grupo Bourbaki ("Demostración Kodaira del teorema de Riemann-Roch", ver *Tribu* 25 (1951), p. 6), y a sus trabajos en Kansas (1955) sobre la esfera de Riemann y la generalización de Riemann-Roch. Véase el *Capítulo 4* abajo.

IV La teoría de las *distribuciones* de Schwartz puede entenderse estructuralmente dentro del ámbito de los espacios de funciones suaves de soporte compacto, al tornar visibles las formas bilineales allí definibles. El "teorema de los núcleos" coliga los núcleos clásicos de los operadores integrales con un comportamiento estructural similar para operadores diferenciales en esos espacios de funciones suaves y sus duales.

teoría de Fredholm sobre operadores, valores propios y decrecimiento de esos valores[5V] [**1949-53**, 1ª parte, 4]. En el proceso de invención/descubrimiento[6], Grothendieck indica, por un lado, su independencia de los trabajos de Ruston (1951) ("mi trabajo sobre este tema había sido concebido independientemente del suyo" [**1949-53**, 1ª parte, 4, nota 2]), y, sobre todo, por otro lado, expresa magníficamente la *diferencia de método* con Schatten (1950) [**1949-53**, 1ª parte, 4]. Mientras Schatten hace variar todas las normas sobre el producto tensorial de dos espacios de Banach, y aplica sus resultados a espacios de Hilbert dados, Grothendieck pone en cambio su "acento principal sobre los espacios localmente convexos *generales* y *una* definición precisa de producto tensorial topológico" [**1949-53**, 1ª parte, 4]. Se observa entonces ya aquí, de entrada, el carácter esencialmente *categórico*, *avant la lettre*, del pensamiento grothendieckiano: trabajo con todas las estructuras en su máximo nivel de generalidad (no dos Hilbert, o dos Banach, sino *todos* los espacios vectoriales localmente convexos) y trabajo con intentos de definición universal (no todas las normas locales, sino *un* producto tensorial topológico global). De esta manera, la lucha constante entre *tipos* y *arquetipos*, que gobernará la obra de Grothendieck, y que haremos lo más explícita posible en esta monografía, ocurre desde la mismísima segunda página de su *Tesis Doctoral*.

---

5 Grothendieck expuso en el *Seminario Bourbaki*, en Marzo de 1954 (publicado en Junio 1957), su visión de "La théorie de Fredholm" (*Séminaire Bourbaki* 1951-1954, exp. 91, pp. 377-384). La presentación se divide en una sección puramente algebraica, una sección sobre la teoría de Fredholm en el ambiente de espacios de Banach, una sección sobre operadores de Fredholm definidos por una integral, y una sección final de complementos diversos. Solo en el último párrafo del trabajo, Grothendieck hace referencia a las aplicaciones de la teoría de Fredholm al caso de los espacios nucleares.

6 Para un estudio del necesario *back-and-forth* entre invención (lenguajes) y descubrimiento (estructuras), desarrollado en *Récoltes et semailles* [**1983-86**], véase el *Capítulo 14* abajo.

V Un *operador de Fredholm* es un operador lineal acotado entre espacios de Banach con núcleo y conúcleo *finito dimensionales*. Esta última condición debe verse como una forma más de "suavidad" escondida en los objetos matemáticos en juego. Ejemplos centrales aparecen en operadores de corrimiento en las bases de un espacio de Hilbert y en operadores de multiplicación por holomorfas en espacios de funciones holomorfas. El índice de un tal operador T se define como $dim(Ker(T)) - dim(Coker(T))$, suerte de *diferencia armónica* entre soluciones y obstrucciones al operador. La develación de estas "diferencias armónicas" será esencial en toda la obra matemática de Grothendieck.

Después de estas observaciones de método, aparecen significativamente una referencia a un "artículo ulterior" [**1949-53**, 1ª parte, 4] donde dará aplicaciones a la *teoría de haces*[7][VI], y otra referencia a "otro artículo" que ofrecerá, para los espacios de Banach[8], un desarrollo sistemático de las ideas de la *Tesis*. Al terminar el primer párrafo de la *Introducción*, Grothendieck aprovecha para agradecer a Dieudonné y a Schwartz, y para reconocer el "estímulo constante que he recibido de ellos, tanto en mis investigaciones como en mi formación general[vi]" [**1949-53**, 1ª parte, 5].

---

7 Al referirse a la noción de haz, Grothendieck remite al "Séminaire de Topologie Algébrique" de Cartan, en la *École normale supérieure*, 1948-1949, al que había justamente asistido a su llegada a París. En la portada original de la *Tesis* (ver *Nota 1* arriba, p. 28), aparece una mención a una segunda tesis complementaria sobre "Théorie des faisceaux". No tenemos constancia de que sobreviva un manuscrito sobre esa segunda tesis, pero su eventual descubrimiento sería de enorme valor para el entendimiento de la obra de Grothendieck. En cualquier caso, desde el inicio mismo de sus investigaciones, los haces se encuentran, junto con la variable compleja, en el *corazón* mismo de su visión.

8 Es el germen del fenomenal *Résumé* [**1953c**] (ver *Capítulo 2* abajo).

vi Schwartz recuerda una "amistad profunda" con Grothendieck, y cómo el joven iba a menudo a tocar piano a su casa (lo que recuerda una foto al piano en Chambon, Scharlau, óp.cit., p. 151). Su pasión por el piano quedó marcada en su estadía en Nancy. Según testimonio de Ribenboim, Grothendieck llegó a ser expulsado 23 veces (!) de sus diversas residencias, por prácticas tardías y bulliciosas en el piano (Schneps, óp.cit., p. 7).

VI Un *haz* (topológico, por el momento) es el objeto matemático por excelencia para estudiar los *tránsitos* y *obstrucciones* entre lo *local* y lo *global*. Específicamente, un haz está conformado por dos espacios topológicos E y S, y una proyección $p : E \to S$ que es un homeomorfismo local (es decir, para cada punto $e \in E$ existe una vecindad $V \ni e$ tal que p es un homeomorfismo de V sobre su imagen). En esencia, el espacio E está entonces conformado por una serie de "capas" localmente similares a fragmentos de S. S es una suerte de "base" que se *despliega* a lo largo de E. E es un espacio "múltiple" que se *pliega* sobre un espacio "unitario" S. El despliegue de un punto $s \in S$ ($= p^{-1}(s)$) es la *fibra* sobre s. Se tiene entonces la imaginería de un espacio E *"étalé"* (en la terminología del Seminario Cartan), es decir, un espacio desplegado sobre su base S. No debe confundirse aquí *étalé* con *étale*, conceptos básicamente opuestos, distinguidos por una sola tilde final, confusión repetida aún por algunos especialistas franceses y norteamericanos (véase el *Capítulo 5* abajo). Las inversas locales de p (en vecindades dadas dentro de S) son las *secciones locales*; las inversas globales de p (sobre todo S) son las *secciones globales*. El objetivo esencial de la teoría de haces consiste en encontrar (o asegurar la imposibilidad) de condiciones de pegamiento para que las secciones locales den lugar (o no) a secciones globales. Los haces surgen directamente de las ideas de *continuación analítica* de Riemann, y el ejemplo paradigmático de haz está formado por los *gérmenes* de funciones holomorfas (clases de equivalencia de holomorfas con respecto a coincidencia de las holomorfas en vecindades de puntos del plano complejo). De hecho, el espacio E de gérmenes de funciones holomorfas resulta ser separado (es decir, el espacio desplegado es Hausdorff) si y solo si en la base ($S = \mathbb{C}$) vale la continuación analítica. La *extensión*, o continuación, de las funciones holomorfas (de lo local a lo global) aparece entonces en el *corazón* mismo de la teoría de haces. En particular, la posibilidad de extender la *función Zeta* ($\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$), desde s real mayor que 1 (Euler, local) hasta todo s complejo (Riemann, global), de generalizarla a campos finitos (Hasse, Weil) y de conectarla con la teoría de haces (Grothendieck), con enormes consecuencias en los trabajos mayores de Grothendieck (ver *Capítulos 5, 8, 10* abajo), conforma otro rastro más de la centralidad de la variable compleja en su pensamiento.

La *Introducción* continúa con una segunda sección (“Contenido, indicaciones diversas” [**1949-53**, 1ª parte, 5]), acerca del modo de disposición de los resultados (lo que llamaríamos hoy el “canon” bourbakista), donde se resalta la estructura de las pruebas, vía una arquitectónica de teoremas, proposiciones, corolarios, lemas, observaciones, y vía dos niveles de lectura, uno de los cuales, más técnico, “retirado”, podría ser omitido en una primera lectura. Observamos entonces, desde estos inicios, un consciente y particular *cuidado con la escritura*, algo que se convertirá en una de las características prominentes del *estilista* Grothendieck. La breve segunda sección concluye mencionando el problema principal abierto de la *Tesis*: el problema de la aproximación en espacios de Banach[9]. La tercera sección (“Notaciones generales” [**1949-53**, 1ª parte, 5-11]), más que un simple ejercicio de precisar notaciones, constituye un pequeño tratado de análisis funcional, que remite a trabajos de Banach (1932), Bourbaki (1950) y Dieudonné-Schwartz (1949). Espacios cociente, subespacios cerrados, espacios reflexivos, espacios de distribuciones, espacios cuasi-completos, espacios cuasi-tonelados, conforman algunos de los especímenes donde se inscribe la *Tesis*. Luego, Grothendieck recuerda resultados sobre espacios normados, equicontinuidad, duales, completados, aplicaciones lineales acotadas, espacios de aplicaciones lineales y bilineales, relaciones entre formas bilineales y aplicaciones lineales. En la escogencia de los conceptos y resultados de la tercera sección, se observa el interés de Grothendieck por situar, *en un marco de amplia generalidad*, las problemáticas de enlace entre formas de completitud y formas de (bi)linealidad. La búsqueda de *tránsitos* es inmediatamente palpable.

La cuarta sección (“Complementos sobre los límites inductivos” [**1949-53**, 1ª parte, 11-19]) muestra ya la particular idiosincracia del joven revolucionario en acción. Grothendieck observa que los espacios de Schwartz-Dieudonné son “casos particulares de una

9 Esto quedará aún más explícito en el *Résumé* [**1953c**]. Véase nuestro *Capítulo 2* abajo.

categoría más frecuente de espacios” [**1949-53**, 1ª parte, 11], formada por los *límites inductivos*[VII] de espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Los límites inductivos captan propiedades de permanencia (continuidad, tonelación, bornología), pero fallan a su vez en otras transferencias (completitud, acotación). De esta manera, tanto *tránsitos*, como *obstrucciones*, se reflejan en los límites inductivos. En palabras de Grothendieck, las fallas en completitud y acotación[10] constituyen “la dificultad principal para los espacios límites inductivos” [**1949-53**, 1ª parte, 13], mientras que “para los espacios definidos como «límites proyectivos» (...) las dificultades son prácticamente exactamente inversas”[11] [**1949-53**, 1ª parte, 13, nota 3]. Aparece luego la *suma directa topológica* de una familia de espacios localmente convexos, como caso particular de límite inductivo. Grothendieck realiza diversas observaciones sobre el comportamiento de los productos duales, y comenta cómo “pueden reducirse frecuentemente las propiedades de los límites inductivos generales a las propiedades de sumas directas y cocientes” [**1949-53**, 1ª parte, 14-15][12]. Una lista de ejemplos[13] ilustra al lector: espacios bornológicos, sucesiones de espacios de Banach, espacios de aplicaciones lineales acotadas o compactas. La cuarta sección termina con una

10 Las fallas se acompañan con un significativo “hélas” (=¡ay!, por desgracia) [**1949-53**, 1ª parte, 13]. La falta de adecuadas armonías parece realmente dolerle al Grothendieck *suavizador* y *musical*.

11 La conciencia de la *dualidad*, ya casi a nivel categórico, emerge en este tipo de anotaciones. Para la dualidad de proyectividad e inyectividad, véase nuestra *Sección 1.3* abajo.

12 De nuevo, se trata aquí de una estrategia de *estructuración de una categoría*, que va a adquirir toda su potencia en el *Tôhoku* [**1955-56**], ver nuestro *Capítulo 3* abajo.

13 Los *ejemplos* fueron siempre esenciales en Grothendieck. Más allá de los prejuicios repetidos en la equivocada recepción de su obra, insistiremos consistentemente en esta monografía en los muchísimos ejemplos siempre presentes en sus escritos.

VII Dada una familia (E_i) de espacios localmente convexos, y dada una familia (e_i) de aplicaciones lineales de E_i en un espacio vectorial E, E resulta ser un espacio localmente convexo mediante la más fina de las topologías localmente convexas en E que tornan continuas a las e_i. Con esa topología, E se denomina el *límite inductivo* de los E_i. Esta construcción resultará ser, a su vez, un caso particular de una idea categórica mucho más general, esencial para el pensamiento de Grothendieck. Véase el *Tôhoku* [**1955-56**], en nuestro *Capítulo 3* abajo.

lista de propiedades especiales de permanencia para los espacios específicos $(\mathcal{LF})$[14] que provenían de las investigaciones de sus maestros, Schwartz y Dieudonné.

La *Introducción* incluye una quinta sección ("Notaciones y recordatorios para ciertos espacios especiales" [**1949-53**, 1ª parte, 19-26]) en la que se manifiesta la amplitud matemática del joven tesista[vii]. Los espacios de medida, la teoría abstracta de la integración, las enseñanzas de la escuela polaca (Banach) y rusa (Gelfand), las estructuras reticulares en los espacios L^p, son revisadas con cierto detenimiento. Finalmente, la *Introducción* concluye con una breve sexta sección ("Recordatorios sobre formas bilineales" [**1949-53**, 1ª parte, 26-27]) donde se señalan ciertas propiedades especiales de continuidad (equicontinuidad, hipocontinuidad, compacidad débil) en el estudio de formas bilineales sobre el producto de espacios localmente convexos.

Hemos enfatizado una descripción detallada de la *Introducción*, ya que, por un lado, sintetiza varias de las estrategias centrales de la *Tesis*, y, por otro lado, ofrece los *gérmenes* de muchas realizaciones posteriores de Grothendieck. En lo que sigue de nuestra *Sección 1.1*, seremos más concisos, y nos reduciremos a describir algunos de los aspectos más novedosos del trabajo.

---

14 Los espacios $\mathcal{F}$, provenientes de investigaciones de la escuela polaca, son definidos por Schwartz y Dieudonné como espacios localmente convexos, metrizables y completos (J. Dieudonné, L. Schwartz, "La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$", *Annales de l'Institut Fourier* 1 (1949), pp. 61-101, definición en p. 65). Los espacios $\mathcal{LF}$ son límites inductivos de espacios de tipo $\mathcal{F}$ [**1949-53**, 1ª parte, 13].

vii Es sabido cómo Grothendieck, en cosa de un año, demostrando su extraordinario talento, pasa de su "ignorancia", al terminar la carrera de matemáticas en Montpellier (1948), a ser un consumado conocedor de la topología, el análisis funcional y la teoría de la medida, con fuertes bases además en variable compleja y topología algebraica. Véanse una carta del joven Grothendieck, del 15 de Diciembre de 1948, citada en Scharlau, óp.cit., p. 181, así como su testimonio posterior en *Récoltes et semailles*, donde recuerda "ignorar lo que era un espacio topológico" en 1948 y "no haber oído pronunciar aún, en un contexto matemático al menos, palabras extrañas o bárbaras como grupo, cuerpo, anillo, módulo, complejo, homología" [**1983-86**, 1.18-19] (para una explicación de los numerales usados en las citas de *Récoltes et semailles*, ver nuestro *Capítulo 14* abajo). En esta monografía utilizaremos indistintamente "campo" (del inglés *field*) y "cuerpo" (del alemán *körper* y del francés *corps*) como sinónimos matemáticos.

"Capítulo 1".

La primera parte de la *Tesis*, denominada *"Capítulo 1"* [**1949-53**, 1ª parte, 28-191], paginada independientemente de la segunda parte (*"Capítulo 2"*), desarrolla en forma sistemática, prácticamente desde cero, la teoría de los productos tensoriales de espacios vectoriales topológicos y la teoría de Fredholm, y estudia sus conexiones con (bi)linealidad y con diversas problemáticas de permanencia y aproximación. En la primera sección (*"Productos tensoriales proyectivos: generalidades"* [**1949-53**, 1ª parte, 28-51]), Grothendieck empieza por definir el producto tensorial de dos seminormas[15], y, en particular, el producto tensorial (*proyectivo*[16], o "topológico, si no hay confusión a temer" [**1949-53**, 1ª parte, 32]) de dos espacios localmente convexos (a través de las seminormas que definen sus topologías). Si E y F son dos espacios localmente convexos, aparece entonces el *completado* de su producto tensorial proyectivo, denotado $E\widehat{\otimes}F$, estructura esencial en todos los desarrollos de la *Tesis* y del *Résumé* [**1953c**]. Como ejemplos de una tal situación, Grothendieck aborda los productos tensoriales de espacios de funciones infinitamente diferenciables (u holomorfas) con espacios localmente convexos arbitrarios [**1949-53**, 1ª parte, 33]. La *universalidad* y la *suavidad* se conjugan así, abriendo la pauta de una de las tendencias mayores del pensamiento grothendieckiano.

La primera sección continúa con "problemas de topologías", "problemas de biunivocidad" y problemas de "aproximación" en $E \otimes F$ y en $E\widehat{\otimes}F$ [**1949-53**, 1ª parte, 33-37], antes de orientarse al *producto tensorial de aplicaciones lineales* [**1949-53**, 1ª parte, 37-43].

---

15 Se trata de una "definición universal" *global*, propuesta por Schatten como lo señala Grothendieck, que se especifica, para α y β seminormas, en la descripción *local* $(\alpha \otimes \beta)(u) = inf \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\beta(y_i)$, donde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ recorre todas las expresiones finitas en el producto tensorial usual de los espacios. Grothendieck observa cómo, en la definición universal global, "un tal enunciado, que hace intervenir una «variable» en la categoría de «todos» los espacios vectoriales, no es tal vez lícito en los sistemas lógicos usuales" [**1949-53**, 1ª parte, 28, nota 6], pero que podría reemplazarse por otros enunciados legítimos. Una vez más desde los inicios, tenemos aquí un germen de ideas futuras, en este caso los *universos de Grothendieck* que se introducirán en el *SGA* [**1960-69**]. Ver *Capítulo 8* abajo.

16 Ver *Sección 1.3* abajo.

Con algo de perspectiva, vemos que la estrategia es, desde el inicio, plenamente categórica: estudio del ambiente (*categoría*) de los espacios localmente convexos (y *subcategorías* tipo Banach), del producto tensorial (proyectivo) de los *objetos* en el ambiente, y de los *morfismos* entre esos objetos. Por otro lado, varias de las proposiciones estudiadas tienen que ver con subcaracterizaciones en los casos de espacios normados: un vaivén esencial entre *ascenso* y *descenso*, entre categorías y subcategorías, empieza así a marcarse[17]. Un estudio de "propiedades de permanencia generales" [**1949-53**, 1ª parte, 43-50] (preservación, o falla, de metrizabilidad, tonelación, cuasi-normatividad, propiedades tipo Schwartz, etc.) entre E, F y $E \otimes F, E\widehat{\otimes}F$ (o, más generalmente, entre las componentes de un producto arbitrario *infinito* y el producto) revela otra vez al incipiente categórico en acción.

La segunda sección del *"Capítulo 1"* de la *Tesis* (*"Dos casos especiales"* [**1949-53**, 1ª parte, 51-73]) nos muestra un Grothendieck *excelso calculista*, abordando delicados problemas de convergencia, vía finas acotaciones de sucesiones y sumas, en los espacios $(\mathcal{F})$ y en los productos tensoriales topológicos con un espacio de medida L^1. La larga sección, muy técnica, es un buen ejemplo de la *profunda capacidad analítica* de Grothendieck, que se contrapone, y complementa, con el *poderío sintético* de la primera sección. Así, en la emergencia de la mente matemática de Grothendieck, no valen ni compartimientos estancos, ni los prejuicios repetidos en la recepción de sus trabajos. Abstracción y concreción, universalidad y particularidad, estructura y cálculo, aparecen siempre unidos en su *hacer* matemático.

La tercera sección (*"Variantes diversas de la noción de producto tensorial topológico"* [**1949-53**, 1ª parte, 73-95]) indica cómo obtener "otras nociones de producto tensorial topológico, al considerar otras clases interesantes de funciones bilineales sobre $E \times F$

17 Este ascenso y descenso terminará en la espectacular resolución del *Problema de Banach-Mazur*, en el *Résumé* [**1953c**], donde se caracterizan los espacios de Hilbert dentro de los espacios de Banach por puras propiedades estructurales de proyectividad e inyectividad. Ver *Capítulo 2* abajo.

ligadas a las topologías de E, F" [**1949-53**, 1ª parte, 73] (el producto proyectivo había sido obtenido al considerar las funciones bilineales continuas). Como primer caso, Grothendieck estudia el producto tensorial *inductivo*, al considerar las funciones bilineales continuas *por separado* en cada espacio, y demuestra sus propiedades de permanencia vía límites inductivos. Como segundo caso, aparece el producto tensorial *inyectivo*[18], determinado por las formas bilineales entre los *espacios duales* [**1949-53**, 1ª parte, 89]. La notación es de particular interés aquí ($E\hat{\hat{\otimes}}F$), si la contraponemos con la del *Résumé* [**1953c**] (ver nuestro *Capítulo 2* abajo), donde la completación inyectiva ($\hat{\hat{\ }}$) se escribirá ($\check{\ }$), resaltando la dualidad matemática de los *objetos* gracias a la *inversión icónica* misma de los *signos*[19]. Como ejemplos particulares, Grothendieck estudia los productos de tipo ($\hat{\hat{\ }}$) donde uno de los componentes es un espacio de funciones continuas sobre un compacto [**1949-53**, 1ª parte, 90] o un espacio l^1 [**1949-53**, 1ª parte, 91-92]. El resto de la sección presenta una introducción a los operadores de Fredholm y a los *operadores nucleares* [**1949-53**, 1ª parte, 80] que serán centrales en la segunda parte de la *Tesis* (*"Capítulo 2"*). Emerge entonces un *tejido* de diversos resultados sobre nuclearidad (compacidad, correspondencias con los operadores transpuestos) que adquirirá su más fina y profunda expresión en el *reticulado* de $\otimes$-normas del *Résumé* [**1953c**].

La cuarta sección (*"Sobre la dualidad en los espacios de formas bilineales y lineales. Formas bilineales y aplicaciones lineales integrales"* [**1949-53**, 1ª parte, 95-164]), la más extensa del *"Capítulo 1"*, se adentra en la *estructura* de los espacios de formas bilineales y

[18] El producto tensorial inyectivo emerge *aún sin nombre* en la *Tesis*, para el caso general de los espacios localmente convexos. En el *Résumé* [**1953c**] es donde obtendrá su apelativo, para el caso particular de los espacios de Banach. Sin embargo, el concepto y sus diversas caracterizaciones y aplicaciones están completamente desarrollados en esta sección de la *Tesis*.

[19] Véase también nuestra *Sección 1.3* abajo.

aplicaciones lineales: envolventes convexas, topologías débiles, reflexividad[VIII], tonelación, bornología, representaciones con medidas. El *tenor bourbakista* es pleno en esta sección, y su *ritmo* evoca muchos fragmentos de la escritura de Dieudonné[20]. La sección se desarrolla a lo largo de diversas aplicaciones de las propiedades estructurales a espacios $\mathcal{F}$, espacios de Schwartz, espacios de Banach y de Hilbert, y explora cuidadosamente las normas asociadas a representaciones integrales. Una comparación entre los productos tensoriales topológicos $(\hat{\ })$ y $(\hat{\hat{\ }})$ asegura finitud de dimensión en la segunda componente, en caso de que se tenga una primera componente desplegada sobre l^1 y se tenga un isomorfismo $(\hat{\ }) \approx (\hat{\hat{\ }})$ [**1949-53**, 1ª parte, 149], lo que lleva a conjeturar, para el caso de espacios de Banach, que "la situación de isomorfía $E\widehat{\otimes}F = E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ no puede presentarse sino cuando E o F son de dimensión finita"[21] [**1949-53**, 1ª parte, 153]. La sección finaliza con un estudio de "las propiedades simples de los espacios c_0, l^1, $L^1(\mu)$, $L^\infty(\mu)$ para el estudio de los espacios de Banach generales" [**1949-53**, 1ª parte, 154-164], lo que muestra, contrariamente a los prejuicios recibidos, un Grothendieck muy atento a lo *ejemplar* y lo *particular*, como camino previo o alterno, para desbrozar lo *general*.

La quinta y última sección del *"Capítulo 1"* (*"Los problemas y las propiedades de aproximación"* [**1949-53**, 1ª parte, 164-191]) propone, tanto para espacios localmente convexos, como para espacios de Banach, una serie de enunciados equivalentes a la *condición*

---

20 La influencia de Dieudonné en Grothendieck, poco mencionada al lado de aquella de Serre (tanto por el propio Grothendieck, como en la literatura secundaria), merecerá ser anotada varias veces en esta monografía. El *gigantesco pulso vital* de Dieudonné (tanto en su exhuberancia física y en su generosa dación a los demás, como en la dimensión amplísima de sus escritos) se refleja a menudo, tanto en la acción física y comunitaria de Grothendieck, como en la multidimensionalidad de su obra.

21 Ver nuestra *Sección 1.3* y nuestro *Capítulo 2* abajo. Las combinaciones de propiedades de isomorfía y sus forzamientos hacia lo finitario se reflejarán también en trabajos cruciales posteriores, como el *Tôhoku* [**1955-56**] o *Riemann-Roch* [**1955-57**]. Es parte de una *estrategia general* para captar *formas de suavidad* en algunos tránsitos de la creatividad matemática.

VIII Un espacio topológico localmente convexo es *reflexivo* si es isomorfo (lineal y topológicamente) a su doble dual. Los espacios reflexivos serán centrales en el *Résumé* [**1953c**], para caracterizar a los espacios de Hilbert (siempre reflexivos) dentro de los espacios de Banach.

de aproximación[IX], y pasa a enunciar, para el caso de los espacios localmente convexos, una serie de *siete conjeturas*[22] (!) equivalentes a la condición de aproximación, que dan lugar a otras conjeturas similares para el caso de los espacios de Banach (una de las cuales, muy bella en su concisión, enuncia que, para todo $u \in l^1 \otimes c_0$, $u^2 = 0$ implica $Tr(u) = 0$) [**1949-53**, 1ª parte, 170-171]. La demostración de la equivalencia de las diversas conjeturas muestra la elegancia grothendieckiana en la *organización lógica* de una prueba sofisticada: detección de cadenas apropiadas de implicaciones, demostración de implicaciones centrales, clausura circular de las cadenas [**1949-53**, 1ª parte, 171-175]. La sección continúa presentando una forma más fuerte de aproximación ("métrica") para espacios de Banach, así como diversas propiedades equivalentes a esa aproximación métrica [**1949-53**, 1ª parte, 178-179], en términos de las *propiedades topológicas del conjunto de operadores de rango finito*. Grothendieck afirma que "no conozco ningún ejemplo de espacio de Banach que no posea la propiedad de aproximación métrica" [**1949-53**, 1ª parte, 182], pero también intuye que, por razones de amplitud en espacios de Banach[23], podrían surgir contraejemplos, lo que en efecto sucederá[24]. La sección concluye con algunas consecuencias de las conjeturas y con una serie de *ejemplos* ilustrativos, demostrando (positivamente) las propiedades de aproximación métrica para *(i)* los espacios de funciones $\mathcal{C}^\infty$, $L^p(\mu)$ (y

---

22 Dos décadas serán testigo de la dificultad de *infirmar* las conjeturas (Enflo, 1973). Véanse el *Résumé* [**1953c**] y nuestro *Capítulo 2* abajo.

23 En términos posteriores, diríamos, por razones de *accesibilidad* en la categoría de los espacios de Banach.

24 Ver el *Résumé* [**1953c**] y nuestro *Capítulo 2* abajo.

IX Un espacio vectorial topológico localmente convexo E posee la *condición de aproximación* (o es *aproximable*) si la aplicación identidad de E puede ser aproximada finitamente sobre los precompactos (conjuntos de clausura compacta), es decir, para todo precompacto $K \subset E$ y toda vecindad V de 0 en E, existe un endomorfismo continuo $u : E \to E$ de *rango finito* tal que $ux - x \in V$ para todo $x \in K$. En el caso de los espacios de Banach, la condición de aproximación es equivalente a una *condición de biunivocidad* entre imágenes y trazas nulas. Se trata de una de las muchas propiedades de eventual reducción de lo infinito a lo finito (formas especiales de *suavidad*) que fascinarán a Grothendieck a lo largo de toda su obra.

sus duales y biduales), *(ii)* algunos espacios de Banach capaces de representar ciertos grupos medibles, *(iii)* algunos espacios de distribuciones[25]. El gran poderío de la maquinaria *abstracta* de Grothendieck se pone así al servicio de muchos problemas *concretos* en el análisis funcional. La finura de los *vaivenes entre tipos y arquetipos* se manifiesta aquí en el análisis funcional, pero se convertirá en un *modo* permanente de su obra. De hecho, como veremos a lo largo de toda esta monografía, los vaivenes entre lo universal y lo contingente, lo abstracto y lo concreto, lo general y lo particular, lo arquetípico y lo típico, aparecerán incesantemente en la teoría y en la práctica del hacer grothendieckiano.

Concluye así el *"Capítulo 1"*, un impresionante alarde de amplitud y profundidad, que evaluaremos brevemente en nuestra *Sección 1.2* abajo. Es interesante observar que, en las reediciones de la *American Mathematical Society*, aparece un *"Appendix to Chapter 1"* (aparentemente posterior a 1956) [**1949-53**, 1ª parte, 193-196], donde Grothendieck menciona un error encontrado por Dieudonné en la *Tesis*. Grothendieck procede entonces a mostrar que el reparo de Dieudonné es correcto, inventa un contraejemplo para explicar la falla, y explica luego cómo el lema erróneo de la *Tesis* (referente a biduales) no afecta el contenido de las proposiciones adyacentes a él, que se pueden probar independientemente, utilizando otros caminos donde se puede hacer caso omiso de los biduales. El hecho es muy diciente en varios aspectos: *(i)* el rigor de Dieudonné, que acompañará al joven Grothendieck hasta la elaboración increíblemente delicada y dedicada de los *EGA* [**1959-64**], *(ii)* la honestidad del tesista, que será siempre una de las virtudes esenciales de su personalidad, *(iii)* la capacidad plástica de abordar *naturalmente* el error, que se convertirá en *método mismo* de investigación en sus obras finales, *La longue marche à travers la théorie de Galois* [**1981**] y *Les dérivateurs* [**1991**].

---

25 Por otro lado, Grothendieck indica ignorar si otros espacios concretos del análisis funcional (subespacios de distribuciones con orden de derivación acotado, espacio $l^p(\mathbb{Z})$ sobre los enteros) satisfacen, o no, la propiedad de aproximación (general o métrica) [**1949-53**, 1ª parte, 190].

"Capítulo 2".

La segunda parte de la *Tesis*, denominada *"Capítulo 2", "Teoría de los espacios nucleares"* [**1949-53**, 2ª parte, 1-140], aplica todo el arsenal de técnicas generales en espacios localmente convexos, desarrollado en la primera parte, al caso específico de los espacios nucleares. La metodología sistemática de Grothendieck en sus dos primeras décadas es patente aquí: desarrollar la teoría en los ámbitos más generales posibles (*e.g.* espacios localmente convexos), donde algunos *tránsitos suaves son accesibles*, antes de imponer condiciones adicionales para poder obviar las *obstrucciones* propias de ámbitos más particulares (*e.g.* espacios nucleares). La primera sección (*"Clases notables de operadores de Fredholm"* [**1949-53**, 2ª parte, 3-34]) extiende la noción de operador de Fredholm al caso de representaciones con coeficientes en l^p ("potencias p-ésimas sumables") y, a partir de dos espacios localmente convexos E, F de tipo $(\mathcal{F})$, propone una topología[26] en el espacio $E \otimes^{(p)} F$ de tales operadores, que resultará ser metrizable y completo, incluyendo a $E \otimes F$ en forma densa en todas partes. Diversas propiedades de sumabilidad y una noción ("orden") de mejor sumabilidad posible[27] se introducen para estudiar una red de convergencias y decrecimientos fuertes en $E \otimes^{(p)} F$. La sección continúa con largos desarrollos analíticos sobre el determinante de Fredholm y sobre sucesiones de valores propios, que se aplican al caso de "sucesiones no ordenadas de números complejos" [**1949-53**, 2ª parte, 20-21]. Grothendieck define una noción de conjunto de magnitud p (*"conjunto nuclear"*

[26] La topología *natural* se construye utilizando una variación uniforme de distancias al origen y un entronque lineal de esa variación con las seminormas que definen las topologías de los espacios [**1949-53**, 2ª parte, 4-5]. Se trata de una *aproximación metodológica* que repetirá muchas veces Grothendieck en su obra: (1) variación de los objetos (o de la base), (2) detección de propiedades uniformes (o lineales) en ese tránsito, (3) definición de nuevos entes gracias a *propiedades de permanencia detrás de la variación.*

[27] Otro tema siempre presente en Grothendieck es la noción de *mejor aproximación* u *optimización*, con apariciones fulgurantes en la desigualdad de Grothendieck en el *Résumé* [**1953c**], o en la estructura proyectiva óptima de los objetos libres (*e.g.* factorizaciones en categorías abelianas [**1955-56**], o grupo de la K-teoría [**1955-57**]).

en el caso $p = 1$) en un espacio localmente convexo, a través de la p-sumabilidad de (una deformación de) la identidad, y, con condiciones de continuidad adicionales, caracteriza la p-sumabilidad mediante una transformación adecuada de vecindades de 0 en conjuntos de magnitud p. Después de diversas acotaciones finas ($\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$) sobre los órdenes de los operadores[28] y sus consecuencias para procesos de sumabilidad, la sección concluye con ejemplos característicos: $L^1(\mu)$, $C(K)$, espacios de Hilbert, T^d (toro a d dimensiones), espacios de distribuciones[29].

La segunda sección del *"Capítulo 2"* (*"Teoría interna de los espacios nucleares"* [**1949-53**, 2ª parte, 34-68]) empieza definiendo y caracterizando los *espacios nucleares*. Un espacio localmente convexo separado E se *define* como *nuclear* si, para todo otro[30] espacio localmente convexo separado F, la aplicación natural de $E \otimes F$ (con topología proyectiva) en el espacio de las transformaciones bilineales entre los espacios duales (con topologías débiles) resulta ser un *isomorfismo*. A su vez, la nuclearidad de E se *caracteriza* mediante la nuclearidad (o "telescopía", ver nuestra *Nota III* arriba, p. 30) de los operadores lineales continuos [**1949-53**, 1ª parte, 80] de E en espacios de Banach. Diversos teoremas de estructura (sistemas fundamentales de vecindades, comportamiento de acotados y precompactos) llevan al hecho de que todo espacio de Banach nuclear es de dimensión finita [**1949-53**, 2ª parte, 38], lo que indica una *separación de las aguas* entre los espacios nucleares interesantes de dimensión infinita, tipo espacios de funciones de variable

---

28 Se trata de acotaciones *muy concretas*, que se sitúan lejos del mal llamado "sinsentido abstracto" achacado erróneamente a Grothendieck por sus detractores.

29 Mientras los tres primeros ejemplos invitan a resultados en el *Résumé* [**1953c**] y el ejemplo del toro incita a aperturas posteriores en geometría algebraica [**1955-56**] [**1955-57**], el ejemplo de las distribuciones, en cambio, quedará confinado en la *Tesis*.

30 El término teoría "interna" no se refiere entonces aquí a una definición de nuclearidad en E independiente de los demás espacios en la categoría. Al contrario, la definición remite a *toda* la categoría de los espacios localmente convexos separados (o de los Banach, según caracterización subsiguiente). Tal vez, el adjetivo "interno" adquiere mayor sentido con el desarrollo posterior de la *Tesis*, donde la nuclearidad se aplica a combinaciones "externas" con espacios localmente convexos no necesariamente separados, o a productos tensoriales específicos dentro de los tipos $(\mathcal{F})$ y $(\mathcal{DF})$.

compleja o espacios de distribuciones (*Tesis*), y los espacios de Banach interesantes de dimensión infinita, tipo $L^1(\mu)$ o $C(K)$ (*Résumé* [**1953c**]). Siguen otras caracterizaciones de nuclearidad (vía estructura en los duales) para los casos $(\mathcal{F})$ y $(\mathcal{DF})$, aplicaciones a los casos de productos tensoriales con l^1 y c_0, y una muy bella caracterización *concreta* para los espacios de tipo $(\mathcal{DF})$: E es nuclear si solo si $E\widehat{\otimes}F$ está en isomorfía (natural) con $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ cuando F es l^1 o c_0 [**1949-53**, 2ª parte, 45-46][31]. La sección continúa con diversos *teoremas generales de permanencia* (subespacios, cocientes, productos – topológicos, proyectivos, inductivos)[32], subespecializados luego a casos de tipo $(\mathcal{F})$ o $(\mathcal{DF})$. Las pruebas generales [**1949-53**, 2ª parte, 49-53] son particularmente interesantes, pues usan estrategias de aproximación (cortes + saturación) que Grothendieck incorporará muchas veces en el futuro[33]. Los *ejemplos* de espacios nucleares vienen luego a profusión [**1949-53**, 2ª parte, 54-60]: espacios de funciones infinitamente diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$, con soporte compacto, con decrecimiento rápido o con crecimiento lento (y sus duales), espacio de funciones holomorfas sobre una variedad holomorfa[34] o sobre un conjunto no vacío de la esfera de Riemann, espacio de funciones enteras de orden finito. La sección termina con un apartado sobre sucesiones de decrecimiento rápido en espacios localmente convexos,

---

31 La prueba utiliza toda la maestría de Grothendieck en análisis funcional, incorporando propiedades de estructura en duales y biduales, propiedades de relevo en l^1, conexiones con l^∞, el teorema del grafo cerrado de Banach, etc. Lo muy concreto y lo muy abstracto se dan siempre la mano. De hecho, después de sumergirse en los ambientes l^1 y c_0, aparece una "Observación 8": "Parece que los resultados indicados en los corolarios precedentes deberían poder generalizarse mucho" [**1949-53**, 2ª parte, 48].

32 Se trata de una plena *estrategia categórica* en ciernes. Tanto en la *Tesis* como en el *Résumé*, Grothendieck está permanentemente trabajando con categorías de espacios funcionales (localmente convexos, Banach, Hilbert, nucleares, etc.) y está estudiando las propiedades de estructura de las categorías ("teoremas de permanencia").

33 Esto sucede, por ejemplo, en la construcción de *suficientes inyectivos* con adecuados axiomas adicionales de infinitud, *vía recursión transfinita* (forma de cortes + saturación). Véase nuestro *Capítulo 3* abajo.

34 Grothendieck observa que esto se puede extender a otro tipo de variedades, por ejemplo, asociadas a sistemas de ecuaciones con derivadas parciales elípticas, y remite a su artículo "Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles", *Journal d'Analyse Mathématique* 2 (1952-53): 243-280. ¡Poco "sinsentido abstracto" allí!

sugiere una clasificación de los espacios nucleares de acuerdo con propiedades de decrecimiento en el dual, y conjetura que los espacios nucleares podrían caracterizarse como subespacios de un espacio producto de sucesiones de decrecimiento rápido[35] [**1949-53**, 2ª parte, 67-68].

La tercera sección (*"Producto tensorial topológico de un espacio nuclear por un espacio localmente convexo"* [**1949-53**, 2ª parte, 69-89]) empieza estudiando las *propiedades de relevo*[36] de aplicaciones lineales a partir de subespacios de un producto de espacios localmente convexos, con uno de ellos nuclear. Aparecen luego otras *propiedades de permanencia* asociadas al producto tensorial proyectivo: dado un espacio E nuclear (no nulo) F satisface ciertas propiedades (ser de Schwartz, nuclear, reflexivo, etc.) si y solo si $E\widehat{\otimes}F$ las satisface [**1949-53**, 2ª parte, 76]. El resto de la sección se ocupa de los productos proyectivos de los "espacios funcionales nucleares usuales" (*ejemplos* de la sección anterior) con espacios localmente convexos arbitrarios [**1949-53**, 2ª parte, 78-89], y propone aplicaciones a problemas de densidad y de estructura en los espacios de funciones holomorfas.

Finalmente, la cuarta y última sección del *"Capítulo 2"* de la *Tesis* (*"Producto tensorial topológico de un espacio* $(\mathcal{F})$ *por un espacio* $(\mathcal{DF})$*"* [**1949-53**, 2ª parte, 90-134]) se ocupa directamente de los espacios de Schwartz y sus variaciones, respondiendo posiblemente a varios de los problemas originales que le habrían propuesto Dieudonné y Schwartz a su llegada a Nancy. Es muy diciente, en ese sentido, observar el *arco amplio* de la *Tesis*:

35 Esto recalca, como ya hemos visto en otros lugares de la *Tesis*, una preocupación de Grothendieck por los *cálculos* efectivos, *en conjugación* con su interés central por las hondas *estructuras* subyacentes. Los cálculos remiten al *Pequod*, sometido a oleajes en la superficie del mar, mientras que las estructuras convocan la presencia de *Moby-Dick*, nadando en las profundidades. Volveremos varias veces en esta monografía sobre el tema de Melville y *Moby-Dick*, esencial para un entendimiento cabal de Grothendieck.

36 Se trata de otro tema típicamente categórico, esencial para el desarrollo de la geometría algebraica. Véase *EGA* [**1959-64**], nuestro *Capítulo 7* abajo.

los problemas concretos se subsumen en una ancha teoría general que, al final, da fácil cuenta de ellos[37]. Grothendieck aborda el problema de si el dual (fuerte) de $E\widehat{\otimes}F$ (E nuclear, F localmente convexo) es completo, y provee un tipo extenso de *contraejemplos* para esa situación[38]. La sección continúa ofreciendo ejemplos de espacios funcionales "usuales" no bornológicos o tonelados, y aborda otras características negativas de algunos espacios de tipo $(\mathcal{F})$, *construyendo* muy finamente[39] contraejemplos específicos[viii]. El acumen de Grothendieck en la *disposición lógica*[40] de su escritura se pone de manifiesto en el enunciado y prueba de un "teorema general" [**1949-53**, 2ª parte, 102-110] sobre condiciones (bornología, tonelación, completación) para los espacios *intermedios* entre $E \otimes F$ y $E\widehat{\otimes}F$. La sección termina con un largo apartado dedicado a "espacios escalonados", cercanos a subespacios de sucesiones, entre los cuales aparecen subespacios de funciones holomorfas (con referencias explícitas a autores clásicos: Stirling, Taylor, Cauchy, Hadamard [**1949-53**, 2ª parte, 124]), y con aplicaciones finales a los casos del espacio de funciones sobre $\mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciables con crecimiento lento y del espacio de distribuciones sobre

---

37 Por supuesto, esta es una manifestación, *avant la lettre*, de la marea subiente que deshace la dura cáscara de la nuez y entrega *suavemente* el corazón del fruto. Véase *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo.

38 La prueba, muy ingeniosa, detecta condiciones generales para una tal completitud y luego pasa a infirmar esas condiciones en casos concretos. El *estilo fluyente* de la *Tesis*, donde los lemas van apareciendo a medida que se requieren, y no antes, se encuentra aquí en su ápice matemático. Surgen *naturalmente* los lemas en medio de las pruebas y no se fuerzan artificialmente en etapas previas. Consideraremos a Grothendieck como un *gran estilista* de la lengua y del pensamiento en nuestros *Capítulos 16, 17*.

39 La maestría del consumado analista es de nuevo patente aquí: uso de sucesiones dobles, equicontinuidad, Hahn-Banach, escala de proyecciones, etc.

40 Es un verdadero *alarde* de organización, cuidadosa disposición de implicaciones, despliegue de lemas intermedios, escala de observaciones, etc. La *arquitectónica* del pensamiento grothendieckiano, esencial para sus momumentos mayores (*EGA* [**1959-64**], *SGA* [**1960-69**]) ya ocurre con enorme fuerza en su *Tesis*.

viii No en balde Schwartz situará al joven tesista como el "gran maestro mundial de los espacios vectoriales topológicos" al finalizar su *Tesis* (ver ibíd., p. 183).

$\mathbb{R}^n$ con decrecimiento rápido. Concluye así el extenso ciclo / homenaje grothendieckiano alrededor de su maestro Schwartz.

La *Tesis* incluye un breve apartado de *"Problemas no resueltos"* [**1949-53**, 2ª parte, 135-137]: problemas de aproximación (generales y en espacios nucleares), problemas de caracterización (caso espacios nucleares, caso espacios de Banach), problemas diversos (completación, grafos cerrados, duales). El mayor número de referencias externas de la *"Bibliografía"* final [**1949-53**, 2ª parte, 138-140] remite a Bourbaki (3), Dieudonné (3), Köthe (3) y Schwartz (3). Grothendieck menciona también algunos Maestros (Banach, Gelfand, Hille, Kakutani, Zygmund) y algunos jóvenes franceses (Dixmier, Weil), así como los especialistas del momento (Schatten, Philipps, Dunford, Dvoretzky, Rogers). Las referencias internas incorporan seis (6) trabajos de Grothendieck, tres publicados y tres en proceso de publicación, indicando, una vez más, la *ebullición* del joven tesista.

1.2 Síntesis conceptual

El *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires* [**1952a**][41] subraya la importancia de los productos tensoriales topológicos en varias direcciones: "formulación general y simple" de la teoría de Fredholm, nueva teoría de transformaciones lineales entre espacios de tipo L^p, emergencia de los espacios nucleares donde "el cálculo tensorial topológico adquiere su máxima sencillez, ya que las diversas variantes de la noción de producto tensorial coinciden", "lenguaje sugestivo y dócil" para el análisis funcional [**1952a**, 73-74]. La sencillez, la suavidad, la ductilidad resultan esenciales. Un acceso a lo general abre compuertas a la sencillez, una visión unitaria de la multiplicidad permite la suavidad, un acople de lenguaje y estructuras

[41] A no confundir con el *Résumé* [**1953c**] de Brasil, donde recorre (y reinventa) estos temas para *espacios de Banach*.

impulsa la ductilidad. Tanto en el resumen [**1952a**] como en la presentación [**1952b**] para el *Seminario Bourbaki*, Grothendieck enfatiza una *caracterización de nuclearidad vía coincidencia suave de proyectividad e inyectividad*, es decir, E es nuclear si y solo si $E\widehat{\otimes}F \approx E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ para todo F localmente convexo (o, alternativamente, para todo F Banach) [**1952a**, 100] [**1952b**, 196][42]. El "problema más importante a resolver en la teoría de los productos tensoriales topológicos" es entonces el de saber si la aplicación canónica de $E\widehat{\otimes}F$ en $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ resulta ser, en general, biyectiva (lo es para los nucleares) [**1952a**, 95]. Dada la *separación de las aguas* entre espacios nucleares y espacios de Banach (ver arriba, segunda sección del *"Capítulo 2"* de la *Tesis*), si existiese una respuesta negativa, ligada al problema de aproximación (ver nuestra *Nota IX* arriba, p. 41), esta debería darse entonces en el ámbito de los espacios de Banach, cosa que en efecto sucederá (ver nuestro *Capítulo 2* abajo).

Podemos observar entonces cómo el *corazón* de la *Tesis* reside en la comparación general de la proyectividad $(\hat{\ })$ y la inyectividad $(\hat{\hat{\ }})$[43]. Mientras la nuclearidad corresponde a una condición de estabilidad o de *punto fijo* en esa comparación, las *desviaciones* del punto fijo dan lugar por otro lado a una muy interesante expansión de variaciones intermedias[44]. Toda la riqueza del pensamiento grothendieckiano se cifra en esa manifestación de un *motivo* y sus *variaciones*, en ese vaivén entre un *arquetipo* y diversos *tipos* cercanos, en el entendimiento de las correlaciones entre lo *uno* y lo *múltiple*[45], siempre buscando la

42 En la *Tesis* esta condición aparece más escondida, en medio de una demostración secundaria [**1949-53**, 2ª parte, 43].

43 Como hemos señalado, la inyectividad será notada dualmente $(\check{\ })$ en el *Résumé* [**1953c**].

44 Un caso luminoso serán las (¡exactamente!) 14 normas tensoriales intermedias entre la norma proyectiva y la norma inyectiva en el caso de los espacios de Banach. Ver *Capítulo 2* abajo.

45 Grothendieck llegará a afirmar, en *Les portes sur l'univers*, que "no puedo impedir sentirme como un múltiple a la búsqueda de la unidad" [**1983-86**, PU.23]. Para un estudio extenso de *Les portes sur l'univers* (apéndice a *Récoltes et semailles*), que consideramos tal vez el mayor tratado nunca escrito sobre la *creatividad matemática*, ver nuestro *Capítulo 14* abajo.

especificidad de un *tránsito suave* entre las polaridades. De hecho, uno de los aspectos sobresalientes de la *genialidad* de Grothendieck consiste en intuir el *corazón profundo de una idea suave*[46], y elaborar alrededor de él/ella toda una arquitectónica general y universal, donde el corazón y la idea encajan de manera simple, habitan con comodidad y viven en medio de la mayor fluidez posible. En el caso de la *Tesis*, la gran arquitectónica del *"Capítulo 1"*, alrededor de los espacios vectoriales topológicos generales[47], sirve para englobar el *corazón suave* de los espacios nucleares (*"Capítulo 2"*), tanto desde una perspectiva estructural (isomorfismo $(\hat{\ }) \approx (\hat{\hat{\ }})$ y propiedades de "permanencia"), como desde un punto de vista concreto (captura de espacios de funciones "suaves", ya sea infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$ u holomorfas en $\mathbb{C}$).

Hemos señalado, a lo largo de nuestra descripción de la *Tesis*, múltiples modos, tonos y estrategias de Grothendieck que anticipan todo un *estilo* en su forma de *hacer* matemáticas[ix]. La sensación principal que ofrece la *Tesis* es en efecto la de un *volcán en gestación*[48], donde se fragua un rocoso continente (arquitectónica de los espacios vectoriales topológicos, paredes del volcán) y donde un canal de flujo (espacios nucleares, chimenea del volcán)

46 La intuición de lo *étale* en tres líneas (!) de su conferencia de Edimburgo [**1958**, 104], que propulsará toda una década de desarrollos en el *IHES* (*EGA* [**1959-64**], *SGA* [**1960-69**]), puede verse como una de las *revelaciones* más asombrosas del *vidente* Grothendieck. Ver *Capítulo 5* abajo.

47 Es la base de su monografía *Espaces vectoriels topologiques* [**1953d**], escrita como curso de extensión universitaria en São Paulo y solo traducida veinte años después (!) al inglés.

48 Como la que pudieron tener aquellos que vivieron la emergencia del *Paricutín* en México (1943). Véanse, en particular, los notables croquis y registros en D. Atl. *Cómo nace y crece un volcán. El Paricutín.* México: Editorial Stylo, 1950. La *creación ex-nihilo* del volcán mexicano es muy distinta a la presencia intemporal del *Etna*, por ejemplo. La creatividad grothendieckiana se acerca a esas manifestaciones potentes *desde la nada* que dibujó el Dr. Atl, y que, curiosamente, no están lejos cronológicamente de la emergencia volcánica misma de la *Tesis*.

ix Leila Schneps, de manera más breve, indica también la presencia en la *Tesis* de muchos *gérmenes* de la obra futura, véase Schneps, óp.cit., Chap. 3, pp. 2, 10-11. Schneps revisa, además, un artículo de esta época, "Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$", *Canad. J. Math.* 5 (1953): 129-173, donde Schneps subraya la emergencia del *carácter funtorial* de los teoremas grothendieckianos.

conduce un fondo plástico (holomorfía o diferenciabilidad infinita, cámara magmática) hacia una potente explosión (resolución de los problemas Schwartz-Dieudonné, pirotecnia desde el cráter). Sorprende el *equilibrio creativo* de Grothendieck en una tal empresa: las contrapartes de la estructura general (topología "alta" en análisis funcional) y de los ejemplos guía (convergencia "baja" en espacios de holomorfía, l^1 o c_0), las dialécticas de lo universal y lo particular, las incipientes lecturas categóricas y los cálculos concretos, se *conjugan* todos en una extraordinaria *armonización* de la diversidad. La detección de la *suave armonía* de los operadores de Fredholm (ver nuestra *Nota V* arriba, p. 32), como fundamento externo para el entendimiento interno de los espacios nucleares, es un ejemplo preciso del entronque[49] entre distintas formas estructurales que se convertirá en fuerza distintiva del pensamiento grothendieckiano.

La *combinación* de diversas técnicas matemáticas es ejemplar. Topologización, funcionalización, algebraización, linealización, ordenación, son fuerzas mayores del pensamiento matemático, que se *integran*[50] –suave, natural y armónicamente– en la *Tesis.* La exhuberancia[x] técnica es realmente notable, si se tiene en cuenta que un par de años antes Grothendieck no sabía qué era un espacio topológico (véase *Nota vii* arriba, p. 36). La práctica enteramente novedosa de los productos tensoriales topológicos, la estructuración de la teoría de Fredholm, la detección de las topologías límite proyectiva e inyectiva, las conexiones originales con espacios de funciones integrables, de sucesiones sumables o de distribuciones, la aparición de contraejemplos originales, son formas todas de un fascinante

[49] Más adelante, entenderemos también ese entronque como una *traducción natural* entre conceptos matemáticos. Mientras más "alto" se sitúen esos conceptos, más *libres* de ataduras se encontrarán, y más viable resultará su traducción.

[50] La integración resultará ser aún más ajustada, y ya casi del todo *perfecta*, en el *Résumé* [**1953c**], ver *Capítulo 2* abajo.

[x] Roger Godement recuerda la exhuberancia vital de Grothendieck y afirma: "¡Era un verdadero salvaje!", ver Schneps, óp.cit., Chap. 3, p. 5.

pulso técnico. Pero, yendo aún más allá, la riqueza inventiva, casi pirotécnica, de la técnica se integra con la armonía arquitectónica, casi líquida, de la visión. Una extraña mezcla de "salvajismo" (volcán *étalé*) y dulzura (mar *étale*) se conjuga entonces, tanto en la *Tesis*, como en la personalidad de Grothendieck. De hecho, *la tilde final diferenciadora entre étalé y étale será para nosotros la codificadora minimal de toda la obra grothendieckiana*[51].

La *Tesis* revela *in extenso* otro rasgo específico del hacer de Grothendieck, que se perpetuará vitalmente en la gestación de su matemática. Se trata de una sofisticada estrategia, en múltiples niveles[52], donde se convocan, en una suerte de *back-and-forth*[X], *(i)* definiciones, *(ii)* caracterizaciones, *(iii)* propiedades de permanencia, *(iv)* teoremáticas derivadas, *(v)* ejemplos y contraejemplos, *(vi)* aplicaciones específicas, *(vii)* vuelta a definiciones (en un nivel ascendente o descendente), etc. En particular, el *arte de la definición*[53] se convierte en uno de los puntales esenciales de la práctica grothendieckiana. La *claridad* de la arquitectónica depende precisamente de los ajustes definicionales en el edificio. En ese sentido, la *Tesis* es paradigmática, con sus largas cadenas de equivalencias o con sus progresivas subdeterminaciones entre conceptos, que pueden tardar centenares de páginas en resolverse. La *marea*[54] aparece entonces en pleno crecimiento, elevando en el borde del mar y del volcán, como en las lavas de Hawai cayendo al océano, una obra sin igual.

---

51 Se trata de un hecho asombrosamente simple, al gusto tal vez de la sencillez de Grothendieck, no solo no detectado en la literatura secundaria, sino, peor aún, a menudo confundido. Ver nuestra *Nota VI* arriba, p. 33. Desarrollaremos extensamente esta idea en los *Capítulos* posteriores.

52 A lo largo de esta monografía, recogeremos sistemáticamente esa multiplicidad de niveles mediante extrapolaciones metafóricas y metodológicas ligadas a las nociones de *superficie de Riemann* y de *haz*.

53 Ver *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo.

54 Ver de nuevo *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo.

X Cantor (1895) introduce el *back-and-forth* para caracterizar el tipo de orden de los racionales, como conjunto ordenado enumerable denso sin primero ni último elemento. El "ir y venir" del *back-and-forth* invoca una dialéctica infinita, siempre dinámica, cuya potencialidad nunca concluye en un acto finito. La técnica de los *isomorfismos parciales* (cortes) que apuntan a un *isomorfismo global* (saturación) invoca el crecimiento incesante de la matemática. Los *procesos* adquieren una relevancia mucho mayor que los *objetos*. Es un *tenor* incisivamente categórico y grothendieckiano, como veremos en lo que sigue.

1.3 Ejemplo detallado: productos proyectivo e inyectivo

Grothendieck introduce el producto tensorial topológico proyectivo en la primera sección del *"Capítulo 1"* de la *Tesis* [**1949-53**, 1ª parte, 28-29]. Dados E y F espacios vectoriales con seminormas α y β, se demuestra la existencia (y unicidad) de una seminorma γ en el producto tensorial algebraico $E \otimes F$, tal que, para todo otro $(G,\ \rho)$ espacio vectorial seminormado, se tenga un *isomorfismo* $(*)$ entre el espacio $B(E, F; G)$ de aplicaciones bilineales acotadas (en el sentido de α, β, ρ) y el espacio $L(E \otimes F, G)$ de aplicaciones lineales acotadas (en el sentido de γ, ρ). Se trata de una lectura *externa*, que hace referencia a toda una categoría (ver nuestra *Nota 15* arriba, p. 37), pero que se puede *internalizar* mediante la caracterización $\gamma(u) = \alpha \otimes \beta(u) = inf \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\beta(y_i)$, con $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$[55]. En el caso en que E y F sean normados, Grothendieck denota $E \widehat{\otimes} F$ el completado del producto tensorial topológico proyectivo [**1949-53**, 1ª parte, 30]. El inicio de la *abstracción grothendieckiana* se da un poco después, cuando extiende los casos seminormado y normado a los espacios localmente convexos (definidos por una *familia* de seminormas) y demuestra un resultado de tipo $(*)$ para las topologías localmente convexas [**1949-53**, 1ª parte, 30-31]. Puede entonces considerarse el *completado* para la nueva topología localmente convexa en $E \otimes F$: abusando de la terminología se le llamará *producto proyectivo* a ese completado, y se le denotará $E \widehat{\otimes} F$ [**1949-53**, 1ª parte, 32]. Si $B(E', F')$ denota el espacio (con topología equicontinua) de aplicaciones bilineales entre los duales E', F' (con topologías débiles), la aplicación natural $(x, y) \mapsto x \otimes y$ de $E \times F$ en $B(E', F')$ da lugar a una *inmersión* topológica de $E \otimes F$ en $B(E', F')$, y, en el caso en que E y F sean completos, a una aplicación

[55] Grothendieck otorga a Schatten el mérito de la existencia de γ, así como la definición externa y la caracterización interna subsiguientes.

lineal continua canónica de $E\widehat{\otimes}F$ en $B(E', F')$. Grothendieck indica que, en general, esa aplicación estará lejos de ser un isomorfismo [**1949-53**, 1ª parte, 35-36], y remite a la definición de espacio nuclear (¡que se dará cerca de doscientas páginas después![56]), donde sí se asegurará el isomorfismo[57].

Cincuenta páginas más adelante (es decir, después de múltiples resultados de permanencia para el producto proyectivo), en el apartado "otras topologías sobre $E \otimes F$", Grothendieck introduce la noción de topología (localmente convexa) compatible con la estructura de producto tensorial, y, en particular, denota $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ el (completado del) espacio $E\otimes F$ con la topología inducida por $B(E', F')$ [**1949-53**, 1ª parte, 89]. Poco después, en el *Résumé* [**1953c**], para el caso de los espacios de Banach, llamará *producto inyectivo* a ese espacio, y cambiará la notación $(\hat{\hat{\ }})$ por $(\check{\ })$, situando la proyectividad $(\hat{\ })$ y la inyectividad $(\check{\ })$ en los *dos extremos* de las topologías compatibles sobre productos tensoriales de espacios de Banach. En el ámbito general (localmente convexo) de la *Tesis*, todo el poder de las simetrías (simbólicas, topológicas, algebraicas, reticulares) no alcanza a desarrollarse, pero resulta muy interesante observar los casos en los que la convexidad local *no es suficiente* para alcanzar la plena armonía realizable en cambio en la subcategoría de los espacios de Banach. En este caso, una *obstrucción* abstracta (en los espacios localmente convexos) se suavizará en el *Résumé* [**1953c**] gracias a diversas formas de *tránsitos* particulares (en los

56 El hecho es muy indicativo de los procesos *genético* y *arquitectónico* en Grothendieck, que pueden encontrarse *muy distantes* el uno del otro. Una vez Grothendieck ha descubierto los conceptos, las grandes líneas y los ejemplos esenciales, la escritura arquitectónica reordena todo en lugares que pueden estar muy alejados en el edificio. Un caso extremo será la intuición primigenia de lo *étale* obtenida en la conferencia de Edimburgo [**1958**], y desarrollada en las miles de páginas de los *EGA* [**1959-64**] y el *SGA* [**1960-69**]. Como *contraparte* a este alejamiento, se encuentran los textos finales de Grothendieck en la década de los ochenta, donde la inmediatez de la creación y de la escritura van de la mano.

57 Con la perspectiva de la *Tesis* en su conjunto, los contraejemplos más importantes donde *no se dará* el isomorfismo ocurrirán con los *espacios de Banach de dimensión infinita*, que no pueden ser nucleares (ver *separación de las aguas* arriba, en nuestra descripción de la segunda sección del *"Capítulo 2"*). El *Résumé* [**1953c**] dará cuenta de esa *obstrucción* al isomorfismo para espacios de Banach interesantes (tipo L de funciones integrables o C de funciones continuas), y, en esos casos, explorará la profusión de normas intermedias entre $E\widehat{\otimes}F$ y $B(E', F')$.

espacios de Banach), *contrariamente* a lo que sucederá en otros muchos casos de la obra grothendieckiana[58]. Mientras algunos *ejemplos* de productos inyectivos (de espacios C_0 o espacios l^1 con espacios localmente convexos arbitrarios) se caracterizan por propiedades de suavidad [**1949-53**, 1ª parte, 90-92], las obstrucciones importantes en el entendimiento del producto inyectivo *general* ocurren, en cambio, al estudiar su *dual* (mejor manejable para el caso de los espacios de Banach). En efecto, para acercarse a una tal descripción, Grothendieck demuestra un teorema acerca de formas lineales continuas sobre topologías muy generales [**1949-53**, 1ª parte, 110-111, teorema 7], del cual deduce una identificación del dual de $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ como espacio cociente de un espacio de núcleos de Fredholm [**1949-53**, 1ª parte, 118], caracterización delicada que se simplifica notablemente en el caso de espacios de Banach [**1949-53**, 1ª parte, 122, teorema 8].

En la continuación de la primera parte de la *Tesis*, las apariciones del producto proyectivo resultan *naturales* en el ámbito general de los espacios localmente convexos, mientras que las apariciones del producto inyectivo ocurren sobre todo en el ámbito de los espacios de Banach[59]. En el caso de espacios de tipo $\mathcal{F}$, Grothendieck propone una caracterización del hecho de que la aplicación lineal canónica de $E\widehat{\otimes}F$ en $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ sea biyectiva, demuestra el teorema de Dvoretzky-Rogers[60] a partir de la biyectividad entre $l^1\widehat{\otimes}F$ y $l^1\widehat{\widehat{\otimes}}F$ para F espacio de Banach (lo que fuerza F de dimensión finita), y generaliza la situación para espacios cociente de l^1 [**1949-53**, 1ª parte, 149] y para espacios de tipo C_0 [**1949-53**, 1ª parte, 152].

[58] El *péndulo* entre lo abstracto y lo concreto, lo general y lo particular, no debe detenerse nunca en ninguna de sus vertientes. La importancia de un *vaivén dinámico* quedará particularmente explícita en *Las puertas sobre el universo*, el gran apéndice sobre la creatividad matemática en *Récoltes et semailles* [**1983-86**], ver nuestro *Capítulo 14* abajo.

[59] Por ejemplo, en la demostración de la densidad de la bola unidad de $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ dentro de $E''\widehat{\widehat{\otimes}}F''$ (dobles duales, topología de la convergencia simple) para espacios de Banach [**1949-53**, 1ª parte, 129].

[60] El teorema de Dvoretzky-Rogers afirma que si F es un espacio de Banach donde sumabilidad y sumabilidad absoluta coinciden, F debe ser de dimensión finita.

Podemos observar entonces aquí la *emergencia de arquetipos*[61] en el análisis funcional –proyectividad e inyectividad, espacios de tipo L y de tipo C– que se convertirán en el eje central del *Résumé* [**1953c**], y que ayudarán a *estructurar*, mediante perspectivas enteramente originales, las categorías de espacios de Banach y de Hilbert. En la segunda parte de la *Tesis*, esta situación arquetípica da lugar, primero, a una *caracterización general de nuclearidad* mediante la biyectividad $(\hat{\ }) \sim (\hat{\hat{\ }})$[62], y, segundo, a una *caracterización concreta de nuclearidad* mediante la misma biyectividad[63]. De esta manera, al aplicarse a clases específicas[64] de espacios ($\mathcal{F}$, $\mathcal{DF}$, Banach, Hilbert, etc.), algunos procesos genéricos (proyectividad, inyectividad) dan cuenta de la noción de nuclearidad, es decir de la noción de suavización (tipo espacios de funciones holomorfas) en dimensionalidad infinita. Se trata de la primera instancia, mediante una muy sofisticada resolución técnica, del *enlace profundo entre arquetipación y suavización* que Grothendieck explorará consistentemente a lo largo de toda su obra.

---

61 Es el inicio de toda una tendencia que, a nuestro entender, conformará una de las *características específicas* de la obra grothendieckiana.

62 Si E es de tipo $\mathcal{F}$, E es nuclear si y solo si $E\widehat{\otimes}F \sim E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ para todo espacio F de tipo $\mathcal{F}$ [**1949-53**, 2ª parte, 43].

63 Si E es de tipo $\mathcal{DF}$, E es nuclear si y solo si $E\widehat{\otimes}F \sim E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ con $F = l^1$ o $F \supseteq c_0$ [**1949-53**, 2ª parte, 45].

64 Solo falta un pequeño desliz de terminología (y un par de años) para verlas genuinamente como categorías, tal como sucederá en el *Tôhoku* [**1955-56**]. Todos los *teoremas de permanencia* de la *Tesis* son esencialmente categóricos, antes de tiempo.

2

Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques (1953)

El *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* [**1953c**] puede verse como una concreción de la *Tesis Doctoral*, donde las ideas generales para productos tensoriales de espacios topológicos localmente convexos se especifican al caso de los espacios de Banach. La restricción a la clase (categoría) de espacios de Banach produce asombrosos resultados *estructurales* sobre las normas intermedias entre la norma proyectiva y la norma inyectiva, logros descritos sistemáticamente a través de propiedades topológicas, algebraicas y/o reticulares. Con ello, Grothendieck consigue *caracterizar* los espacios de Hilbert dentro de los espacios de Banach mediante propiedades de proyectividad e inyectividad, resolviendo el problema de Banach-Mazur. Por otro lado, *invierte* las correlaciones entre la norma proyectiva y las demás normas (desigualdad de Grothendieck), gracias a la aparición de una constante profunda, cuyo estudio aún se desarrolla hoy en día. La *inventividad* matemática y simbólica del artículo es extraordinaria, y constituye uno de los textos más *perfectamente armónicos* de toda la obra grothendieckiana.

2.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Al terminar la *Tesis*, es difícil conseguir trabajo en Francia para el joven apátrida, y Schwartz y Dieudonné le ayudan a encontrar un puesto de postdoctorado en São Paulo[xi]. En el primer año, entre marzo y octubre 1953[xii], produce su monografía sobre espacios vectoriales topológicos[65] [**1953d**] y el *Résumé* [**1953c**], lo que constituye otro periodo de esplendor. El segundo año brasileño será en cambio un periodo de crisis, que le impulsará hacia la geometría algebraica[66]. El primer semestre de São Paulo discurre en medio de una vida ascética[xiii], donde todas sus energías se destinan a los avances en análisis funcional relacionados con la *Tesis*. En un ambiente académico donde se admira su obra, pero donde hay poco contraste intelectual, Grothendieck se encierra completamente en su mundo,

[65] El texto *Espaces vectoriels topologiques* aparece como "Curso de extensão universitária da Facultade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de S. Paulo". Solo se publicará en inglés en 1973.

[66] Ver nuestro *Capítulo 3* abajo.

[xi] Entre las biografías (o apuntes biográficos) sobre Grothendieck disponibles en 2016 (Scharlau, Schneps, Bringuier, Douroux, Pradeau), solo Schneps investiga con cuidado la estadía de Grothendieck en Brasil. Veánse Scharlau, óp.cit., pp. 185-186, L. Schneps. *Grothendieck – Mathematics*. Preprint. URL: `https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Mathematics/chap4.pdf`, Chap. 4, pp. 1-7, Bringuier, óp.cit., p. 41, P. Douroux. *Alexandre Grothendieck. Sur les traces du dernier génie des mathématiques*. Mayenne: Allary Éditions, 2016, p. 126, Y. Pradeau. *Algèbre. Éléments de la vie d'Alexandre Grothendieck*. Paris: Éditions Allia, 2016, p. 74. El excelente recuento de Schneps se basa sobre los recuerdos de Paulo Ribenboim y sobre entrevistas directas de Schneps con los protagonistas brasileños que entraron en contacto con Grothendieck en São Paulo. Debe complementarse esto con el artículo previo: A. de Azevedo. "Grothendieck no Brasil". En: *Matemática Universitaria* 44 (2008), págs. 39-42.

[xii] Después de su primer semestre en São Paulo, Grothendieck vuelve a Francia en octubre 1953, para el nacimiento de su primer hijo, Serge, con su casera en Nancy, Marcelle (Aline) Driquert. Ver Schneps, óp.cit., p. 7.

[xiii] Chaim Hönig recuerda cómo, en una ocasión, Grothendieck se había estado alimentado solo con leche y bananas. Ver de Azevedo, óp.cit., p. 40, Schneps, óp.cit., p. 2. El ascetismo de Grothendieck se perpetuará toda su vida. Dentro de esa perspectiva, en una suerte de movimiento pendular, la pobreza corporal enaltece la *riqueza espiritual*, y la matemática, forma del espíritu, gana con una práctica ascética.

se entrega de lleno a las matemáticas como suele hacer, y, circunscrito a un "pequeño cuarto"[xiv], elabora el *Résumé*. El trabajo es sometido un año después al *Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo*[67] y publicado en esa revista en 1956.

Resumen mínimo.

El *Résumé* se divide en una introducción, cuatro parágrafos principales y unas observaciones finales. Indicamos a continuación una breve descripción de contenidos (con cursivas nuestras, para enfatizar algunos aspectos), descripción que desarrollaremos luego más extensamente en esta sección.

"Introducción" [**1953c**, 1-6]. "Resultados del todo nuevos sobre los espacios clásicos L^1, L^2, L^∞" [1]. "La teoría de los productos tensoriales topológicos de espacios localmente convexos generales gana en *claridad y sencillez* al exponerse primero para los espacios de Banach" [1]. Búsquedas metodológicas: "*despejar* la sucesión lógica de ideas" [2], rastrear "consecuencias *naturales*" [2], adoptar una terminología nueva que lleve a "*simplicidad, coherencia y simetría*" [2], proporcionar "formas *concisas y sugestivas*" [2], abordar "en *un solo golpe de vista* las relaciones entre las *muy numerosas variantes* del teorema fundamental" [2], llegar a una "comprensión *verdadera*" de la teoría [2]. "Tabla de materias" [7].

§1 "Las $\otimes$-normas" [**1953c**, 8-19]. "Normas razonables" en un producto tensorial de espacios de Banach: $\wedge$ (proyectiva, "más grande"), $\vee$ (inyectiva, "más pequeña") –

67 El registro de recepción indica, "Trabalho recibido pela Sociedade de Matemática de São Paulo em Junho de 1954".

xiv Ver ibíd., p. 1. Poco interesado en conocer el país, Grothendieck solo realizó una visita de pocos días a Rio con su madre, bajo la guía de Ribenboim, *ibíd.*

caracterizaciones de los completados asociados [8-8']. $\otimes$-normas para espacios de dimensión finita – simetrías y orden entre normas [8'-10]. Extensión de $\otimes$-normas a espacios de dimensión infinita – aproximación a través de subespacios de dimensión finita – extensión por continuidad – normas accesibles (vía duales y finitud) [10-12]. Formas bilineales y aplicaciones asociadas a una $\otimes$-norma [12-15]. Formas y aplicaciones nucleares [15-17]. Comparación de $\otimes$-normas: módulo accesibilidad, "todos" se sumergen en el "mismo" [17-18] (fina dialéctica platónica Otro/Mismo, ver más adelante "tipos" y "arquetipos") – dominancia y equivalencia entre normas [18] – relación entre casos real y complejo [18-19].

§2 "Las $\otimes$-normas ligadas a los espacios C y L" [**1953c**, 19-40]. Complementos sobre $\wedge$, $\vee$: representaciones integrales – representaciones por medio de factorizaciones canónicas – productos tensoriales con parámetros sobre L^1 y C_0 [19-22]. Espacios de tipo C y de tipo L: estructura vectorial-topológica – prolongaciones (desde subespacios), relevos (desde cocientes) [22-25]. $\otimes$-normas inyectivas y proyectivas: caso de $\vee$ (inyectiva), $\wedge$ (proyectiva) – *pasos sistemáticos generales de la obstrucción al tránsito* [25-27]. Formación de nuevas $\otimes$-normas: *plasticidad notacional y terminológica* (simetrías y dualidad) ligada a *suavidad estructural* (isometrías y factorizaciones) – red de productos tensoriales con tipos C, L y espacios generales a la luz de la red de nuevas normas [28-32]. Red de 6 normas derivadas: $/\wedge$, $\wedge\backslash$, $/\wedge\backslash$, $\backslash\vee$, $\vee/$, $\backslash\vee/$ [32-34]. "Tablero de las $\otimes$-normas naturales": 4 nuevas normas – *arquetipos* cociente y subespacio – normas naturales (clausura de $\vee$ bajo duales, transpuestas y diagonal) – 2 normas naturales adicionales ("hilbertianas") – *Tablero General de las 14 (clases de) normas naturales* (reticulado y propiedades de factorización) – metodología explicativa (designaciones simbólicas, simetrías transpuesta y dual, implicaciones de dominación, reducción del número de normas en los casos C, L o H) [35-40].

§3 "Las $\otimes$-normas ligadas al espacio de Hilbert" [**1953c**, 40-57]. 2 normas "hilbertianas" $\underline{H}$, $\underline{H}'$ (buen comportamiento sobre bilineales de productos de Banach en espacios de Hilbert) – comparaciones con $/ \wedge \backslash$, $\backslash \vee /$ [40-42]. Formas hermitianas asociadas a $\underline{H}$ [42-44] y $\underline{H}'$ [44-47] – representaciones vía L^2 [45-46]. Relaciones elementales entre $\underline{H}$ y $\underline{H}'$ [47-48], y relaciones con "pesos" integrales [48-51] – factorizaciones canónicas [52]. "Clases naturales de operaciones lineales en espacios de Hilbert": una implicación en la resolución del problema de Banach-Mazur (*los espacios de Hilbert son L-subespacios y C-cocientes*) – red de diversos enunciados equivalentes por medio de comparaciones entre normas [53-57].

§4 "Las relaciones entre los dos grupos de $\otimes$-normas" [**1953c**, 57-74]. Funciones de tipo α (enlaces tensoriales L^1, L^∞) [45-47]. "Teorema fundamental de la teoría métrica de los productos tensoriales": *desigualdad de Grothendieck* [59-62] y demostración (aproximación finitaria y cálculo geométrico natural) [62-64]. Consecuencias para la teoría de operadores lineales: "mejoría de operadores por composición" – caracterización vectorial-topológica plena de Banach-Mazur (*los L-subespacios y C-cocientes son también espacios de Hilbert*) [64-68]. Aplicaciones al análisis armónico [68-72]. "Algunas preguntas abiertas": problema de aproximación (accesibilidad / accesibilidad métrica de espacios de Banach) "*parece improbable*" [72] (demostrada falsa, en efecto, por Enflo en 1972) – "mejores constantes" [72-73] y distinción casos complejo/real – "equivalencias de interés", "recíprocas diversas" [73] – comparaciones de normas proyectiva e inyectiva a través de sucesiones de operadores [74] – "estudio de la estructura vectorial-métrica fina de los espacios de Banach generales" [74].

"Bibliografía" [**1953c**, 75]. "Observaciones" [**1953c**, 76-79]. Algunos resultados debidos a Schatten "reencontrados independientemente por el autor" [76]. "Dificultades esenciales" ligadas a accesibilidad [76]. Método de hipótesis generales y "numerosas consecuencias" [76]. Existencia de una infinitud continua de $\otimes$-normas no equivalentes [78]. Resultado de Takeda "obtenido simultáneamente por el autor" [78].

Desde el punto de vista del *estilo* y de la forma, se tienen, *grosso modo*, unas características similares a aquellas de la Tesis Doctoral: escritura à la Bourbaki, habilidad inventiva del lenguaje (red de definiciones apropiadas, red notacional y terminológica), esclarecimiento de situaciones generales y posteriores aplicaciones, discriminación exacta (descenso) de equivalencias, suficiencias y necesidades entre los conceptos introducidos, entendimiento en la pluralidad (red de normas) y construcción de acotaciones (tipos en la desigualdad de Grothendieck) a partir de una constante universal (arquetipo).

Descripción más extensa.

Introducción.

Grothendieck empieza señalando que "el trabajo presenta una teoría casi completa sobre el tema indicado en el título" [**1953c**, 1] y apunta a los resultados esenciales en los §§ 3, 4 (es decir, lo que se llamará luego la desigualdad de Grothendieck y sus consecuencias), "resultados del todo nuevos sobre los espacios clásicos L^1, L^2, L^∞" [**1953c**, 1]. Remite a la *Tesis* [**1949-53**] para las ideas directrices naturales subyacentes, pero subraya que el *Résumé* puede leerse independientemente: "más aún, puede observarse que la teoría de los productos tensoriales topológicos de espacios localmente convexos generales gana en claridad y sencillez al exponerse primero para los espacios de Banach" [**1953c**, 1]. De hecho, la *claridad* y la *sencillez* conseguidas en el *Résumé* serán realmente ejemplares, y reflejarán el extraordinario equilibrio alcanzado por Grothendieck alrededor de las *tres estructuras-madre de Bourbaki*: topología, álgebra, orden.

Desde el punto de vista del método, Grothendieck enfatiza cómo ha tomado "el mayor cuidado para despejar la sucesión lógica de las ideas (...) y para mostrar cómo unas eran consecuencias naturales de otras" [**1953c**, 2]. *Despejar* y *naturalizar* serán actividades siempre esenciales en su obra: desprenderse de lo artificial, transitar allende lo obstructivo, suavizar las singularidades, captar el arquetipo general allende los tipos particulares. En ese empeño, ante el deseo de construir un "cuadro más vasto" para el análisis funcional, emerge la necesidad de producir una revisión completa de "la terminología y las notaciones anteriores"[68] [**1953c**, 2], que concluye en "todas las propiedades deseables de simplicidad, coherencia y simetría" [**1953c**, 2]. De esta manera, se *conjugan* admirablemente contenidos y continentes, y una *amplia razón armónica* sobrevuela todo el edificio, entrelazando lo más abstracto y lo más concreto, desde la estructura de las categorías en juego, hasta los trazos[69] mismos de las notaciones. La problemática de la unidad y la multiplicidad (ver nuestra *Nota 45* arriba, p. 49), el entrelazamiento de un tema y sus variaciones, aparece al final del primer parágrafo de la *Introducción*, cuando Grothendieck observa el interés de expresar una "forma concisa y sugestiva que permite capturar, de un solo golpe, las relaciones entre las muy numerosas variantes del teorema fundamental" (la desigualdad de Grothendieck) [**1953c**, 2]. El resto de la *Introducción* [**1953c**, 3-6] recuerda terminologías y notaciones generales, a la estela de Bourbaki y de la *Tesis* [**1949-53**].

§1 "Las ⊗-normas".

Para E y F espacios de Banach y una norma α en $E \otimes F$, Grothendieck define que α es "razonable" si la aplicación bilineal $E \times F \to E \otimes F : (x, y) \mapsto x \otimes y$ es de norma ≤ 1 y si sucede lo mismo para la aplicación bilineal $E' \times F' \to (E \otimes F)' : (x', y') \mapsto x' \otimes y'$ (para la norma dual α') [**1953c**, 8]. Esto equivale a decir que tanto α como α' preservan productos. $E \overset{\alpha}{\otimes} F$ denota el completado de $E \otimes F$ con respecto a α. El Teorema 1 sitúa las normas

[68] La aparición de los *trazos diagonales* en el §2 será un momento excepcional de conexión entre la representación, el sentido y el uso de un signo. Las tres dimensiones esenciales de la semiótica según Peirce (sintaxis, semántica, pragmática) se conjugarán profundamente en las notaciones para las ⊗-normas intermedias. Nos extenderemos ampliamente sobre esto más abajo.

[69] Esto se conecta con las trazas, o los residuos, estudiados por Walter Benjamin en los *Pasajes de París* (1927-40). Véase W. Benjamin. *Obra de los pasajes (2 vols.)* Madrid: Abada Editores, 2013-2015. La posibilidad de *reflejar* el todo en el fragmento será una problemática esencial para Grothendieck, así como lo fue para Benjamin.

extremas sobre las que van a elevarse las mediaciones del trabajo[70], y asegura que existen sobre $E \otimes F$ una *más pequeña* norma razonable $\vee$ (= inyectiva) y una *más grande* norma razonable $\wedge$ (= proyectiva)[71], que pueden ser descritas de la siguiente manera [**1953c**, 8]:

$$|u|_\vee = Sup|< u, x' \otimes y' >| \quad (\text{donde } x' \in E', y' \in F', \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1)$$

$$|u|_\wedge = Inf \sum_i \|x_i\| \|y_i\| \quad (\text{donde } u = \sum_i^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F).$$

La norma inyectiva es la norma inducida en $E \otimes F$ por $B(E', F')$ (espacio de bilineales entre los duales), mientras que la norma proyectiva es la norma polar de la bola unidad en $B(E, F)$. De esta forma, se tienen *diversas* normas posibles en *un* espacio.

El siguiente paso en los desarrollos del trabajo consiste en *invertir* la tendencia anterior: para *un* tipo de norma, hacer variar *todos* los espacios a los cuales se les puede aplicar la norma. Grothendieck define entonces[72] una $\otimes$-norma como una función α que, a cada par de espacios normados E, F, asocia una norma razonable sobre su producto tensorial (dando lugar a un espacio normado $E \overset{\alpha}{\otimes} F$), de tal manera que para aplicaciones lineales $u_i : E_{i_\alpha} \to F_i$ $(i = 1, 2)$ se tenga $\|u_1 \overset{\alpha}{\otimes} u_2\| \leq \|u_1\| \|u_2\|$[73]. Ejemplos de $\otimes$-normas son la $\otimes$-norma inyectiva (denotada también $\vee$, que a cada par E, F asocia $E \overset{\vee}{\otimes} F$) y la $\otimes$-norma proyectiva (denotada $\wedge$, que a cada par E, F asocia $E \overset{\wedge}{\otimes} F$) [**1953c**, 8-9].

---

70 Dicho de otra manera, entre los *arquetipos* extremos (proyectivo e inyectivo) aparecerán *todos* los otros *tipos* de normas razonables. En el medio ambiente del *Résumé*, es decir, en la categoría de los espacios de Banach, las mediaciones (¡solo catorce!) estarán perfectamente controladas y caracterizadas.

71 El orden de las normas es el usual: α es menor que β si $\alpha(u) \leq \beta(u)$ para todo u en el producto tensorial. Desde el punto de vista de las inyecciones continuas entre los espacios, se tiene entonces una *inversión*: $E \overset{\beta}{\otimes} F \rightarrowtail E \overset{\alpha}{\otimes} F$. En particular, $E \overset{\wedge}{\otimes} F \rightarrowtail E \overset{\vee}{\otimes} F$: el espacio proyectivo se inyecta en el espacio inyectivo.

72 Lo hace primero para espacios de dimensión finita [**1953c**, 8-9] y luego para espacios de dimensión infinita, vía familias filtrantes [**1953c**, 10-11]. El uso de *límites* se convertirá muy pronto, en el *Tôhoku* [**1955-56**], en herramienta primordial de su arsenal matemático.

73 En cierto sentido, la función α sería entonces de norma ≤ 1 en un nivel superior. La *jerarquización* de los constructos matemáticos será una de las claves del entendimiento conceptual de Grothendieck.

Un nuevo nivel de abstracción, donde se enlazan *suavemente* los conceptos, consiste en considerar *todas* las $\otimes$-normas en su conjunto. Grothendieck introduce unas "operaciones fundamentales" sobre las $\otimes$-normas [**1953c**, 9-10]: *(i)* dada α $\otimes$-norma, su *transpuesta* ${}^t\alpha$, definida por $|u|_{{}^t\alpha} = |{}^tu|_\alpha$, es una $\otimes$-norma; *(ii)* dada α $\otimes$-norma, su *dual* α', definida por $|u|_{\alpha'}$ = dual de $|u'|_\alpha$, es también una $\otimes$-norma. Se tienen entonces[74] las fórmulas simétricas ${}^t({}^t\alpha) = \alpha$, $(\alpha')' = \alpha$ y ${}^t(\alpha') = ({}^t\alpha)'$ (este último valor común es denotado por $\overset{\vee}{\alpha}$). Dadas dos $\otimes$-normas α y β, se define $\alpha \leq \beta$ de manera natural ($|u|_\alpha \leq |u|_\beta$ para todo $u \in E \otimes F$), y se constata que el conjunto de las $\otimes$-normas forma un *retículo completo*, con mínimo ($\vee$) y con máximo ($\wedge$). Más aún, las $\otimes$-normas proyectiva e inyectiva resultan duales entre sí: $(\vee)' = \wedge$, $(\wedge)' = \vee$.

El §1 continúa con dos secciones sobre formas y aplicaciones de tipo α, donde se extienden las nociones de normas al caso de formas bilineales [**1953c**, 12] y de aplicaciones lineales [**1953c**, 14], y el parágrafo §1 finaliza con unas reflexiones breves sobre "relaciones entre $\otimes$-normas reales y complejas" [**1953c**, 18-19]. Grothendieck señala que las relaciones "no parecen tan simples como podría esperarse" [**1953c**, 18], cosa que en efecto demostrará en el "teorema fundamental" [**1953c**, 59], alrededor de las distinciones delicadas que deben hacerse para la teoría real y para la teoría compleja.

§2 "Las $\otimes$-normas ligadas a los espacios C y L".

El segundo parágrafo empieza caracterizando las formas bilineales u de norma $\|u\| \leq 1$ como aquellas representables sobre compactos en $L^\infty(\mu)$, y, como corolario, caracteriza las aplicaciones lineales $u : E \to F$ de norma $\|u\| \leq 1$ como aquellas que pueden *factorizarse*

[74] Grothendieck lo indica para el caso de los espacios de dimensión finita y lo extiende, en el caso de la transpuesta, a dimensión infinita. Para extenderlo a dimensión infinita en el caso de la norma dual, asume que alguno de los dos espacios sea métricamente "accesible" (*i.e.* aproximable) [**1953c**, 11]. Como veremos más adelante, esto no tiene por qué darse en general.

en la forma $E \to L^\infty \to L^1 \to F''$, donde los espacios L son espacios de medida sobre un compacto, y donde la primera y la tercera flechas son de norma ≤ 1 (la segunda flecha es la función identidad, la factorización termina en el doble dual) [**1953c**, 20]. Emerge entonces aquí un primer enlace profundo entre propiedades *métricas*, propiedades de *representación* y propiedades de *factorización*. El análisis funcional, la medida y el álgebra se convocan entre sí.

Más adelante, se introducen los espacios de *tipo C* como espacios de Banach métricamente isomorfos a espacios $C_0(M)$[XI] y los espacios de *tipo L* como espacios de Banach métricamente isomorfos a espacios $L^1(\mu)$[75] [**1953c**, 22]. Grothendieck recuerda un resultado de Kakutani, según el cual el dual de un espacio de tipo L es de tipo C, y viceversa. Además, señala que "la importancia de esos espacios (...) radica en sus propiedades vectoriales-topológicas muy especiales (...) que se deducen de manera *natural* de la teoría de los productos tensoriales $\vee$ y $\wedge$"[76] [**1953c**, 22]. El teorema esencial de estructura afirma que, dados E espacio de Banach y F subespacio cerrado de E, se tienen *canónicamente* un isomorfismo métrico (1-1) $L \overset{\wedge}{\otimes} F \rightarrowtail L \overset{\wedge}{\otimes} E$ (para un espacio de tipo L) y otro homomorfismo métrico (sobre) $C \overset{\vee}{\otimes} E \twoheadrightarrow C \overset{\vee}{\otimes} E/F$ (para un espacio de tipo C)[XII]. A partir

75 Los *arquetipos* de *continuidad* y de *medibilidad* encarnan así en una multitud de *tipos* particulares. Todo el *Résumé* depende de las encarnaciones y las *transferencias* (proyecciones e inmersiones) de esos tipos.

76 Grothendieck remite a un resultado de Nachbin (conexión con la emergente escuela brasileña) como caso particular de esa estructura vectorial-topológica. El énfasis sobre la *naturalidad* es nuestro, acorde con todas las estrategias grothendieckianas.

XI Los espacios $C_0(M)$ son los espacios de funciones continuas sobre un espacio localmente compacto M que se "anulan en el infinito" (*i.e.* tienden a cero en el infinito).

XII A lo largo de esta monografía, adoptamos las notaciones $\rightarrowtail$ y $\twoheadrightarrow$ para evocar (respectivamente) formas de inyección y de proyección de las flechas. Esto adquiere una precisa definición técnica en categorías, vía las nociones de monomorfismo y epimorfismo (desde el *Tôhoku* [**1955-56**], ver nuestro *Capítulo 3* abajo). La *dualidad arquetípica inyectividad / proyectividad* vivirá constantemente en la obra grothendieckiana, y encarnará en una multitud de tipos y conceptos en varios niveles.

de allí, Grothendieck deduce múltiples corolarios de *extensión o relevo*[77] de aplicaciones lineales (continuas, compactas o nulas al infinito) entre los espacios en cuestión [**1953c**, 23-25].

Uno de los conceptos esenciales del *Résumé* aparece en la tercera sección del segundo parágrafo, "$\otimes$-normas inyectivas, proyectivas"[78] [**1953c**, 25-27]. Dada una $\otimes$-norma α, esta se llama *inyectiva a izquierda* si, para todos E, G espacios de Banach[79] y $F \subseteq E$ subespacio de E, se tiene una inmersión métrica $F \overset{\alpha}{\otimes} G \rightarrowtail E \overset{\alpha}{\otimes} G$ [**1953c**, 25]. Grothendieck proporciona diversos enunciados equivalentes a la inyectividad a izquierda, vía proyecciones, formas y relevos, y define varios conceptos asociados: *(i)* α es inyectiva a derecha si su *transpuesta* ${}^t\alpha$ es inyectiva a izquierda, *(ii)* α es inyectiva si lo es a izquierda y derecha, *(iii)* α es *proyectiva a izquierda* si su *dual* α' es inyectiva a izquierda, *(iv)* α es proyectiva a derecha si α' es inyectiva a derecha, *(v)* α es proyectiva si lo es a izquierda y derecha[80] [**1953c**, 25-26]. El resultado central de la sección indica que $\vee$ es inyectiva y que $\wedge$ es proyectiva (lo que explica los "abusos" de terminología), y que ninguna de

77 La extensión de propiedades es una de las tareas esenciales de la matemática. Para la importancia crucial de los *relevos hacia el ideal*, véase D. Hilbert. "On the infinite (1925)". En: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Ed. por J. van Heijenoort. Harvard University Press, 1967, págs. 367-392. Muchas de las problemáticas centrales en la teoría de haces (y, por consiguiente, en la obra de Grothendieck) tienen que ver precisamente con tareas de extensión, continuación o relevo, de lo local a lo global. La *continuación analítica* de Riemann se encuentra así en el *corazón hondo* de la matemática moderna y contemporánea.

78 La extensión de *la* norma inyectiva ($\vee$) a *las* normas inyectivas es una *forma de paso del singular al plural*, permanente en Grothendieck. En la pluralidad, en la multiplicidad, en una *categoría* de entes similares se liberan las restricciones de la particularidad y se suaviza el ambiente. Luego, mediante un fino análisis de la *estructura* de la categoría se retorna a una unidad sintética. El péndulo entre lo múltiple y lo uno, entre el análisis y la síntesis, se encuentra siempre en acción, y *requiere un balanceo* incesante entre los opuestos.

79 La definición puede restringirse a espacios de dimensión finita, y vale entonces también para dimensión infinita. Este es uno de los muchos casos en la obra de Grothendieck donde se explicitan las preocupaciones del tránsito entre lo finito y lo infinito.

80 Los *ejercicios definitorios armónicos* vía transpuestas y duales se convertirán más adelante en verdaderos *teoremas armónicos*, donde los conceptos, sus signos y sus usos conforman una urdimbre musical inesperada.

las dos normas tiene las propiedades de la otra (ni a izquierda, ni a derecha)[81] [**1953c**, 27]. Finalmente, una interesante "observación" [**1953c**, 27] estudia la *red de implicaciones* positivas (o negativas) entre los conceptos recién definidos, al *variar* ciertas propiedades adicionales, alternativamente sobre α o sobre los espacios en juego.

La cuarta sección del segundo parágrafo, "Formación de nuevas $\otimes$-normas" [**1953c**, 28-32], exhibe las mejores características *armónicas, combinatorias y simbólicas* de la inventividad grothendieckiana. Dada α $\otimes$-norma, *(i)* $/\alpha$ denota la mayor $\otimes$-norma inyectiva a izquierda mayorada por α, *(ii)* $\alpha\backslash$ denota la mayor $\otimes$-norma inyectiva a derecha mayorada por α, *(iii)* $\backslash\alpha$ denota la menor $\otimes$-norma proyectiva a izquierda minorada por α, y *(iv)* $\alpha/$ denota la menor $\otimes$-norma proyectiva a derecha minorada por α[82] [**1953c**, 28]. Para Grothendieck, "el trazo alterador de α está inclinado hacia abajo (partiendo de α) si indica una $\otimes$-norma más pequeña que α (inyectiva a izquierda o a derecha según el trazo está situado a izquierda o a derecha), y, por el contrario, está inclinado hacia arriba si indica una $\otimes$-norma más grande que α" [**1953c**, 28]. Aquí, la *coherencia* entre el signo y su significado adquiere una luminosidad especial[83]. Más aún, *cualquiera de los cuatro trazos alteradores* ($/$, $\backslash$, $\backslash$, $/$) puede tomarse como primitivo y reconstruir con él los demás, mediante las operaciones de transposición ($\alpha \to {}^t\alpha$) y dualidad ($\alpha \to \alpha'$)[84]

[81] Más aún, Grothendieck señala que "infortunadamente no existe ninguna $\otimes$-norma a la vez inyectiva y proyectiva" [**1953c**, 27]. El término "infortunadamente" revela una suerte de *decepción musical*, en la cual no se consigue un *acorde final* entre sonoridades contrapuestas.

[82] Grothendieck llama "pre" a las normas inyectivas, "pro" a las proyectivas, acentuando, por un lado, un sentido de dirección (izquierdo y derecho) para las minoraciones y mayoraciones, pero también, por otro lado, un sentido de altura (bajo y alto) para las *pre*-(in)clusiones y *pro*-longaciones de los morfismos que aparecerán ligados a las normas. Las normas en cuestión existen gracias a acotaciones en el *retículo completo* de normas.

[83] En términos de la semiótica de Peirce, los signos introducidos por Grothendieck son plenamente *icónicos*, es decir, reflejan, en su misma expresión visual, los significados subyacentes representados por los signos. Para un desarrollo de estas ideas, véase nuestra *Sección 2.2* abajo.

[84] Las ocho ecuaciones referentes a las combinaciones de ($/$, $\backslash$, $\backslash$, $/$) con (^{t}, $'$), *desplegadas* en la página [**1953c**, 28], son un ejemplo fascinante de armonía y simetría. Puede sentirse casi un verdadero *baile geométrico* de los signos.

[**1953c**, 28]. Para el caso de productos tensoriales con espacios de tipo C o de tipo L, algunos trazos alteradores pueden hacerse desaparecer, y se tiene un control importante de las distintas normas en esos casos especiales [**1953c**, 29-31]. A partir de allí, Grothendieck obtiene unas caracterizaciones profundas del comportamiento *topológico-normativo* de las aplicaciones lineales con respecto a su *factorización* algebraica vía espacios C o L: por ejemplo, si $u : E \to F$ es una aplicación lineal continua, se tiene $\|u\|_{\backslash\alpha} \leq 1$ (respectivamente $\|u\|_{\alpha/} \leq 1$) si y solo si u se factoriza $u = E \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{v} F''$ con $\|\varphi\| \leq 1$ y $\|v\|_{\alpha} \leq 1$ (respectivamente $u = E \xrightarrow{v} L \xrightarrow{\varphi} F''$) [**1953c**, 32].

La quinta sección, "Complementos sobre $/\wedge$, $\wedge\backslash$, $/\wedge\backslash$, $\backslash\vee$, $\vee/$, $\backslash\vee/$" [**1953c**, 32-34], aplica los resultados anteriores a los casos de las normas $\wedge$ y $\vee$. Las acotaciones de los *trazos alteradores* de esas normas codifican entonces las propiedades de factorización de aplicaciones lineales vía espacios de tipo C o L. En particular, las condiciones de acotación (norma menor que 1) para el trazo alterador izquierdo de la norma inyectiva ($\backslash\vee$) producen factorizaciones (y prolongaciones) vía espacios C, mientras que las condiciones de acotación para el trazo alterador derecho de la norma inyectiva ($\vee/$) producen factorizaciones (y relevos) vía espacios L [**1953c**, 33]. En el caso de las normas proyectivas duales ($/\wedge$, $\wedge\backslash$), las condiciones de acotación corresponden a factorizaciones vía espacios $L^2(\mu)$ y $L^1(\mu)$ (en el caso de alteración izquierda) o vía espacios $L^\infty(\mu)$ y $L^2(\mu)$ (alteración derecha), donde μ es una medida adecuada sobre un espacio compacto[85] [**1953c**, 34]. Por otro lado, las acotaciones sobre *combinaciones* de las alteraciones ($/\wedge\backslash$, $\backslash\vee/$) producen factorizaciones simétricas vía una conjugación de espacios C y L (en el caso de las alteraciones inyectivas [**1953c**, 32]), o de espacios de funciones integrables (en el caso de las alteraciones proyectivas [**1953c**, 34]).

[85] Acá usa Grothendieck, por vez primera en el *Résumé*, ciertas propiedades estructurales (proyectividad, reflexividad) de los espacios de Hilbert, en particular de L^2. En el desarrollo posterior del trabajo, los espacios de Hilbert adquieren un papel preponderante.

El §2 termina con una extraordinaria sexta sección, "Tablero de las $\otimes$ normas naturales" [**1953c**, 35-40], donde se recopilan, extienden y organizan los resultados topológicos, algebraicos y reticulares adelantados en las secciones previas. Mediante alteraciones, Grothendieck introduce dos nuevas normas ($/\backslash\vee$, $\vee/\backslash$)[86], y sus duales [**1953c**, 35]. En ese momento, ha presentado 12 ejemplos de $\otimes$-normas ($\vee$, $\wedge$, sus 6 alteraciones de la quinta sección y las 4 alteraciones recién introducidas), y procede a definir lo que es una $\otimes$-norma *natural*: una norma equivalente a alguna engendrada a partir de $\vee$ por las operaciones $\alpha \to \alpha'$ (dualización), $\alpha \to {}^t\alpha$ (transposición), $\alpha \to /\alpha$ (alteración)[87] [**1953c**, 35]. Grothendieck anuncia la existencia de una $\otimes$-*norma hilbertiana* $\underline{H}$ (que resultará equivalente a $/\wedge\backslash$) [**1953c**, 36], cuyas alteraciones $\backslash\underline{H}$ y $\underline{H}/$ producirán otras 2 nuevas normas, con factorizaciones asociadas a través de espacios de Hilbert H. Se contarán así *14* $\otimes$-*normas naturales*, y Grothendieck anuncia que esa lista cubrirá de manera completa *todas* las (clases de equivalencia de) $\otimes$-normas naturales [**1953c**, 36].

Aparece entonces un "Tablero de las $\otimes$-normas naturales" (ver *Figura 2.1* abajo), donde Grothendieck sintetiza admirablemente las diversas informaciones recopiladas hasta el momento (o previstas, alrededor de las normas ligadas a $\underline{H}$). Las "Explicaciones" al *Tablero* [**1953c**, 37-40] incorporan tres niveles de complejidad. Primero, las "designaciones y factorizaciones típicas" [**1953c**, 37-38] retoman, en cada rectángulo, *(i)* las notaciones y los nombres de las diversas normas, *(ii)* debajo de ellas las factorizaciones típicas, *(iii)*

[86] Grothendieck usa notaciones intermedias para aligerar la escritura: $\backslash\vee = \underline{C}$, $\vee/ = \underline{L}$ (la primera ligada a factorizaciones vía espacios C, la segunda a factorizaciones vía espacios L, como hemos indicado) [**1953c**, 33], $\underline{\gamma} = /\underline{C}$ $(= /\backslash\vee)$, $\underline{\lambda} = \underline{L}\backslash$ $(= \vee/\backslash)$ [**1953c**, 35]. Es interesante observar aquí dos mínimas erratas (en tildes y duales), que pueden revelar un cansancio (si tal situación existiese), *nel mezzo del camin*, a inicios de la página 35: "normés" en vez de "normes" (línea 1), $\underline{\gamma}'$ en vez de $\underline{\gamma}$ (línea 9). Al final de la página 35, en la penúltima línea, y a comienzos de la página 36, en la segunda línea, aparece otra errata repetida: "saboir" en vez de "savoir". No es claro si allí ocurre el cansancio, o simplemente una mala ortografía (es sabida la relativa ausencia de lecturas de Grothendieck).

[87] Grothendieck es consciente de la *no naturalidad* de una multitud de normas, e indica que existe una infinidad continua de normas no naturales, no equivalentes entre ellas [**1953c**, 35].

los tipos de espacios en juego (L, C, H, subespacios λ de espacios L, o cocientes γ de espacios C)[88]. Segundo, las "Simetrías" [**1953c**, 38] revelan cómo las normas *transpuestas* se obtienen por simetría con respecto al *eje vertical* del *Tablero* y cómo las normas *duales* se obtienen por simetría con respecto al *centro*. Una simetría con respecto al *eje horizontal* corresponde entonces a una *contragradiencia*, definida como la compuesta (conmutativa) de dualización y transposición. Tercero, las "Implicaciones" [**1953c**, 38-40] corresponden al *orden reticular inverso* de las normas: $\alpha \to \beta$ significa que existe k tal que $\beta \leq k\alpha$, o, lo que es lo mismo, que una α-aplicación sea una β-aplicación[89].

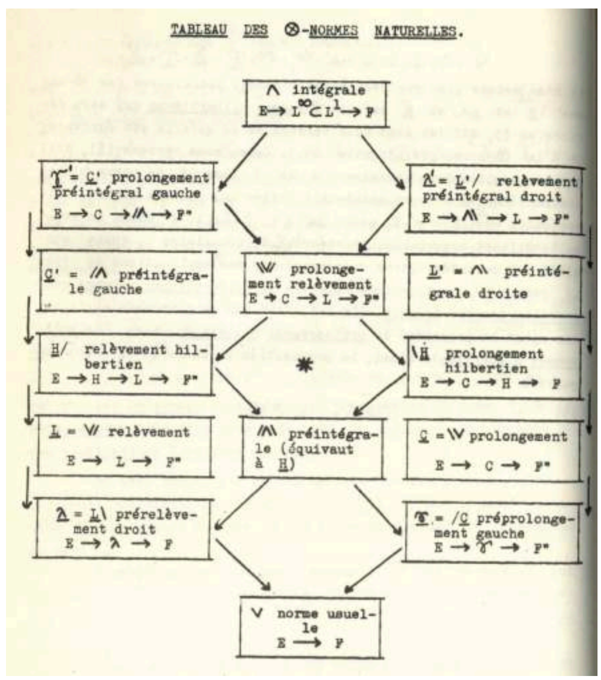


Fig. 2.1 – Tablero de las $\otimes$-normas naturales – [**1953c**, 37]

---

[88] Subrepticiamente, está codificada aquí, en los símbolos, la resolución del problema de Banach-Mazur. Véase nuestra descripción de los §§3, 4 abajo, así como nuestra *Sección 2.3*.

[89] En particular, se tiene que la norma proyectiva domina la norma inyectiva ($\wedge \to \vee$, $E \overset{\wedge}{\otimes} F \rightarrowtail E \overset{\vee}{\otimes} F$) pues $\vee \leq \wedge$.

Grothendieck afirma que las 14 normas del *Tablero* cubren todas (las clases de equivalencia de)[90] las normas naturales, lo que provendrá de "los resultados fundamentales del §4" [**1953c**, 39], y que no existen otras correlaciones de implicación más allá de aquellas explicitadas en el *Tablero*.

§3 "Las ⊗-normas ligadas al espacio de Hilbert".

La norma $\underline{H}$ se introduce como aquella que caracteriza las formas bilineales sobre un producto de espacios de Banach mediante sus representaciones en espacios de Hilbert: dados E, F espacios de Banach y dada u bilineal en $E \times F$, $\|u\|_{\underline{H}} \leq 1$ si y solo si existen H espacio de Hilbert, $\varphi : E \to H$, $\psi : F \to H'$ aplicaciones lineales, tales que $u(x,y) = \langle \varphi x, \psi y \rangle$ [**1953c**, 40]. La caracterización algebraica de $\underline{H}$ se obtiene entonces mediante factorizaciones $E \to H \to F$ a través de espacios de Hilbert [**1953c**, 40]. Grothendieck observa que $\underline{H}$ es una norma simétrica (${}^t\underline{H} = \underline{H}$) e inyectiva, y por tanto $\underline{H} \leq / \wedge \backslash$ (esta última es la mayor norma inyectiva) [**1953c**, 41]. dualmente, $\underline{H}'$ es simétrica, proyectiva y $\underline{H}' \geq \backslash \vee /$ (menor norma proyectiva). Siguen diversos resultados técnicos sobre teoremas de representación para formas hermitianas[XIII] con respecto a $\underline{H}$ y $\underline{H}'$ [**1953c**, 42-47], con los cuales se puede proceder a una comparación entre las normas hilbertianas. En particular, se tiene $\underline{H} \leq \rho \underline{H}'$ (ρ constante, $1 \leq \rho \leq 2$), y lo mismo sucede para las alteraciones[91] $\backslash \underline{H}$ y $\underline{H}/$ [**1953c**, 47], con lo cual se prueban las implicaciones en el centro del *Tablero* de las

[90] En cambio, en cada clase, podrían existir infinitas normas naturales. Grothendieck lo sugiere como "muy probable" [**1953c**, 39].

[91] Errata: olvido del alterador en [**1953c**, 47, línea -6]. Otra errata (signo dual sobrante) en [**1953c**, 52, línea 1]. La riqueza simbólica del *Résumé*, además del agotador esfuerzo grothendieckiano por *sintetizar* lo esencial, son sin duda las razones de un inusual número de erratas en el texto.

[XIII] Dado un espacio vectorial P con una involución $^* : P \to P$, $u \in P$ es hermitiano si $u^* = u$. Para el caso de una aplicación bilineal u sobre $E \times E$, se obtiene la definición usual de hermitianidad: $u(x,y) = \overline{u(y,x)}$. Las formas hermitianas son susceptibles de buenos teoremas de representación, vía formas positivas (en el caso de espacios de tipo H) o formas integrales (en el caso H').

$\otimes$-normas naturales (ver arriba, cuadrado denotado $\star$, p. 71).

La quinta sección del §3, "Relaciones más profundas entre las $\otimes$-normas ligadas al espacio de Hilbert" [**1953c**, 48-52], demuestra los resultados sobre los que se apoyará parte de la resolución del problema de Banach-Mazur. Mediante finas aproximaciones de medida, acotaciones, cálculos de mínimos, desigualdades sobre la función Γ (exhibición de un gran analista), Grothendieck consigue probar que $/\underline{H}'\backslash \leq \sigma\underline{H}$ ($\sigma = \frac{\pi}{2}$, mejor constante) [**1953c**, 51]. Las dos desigualdades entre $\underline{H}$ y $\underline{H}'$ (ligadas a ρ y σ) aseguran entonces que, en el caso de productos de tipo L o C, las $\underline{H}$-formas y las $\underline{H}'$-formas coinciden, y, en particular, que, en el caso de aplicaciones lineales de espacios de tipo C en espacios de tipo L, *y viceversa*, resulta lo mismo ser de tipo $\underline{H}$ o de tipo $\underline{H}'$[92]. Como corolarios de las desigualdades entre las normas, se obtienen novedosos teoremas de factorización: *(i)* si $u : C_0 \to H$ es de norma ≤ 1, entonces $u = C_0 \to L^2(\mu) \to H$ (con propiedades canónicas sobre las aplicaciones factores), *(ii)* si $u : H \to L^1$ es de norma ≤ 1, entonces $u = H \to L^2(\mu) \to L^1$ (con otras propiedades canónicas sobre los factores) [**1953c**, 52].

La sexta sección, "Las clases naturales de operaciones lineales en el espacio de Hilbert"[93] [**1953c**, 53-57], concluye el §3, y presenta una de las dos implicaciones en la resolución del problema de Banach-Mazur[94]. El objetivo consiste en "determinar las diversas clases de aplicaciones lineales entre espacios de Hilbert, definidas por las $\otimes$-normas naturales"

[92] La coincidencia de las normas hilbertianas y sus duales, al restringirlas a transformaciones entre espacios C o L, muestra cómo una *alta simetría arquetípica*, propia de los espacios de Hilbert, encarna en tipos de simetría particulares ligados a los espacios C y L. Es parte de la *armonía musical* intrínseca en la resolución de Banach-Mazur. Ver abajo nuestra *Sección 2.3*.

[93] La "naturalidad" es aquí esencial. Después de la "marea subiente" topológica-funcional-algebraica-reticular, la cáscara de la nuez se disuelve, y todo se desprende ahora *suavemente*, de manera natural.

[94] El apelativo "Banach-Mazur" nunca es mencionado como tal en el *Résumé*.

[**1953c**, 53-54]. En la década de los treintas, Banach y Mazur habían demostrado[xv] que todo espacio de Banach podía verse como proyección de un espacio L y como inyección en un espacio C. La pregunta era entonces qué sucedía con la situación *inversa*[95]: ¿cuáles espacios eran proyecciones de espacios C e inyecciones en espacios L?[xvi] Grothendieck la resuelve afirmando que se trata de los espacios de Hilbert, algo que resultará como combinación de *(i)* un teorema *banal* en medio de su maquinaria *general* (Teorema 7, [**1953c**, 56]) y *(ii)* un teorema *profundo* ligado a la desigualdad de Grothendieck (Corolario 2, [**1953c**, 61]). Como la norma $\underline{\gamma} = /\underline{C}$ $(= /\backslash\vee)$ está caracterizada mediante factorizaciones vía *cocientes de espacios de tipo C* y la norma $\underline{\lambda} = \underline{L}\backslash$ $(= \vee/\backslash)$ lo está mediante factorizaciones vía *subespacios de tipo L* [**1953c**, 35], resolver *(i)* en Banach-Mazur (*todo Hilbert es a la vez cociente de tipo C y subespacio de tipo L*) consiste sencillamente en chequear que la aplicación identidad Id en un espacio de Hilbert verifica $\|Id\|_{\underline{\lambda}} \leq 1$ (y/o, equivalentemente, $\|Id\|_{\underline{\gamma}} \leq 1$), y esto se deduce directamente de la existencia de un isomorfismo métrico de un espacio de Hilbert de dimensión finita en L^1 [**1953c**, 56]. El §3 concluye con otras caracterizaciones de este hecho, tanto reticulares ($\underline{H} \geq \underline{\lambda}, \underline{H} \geq \underline{\gamma}$), como algebraicas (propiedades de relevo y de prolongación).

95 Los problemas de inversión son esenciales para el desarrollo de la matemática. Para Grothendieck, en particular, en medio del *balance armónico* de su pensamiento, las inversiones adquirirán a menudo un papel guía para el desarrollo de la intuición. Algunas de esas grandes inversiones se cifrarán, como hemos indicado (p. 52), en la inversión de lo *étalé* y lo *étale*.

xv Ver J. Diestel. "Grothendieck and Banach space theory". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait.* Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 1-12.

xvi Diestel, ibíd., p. 2, indica que Grothendieck había demostrado que un tal espacio debía ser *reflexivo*, en su artículo "Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$", *Canad. J. Math.* 5 (1953): 129-173. La reflexividad era entonces una condición *necesaria* para resolver Banach-Mazur. Con la hilbertianidad se obtiene una condición *necesaria y suficiente*.

§4 "Las relaciones entre los dos grupos de ⊗-normas. Aplicaciones".

La primera sección del parágrafo se ocupa de las funciones de tipo α (ver [**1953c**, 12]) en el caso particular de los espacios L^1 y L^∞, para los cuales las normas α y $/\alpha\backslash$ coinciden [**1953c**, 57-58]. En la segunda sección aparece el "Teorema fundamental de la teoría métrica de los productos tensoriales": $\|Id\|_{/\wedge\backslash} \leq h$, donde Id es la función identidad en un espacio de Hilbert arbitrario, y h es una "constante universal" [**1953c**, 59, Teorema 1], o, equivalentemente, $/\wedge\backslash \leq h\underline{H}$ [**1953c**, 59, Teorema 2]. Esto adquirirá luego el famoso apelativo de *desigualdad de Grothendieck*. La constante h depende del campo subyacente ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y Grothendieck acota su valor[xvii] según la teoría real ($\frac{\pi}{2} \leq h \leq sh\frac{\pi}{2}$) o según la teoría compleja ($\frac{\pi}{2} \leq h \leq 2sh\frac{\pi}{2}$) (donde $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$). La desigualdad de Grothendieck fuerza entonces la equivalencia de $/\wedge\backslash$ y $\underline{H}$ (la otra desigualdad habiendo sido probada a inicios del §3, ver arriba p. 72). De esta manera, las *iteraciones de las alteraciones* se estabilizan en la norma hilbertiana (y en su dual $\underline{H}'$, equivalente a $\backslash\vee/$), lo que limita el número de las ⊗-normas naturales. A partir de la desigualdad de Grothendieck, se deducen otras desigualdades asociadas (*e.g.*, $\underline{H} \leq k\ (\backslash\vee/)$ y $/\wedge\backslash \leq l\ (\backslash\vee/)$, con k y l constantes adecuadas, acotadas a partir de h [**1953c**, 61]), con lo que se termina de probar el cuadro de dominaciones en el *Tablero* de ⊗-normas naturales (ver arriba, p. 71). Por otro lado, paralelamente a las acotaciones de orden, Grothendieck enuncia diversos teoremas de representación y propiedades de factorización "equivalentes al teorema 1" [**1953c**, 62].

La tercera sección del §4 se ocupa de la "demostración del teorema fundamental" [**1953c**, 62-64]. Es interesante observar aquí el vaivén metodológico grothendieckiano entre

xvii El valor exacto de h es desconocido aún hoy en día (2017). Para una excelente introducción a la desigualdad de Grothendieck y sus usos inesperados en mecánica cuántica, geometría no conmutativa, teoría de grafos, teoría de la computación, etc. véase G. Pisier. "Grothendieck's theorem, past and present". En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (2012), págs. 237-323.

la *estructura general* del edificio (*Tablero*, acotaciones, representaciones, factorizaciones) y el *detalle particular* de los goznes que sostienen la estructura. Grothendieck actúa a la vez como *arquitecto y obrero*[96], tan atento a la *visión* arquitectónica global (ensamblaje del todo y las partes), como al *gesto* local de ajuste manual (cálculo en un fragmento del todo). La extraordinaria habilidad técnica del *analista* entra entonces en juego[xviii]. Grothendieck demuestra la existencia de h como límite de constantes h_n que acoten la identidad en espacios de Hilbert H de dimensión finita n, y estudia el valor de h_n mediante representaciones trigonométricas en la esfera unidad de H. Las herramientas para proceder en la demostración incluyen toda una variedad de perspectivas –grupo ortogonal, convoluciones, representaciones integrales, proyecciones, preservaciones homomórficas, mayoraciones, series trigonométricas– y culminan en una expresión *canónica* [**1953c**, 64] que da lugar a la existencia (y acotación) de h.

La cuarta sección del parágrafo estudia “consecuencias diversas en la teoría de las operaciones lineales” [**1953c**, 64-67]. Grothendieck señala primero cómo, gracias a los resultados obtenidos hasta el momento, la “determinación de las aplicaciones lineales continuas entre espacios C, L, H se reduce teóricamente a la determinación de las operaciones lineales continuas entre espacios de Hilbert” [**1953c**, 64], y explica todas las posibles combinaciones de esas operaciones alrededor de cuatro grandes esquemas, dependiendo del orden de los factores en juego[97] [**1953c**, 65]. Aparece luego una serie de “caracterizaciones vectoriales-topológicas del espacio de Hilbert”, entre las cuales se acentúa la resolución de

96 Véase *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo.

97 Se trata de un ejercicio de *tipología sobre los enlaces entre los tipos mismos C, L, H*. La iteración del método produce una suerte de *arquetipo* que gobierna las formas diversas de las factorizaciones.

xviii Lawvere llama “virtuoso” al Grothendieck *gran calculista*, allende “nosotros calculadores menos hábiles”. Ver F. W. Lawvere. “Alexander Grothendieck and the Concept of Space”, 2015. URL: `www.acsu.buffalo.edu/~wlawvere/GrothendiekAveiro15.htm`, p. 6.

Banach-Mazur[98]: *H es espacio de Hilbert si y solo si es, a la vez, cociente de un espacio de tipo C y subespacio de un espacio de tipo L*[99] [**1953c**, 66]. En efecto, si regresamos al *Tablero* de las $\otimes$-normas, p. 71, la desigualdad de Grothendieck asegura que $/\wedge\backslash$ y $\underline{H}$ son equivalentes, por tanto $\underline{H} = sup_{\leq}(\underline{\lambda}, \underline{\gamma})$, y entonces un espacio que es *a la vez* cociente de tipo C y subespacio de tipo L es también necesariamente un espacio de Hilbert. Siguiendo con las aplicaciones de la teoría, Grothendieck recuerda un teorema de Littlewood de inclusión entre l^1 y l^2, y lo enuncia a su manera[100]: $l^1 \overset{\vee}{\otimes} L \rightarrowtail l^2 \overset{\wedge}{\otimes} L$, con la norma de la inclusión $\leq \sqrt{2}$ [**1953c**, 67].

La quinta sección registra luego otras "aplicaciones al análisis armónico", en el caso de la teoría compleja [**1953c**, 68-72]. Un teorema de Gelfand sobre la representación de C^*-álgebras en sus envolventes da lugar a nuevas acotaciones de la norma hilbertiana $\underline{H}$ para formas positivas. Con ello, se obtienen algunos *equivalentes* armónicos del teorema fundamental, como, por ejemplo, $\varphi \in L^\infty(G)$ (G grupo) es combinación lineal de funciones continuas positivas si y sólo si la función $\varphi(t^{-1}s)$ definida sobre $G \times G$ tiene una norma proyectiva $\leq h\|\varphi\|_{\underline{H}}$ (h constante de la desigualdad de Grothendieck)[101] [**1953c**, 71]. El §4 termina con una sección sobre "preguntas abiertas" [**1953c**, 72-74]: (1) problemas de aproximación ("¿todo espacio de Banach es accesible, o aún métricamente accesible? Parece improbable") [**1953c**, 72], (2) relaciones entre las $\otimes$-normas naturales (dominación, o no, de $\underline{C}$ por $\underline{C}'$), (3) mejores constantes (determinación más precisa de h y sus variantes,

[98] Sin esos términos en el texto.

[99] Grothendieck indica que "parece que los criterios de la proposición sean las primeras caracterizaciones *vectoriales-topológicas* (y no métricas) conocidas para el espacio de Hilbert" [**1953c**, 66].

[100] Como es costumbre, se proponen diversos enunciados equivalentes. Es otra estrategia grothendieckiana permanente, parte esencial de su *estilo*: conciencia de una *multiplicidad* de formas, integradas a menudo en *una* equivalencia lógica entre ellas.

[101] Al final de la sección, Grothendieck expresa unas pocas limitantes en las equivalencias: "ignoro si (...) la restricción es necesaria", "es tal vez inútil suponer (...)" [**1953c**, 72]. Una cierta *frescura* con las dudas, las limitantes y los errores vendrá en la década de los ochenta. Ver nuestra *Parte III* abajo.

estudio de los casos real y complejo), (4) propiedades algebraico-topológicas de las C^*-álgebras (acotaciones de formas sesquilineales por formas positivas), (5) recíprocas diversas (paso de propiedades específicas relacionadas con los espacios de tipo C, L, H, λ, γ, a propiedades características más generales para espacios de Banach), (6) comparación de $E \overset{\wedge}{\otimes} F$ con $E \overset{\vee}{\otimes} F$ (en caso de identidad, forzar E o F de dimensión finita, y cuestiones aledañas). Concluye Grothendieck: "Mientras que los resultados de este trabajo, en último Análisis [mayúscula del autor], conciernen más a los espacios C, L, H que a los espacios de Banach más generales, la solución de las preguntas 1, 2, 5, 6 aportaría algunos progresos decisivos en el conocimiento de la estructura vectorial-métrica fina de los espacios de Banach *generales*"[xix] [**1953c**, 74].

La bibliografía [**1953c**, 75] remite a Bourbaki, Dvoretzky-Rogers, Littlewood, Nachbin, Schatten, Weyl, y contiene cuatro referencias a Grothendieck (entre las cuales, "Thèse, à paraitre [sic] dans Memoirs of Amer. Math. Soc." [**1949-53**]). Cuatro páginas de "Observaciones" (en realidad, notas a pie de página, reunidas al final [**1953c**, 76-79]) terminan el *Résumé*. Varias de las notas reconocen el aporte de otros matemáticos: Schatten [**1953c**, 76, nota 1], Weyl [**1953c**, 77, nota 8bis], Dunford-Pettis [**1953c**, 78, nota 11], Littlewood [**1953c**, 78, nota 12], Takeda [**1953c**, 78, nota 13], Gelfand-Naimark [**1953c**, 79, nota 14], Dixmier [**1953c**, 79, nota 15], Godement [**1953c**, 79, nota 17]. Otras observaciones se refieren a formas equivalentes al problema de aproximación (o accesibilidad) [**1953c**, 76, notas 2, 3], precisiones para los casos real o complejo, y consideraciones topológicas generales. En la observación (8bis), Grothendieck habla de un "elegante método de convexidad de H. Weyl (...) cuya explicitación sistemática fue el objeto de un seminario en la

xix Lo que se ha demoninado desde entonces la *teoría fina de los espacios de Banach* empieza así en el *Résumé*. Para una visión de muchos resultados posteriores en esta área, véase A. Pelczynski. "Structural theory of Banach Spaces and its interplay with analysis and probability". En: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warszawa)*. 1983, págs. 237-269.

Universidad de São Paulo en 1954 (no redactado)"[102] [**1953c**, 77].

2.2 Síntesis conceptual

Continuación natural de la *Tesis* [**1949-53**], el *Résumé* da lugar a un entendimiento nuevo de las propiedades estructurales de clases (aún no llamadas "categorías") de espacios de Banach y de Hilbert, desde una triple perspectiva, atenta a desigualdades entre normas tensoriales, estructuras analíticas y factorizaciones algebraicas. Las tres *structures-mère* centrales de Bourbaki entran simultáneamente en juego –*Orden, Topología, Álgebra*– tanto para resolver difíciles problemas abiertos (Banach-Mazur), como para abrir rutas insospechadas (desigualdad de Grothendieck). El vaivén entre lo abstracto (Banach y Hilbert *at large*) y lo concreto (espacios de tipo C, L, λ, γ) permite *anclar* una categoría general (arquetípica) alrededor de los espacios particulares (tipos) que la gobiernan. En esos procesos resaltan una *armonía* y una *suavidad* plenas, donde se reflejan, unos en otros, los tres niveles de la semiótica[103]: los objetos ($\otimes$-normas), sus representámenes (signos $\wedge$, $\vee$ y sus alteraciones a izquierda y derecha) y sus interpretantes (conexiones entre los objetos y sus representámenes: teoremas de factorización).

La estrategia de trabajo del *Résumé* [**1953c**] es fascinante: *(i)* describir normas canónicas comparables, *(ii)* transformar esas normas, *(iii)* cubrir el panorama completo

[102] La inusual *no redacción* nos da una nueva pista sobre el año 1954, alrededor de la "crisis" grothendieckiana. Ver *Capítulo 3* abajo.

[103] Pensamos aquí en la semiótica (teoría de los signos) según Charles Sanders Peirce (1839-1914). Para Peirce, un signo es una *tríada* –objeto (1), representamen (2), interpretante (3)– donde un dato inicial (1) es representado en una imagen (2) luego interpretada en algún contexto (3). Vale la pena observar que ese contexto (variable, iterativo, dinámico) puede ser mucho más amplio que una mente humana: la semiótica peirceana barre las fronteras de nuestro cuerpo físico y tiende a ser cosmológica / metafísica. Esto nos será de utilidad en muchos momentos para interpretar los *arquetipos* grothendieckianos dentro de contextos no psicologistas, en particular, dentro de una matemática evolutiva que supera los registros particulares de los individuos en el tiempo. Véase, por ejemplo, nuestro estudio de *Las puertas del universo*, *Capítulo 14* abajo.

gracias a jerarquizaciones estructurales. Los tres niveles generales poseen a su vez varios subniveles específicos de comprensión: (A) à la Bourbaki, tenemos *(i)* orden, *(ii)* topología, *(iii)* álgebra; (B) semióticamente, tenemos *(i)* semántica, *(ii)* sintáctica, *(iii)* pragmática; (C) fenomenológicamente, tenemos *(i)* continuidad, *(ii)* separación, *(iii) entrelacs*[104]; (D) musicalmente, tenemos *(i)* tema, *(ii)* variaciones, *(iii)* fuga. En particular, en el nivel *(i)* podemos reconocer una de las obsesiones mayores de Grothendieck. En efecto, desde su *Tesis* [**1949-53**] hasta su prueba de Riemann-Roch generalizado [**1955-57**], pasando por la creación de las categorías abelianas [**1955-56**], Grothendieck detectó *proyectividad e inyectividad por doquier*: productos proyectivos e inyectivos (*Tesis*), normas proyectivas e inyectivas (*Résumé*), existencia de suficientes inyectivos en categorías abelianas con un generador y axiomas de infinitud, para poder reconstruir la cohomología a partir de funtores derivados (*Tôhoku*), subespecializaciones inductivas de la prueba generalizada de Riemann-Roch en los casos proyectivo e inyectivo (*Rapport Riemann-Roch*).

Proyectividad e inyectividad son de hecho especializaciones (= *espacializaciones*) de una mirada más amplia que resultará central en el segundo periodo de Grothendieck (1958-1970, ver *Parte II* abajo), y que buscará encontrar *arquetipos* profundos del saber matemático. Multiplicidad, diversidad, tipos deben entenderse como *proyectados* desde los arquetipos, o, dualmente, *inyectados* en ellos. La estrategia produce maravillas en el caso de las normas sobre productos tensoriales de espacios de Banach, pues las normas razonables mayor y menor resultan ser precisamente las normas proyectiva e inyectiva, y se obtiene un orden semántico natural, a partir del cual emerge un "tema" continuo con

104 El "entrelacs" en Merleau-Ponty convoca el entrelazamiento de múltiples niveles de percepción, algo que se refleja también en el "chiasme", interconexión de los enlaces de la visión en el cerebro. Véase M. Merleau-Ponty. *Le visible et l'invisible.* Paris: Gallimard, 1964 (reed. Folio 2004); M. Merleau-Ponty. *L'Oeil et l'Esprit.* Paris: Gallimard, 1964 (reed. Folio 2004).

toda suerte de "variaciones" topológicas y algebraicas. La *imaginación*[xx] de Grothendieck se dispara mediante la formación de nuevas normas tensoriales. Para cada $\otimes$-norma α, las *variaciones canónicas óptimas* de las normas ($/\alpha$, $\alpha\backslash$, $\backslash\alpha$, $\alpha/$) y los modificadores sintácticos ($/$, $\backslash$) ("trait altérateur" [**1953c**, 28]) codifican *icónicamente* el contenido semántico mismo del signo: inclinación hacia abajo (objeto recortado) asociada a inyectividad, inclinación hacia arriba (objeto ampliado) asociada a proyectividad. Como hemos visto, yendo aún más allá, un cálculo de transposiciones, dualidades e "inclinaciones" produce una suerte de *tejido armónico* entre las normas, lo que lleva progresivamente a la emergencia *natural* de las 14 normas que cubrirán *exactamente* el espectro de las mediaciones posibles. En efecto, el "milagro" explota: (1) la lista recorre (módulo equivalencia) todas las posibles normas naturales, (2) las normas se ordenan en un retículo simétrico, (3) cada entrada en el retículo está completamente caracterizada por propiedades exactas de factorización algebraica de la norma entre tipos de espacios clásicos (L, C, H) y sus proyecciones (γ) e inyecciones (λ). Presenciamos así un verdadero "milagro" pragmático (en el sentido del pragmaticismo peirceano), donde *los signos coinciden con su acción* sobre toda una red compleja de alteraciones analíticas, algebraicas y semióticas.

El *entrelacs* de Merleau-Ponty[105] alcanza aquí una sorprendente *armonía musical*,

105 Para Merleau-Ponty, el "punto más alto de la razón" consiste en sentir el *desliz del suelo*, en detectar el *movimiento* del saber: "cada creación cambia, altera, clarifica, profundiza, confirma, exalta, recrea o crea por anticipación todas las demás", Merleau-Ponty, óp.cit., p. 92. En ese actuar, el cuerpo, *operador* en los dominios del saber, puede verse como "un haz de funciones que entrelazan la visión y el movimiento", ibíd., p. 16. Son muy ricas las conexiones con los *cambios de base*, los *funtores* y los *haces* en la obra de Grothendieck.

xx Vale la pena comparar aquí el *Résumé* [**1953c**] con J. Diestel, J. H. Fourie y J. Swart. *The Metric Theory of Tensor Products. Grothendieck's Résumé Revisited.* Providence: American Mathematical Society, 2000. A pesar de todo el interés de los detalles demostrados a cabalidad en este último texto, la *frescura* del *Résumé* es mucho más fina. Corresponde un poco a comparar un tratado de armonía musical (Diestel, Fourie, Swart) con la gran sinfonía subyacente (Grothendieck) a que da lugar el tratado. En realidad, lo mismo sucede con nuestra monografía, que solo puede entenderse como una *guía* para incitar a *leer directamente* a Grothendieck.

donde conviven (1) frescura sintáctica, (2) complejidad semántica, (3) arquitectónica pragmática. Por otro lado, el *chiasme*, metáfora con la que Merleau-Ponty extiende idealmente el cruce de los nervios ópticos en el cerebro, puede imaginarse como un profundo enlace de los nervios a la Bourbaki (estructuras madre) en el cerebro de Grothendieck. Yendo más allá, si seguimos las tres categorías cenopitagóricas peirceanas[106], el *entrelacs quiasmático* posee diversos niveles precisos en el *Résumé* [**1953c**]: (2) normas iniciales $\wedge$, $\vee$; (2.1) alteraciones diagonales (los íconos son formas de primeridad, el signo diagonal representa icónicamente el sentido de la alteración); (2.2) transposiciones y dualidades (los índices son formas de segundidad, las transformaciones captan indexicalmente el sentido de los cambios); (2.3) retículo de normas intermedias (los símbolos son formas de terceridad, el retículo incorpora simbólicamente el sentido de la estructura); (2.3.1) caracterizaciones algebraicas vía factorizaciones (la finitud algebraica es una forma de primeridad, siguiendo la clasificación peirceana de las ciencias); (2.3.3) caracterizaciones topológicas vía acotaciones de las normas (la continuidad es una forma de terceridad); etc.

El espectacular *tejido* del *Résumé* convoca también otras imágenes muy grothendieckianas: sobre una suerte de *base* ligada a los espacios vectoriales topológicos, se elevan las tres *fibras* básicas de las "estructuras madre" bourbakistas (topología, álgebra, orden), y entre ellas se manifiestan diversas *secciones* que enlazan el todo (tablero de normas, Banach-Mazur, desigualdad de Grothendieck, etc.) La metodología insinúa entonces en sí misma una suerte de *hacificación*, que se tornará muy pronto[107] en *la* herramienta fundamental grothendieckiana de investigación. No obstante, más allá de la estructura del tejido, más allá de la *urdimbre* (fibras) y de la *trama* (secciones), muchos momentos extraordinarios en

[106] Las tres categorías cenopitagóricas pueden describirse brevemente así: (1) *primeridad*: frescura, monadicidad, posibilidad; (2) *segundidad*: acción-reacción, binariedad, actualidad; (3) *terceridad*: mediación, triadicidad, necesidad. El término "cenopitagórico" pega *ceno* (frescura, sencillez) con *pitagorismo* (matemáticas, orden armónico).

[107] Desde el *Tôhoku* [**1955-56**], ver *Capítulo 3* abajo.

el *Résumé* emergen en los *nudos* (o nodos) que ocurren en el acto mismo de tejer. Ejemplos de ello son la *razonabilidad* [**1953c**, 8] y la *naturalidad* [**1953c**, 35] de las $\otimes$-normas (con lo que se aprietan los nudos/nodos del tejido), la *alterabilidad* [**1953c**, 28] de $\wedge$ y $\vee$ (con lo que se definen las mínimas puntadas de variación alrededor de los nudos), o la *accesibilidad* (aproximabilidad) [**1953c**, 72] (con lo que se explora el comportamiento *at large* de los nudos más representativos). Muy finamente, Grothendieck se encuentra así siempre atento a las *problemáticas de reflexión* entre el todo (tejido) y la parte (nudo), y consigue encontrar las definiciones precisas, los ejemplos ilustrativos y los teoremas rectores que engloban el panorama[108].

2.3 Ejemplo detallado: resolución de Banach-Mazur

Como hemos indicado, la resolución de Banach-Mazur consiste en *caracterizar* los espacios de Hilbert como espacios que son a la vez C-cocientes y L-subespacios. En la caracterización, una implicación consiste en asegurar que *(i)* todo espacio de Hilbert es C-cociente y L-subespacio [**1953c**, 56]; la otra implicación afirma que *(ii)* todo espacio que es a la vez C-cociente y L-subespacio resulta ser espacio de Hilbert [**1953c**, 66]. Poco antes de

[108] Este *equilibrio armónico* entre (1) definiciones, (2) ejemplos y (3) teoremas se encuadra también perfectamente bajo las tres categorías peirceanas. De hecho, Peirce propuso un *modelo de la investigación científica* alrededor de sus categorías: (1) abducción (creación de hipótesis), (3) deducción (desglose de consecuencias), (2) inducción (contrastación de los resultados) (véase, por ejemplo, F. Zalamea. *El continuo peirceano: aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad. Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2001). El orden $1 \to 3 \to 2$ (sugerido por Peirce como el más útil) corresponde a plantear hipótesis (codificadas a menudo en definiciones), deducir consecuencias y compararlas con los ejemplos. Los ajustes (o *tránsitos*) en el proceso refuerzan una teoría dada, los desajustes (u *obstrucciones*) abren el paso a nuevas teorías.

la elaboración del *Résumé*, Grothendieck había probado[xxi] un importante resultado intermedio en la dirección *(ii)*: todo espacio que es a la vez C-cociente y L-subespacio es necesariamente *reflexivo*. Ya que los espacios de Hilbert son los ejemplos paradigmáticos de espacios reflexivos, esto pudo tal vez *orientar* la intuición de Grothendieck. No obstante, la maquinaria perfectamente ajustada del *Résumé* es la que lleva, poco a poco, a la resolución plena de Banach-Mazur.

El gran descubrimiento central en el *Résumé* –equivalencia entre acotar $\otimes$-normas naturales en un producto tensorial y factorizar aplicaciones entre los subcomponentes del producto– es el que ofrece, *natural y suavemente*, los frutos en esa dirección. El primer ejemplo de una tal equivalencia ocurre a inicios del §2, cuando, para una aplicación lineal $u : E \to F$, la acotación $\|u\|_\wedge \leq 1$ se demuestra equivalente a factorizar u vía L^1 y L^∞ (con normas acotadas en las aplicaciones factores) [**1953c**, 20]. A partir de allí, la formación de nuevas $\otimes$-normas [**1953c**, 28] provee, *natural e icónicamente*, adecuadas variaciones tanto en las acotaciones de las nuevas normas, como en las factorizaciones asociadas. Se eleva así todo un *entorno teoremático natural de transferencias* entre propiedades de las normas y propiedades de las aplicaciones factores. En el caso particular de las aplicaciones factores vía C-cocientes y L-subespacios, aparece la proposición 3 de la sección 6 del parágrafo 2 [**1953c**, 35], que caracteriza C-cocientes vía acotación de $\underline{\gamma}$ y L-subespacios vía $\underline{\lambda}$. Como, por otra parte, para los espacios de Hilbert se pueden demostrar esas acotaciones asociadas a $\underline{\gamma}$ y $\underline{\lambda}$ (con lo que $\underline{H}$ domina a $\underline{\gamma}$ y $\underline{\lambda}$) [**1953c**, 56], se deduce entonces la parte más "sencilla" de Banach-Mazur: *todo espacio de Hilbert es C-cociente y L-subespacio* [**1953c**, 56]. Así, la riqueza de la *composición* (transferencias plenas en el reticulado de las estructuras madre a la Bourbaki) va de la par con la riqueza de los *componentes* (definiciones finas y conocimiento relacional de las partes).

---

xxi Ver Diestel, óp.cit., p. 2.

Para invertir la problemática, y poder demostrar la implicación inversa en Banach-Mazur (*todo C-cociente y L-subespacio es espacio de Hilbert*), es natural que deba suceder en algún momento una *inversión* en la relación de dominación de las normas. Ese es exactamente uno de los sentidos profundos de la desigualdad de Grothendieck, donde $\underline{H}$, que directamente a partir de la definición es dominada por $/ \wedge \backslash$ [**1953c**, 41], pasa a su vez a dominarla: $/ \wedge \backslash \leq h\underline{H}$ [**1953c**, 60]. Por dualidad, se obtiene, en el corolario 1 del teorema 3 del parágrafo 4, $\underline{H} \leq k\ (\backslash \vee /)$ [**1953c**, 61], lo que fuerza la equivalencia de $\underline{H}$ con $\backslash \vee / = sup_{\leq}(\vee/\backslash, /\backslash\vee) = sup_{\leq}(\underline{\lambda}, \underline{\gamma})$ (definiciones de $\underline{\gamma}$ y $\underline{\lambda}$ [**1953c**, 35]), y entonces toda C-proyección y L-inmersión resulta ser factorizable a través de un espacio de Hilbert [**1953c**, 61]. De esta manera, como por "arte de magia"[109], con una fascinante *suavidad*, la marea cubre la nuez, disuelve su cáscara y emerge el fruto impoluto.

De hecho, la resolución de Banach-Mazur solo puede entenderse si se la integra dentro de las *estrategias generales* de Grothendieck[110]. En efecto, su resolución completa y explícita ocurre en la proposición 5 del apartado c de la sección 4 del parágrafo 4 [**1953c**, 66]: su mismo *lugar excentrado*, como consecuencia aparentemente menor del "Teorema Fundamental" (desigualdad de Grothendieck) [**1953c**, 59], indica que, a pesar de la belleza matemática y armónica del resultado, este *no* se encontraba en la mira del autor al desarrollar su trabajo[111]. Grothendieck consigue entonces *caracterizar la categoría de los*

[109] Volveremos sobre esta *sensación de maravilla* al revisar los comentarios de Deligne sobre algunas pruebas de Grothendieck en el tablero, cuando desarrollaba en el *IHES* su *Seminario de Geometría Algebraica* [**1960-69**]. Ver *Capítulo 8* abajo.

[110] Tal vez por ello mismo es que Grothendieck consigue resolver el problema. El *Résumé* no ofrece un ataque directo a la cuestión (tipo martillo y buril para "romper" la cáscara de la nuez [**1983-86**]), sino provee un ambiente *abstracto y suave* donde se sumerge la problemática.

[111] El rastreo de los resultados intermedios que llevan a la prueba, con su carácter desperdigado como hemos visto en las páginas anteriores, apoya también esta lectura. Lo que motiva profundamente a Grothendieck es, en cambio, la construcción reticular-algebraico-topológica del "Tablero de las $\otimes$-normas naturales", ver arriba p. 71. Que Banach-Mazur se deduzca como caso *particular* de ese equilibrio *general* es una muy bienvenida consecuencia, que de ninguna manera debe considerarse fundamental.

espacios de Hilbert dentro de los espacios de Banach por puras propiedades de proyectividad (C-cocientes) y de inyectividad (L-subespacios) –resultado extraordinario de por sí–, pero esto solo resulta como consecuencia de un *orden arquetípico aún más profundo*, cifrado en el "Tablero de las $\otimes$-normas naturales". Una arquitectónica global se refleja así en las bondades locales del edificio: una hermosa mirada desde una estancia específica (Banach-Mazur) se consigue gracias a la *visión* del arquitecto, quien ha sabido previamente *distribuir las perspectivas* del entorno[112].

[112] Acerca de las perspectivas del arquitecto y del obrero, del edificio y sus moradas, ver *Récoltes et semailles* [**1983-86**], *Capítulo 14* abajo.

3

Sur quelques points d'algèbre homologique (1955-56)

Sur quelques points d'algèbre homologique (denominado *Tôhoku* por su lugar de publicación) [**1955-56**] es el trabajo que provee el *despegue* de la teoría de categorías, con todo un nuevo arsenal de ideas, técnicas, ejemplos y teoremas, que va mucho más allá de la eclosión inicial de la teoría en Mac Lane y Eilenberg. Múltiples perspectivas se aúnan en el hacer grothendieckiano: aparición de conceptos categóricos centrales (subobjetos, funtores representables, equivalencia, adjunción), emergencia de las categorías aditivas y abelianas, variados ejemplos de categorías de haces, axiomatización de procesos infinitarios, cuadro común entre cohomología y funtores derivados, teoremas de representación y exactitud, suficiencia de inyectivos en apropiadas categorías abelianas. La *riqueza imaginativa* y la *precisión técnica* se dan la mano en un "artículo" inagotable (102 pp.), donde la *invención* de un lenguaje (categorización, abelianización) y el *descubrimiento* de profundas estructuras matemáticas (haces, acciones, objetos inyectivos, funtores derivados) develan enlaces *naturales* entre geometría algebraica, topología, (co)homología, variable compleja.

3.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

En contraste con el periodo creativo glorioso del *Résumé* [**1953c**], el segundo semestre académico de Grothendieck en Brasil, en 1954[xxii], parece haber sido bastante decepcionante intelectualmente. En sus mismas palabras,

> En el momento en que hacía aún Análisis Funcional, es decir hasta 1954, me sucedía que me obstinaba sin fin sobre una pregunta que no conseguía resolver, no tenía ideas y me contentaba con dar vueltas en un círculo de ideas antiguas que, visiblemente, ya no "mordían". Fue así al menos durante todo un año, para el "problema de aproximación" en los espacios vectoriales topológicos, que iba a ser resuelto solo veinte años más tarde por métodos de un orden totalmente distinto (...) Fue un año doloroso – ¡el único momento en mi vida en que hacer matemáticas se tornó doloroso para mí! (...) Es a partir de 1954 que tomé la costumbre en matemáticas de tener muchos hierros en el fuego al mismo tiempo. [**1983-86**, 1.163].

Vemos entonces a un Grothendieck frustrado[113], que aprende literalmente a *vivir en la multiplicidad*: el trabajo en múltiples direcciones se adecúa a su modo mismo de entender las matemáticas, que requiere la exploración de una muy extensa *variedad diferencial* de

[113] Vale la pena enfatizar que se trataría del "único momento" en su vida donde no habría hecho gustosamente matemáticas. En particular, podemos colegir que, en las décadas supuestamente "oscuras" de los 1970s y los 1980s (que una parte importante de la comunidad matemática ha vilipendiado, sin razón), Grothendieck producía, contento, (muy) buenas matemáticas. Esto resultará obvio en la *Parte III* de nuestra monografía, abajo. De hecho, más allá del peculiar 1954, el nivel de genialidad matemática de Grothendieck no parece haber nunca decaído entre 1949 y 1991. El futuro dirá, con el desglose de las miles de páginas aún desconocidas de los *Archivos Grothendieck*, qué sucedió luego, desde 1991 hasta su muerte. Lo que resulta obvio es que, antes de emitir cualquier juicio apresurado sobre Grothendieck, se requieren una importante *prudencia*, la prudencia que necesita el tiempo para poner a cada gigante intelectual en su justo lugar, y mucho *estudio*, el estudio que necesita toda obra compleja para adentrarse en sus ideas y en sus técnicas.

[xxii] Leila Schneps lo califica como "peor que el primero" (Schneps, óp.cit., p. 9), dando a entender que el primero habría sido también malo en cierto sentido. Como hemos visto en el *Capítulo 2*, el primer semestre de 1953 no solo no fue malo, sino directamente esplendoroso. La caída se produce específicamente en 1954.

perspectivas, antes de proceder a una eventual *integración* unitaria[114].

Otro posgrado, en Kansas en 1955[xxiii], será la ocasión para que Grothendieck ponga todos sus hierros en el fuego. Es el famoso año de su *giro hacia la geometría algebraica*:

> El año 1955 marca un giro crucial en mi trabajo matemático: el paso del "análisis" a la "geometría". Recuerdo aún esa impresión fuerte, como si abandonara estepas áridas y ariscas, para encontrarme de pronto en una suerte de "país prometido" con lujuriantes riquezas, multiplicándose al infinito (...) Hay una cosa en matemáticas que (desde siempre sin duda) me fascina más que cualquier otra, no es ni el "número", ni la "magnitud", sino siempre la forma. Y entre los mil y un rostros que escoge la forma para revelársenos, el que me ha fascinado más y el que me sigue fascinando, es la estructura escondida en las cosas matemáticas. [**1983-86**, P.26-27]

En ese *giro crucial*, el papel de Jean-Pierre Serre resulta ser fundamental[115]. La correspondencia con Serre [**1955-87**] presenta la progresiva emergencia del *Tôhoku* [**1955-56**]: (1) el 25 de Febrero de 1955, Grothendieck escribe que está explorando una analogía de la teoría de funtores derivados con la cohomología a coeficientes en un haz, sin saber aún "si marcha tan bien en el caso de un espacio no separado[116]" [**1955-87**, 13-14]; (2) el 13 de Julio de 1955, Serre informa que "tu artículo sobre el álgebra homológica fue leído

---

114 De aquí la riqueza de una *variedad incesante de ejemplos*, como hemos visto hasta el momento y como seguirá sucediendo siempre en la obra grothendieckiana. Los calificativos apresurados de "sinsentido abstracto" para los trabajos de Grothendieck solo acentúan la falta de lectura de los comentaristas.

115 Serre tuvo un "papel de detonador (...) en la génesis de las principales ideas-fuerza y de las grandes tareas que desarrollé entre 1955 y 1970 (...) Todo lo que aprendí en geometría, lo aprendí de Serre, cuando no lo aprendí yo mismo en mi trabajo (...) Durante años fue mi solo interlocutor (...) Era tan seductor que no resistía a sus encantos (...) La historia de mi relación con Serre no es otra cosa que la historia de mis intereses matemáticos, de 1952 a 1970 (...)" [**1983-86**, 3.555-556].

116 La *no separación*, ligada a formas generales de *suavidad*, se convertirá en uno de los puntales de la obra grothendieckiana. En particular, la necesidad de trabajar con *haces no separados* va a ser una de las líneas que llevará *naturalmente* a la emergencia del *topos étale de un esquema*, clave en la resolución de las conjeturas de Weil. Ver nuestros *Capítulos 5, 7, 8* abajo.

xxiii El 11 de Enero de 1955, el *K. U. News Bureau* anuncia la llegada de Grothendieck, "brillante joven matemático francés (...) por un periodo de seis meses como *visiting research associate professor*". Para una descripción precisa del entorno matemático de Kansas a la llegada de Grothendieck, ver ibíd., pp. 11-14.

con cuidado [en el congreso Bourbaki] y convirtió a todo el mundo (aún a Dieudonné ¡quien parece completamente funtorizado!)" [**1955-87**, 17]; (3) un año después, el 19 de Septiembre de 1956, Grothendieck indica que "pasé lo mejor del mes pasado en la redacción de mi *multiplodoco*[117] de álgebra homológica (...) más de 100 páginas (80 ya redactadas) en gran formato" [**1955-87**, 43]; (4) el 13 de Noviembre de 1956, Grothendieck anuncia que va a proponer su artículo al *Tôhoku* de Tannaka, donde "parece que los artículos-río no les desaniman" [**1955-87**, 49]. *Sur quelques points d'algèbre homologique* es recibido finalmente el 1 de Marzo de 1957 en la revista *Tôhoku Mathematical Journal*, y publicado en Japón en ese mismo año[xxiv].

Resumen mínimo.

Sur quelques points d'algèbre homologique se divide en una *Introducción* y cinco *Capítulos*. A continuación presentamos un recorrido esquemático de los contenidos, parte de los cuales desarrollamos luego abajo, en nuestra descripción más extensa.

"*Introducción*" [**1955-56**, 119-122]. "Recibido Marzo 1 1957" – "Lo esencial de los capítulos I, II, IV y una parte del capítulo III ha sido desarrollado en la primavera 1955, en ocasión de un Seminario de Álgebra Homológica en la Universidad de Kansas" [119][118]. "*Contenido del trabajo*": "Este trabajo tiene su origen en un intento de explotar la analogía formal entre la teoría de la cohomología de un espacio con coeficientes en un haz y la teoría

117 El "multiplodoco", broma de Bourbaki, evoca un tratado gigantesco, digno del tamaño de un diplodoco, dinosaurio con extremidades casi iguales.

118 Los números sueltos entre corchetes cuadrados se refieren a la paginación original de [**1955-56**].

xxiv Para una descripción pormenorizada de los diversos eventos intermedios que llevaron a la publicación final del artículo, en particular ciertas dificultades con Eilenberg y con las revistas norteamericanas (*American Journal of Mathematics, Transactions of the AMS*), véase R. Krömer. *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory.* Basel: Birkhäuser, 2007, pp. 120-128.

de los funtores derivados de funtores de módulos, para encontrar un cuadro común que permita englobar estas teorías y otras" [119]. *Cap. I*: (i) estructura: existencia de suficientes inyectivos o proyectivos gracias a "criterios dúctiles" ligados a sumas y productos infinitos; (ii) lenguaje: categorías aditivas y abelianas [119]. *Cap. II*: "formalismo homológico en categorías abelianas", resoluciones, sucesiones espectrales [119]. *Cap. III*: "redesarrollo" de la cohomología a coeficientes en un haz, "suavización" ("assouplissement") con respecto a trabajos de Cartan y Serre ("sin casi hipótesis restrictivas sobre la naturaleza de los espacios"), aplicabilidad a los espacios no separados de la geometría algebraica abstracta o la "geometría aritmética"; "conversaciones preciosas" con Godement y Cartan [119-120]. *Cap. IV*: "pregunta no clásica" de *Ext* de haces de módulos, enlace de *Ext* globales y locales [120]. *Cap. V*: estudio de acciones de grupo adicionales sobre el espacio, el haz de anillos sobre el espacio y un segundo haz de módulos sobre el primer haz; "forma definitiva" de homología tipo Cech, gracias a nuevos funtores de cohomología, implícitos en casos anteriores [120]. "*Aplicaciones*": "por falta de espacio, solo pude dar muy pocas aplicaciones". Otras más: (a) dualidad de Grothendieck, extiende teoremas de Serre (FAC); (b) extensión (a variedades algebraicas completas) de resultados de Serre sobre variedades proyectivas; (c) "intermediación natural" de resultados de Steenrod (potencias reducidas y simétricas) en haces [120]. "*Lagunas*": "silencié las estructuras multiplicativas" de las cuales "no parece haber aún una teoría satisfactoria, con el grado de generalidad y sencillez necesaria" (nota a pie de página: Cartier acaba de encontrar esa "formulación satisfactoria general") [120]. "Expreso mis agradecimientos a los señores Godement, Cartan y Serre, cuyo interés ha sido el estímulo indispensable para la redacción del trabajo" [121]. *Tabla de contenidos* [121-122].

"*Capítulo I. Generalidades sobre las categorías abelianas*" [**1955-56**, 122-139]. "*1.1. Categorías*". Categoría (conjuntos *Hom*), categoría dual, epis y monos (vía conjuntos *Hom*), isos, subobjetos ("sous-trucs"), objetos cociente ("trucs quotient"), (representación de) productos directos (escogencia vía símbolo de Hilbert), categorías con productos y con productos infinitos, (representación de) sumas directas (escogencia vía símbolo de Hilbert) [122-124]. "*1.2. Funtores*". Funtores covariantes y contravariantes, morfismos funtoriales (= transformaciones naturales), equivalencia de categorías (en realidad, define una adjunción [observación posterior de Marquis], que luego se subespecializa en equivalencia), distinción de equivalencia e isomorfismo [124-125]. "*1.3. Categorías aditivas*". Categoría aditiva (los *Hom* son grupos abelianos, existen sumas y productos finitos, existe un cero), núcleo, conúcleo, imagen [126]. "*1.4. Categorías abelianas*". Categoría aditiva con axiomas suplementarios AB1 (existencia de núcleo y conúcleo para todo morfismo), AB2 ($Coim(u) \to Im(u)$ es iso para todo morfismo u); ejemplos de categorías aditivas no abelianas (módulos topológicos separados, grupos abelianos filtrados, espacios fibrados holomorfos sobre superficies de Riemann); retículos de subobjetos y objetos cociente; sucesiones exactas y funtores exactos [127-128]. "*1.5. Sumas y productos infinitos*". Axiomas adicionales "en orden de fuerza creciente": AB3 (existencia de sumas directas arbitrarias), AB4 (AB3 + suma arbitraria de monos es mono), AB5 (AB3 + ley de distribución locálica para subobjetos), AB6 (AB3 + extensión arbitraria de distribución AB5, "no se usará en el trabajo"); ejemplos de categorías abelianas que distinguen los axiomas infinitarios (grupos abelianos, grupos topológicos abelianos compactos, haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico); "axiomas sobre todo útiles para el estudio de límites inductivos y proyectivos" [128-130]. "*1.6. Categorías de diagramas y propiedades de permanencia*". Esquemas (S), diagramas en una categoría ($\mathcal{C}$), categoría de diagramas ($\mathcal{C}(\mathcal{S})$), diagramas conmutativos (Σ), categoría de diagramas conmutativos ($\mathcal{C}(\Sigma)$); propiedades de permanencia: $\mathcal{C}$ aditiva, con productos o sumas infinitas, que satisface ABj $1 \leq j \leq 6$, implica lo mismo para $\mathcal{C}(\Sigma)$; extensiones canónicas de funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}(\Sigma)$ [130-131]. "*1.7. Ejemplos de categorías definidas por esquemas de diagramas*".

Categoría trivial, categoría producto, categoría de funtores, categoría de complejos (homológicos), categoría de acciones de grupo, categoría de representaciones de un anillo unitario, sistemas inductivos y proyectivos, prehaces [131-133]. "*1.8. Límites inductivos y proyectivos*". Definición de límites inductivos (escogencia canónica vía símbolo de Hilbert), existencia de límites inductivos en categorías abelianas con AB3, funtorialidad exacta de la construcción asumiendo además AB5 [133-134]. "*1.9. Generadores y cogeneradores*". Familia de generadores, generador, ejemplos (en módulos, haces, haces de haces), sistema de generadores provenientes de un esquema, existencia de generador implica existencia de cogenerador en categorías abelianas con AB5 (ejemplo, toro como cogenerador de categoría de módulos) [134-135]. "*1.10. Objetos inyectivos y proyectivos*". Definición de objeto inyectivo (vía exactitud del funtor representable); teorema principal: existencia de suficientes inyectivos en categorías abelianas con AB5 y con un generador; prueba vía buena potenciación (deducida del generador), Lema de Zorn, propiedades del maximal y recurrencia transfinita; caso de interés "no visible a ojo limpio": categorías de diagramas [135-137]. "*1.11. Categorías cociente*". "Las consideraciones sistematizan y suavizan el «lenguaje módulo C» de Serre"; subcategorías completas ("complètes") y espesas ("épaisses"); categorías cociente e interés de propiedades de reflexión [137-139].

"*Capítulo II. Álgebra homológica en las categorías abelianas*" [**1955-56**, 139-153]. "*2.1. ∂-funtores y ∂^*-funtores*". ∂-funtores (y duales ∂^*) (entre una categoría abeliana y una aditiva, formalización de la noción de borde); funtores cohomológicos como ∂-funtores exactos de grado infinito (y duales homológicos) (entre dos categorías abelianas) [139-140]. "*2.2. ∂-funtores universales*". ∂-funtores universales (proyectores de la cohomología, arquetipos) y funtores satelitales (tipos medios); caracterización de los universales como borrables ("effaçables") ligados a resoluciones inyectivas; existencia de satelitales en categorías abelianas con condiciones de finitud (ejemplo: categoría abeliana de grupos algebraicos completos sobre característica 0), y, ortogonalmente, en categorías abelianas con sumas infinitas, buena potenciación y AB5 [140-143]. "*2.3. Funtores derivados*". Funtores derivados, subobjetos de un inyectivo y resoluciones inyectivas (extensión de Cartan-Eilenberg a categorías abelianas); construcción universal de funtores cohomológicos a partir de propiedades de inyectividad y exactitud; obstrucción en el caso de proyectivos (categoría abeliana con suficientes inyectivos y no suficientes proyectivos: haces de módulos sobre un haz de anillos dado sobre un espacio topológico) [143-144]. "*2.4. Sucesiones espectrales y funtores espectrales*". "Despejar los casos generales más útiles" detrás del Cartan-Eilenberg; categoría de objetos filtrados como ejemplo de categoría aditiva no abeliana; familia graduada asociada a un objeto filtrado, sucesión espectral, funtor espectral, sucesión espectral cohomológica, caso de la cohomología de un complejo; funtores espectrales derivados; relaciones diversas entre funtores derivados; construcción de funtores espectrales cohomológicos con derivados finales dados, a partir de propiedades de inyectividad y exactitud [144-148]. "*2.5. Funtores resolventes*". Funtores resolventes y reconstrucciones cohomológicas vía resoluciones inyectivas; resolución de la identidad; funtor representable resolvente asociado a una resolución proyectiva; cálculo de sucesiones espectrales mediante funtores resolventes (mediaciones y diagramas generales) [149-153].

"*Capítulo III. Cohomología a coeficientes en un haz*" [**1955-56**, 153-182]. "*3.1. Generalidades sobre los haces*". Prehaces y haces a partir de abiertos; prehaces y haces de grupos, o a valores en una categoría arbitraria; categoría aditiva de prehaces o haces a valores en una categoría aditiva; categoría abeliana de prehaces o haces de grupos abelianos; funtor de hacificación; relaciones entre espacios fibrados ("espaces étalés") y (pre)haces; caracterización de haces: un prehaz es haz si y sólo si el homomorfismo natural entre el prehaz y su espacio fibrado natural es isomorfismo (se obtiene entonces una equivalencia entre la categoría de espacios fibrados y la categoría de haces); espacios fibrados de grupos: las leyes de grupo en cada fibra satisfacen una ley de continuidad natural; haz de haz de módulos (sobre un haz original O de anillos unitarios); la categoría $\mathcal{C}^{\mathcal{O}}$ de esos haces de haces es aditiva, abeliana, satisface AB5 y AB3*, y admite un generador; $\mathcal{C}^{\mathcal{O}}$ posee suficientes inyectivos (prueba nueva según Grothendieck, prueba clásica según Godement) [153-156]. "*3.2. Definición de los $H_p(X, F)$*". Se trata de los funtores derivados (= satelitales) asociados a un haz F de grupos abelianos sobre un espacio topológico X; resultan ser funtores cohomológicos; cálculo eventual vía anulaciones de los $H_p(X, F)$ para $p > 0$ (condiciones de "aciclicidad"); imagen inversa de haces; cohomología natural asociada a la imagen inversa [156-158]. "*3.3. Criterios de aciclicidad*". "Desarrollos debidos a Godement"; condiciones de exactitud y cubrimiento para tener una clase de objetos inyectivos; validación de esas condiciones para clases de haces fofos ("flasques") y blandos ("mous"), y consecuencias de aciclicidad; resoluciones de la identidad (Godement, Cartan); "un ejemplo divertido": aciclicidad obtenida para un haz constante de grupos abelianos sobre un espacio irreducible [158-160]. "*3.4. Aplicaciones a cuestiones de relevo del grupo estructural*". Enlace con trabajos de Serre en geometría algebraica y trabajos de Chevalley en variedades algebraicas (por venir: esquemas); combinación de geometría, aritmética, álgebra, variable compleja (por venir: Riemann-Roch generalizado); construcción de un cobordismo funtorial entre los grupos de cohomología de haces; comparación del estudio de $H_1(X, F)$ vía cohomología de Cech y vía el "tratamiento axiomático de este trabajo"; ejemplos con variedades holomorfas y fibrados holomorfos [160-166]. "*3.5. La sucesión exacta relativa a un subespacio cerrado*". Caracterización de las cohomologías a coeficientes en funtores restringidos a cerrados y abiertos [166-167]. "*3.6. Sobre la dimensión cohomológica de ciertos espacios*". Control estructural (vía AB4 y límites inductivos) de los funtores cohomológicos definidos sobre categorías de haces de grupos abelianos (prueba utiliza aproximaciones finitarias); control estructural (vía AB5 y generadores) de los funtores derivados definidos sobre categorías abelianas (prueba utiliza aproximaciones inyectivas); permutación de funtores cohomológicos y límites inductivos bajo condiciones adecuadas de finitud (compacidad local, espacio de Zariski = sucesión decreciente de cerrados es estacionaria); dimensión combinatoria acotada implica dimensión cohomológica acotada para haces abelianos sobre espacios de Zariski ("el tema generaliza un teorema anterior de Serre") [167-171]. "*3.7. La sucesión espectral de Leray de una aplicación continua*". Imagen directa de un haz; propiedades del funtor imagen (ecuación universal, exactitud, preservación de inyectivos, etc.); construcción natural del funtor cohomológico (sobre haces abelianos) asociado a una aplicación (imagen) continua [171-174]. "*3.8. Comparación con la cohomología de Cech*". Grupos de cohomología de Cech; obstrucción: no forman en general un funtor cohomológico sobre haces de grupos abelianos (ejemplo delicado de Grothendieck); tránsito: bajo condiciones adicionales (paracompacidad, siguiendo a Cartan) la sucesión espectral asegura isomorfismos entre las dos cohomologías (vía funtores derivados o vía Cech) [174-179]. "*3.9. Criterios de aciclicidad por el método de recubrimientos*". Recubrimientos de un espacio y enlace entre grupos de cohomología locales y globales; aplicaciones a variedades de Stein (Cartan) y matrices holomorfas [179-181]. "*3.10. Pasos al límite en cohomología de haces*". Con condiciones adecuadas (suficientes inyectivos, AB5), los límites inductivos permiten reconstruir los morfismos coborde; aplicación en el caso de grupos topológicos metrizables completos [181-182].

"*Capítulo IV*. Los *Ext* de haces de módulos" [**1955-56**, 185-195]. "*4.1. Los funtores Hom*". Funtores *Hom* locales (sobre vecindades) y puntuales (sobre puntos) y pasajes entre ellos mediante consideraciones de tipo finito (coherencia) [185-187]. "*4.2. Los funtores Ext y la sucesión espectral fundamental*". Reconstrucción como funtores derivados y como prehaz abeliano, dicotomía local/global, enlace mediante funtores representables y condiciones de coherencia, aplicaciones a sucesiones espectrales y resoluciones canónicas [187-190]. "*4.3. Caso de un haz de anillos constante*". Condiciones de exactitud (envío de inyectivos en inyectivos), existencia de funtores canónicos (cohomología espectral), resoluciones abelianas [191-193]. "*4.4. Caso de haces con un grupo de operadores*". Aplicación de los resultados del capítulo al caso de la categoría de acciones de grupo sobre haces [193-195].

"*Capítulo V. Estudio cohomológico de los espacios con operadores*" [**1955-56**, 195-220]. "*5.1. Generalidades sobre los G-haces*". Categorías (aditivas) de G-haces de grupos, anillos, G-haces abelianos, etc. Categoría abeliana de $G - O$-módulos (sobre un G-haz de anillos O) satisface AB5, AB3* y posee un generador. Imágenes inversas y directas de G-haces. Ejemplos en el caso de variedades diferenciables u holomorfas (preludio intuitivo al Riemann-Roch generalizado, por venir) [195-199]. "*5.2. Los funtores $H_n(X, G, A)$ y las sucesiones espectrales fundamentales*". "Funtores cohomológicos universales" (formados por grupos abelianos o haces), aplicaciones a construcción de sucesiones espectrales y resoluciones canónicas, casos particulares de aciclicidad. Ejemplo en el caso de un grupo de Galois de un recubrimiento y "mismos resultados en el caso de las variedades aritméticas" (intuición de los esquemas, por venir) [199-203]. "*5.3. Caso de un grupo discontinuo de homeomorfismos*". Aplicaciones de resultados anteriores a condiciones sobre estabilizadores y (ausencia de) puntos fijos [203-205]. "*5.4. Transformación de la primera sucesión espectral*". Cálculos de sucesiones espectrales y aplicaciones diversas a grupos finitos [205-207]. "*5.5. Cálculo de los $H_n(X, G, A)$ mediante recubrimientos*". Teoremas de representación locales y globales, enlaces vía condiciones topológicas (paracompacidad, separación, etc.) [207-213]. "*5.6. Los $Ext_n(X, A, B)$*". Fórmulas de enlace entre funtor de secciones y funtores representables en el caso de $G - O$-módulos; conexiones entre inyectivos, aciclicidad; construcción de sucesiones espectrales y resoluciones; isomorfismos entre funtores *Ext* y funtores derivados [213-219]. "*5.7. Introducción de las familias Φ*". Fórmulas funtoriales extendidas, y aplicaciones a casos de grupos finitos o acciones triviales [219-220]. *Bibliografía* [221]: Atiyah, Borel, Buchsbaum, Cartan, Cartier, Chevalley, Eilenberg, Godement, Grothendieck, Hochschild, Mac Lane, Serre, Shapiro, Weil.

Descripción más extensa.

El “resumen mínimo” anterior ha sido particularmente detallado, ya que el *Tôhoku* [**1955-56**] merece considerarse sin duda como uno de los artículos centrales –manantial y faro– del siglo XX[xxv]. En realidad, al tratarse de un texto tan citado como poco leído, pueden servir las precisiones excesivas del apartado anterior, que ayudan a orientar una lectura meticulosa del trabajo. Dado el detalle de lo que acabamos de presentar, solo nos concentraremos ahora en el *Capítulo 1* del *Tôhoku* y en algunos de sus otros aportes fundamentales (funtores derivados, ejemplos con haces).

El *Capítulo 1* puede entenderse, aún hoy en día, 60 años después, como una introducción profunda y fascinante a la teoría de categorías. Una categoría se define mediante los siguientes datos: *(i)* una clase no vacía $\mathcal{C}$ de objetos, *(ii)* para cada par de objetos A, B, un conjunto[119] de morfismos $Hom(A, B)$ (dos a dos disyuntos para determinar dominio y codominio), *(iii)* una operación de composición entre morfismos, asociativa y con identidades [**1955-56**, 122]. Grothendieck recuerda entonces varias definiciones estándar: categoría dual (mismos objetos, inversión de morfismos y composición), monomorfismo[120], epimorfismo (reescritura dual de mono), inverso a izquierda (lo que actualmente llamamos

[119] La clase $\mathcal{C}$ puede ser propia y no ser un conjunto, mientras que los $Hom(A, B)$ deben ser conjuntos. La expansión de esta situación se hará mediante los famosos “universos” de Grothendieck, en la fundamentación de los topos. Ver nuestro *Capítulo 8* abajo.

[120] Dado $u : A \to B$, u es mono ssi $Hom(C, A) \to Hom(C, B) : v \mapsto uv$ es inyectiva (para todo C). Es interesante el ejercicio de definir “mono” vía los conjuntos Hom y la inyectividad conjuntista: esto provee un *salto de naturalidad* de lo conjuntista a lo categórico, que se ha perdido en las definiciones actuales de la monomorfía (vía flechas únicamente, sin referencia a inyectividad en los *Hom*). Se trata también de un *salto de tipología o jerarquía* entre el “en-sí” de un morfismo y el “en-múltiple” de *Hom*.

[xxv] Véanse los siguientes juicios (tomados de Krömer, ibíd., p. 158): Mac Lane (1981): “Los primeros artículos en categorías no tuvieron consecuencias inmediatas, puesto que en ese periodo solo proveyeron un lenguaje. La noción de teoría de categorías como un tema de estudio en sí mismo aparece solo en la tercera fase del movimiento del álgebra abstracta (...) [*i.e.* el periodo 1957-1974] bajo la influencia de Grothendieck”; Barr & Wells (1985): “[El *Tôhoku*] demostró que las categorías podían ser un instrumento para realmente *hacer* matemáticas y de allí en adelante el desarrollo fue rápido”.

"split mono"), inverso a derecha ("split epi"), isomorfismo [**1955-56**, 122], conceptos para los cuales se enuncian las propiedades básicas de permanencia (composición de monos (epis, isos) es mono (epi, iso), compuesta vu mono implica u mono (v epi)) [**1955-56**, 123]. La visión peculiar de Grothendieck aparece en el quinto párrafo del *Capítulo 1*: se introduce un *preorden* entre monos (dados $u : B \to A$, $u' : B' \to A$, $u \leq u'$ ssi $\exists v\ u = u'v$), cuyas clases de equivalencia forman un orden, y, "mediante el símbolo τ de Hilbert que sirve para todo" [**1955-56**, 123], se escogen[121] representantes dentro de esas clases, llamados "sub-vainas" ("sous-trucs") (lo que actualmente llamamos subobjetos). Dualmente, vía epimorfismos, pueden considerarse los "trucos cociente"[122].

El sello de Grothendieck continúa expresándose con la aparición de los *productos infinitos*[123]. De hecho, el *Tôhoku* introduce por vez primera consideraciones (axiomáticas) infinitarias en teoría de categorías. Dada una familia de morfismos $(v_i : A_i \to B_i)$ $(i \in I)$ se obtiene canónicamente un morfismo $\prod_{i\in I} v_i$ entre los productos $\prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$, y Grothendieck observa que si los v_i son monos entonces $\prod_{i\in I} v_i$ es mono , mientras que si los v_i son epis no necesariamente $\prod_{i\in I} v_i$ es epi (contrajemplo realizable en categorías de

[121] En realidad, la escogencia debe hacerse mediante el símbolo ϵ de Hilbert: si A es un predicado, ϵA escoge un *ejemplo* dentro de A, mientras que τA escoge un *contraejemplo* por fuera de A (con esto se reconstruyen los cuantificadores usuales: $\exists x A(x) \leftrightarrow A(\epsilon A)$, $\forall x A(x) \leftrightarrow A(\tau A)$). La confusión entre ϵ y τ proviene de Bourbaki, quien utilizó τ en el sentido de ϵ en sus fundamentos de la teoría de conjuntos. El operador ϵ es una suerte de *arquetipo universal positivo*, que provee uniforme y globalmente ejemplos, mientras que el operador τ es una suerte de *arquetipo universal negativo*, que provee uniforme y globalmente contrajemplos. Es una lástima que la confusión de Bourbaki se propagara en la percepción de Grothendieck, pues la distinción arquetípica entre ϵ y τ le hubiera sin duda fascinado.

[122] De esta manera, una vez más, las nociones generales de inyectividad (subobjetos) y proyectividad (cocientes) aparecen en el corazón mismo de las técnicas grothendieckianas.

[123] El procedimiento es peculiar: se define primero una noción de "representación como producto directo", se define luego el isomorfismo de un par de tales representaciones, y, finalmente, mediante el símbolo τ de Hilbert (que debería ser ϵ, como hemos indicado) se escoge un representante de la clase de representaciones isomorfas, llamado *producto*. El circunloquio a través de las clases de equivalencia y los representantes conforma una visión grothendieckiana típica: definir un objeto *sumergiéndolo* en un todo mucho más amplio que le envuelve. Una categoría $\mathcal{C}$ tiene productos si el producto de dos objetos (y por tanto de una familia finita no vacía) existe siempre en $\mathcal{C}$, y tiene productos infinitos si el producto de una familia arbitraria de objetos existe siempre en $\mathcal{C}$ [**1955-56**, 123-124].

haces[124] [**1955-56**, 124]). Dualmente, se definen las nociones de suma directa (finita o infinita), y con eso concluye el apartado "1.1.Categorías".

El siguiente apartado, "1.2.Funtores", introduce, más allá de las definiciones estándar (funtores covariantes y contravariantes, "morfismo funtorial" (= transformación natural)), otras nuevas perspectivas propias de Grothendieck. La noción de *equivalencia*[125] entre categorías y, en realidad, la idea de *adjunción*[xxvi] aparecen en el *Tôhoku* por vez primera. Inmediatamente después se conforma el marco general donde se inscribirán los resultados principales del artículo: apartado "1.3.Categorías aditivas" [**1955-56**, 126] y apartado "1.4.Categorías abelianas" [**1955-56**, 127-128]. Una *categoría aditiva* es una categoría donde los $Hom(A, B)$ son grupos abelianos con operaciones que se comportan bien con la composición, existen sumas (o, equivalentemente, productos)[126] finitos, y existe un objeto

124 Se trata de la primera referencia a haces en el cuerpo del artículo (habían sido mencionados en la *Introducción*). Es interesante que esa referencia ocurra a nivel de *contraejemplo*: dentro de lo *particular negativo*, en un nivel doblemente opuesto a lo general positivo. Es una instancia más donde la atención fina de Grothendieck trabaja *a la vez* en lo más abstracto y en lo más concreto.

125 Para Grothendieck, una equivalencia entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ es un sistema (F, G, φ, ψ) formado por funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ y $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ y *homomorfismos* funtoriales (= transformaciones naturales) $\varphi : Id_{\mathcal{C}} \to GF$, $\psi : Id_{\mathcal{C}'} \to FG$, tales que ciertas compuestas adecuadas sean canónicamente iguales a la identidad (igualdades que luego se llamarán las ecuaciones de la unidad y counidad) [**1955-56**, 125]. En realidad, como lo ha indicado Marquis, si solo se asume que φ y ψ sean homomorfismos (en vez de isomorfismos) esta definición provee la noción, más general, de *adjunción* entre categorías. Toda equivalencia (donde φ y ψ son iso) es una adjunción, pero la implicación contraria está lejos de ser cierta. Lawvere promulgará la idea de que la matemática está plagada de "adjuntos por doquier" (ligados a una profusión de objetos libres y de conexiones de Galois), mientras que los teoremas de equivalencia entre categorías son menos frecuentes y de alto contenido estructural (como, por ejemplo, vía un teorema de Stone, la equivalencia de la categoría dual de conjuntos y la categoría de las álgebras booleanas completas atómicas).

126 Todo el *Tôhoku* está repleto de consideraciones de *simetría* en la definición de los objetos matemáticos en juego. La *musicalidad* grothendieckiana y la búsqueda de *armonías* va a reflejarse ahora en un ambiente esencialmente algebraico.

xxvi Véanse J.-P. Marquis. *From a Geometrical Point of View. A Study of the History and Philosophy of Category Theory.* New York: Springer, 2009, p. 94, y Krömer, óp.cit., pp. 148-150.

nulo, o cero[XIV] [**1955-56**, 126]. Grothendieck señala que la categoría dual de una categoría aditiva es aditiva, e introduce las nociones de núcleo, conúcleo e imagen de un morfismo[127]. Una *categoría abeliana* es una categoría aditiva con dos axiomas suplementarios: (AB1) Todo morfismo posee núcleo y conúcleo, (AB2) Para todo morfismo u, el homomorfismo canónico $Coim(u) \to Im(u)$ es isomorfismo [**1955-56**, 127]. Combinando lo general y lo particular, Grothendieck observa que, por un lado, en una categoría abeliana, un morfismo mono y epi es necesariamente iso[XV], y, por otro lado, que existen ejemplos matemáticamente relevantes de *categorías aditivas no abelianas*: *(i)* categoría de módulos topológicos separados sobre un anillo topológico, *(ii)* categoría de espacios fibrados holomorfos sobre una variedad holomorfa de dimensión compleja 1 (es decir, sobre una superficie de Riemann)[128] [**1955-56**, 127]. Otra nota general muestra que, en una categoría abeliana, la clase de los subobjetos de A forma un *retículo*[129], donde, para P, Q subobjetos de A, se tiene $sup(P,Q) = Im(P+Q)$ e $inf(P,Q) = Ker(<\pi_P, \pi_Q>: A \to A/P \times A/Q)$.

---

127 Dado $u : A \to B$, $Ker(u)$ se define como el máximo subobjeto ("sous-truc") de A a través del cual se factorizan los morfismos $v : C \to A$ tales que $uv = 0$. Dualmente, se define la noción de conúcleo $Coker(u)$ como cociente ("truc quotient"). La imagen de u se define como $Im(u) = Ker(Coker(u))$ (y dualmente $Coim(u) = Coker(Ker(u))$). La descripción de la imagen equivale, en el caso de las categorías *abelianas*, al mínimo subobjeto de B a través del cual u podría factorizarse (nota a pie de página de Grothendieck). Los núcleos, conúcleos, imágenes y coimágenes no tienen por qué existir en una categoría arbitraria, pero si lo hacen son únicos módulo isomorfismo [**1955-56**, 126].

128 La variable compleja, esencial en la emergencia de los espacios nucleares, aparece también en muchos ejemplos del *Tôhoku*. Aunque Riemann-Roch-Grothendieck [**1955-57**] (ver nuestro *Capítulo 4*) será un *ápice* en el camino, la variable compleja no dejará nunca de proveer multitud de ideas y motivaciones en toda la obra (ver particularmente *Capítulos 6, 10, 12* abajo).

129 No puede dejar de pensarse aquí en el retículo de $\otimes$-normas naturales en el *Résumé* [**1953c**]. Los *arquetipos* de equilibrio simétrico (retículos) en la mente de Grothendieck encarnan *naturalmente* tanto en categorías del análisis funcional, como en categorías del álgebra abstracta.

XIV En la terminología posterior, se trata de un objeto 0 que es, a la vez, *inicial* ($\forall A \exists !\ 0 \to A$) y *final* ($\forall A \exists !\ A \to 0$). La simetría es esencial.

XV En la categoría de conjuntos, esto corresponde a que una función inyectiva y sobreyectiva sea biyectiva. En cambio, en una categoría arbitraria, no tiene por qué suceder que mono + epi implique iso. Por ejemplo, en la categoría de anillos, la inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ no es iso, aunque es mono (obvio) y epi (si $f : \mathbb{Q} \to A$ y $g : \mathbb{Q} \to A$ son tales que $fi = gi$, es decir, si coinciden en $\mathbb{Z}$, entonces el ideal maximal $Ker(f-g)$ no se reduce a $\{0\}$ y tiene que ser entonces $\mathbb{Q}$, pues $\mathbb{Q}$, como campo, posee solo dos ideales maximales; esto fuerza $f = g$). El equilibrio, o la *armonía*, mono + epi = iso se da tanto en las *categorías abelianas*, como en los *topos* ("categorías balanceadas").

El apartado "1.5.Sumas y productos infinitos" [**1955-56**, 128-130] eleva el nivel de exigencias axiomáticas que se habían introducido hasta el momento en teoría de categorías para controlar, interna y estructuralmente, procesos de infinitud. Grothendieck propone tres axiomas, "por orden de fuerza creciente" [**1955-56**, 128]: (AB3) Existencia de sumas directas para toda familia $(A_i)_{i \in I}$; (AB4) AB3 + suma directa de monos es mono[130]; (AB5) AB3 + $(\sum_i A_i) \cap B = \sum_i (A_i \cap B)$ (*)[131] (para subobjetos de A)[132]; (AB6) AB3 + extensión de (*) al caso de *ínfimos infinitarios* ($\bigcap$) [**1955-56**, 128-129]. Dados los balances simétricos en categorías abelianas, se pueden enunciar *axiomas duales* (AB3*)-(AB6*), y Grothendieck pasa a *distinguir* la fuerza de los diversos axiomas mediante fascinantes *ejemplos*: *(i)* la categoría de grupos abelianos (o, más generalmente, la categoría de módulos sobre un anillo unitario) satisface AB6, AB4*, *pero no* AB5* (por lo tanto AB5* no es consecuencia de AB4*, y, dualmente, AB5 tampoco es consecuencia de AB4)[133]; *(ii)* la categoría de haces abelianos (es decir, con fibras grupos abelianos) sobre un espacio topológico dado satisface AB5, AB3*, *pero no* AB4* [**1955-56**, 129]. El apartado concluye indicando que "los axiomas precedentes nos serán sobre todo útiles para el estudio de límites inductivos y proyectivos, que necesitaremos para dar condiciones de existencia manejables para objetos «inyectivos» y «proyectivos»" [**1955-56**, 129-130]. De esta manera, la *problemática arquetípica de la inyectividad y la proyectividad* alcanza una concreta, e inesperada, tipificación axiomática.

---

130 Como señalamos arriba, p. 99, solo se tiene en general que el producto de monos es mono, o, dualmente, que la suma de epis es epi.

131 Las sumas $\sum$ corresponden a los *supremos infinitarios* en el retículo (completo) de los subobjetos.

132 Con la terminología posterior, la clase de los subobjetos de A forma un *local* (o álgebra de Heyting completa). Esta propiedad será también fundamental en la lógica de los topos, ver nuestro *Capítulo 8* abajo. El caso paradigmático de local (Isbell, 1972) es el retículo de abiertos de un espacio topológico. Topología, álgebra y orden se vuelven a conectar así profundamente después de los fuegos artificiales del *Résumé* [**1953c**].

133 La categoría de los grupos abelianos topológicos compactos, categoría dual de los grupos (Pontriagin), satisface AB6*, AB4, pero no AB5 [**1955-56**, 129].

Siguiendo el péndulo grothendieckiano entre lo universal y lo particular, los apartados 1.6 y 1.7 se ocupan de construcciones generales ("categorías de diagramas y propiedades de permanencia" [**1955-56**, 130-131]) y de ejemplos derivados de esas armazones abstractas ("ejemplos de categorías definidas por esquemas de diagramas": categorías de anuladores, productos, morfismos, funtores, complejos homológicos, acciones de grupo, sistemas inductivos y proyectivos [**1955-56**, 131-133]). El apartado 1.8 estudia "límites inductivos y proyectivos" [**1955-56**, 133-134] y provee condiciones suficientes para la construcción funtorial de $\varinjlim(\mathcal{A})$ para sistemas inductivos $\mathcal{A}$ en una categoría abeliana[134].

El apartado "1.9.Generadores y cogeneradores" [**1955-56**, 134-135] introduce otros nuevos conceptos de Grothendieck, que resultarán esenciales tanto en el *Tôhoku*, como en otros desarrollos centrales de la teoría de categorías[XVI]. Dada $\mathcal{C}$ categoría arbitraria, una familia $(U_i)_{i\in I}$ de objetos en $\mathcal{C}$ es una *familia generadora* en $\mathcal{C}$ si para todo $A \in \mathcal{C}$ y todo subobjeto $B \neq A$, esa diferencia puede distinguirse vía morfismos en la familia generadora (es decir, $\exists i \in I, \exists u : U_i \to A$ tal que u no se factoriza vía $U_i \to B$). En particular, un objeto U es *generador* si la familia trivial $\{U\}$ es generadora. Si $\mathcal{C}$ posee una familia generadora, entonces la clase de los subobjetos de $A \in \mathcal{C}$ es un *conjunto* (pues los subobjetos están completamente determinados vía morfismos sobre la familia generadora) [**1955-56**, 134]. Dualmente, se obtienen las nociones de familia cogeneradora y objeto cogenerador. Los *ejemplos* emergen entonces en profusión: *(i)* en la categoría

134 Si la categoría abeliana $\mathcal{C}$ satisface AB3, $\varinjlim(\mathcal{A})$ existe y la construcción es funtorial; si $\mathcal{C}$ satisface además AB5, el funtor es exacto [**1955-56**, 133].

XVI Un tema central en teoría de categorías es la correlación, para un funtor, entre (1) preservar límites y (2) poseer un adjunto izquierdo. Se tiene siempre que (2) implica (1), pero el converso no necesariamente es cierto. Sin embargo, algunas condiciones adicionales en (1) permiten deducir (2). Por ejemplo, en el *teorema especial del funtor adjunto* de Freyd (1964), si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor que preserva límites, y $\mathcal{C}$ es completa (todos los límites existen), es bien potenciada (las clases de subobjetos son conjuntos) y posee un *cogenerador*, entonces F tiene adjunto izquierdo. Que el *equilibrio armónico externo* entre (1) y (2) pueda reducirse, en un caso particular, al *equilibrio armónico interno* de un cogenerador es un resultado que debería haber gustado a Grothendieck (no tenemos constancia, sin embargo, de una lectura posterior de Freyd por Grothendieck).

(abeliana) de módulos sobre un anillo unitario U, U resulta generador; *(ii)* en la categoría de haces abelianos sobre un espacio topológico X, la familia de haces $(Z_U)_{U\subseteq X}$ (con Z_U haz nulo sobre $X - U$ y haz constante de enteros sobre U) es familia generadora; *(iii)* en la categoría de módulos sobre $\mathbb{Z}$, el toro $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es cogenerador; *(iv)* en una categoría abeliana que satisface AB5, la existencia de un generador implica la existencia de un cogenerador [**1955-56**, 134-135].

El apartado "1.10.Objetos inyectivos y proyectivos" [**1955-56**, 135-137] se adentra en las construcciones de fondo del *Tôhoku*, y provee definiciones y teoremas básicos sobre inyectividad y proyectividad en el marco de las categorías abelianas. Un objeto M de una categoría abeliana es inyectivo si para todo subobjeto $B \rightarrowtail A$ y todo morfismo $u : B \to M$ existe una prolongación $\bar{u} : A \to M$ (es decir, $\bar{u} \restriction_B = u$). Uno de los teoremas esenciales del *Tôhoku* expresa entonces la *suficiencia de inyectivos en una categoría abeliana que satisface AB5 y que posee un generador* (es decir, bajos esas condiciones, para todo A existe M inyectivo tal que $A \rightarrowtail M$) [**1955-56**, 135, Teorema 1.10.1]. La prueba del teorema [**1955-56**, 136-137] es una joya más dentro de la fabulosa habilidad técnica del joven[135] matemático[xxvii]. Grothendieck observa que la construcción es *funtorial* (existe funtor $M : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$: $A \mapsto M(A)$ con $M(A)$ inyectivo, y existe $f : Id \to M$ transformación

135 A la sazón, en 1955, Grothendieck tiene solo 27 años (!), y ya se ha convertido, con su *Tesis* [**1949-53**], en el mayor conocedor mundial de los espacios vectoriales topológicos, y, con el *Résumé* [**1953c**], en el inventor de la teoría fina de los espacios de Banach. Por si fuera poco, aún más asombrosamente, se encuentra a pocos meses de convertirse en el mayor innovador del momento en teoría de categorías y en el explorador supremo de sus conexiones profundas con la geometría algebraica. El *volcán* sigue en plena erupción.

xxvii Al decir de Dieudonné, Grothendieck "había creado en menos de tres años [entre 1949 y 1952] una obra cuyo impacto en la teoría de los espacios vectoriales topológicos solo puede ser comparable, en mi concepto, con los trabajos de Banach", J. Dieudonné. "De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique". En: *The Grothendieck Festschrift.* Vol. 1. Basel: Birkhäuser, 1990, págs. 1-14, p. 2. Se trata de la presentación, elaborada por Dieudonné, de la obra de Grothendieck para la Medalla Fields, Moscú 1966, que Grothendieck no quiso recibir en mano propia.

natural tal que $f_A : A \rightarrowtail M(A)$ es mono) y esboza[xxviii] los puntos principales de la prueba: *(i)* lema que caracteriza los objetos inyectivos en categorías abelianas con generador y AB5 (M es inyectivo ssi para todo subobjeto V del generador U y todo morfismo $v : V \to M$, v se prolonga en un morfismo $\bar{v} : U \to M$)[136] [**1955-56**, 136]; *(ii)* dado $A \in \mathcal{C}$, construcción de $M(A)$ como límite de un sistema inductivo de objetos inyectivos[137], límite que satisface la caracterización anterior de inyectividad [**1955-56**, 136-137]. De esta manera, el que puede ser tal vez el primer teorema profundo de la *teoría de categorías* (mecanismo de relojería donde se combinan propiedades de exactitud, axiomas infinitarios, subobjetos, generadores, límites)[138] reposa enteramente sobre algunos resultados cruciales de la *teoría*

---

[136] Esto significa que M es inyectivo cuando la propiedad general (global) de extensión para subobjetos arbitrarios se deduce de la propiedad particular (local) de extensión para subobjetos del generador. Para probar esto, dados un subobjeto arbitrario $B \rightarrowtail A$ y un morfismo $u : B \to M$, Grothendieck construye la extensión deseada $\bar{u} : A \to M$ considerando el conjunto (no vacío) $P = \{\bar{u} : C \to M,\ C \supseteq B,\ C$ subobjeto de A$\}$ (es *conjunto* pues la categoría posee generador), y ordenándolo ($\leq$) mediante la relación de extensión. Por AB5, $(P, \leq)$ resulta ser inductivo, y, por el *Lema de Zorn*, posee un elemento maximal $\bar{u} : B \to M$. Entonces $B = A$ pues, sino, por argumentos de descomposición relacionados con el generador y por la propiedad de extensión para subobjetos del generador, se podría extender $\bar{u}$, contradiciendo su maximalidad.

[137] El sistema inductivo es definido por *recursión transfinita*, la inyectividad de los objetos en juego (vía conúcleos y morfismos en productos) resulta de AB4, y el límite se obtiene por *estabilización en un ordinal alto* que supere la potencia del conjunto de los subobjetos de U.

[138] El *nivel axiomático* usado (AB4, AB5, generador) es enteramente original, así como el marco general de las categorías abelianas en donde se insertan los argumentos. Esto puede verse como un ejemplo más del *estilo* de Grothendieck: ampliar un argumento especial y particular (módulos) a un entorno genérico y universal (categorías abelianas) donde todo *fluye* con enorme suavidad. El mismo Grothendieck observa que, aunque en muchos casos "la existencia de un monomorfismo de A en un objeto inyectivo puede verse directamente de manera más sencilla, el teorema 1 tiene la ventaja de aplicarse a casos muy diferentes", como a ciertas categorías de diagramas "donde la existencia de suficientes objetos inyectivos no es siempre visible a ojo limpio [*oeil nu*]" [**1955-56**, 137]. El "ver más allá", el acercarse

[xxviii] Grothendieck afirma que la "demostración es esencialmente conocida" [**1955-56**, 136], aunque la afirmación es enteramente debatible. Puede ser que haya oído, en el *folclor* de la época, acerca de la existencia de una prueba similar para módulos (Baer, 1940), retomada homológicamente en parte por Cartan-Eilenberg (1956), pero es dudoso que Grothendieck haya tenido acceso a esas fuentes. Para una amplia discusión sobre el comentario "esencialmente conocida", véase Krömer, óp.cit., pp. 138-139.

de conjuntos (Lema de Zorn, recursión transfinita): el "multiplodoco" Grothendieck agarra por el momento todo a su alrededor, sin ningún tipo de prejuicio, ni partido tomado, sobre los fundamentos[139].

El asombroso *Capítulo 1* del *Tôhoku* termina con el apartado "1.11.Categorías cociente" [**1955-56**, 137-139], donde Grothendieck pone las bases técnicas de lo que será su visión general de la *matemática relativa*, con consideraciones que "sistematizan y suavizan [*assouplissent*] el «lenguaje módulo C» de Serre" [**1955-56**, 137]. Ante todo, aparece la noción general de *subcategoría*, que se especializa, en el caso de categorías abelianas, mediante adecuadas clausuras con respecto a núcleos y conúcleos (subcategoría "completa") o con respecto a términos medios en sucesiones exactas (subcategoría "espesa") [**1955-56**, 138]. Grothendieck define entonces la categoría cociente $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ (con $\mathcal{C}'$ subcategoría espesa[140]), donde la noción de "morfismo mod. $\mathcal{C}'$" codifica un morfismo entre subobjetos y cocientes en $\mathcal{C}$, módulo equivalencias naturales [**1955-56**, 138]. El resultado provee una categoría abeliana con buenas propiedades, lo que "permite aplicar el lenguaje «módulo C» con toda seguridad, ya que el lenguaje significa sencillamente que uno se sitúa en la categoría abeliana cociente" [**1955-56**, 139]. De esta manera, las ideas *arquetípicas* de transformación y estabilización, de variación e invarianza, adquieren una nueva expresión técnica, esencial para el desarrollo posterior de los programas grothendieckianos.

---

a lo invisible, el extender las fronteras de lo visible (tema básico en Florenski y Merleau-Ponty), es un proceder *vital* para Grothendieck.

139 Una reconstrucción no conjuntista del pensamiento matemático se debe más bien a Lawvere (1963). Aunque Grothendieck, con sus *topos* y *universos* (ver nuestro *Capítulo 8* abajo), indicará también ciertos lineamientos para independizarse de la teoría de conjuntos, la obra grothendieckiana no está tan orientada a una coherencia en "fundamentos bajos" (substitución de elementos a la von Neumann por adecuadas construcciones categóricas), como hacia una coherencia en "fundamentos altos" (*stacks* y *dérivateurs*, ver nuestros *Capítulos 11, 13* abajo).

140 La definición está dispuesta para aplicaciones al caso de categorías abelianas, pero la construcción general ("categorías coma") valdrá para categorías arbitrarias, permitiendo una *relativización* amplia, donde los movimientos en las *bases* ($\mathcal{C}'$) se reflejarán en variaciones e invarianzas en las categorías desplegadas ($\mathcal{C}$). Véase la emergencia de los *esquemas* relativos en nuestro *Capítulo 5* abajo.

Más allá de la apertura de nuevos caminos para la teoría de categorías, realizada en las 17 densas páginas del *Capítulo 1*, el objetivo central del *Tôhoku* consiste, como escribía Grothendieck en la *Introducción*, en "explotar la analogía formal entre la teoría de cohomología de un espacio con coeficientes en un haz y la teoría de los funtores derivados de funtores de módulos, para encontrar un cuadro común que permita englobar estas teorías y otras" [**1955-56**, 119]. El cuadro común es el entorno de las *categorías abelianas* con axiomas adicionales (AB3-AB6), donde la suficiencia de inyectivos permite *iterar* la construcción $A \rightarrowtail M(A) \rightarrowtail M(M(A)) \cdots$ (originada en una situación similar en la categoría de *módulos*) y compararla *formalmente* con las sucesiones exactas largas de homología[XVII] $\cdots H_2(X) \to H(X) \to X$[XVIII]. Si F es un funtor entre categorías abelianas, Grothendieck define el i-ésimo *funtor derivado* a derecha R^iF mediante $R^iF(A) = H_i(F(C))$ donde C es una resolución inyectiva de A, es decir, una sucesión exacta larga $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \cdots$ (obtenible, por ejemplo, mediante la suficiencia de inyectivos) [**1955-56**, 143]. Por lo tanto, en el marco de las categorías abelianas (con los

XVII En su *Analysis situs* (1895), Poincaré inventa a la vez la *homología* y la *homotopía* como herramientas *algebraicas* para tratar de caracterizar (o, al menos, distinguir) un espacio *topológico* dado. La homología cubre el espacio X mediante triangulaciones (o, más generalmente, objetos simpliciales n-dimensionales) y sus yuxtaposiciones proveen una operación de grupo $H(X)$ (o, más generalmente, grupos asociados $H_n(X)$) en conjuntos canónicos de clases de equivalencia. De esta manera, la homología mide *linealmente* ciertos recubrimientos del espacio. Si X es la esfera de Riemann S^1, $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$, mientras que si X es el toro $T = S^1 \times S^1$, $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, por lo tanto los grupos de homología *distinguen* la esfera y el toro. Por su parte, la homotopía cubre el espacio X mediante curvas cerradas (o, más generalmente, caminos n-dimensionales) y sus pegamientos proveen una operación de grupo $\pi(X)$ (o, más generalmente, grupos asociados $\pi_n(X)$) en otros conjuntos canónicos de clases de equivalencia. La homotopía mide entonces *continuamente* otros recubrimientos del espacio. Similarmente a la homología, se tiene que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, por lo tanto los grupos de homotopía también *distinguen* la esfera y el toro. Los grupos de homología altos tienden a ser triviales (por ejemplo, $H_i(S^n) = 0$ si $i > n$ pues no existen entonces i-símplices dentro de S^n), mientras que los grupos de homotopía altos pueden ser muy delicados (por ejemplo, el cálculo de los $\pi_i(S^n)$ con $i \geq n$ le valió la Medalla Fields (1954) a Serre). Yendo más allá, surge la pregunta central (Poincaré) de qué tanto la homología o la homotopía *caracterizan* al espacio. Después de un error muy fructuoso, Poincaré se dio cuenta de que la homología *no* conseguía caracterizar al espacio (construcción de la esfera de Poincaré (1904), no isomorfa a la esfera $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, pero con mismos grupos de homología), y propuso su famosa *conjetura de Poincaré*: el grupo de homotopía sí consigue caracterizar S^3 (y, más generalmente, la homotopía consigue caracterizar $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$). Muchos grandes matemáticos del siglo XX trabajaron en resoluciones parciales de la conjetura (Smale 1960, caso $n \geq 5$; Freedman 1982, caso $n = 4$; Perelman 2002, caso $n = 3$), todos ellos recompensados con Medallas Fields. Es interesante notar que la dificultad crece al *decrecer* la dimensión: con más dimensiones, y en mayor generalidad, hay una mayor cantidad de movimientos posibles, mientras que en dimensiones más bajas, y en mayor particularidad, la restricción de los movimientos hace más difícil la prueba. Esto se enlaza bien con la idea de que en la abstracción (a la Grothendieck) se obtienen mejores *tránsitos*, mientras que en lo particular las *obstrucciones* pueden llegar a ser formidables.

XVIII La *cohomología* reversa las flechas y así la sucesión exacta larga de cohomología se dispone en el mismo orden de las iteraciones de inyectivos.

axiomas adicionales que aseguran la suficiencia de inyectivos), la cohomología se desprende de una *teoría general de funtores derivados*[141]. En efecto, el teorema principal del *Capítulo 2* [**1955-56**, Teorema 2.4.1, 148] asegura la construcción de funtores espectrales[XIX] cohomológicos, con derivados finales dados, a partir de propiedades de inyectividad y exactitud.

La *cohomología de haces* inventada por Leray se extiende así al ámbito del álgebra homológica en categorías abelianas, según las propuestas de Grothendieck. En el *Capítulo 3*, el apartado *"3.1.Generalidades sobre los haces"* provee la definición de *prehaz* sobre un espacio topológico[142], así como la subsiguiente definición de *haz* (existencia única de extensiones para recubrimientos coherentes) [**1955-56**, 153]. Las categorías de prehaces a valores en una categoría aditiva (resp. abeliana) forman una categoría aditiva (resp. abeliana), y lo mismo sucede con las categorías de haces [**1955-56**, 154]. Grothendieck compara sus definiciones de haz y prehaz con las presentaciones de Cartan y Godement, muestra que la categoría de haces de conjuntos sobre X es *equivalente* a la categoría de espacios *étalés* sobre X, y que todo prehaz da lugar, de manera natural, al haz *canónico* asociado de las secciones continuas sobre X [**1955-56**, 154]. Los *ejemplos de categorías de haces* recorren todo el *Tôhoku*: *(i)* categoría de haces abelianos (categoría abeliana que satisface AB5, AB3*, no AB4*) [**1955-56**, 129]; *(ii)* categoría de haces de módulos

141 Las consecuencias de este estado de cosas tendrán ramificaciones profundas en el ámbito de las *categorías derivadas* (*SGA* [**1960-69**], Tesis de Verdier, ver nuestro *Capítulo 8* abajo) y en el ámbito aún más ambicioso de los *derivadores* ([**1991**], ver nuestro *Capítulo 13* abajo).

142 Se trata de la *primera definición general* en ese sentido, yendo más allá de la escuela de Cartan: dado X espacio topológico, un *prehaz* sobre X está dado por una familia $(F(U))_{U \text{abierto} \subseteq X}$ con "aplicaciones de restricción" $\varphi_{UV} : F(U) \to F(V)$, $U \supseteq V$, tales que $\varphi_{UU} = id_{F(U)}$ y $\varphi_{WV}\varphi_{VU} = \varphi_{WU}$, si $U \supseteq V \supset W$ [**1955-56**, 153]. En términos posteriores, se trata sencillamente de un funtor $F : Ab(X) \to Con$, donde $Ab(X)$ es la categoría asociada al orden inverso de los abiertos en X.

XIX En el campo de oficiales *Oflag XVII-A*, durante la segunda guerra mundial, Jean Leray inventa (o descubre, véase *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo) la noción de haz (ver *Nota VI*, p. 33 arriba). Luego, ya en el *Collège de France*, introduce sus *sucesiones espectrales* (1946) para desarrollar cálculos específicos acerca de las *secciones globales* en un haz.

sobre un haz de anillos[143] (categoría abeliana con suficientes inyectivos, pero no suficientes proyectivos [**1955-56**, 144], categoría abeliana que satisface AB5, AB3* y posee un generador [**1955-56**, 155]); *(iii)* categoría de acciones de grupo[XX] sobre haces (con ciertas especificaciones, también categoría abeliana con AB5, AB3* y generador [**1955-56**, 196]), etc.[144] De esta manera, la noción de *haz* vertebra todo el *Tôhoku*, tanto desde las perspectivas estructurales generales que permiten abstraer la cohomología de haces al entorno de categorías abelianas y funtores derivados, como desde los ejemplos concretos que impulsan la envolvente abstracta y que sirven de sostén contrastativo para los diferentes estratos[145] axiomáticos y demostrativos del trabajo.

---

143 Dado un haz de anillos sobre un espacio topológico X (es decir, donde las fibras son anillos, y donde denotamos el espacio total de esas fibras por $\mathcal{O}_X$), se puede tomar luego $\mathcal{O}_X$ como base para un nuevo haz, cuyas fibras son módulos sobre cada $R \in \mathcal{O}_X$. El objeto resultante (con las topologías iniciales del caso) es un *haz de módulos sobre un haz de anillos*. Si, además, existen buenas propiedades de tipo finito en las transiciones verticales (módulos de tipo finito) y en las transiciones horizontales (núcleos homomórficos de tipo finito), se tiene la noción de *haz coherente* (Serre, FAC 1955). El artículo J.-P. Serre. "Faisceaux algébriques cohérents". En: *The Annals of Mathematics* 61.2 (1955), págs. 197-278, parece haber tenido una influencia importante en Grothendieck. Un ejemplo esencial de haz coherente es el haz de gérmenes de funciones holomorfas (con lo que, una vez más, todo se conecta alrededor de la variable compleja).

144 "Ejemplo divertido" de un haz constante de grupos abelianos sobre un espacio irreducible [**1955-56**, 160], ejemplo de haces abelianos sobre espacios de Zariski [**1955-56**, 170], etc.

145 La *estratigrafía* grothendieckiana recuerda modos similares de entendimiento en Valéry, Florenski, Warburg, Benjamin, Auerbach o Ingarden. En la *Parte IV* abajo exploraremos algunas de esas conexiones con la crítica de arte y con la crítica literaria.

XX Dado un *monoide* M, una *acción* de M sobre un conjunto X es una aplicación $M \times X \xrightarrow{\cdot} X$ tal que $e \cdot x = x$, para e neutro del monoide, $x \in X$, y $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, para $g, h \in M$. Mediante una acción, un monoide divide un conjunto en clases de equivalencia (las órbitas de la acción), y permite realizar conteos importantes en la descomposición de los objetos en juego. Por ejemplo, en el caso en que M sea un grupo G, la acción por conjugación de G sobre sí mismo lleva a la ecuación de clase del grupo, base para los teoremas de Sylow. La categoría Con^M de acciones de un monoide es un *topos elemental* (Lawvere 1970, extensión de la noción de topos de Grothendieck), y el comportamiento de su lógica interna caracteriza el hecho de que M sea grupo (es decir, la lógica de Con^M es *clásica* ssi M es grupo).

3.2 Síntesis conceptual

Desde el inicio mismo del *Tôhoku* [**1955-56**], las formas dinámicas de la creatividad aparecen en el texto de Grothendieck, quien procede a *inventar* el lenguaje (categorías aditivas y abelianas) y a *descubrir* la riqueza de las estructuras matemáticas (haces, objetos inyectivos vía productos y sumas infinitas, acciones de grupo) que explican la "analogía formal" inicial. En particular, las acciones de los grupos en juego se *estratifican* en una precisa jerarquía de niveles –acción sobre un espacio topológico (primero) X, acción sobre un haz (segundo) O de anillos sobre X, acción sobre un haz (tercero) de módulos sobre el haz de anillos O– concretando así una de las formas típicas del proceder grothendieckiano. La estrategia da lugar a las diversas partes del artículo: (I) categorías abelianas (*lenguaje*); (II) álgebra homológica en categorías abelianas y (III) cohomología con coeficientes en un haz (*estructuras*); (IV) cálculos de *Ext* para haces de módulos y (V) cohomologías con espacios de operadores (*transferencias y acciones*). Los niveles de (1) lenguaje, (2) estructuras y (3) acciones corresponden al procedimiento ternario de entendimiento de los signos según Peirce: (1) primeridad/sintaxis, (2) segundidad/semántica, (3) terceridad/pragmática[146].

La *inventividad técnica* del *Tôhoku* posee a su vez múltiples niveles de complejidad matemática: *(i)* la primera elaboración, *ex nihilo*, de un ambiente categórico axiomático general (categorías abelianas con axiomas adicionales) donde se pueden *realizar*[xxix] matemáticas sofisticadas (cohomologías, cobordismos, cálculos de sucesiones espectrales, etc.)[147];

[146] Ver nuestras *Notas 103, 106, 108* arriba, pp. 79, 82, 83.

[147] Muchos de los aportes mayores de Grothendieck consistirán en la construcción de *otros ambientes categóricos axiomáticos generales* (esquemas, topos, n-categorías, torre categórica de Teichmüller, derivadores, etc.), donde se pueden insertar (y resolver) *temas profundos* de la matemática (control de variedades, conjeturas de Weil, fibraciones y *stacks*, espacios *moduli* de Riemann, homotopía, etc.). Véanse, respectivamente, nuestros *Capítulos 7, 8, 11, 12, 13* abajo.

[xxix] Véase el apunte de Barr & Wells, *Nota xxv* arriba, p. 98.

(ii) la elevación y prueba axiomática (vía AB5 + generador) de la suficiencia de inyectivos en un entorno general que permite *reconstruir* la cohomología como caso particular de una técnica aún más *plástica, suave, flexible* (funtores derivados); *(iii)* el uso de una *multiplicidad de funtores* (representables, exactos, hacificados, derivados, resolventes) para establecer una arquitectónica precisa de *tránsitos y obstrucciones* entre diversas regiones de la matemática (topologías, álgebras, variedades diferenciales, fragmentos de la aritmética); *(iv)* los inicios de una *visión nueva* de la geometría algebraica (enlaces con trabajos de Serre [**1955-56**, 120, 137, 171], intuición de nuevas perspectivas sobre Riemann-Roch y "variedades aritméticas" [**1955-56**, 165-166, 199]).

En particular, la *maestría técnica* de Grothendieck se encuentra siempre al acecho. Las *definiciones* son limpias y sencillas[148], los *ejemplos* son novedosos y multifacéticos (debido en gran medida a la riqueza polisémica de los haces[XXI]), los *teoremas y corolarios* están finamente resaltados y escalonados, las *pruebas* tienden a ser pulcras y económicas (véase, en particular, nuestra *Sección 3.3* abajo). Un simple listado (no exhaustivo) de las definiciones introducidas muestra la *explosividad controlada*[149] del joven matemático: subobjetos [123], equivalencia (e implícitamente adjunción) [125], núcleos y conúcleos [126],

148 Grothendieck insistirá a menudo en la importancia de una matemática *simple*, la única que puede tener opciones de acercarse a la profundidad de los problemas más arduos en matemáticas. El hecho de que la matemática grothendieckiana haya sido, en general, bastante mal comprendida, con la consiguiente sensación de que ésta *parezca* difícil, se debe solo a expositores mediocres de la obra del Maestro. En esta monografía nos encontramos en el *intento mixto* de mirar con detenimiento la riqueza de los muchos detalles de la invención grothendieckiana (lo que requiere tiempo y esfuerzo, *Partes I-III*), pero también de esclarecer algunas grandes líneas, *suaves y sencillas*, de su pensamiento más profundo (*Parte IV*).

149 Simbolizamos esto en nuestra metáfora *(volcán + mar)*, que puede seguirse a lo largo del *Índice analítico*. En el listado siguiente, los números entre paréntesis cuadrados remiten a las páginas del *Tôhoku* [**1955-56**].

XXI Los haces recorren las regiones más diversas de la práctica matemática: variable compleja, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial, topología, álgebra, categorías, lógica, etc. Su renovado uso en las manos de Gromov (*h-principio*, 1986) o de Connes (*sitio y topos aritmético*, 2014) sigue situando a los haces cerca de algunos de los problemas más difíciles de las matemáticas (geometría global de ecuaciones diferenciales, hipótesis de Riemann).

categorías aditivas [126] y abelianas [127], axiomas (AB3-AB6) [128-129], categorías de diagramas [130], categorías de acciones [132], (co)generadores [134], objetos inyectivos y proyectivos [135], categorías cociente [137], funtores (co)borde [139], funtores derivados [143], filtraciones [145], prehaces y haces (funtorialmente) [153], sucesión espectral (funtorialmente) [148, 171], funtores representables [185], G-haces [195]... Si parte esencial del pensamiento matemático consiste en *calibrar* perfectamente una definición para que sus consiguientes deducciones y contrastes se armonicen lo mejor posible[150], Grothendieck siempre sobresalió en ello[151].

La *riqueza topográfica* del pensamiento matemático de Grothendieck nunca es gratuita. No se asciende por impulsos de generalización artificial y siempre se contempla un panorama vívido en cumbres y valles específicos. Esto se refrenda también con la comparación de distintos axiomas para productos infinitos, mediante clases concretas de categorías que los distinguen (grupos abelianos, grupos topológicos abelianos compactos, haces de grupos abelianos [**1955-56**, 129]), con el "ejemplo divertido" [**1955-56**, 160] alrededor de las cohomologías sobre un espacio irreducible, con un ejemplo profundo sobre representaciones de haces de gérmenes y de formas diferenciales sobre variedades holomorfas [**1955-56**, 165-166], o con ejemplos de manejos funtoriales que permiten reconstruir argumentos previos en los cuales Grothendieck utilizaba la maquinaria de recubrimientos de Cech [**1955-56**, 161, 213]. En realidad, mirando un poco hacia adelante, el enlace entre las descripciones funtoriales y los recubrimientos de tipo Cech puede verse como el *origen*

150 En el sentido de Peirce, se trata de un tejido denso y bien urdido a nivel de abducciones (definiciones), deducciones (teoremas) e inducciones (contrastaciones con ejemplos).

151 En *Récoltes et semailles* [**1983-86**], Grothendieck se ufana, con razón, de ser el matemático que ha introducido el mayor número de nuevas definiciones (¡cerca de mil!) en toda la historia de las matemáticas. Ver nuestro *Capítulo 14* abajo. Si observamos que un matemático común y corriente puede sentirse feliz por haber introducido *una* nueva definición en su disciplina, podemos entonces medir en parte la *talla excepcional* de Grothendieck.

mismo de las topologías de Grothendieck[152].

Desde el punto de vista metodológico y filosófico, el *Tôhoku* produce también cambios definitivos (para mayores explicaciones, ver nuestra *Parte IV* abajo): *(i)* comprender un objeto a través de la *categoría entera* de sus objetos de mismo tipo, *(ii)* entender lo concreto (cohomología, inyectivos) como aquello proyectado desde *axiomáticas categóricas abstractas* (axiomas AB3-AB6, generador, funtores iterados), *(iii)* caracterizar los procesos de existencia (*tipos* asociados al cuantificador existencial $\exists$, arquetipos asociados al cuantificador existe único $\exists!$) e *invertir* sus cualidades "metafísicas" (tipos estáticos y *arquetipos dinámicos*, lo que lleva a una completa renovación del manido "platonismo" matemático). El "cuadro común" que emerge del *Tôhoku* –construido para permitir el estudio de *enlaces naturales* entre la geometría algebraica, la topología, la variable compleja, los cálculos cohomológicos– modifica entonces el panorama de la matemática.

De hecho, al enfocar sus esfuerzos sobre un concepto / objeto matemático *pivote* (el haz matemático), al definir los entornos generales en donde los haces pueden ser estudiados en su unidad y multiplicidad (las categorías abelianas), y al poner todo este instrumentario al servicio de la comprensión de las formas profundas de las estructuras (las cohomologías), Grothendieck produce en matemáticas, no sólo un "giro copernicano", sino un verdadero "giro einsteiniano" (*matemática relativa*), si se nos permite forzar la metáfora. La visión de Grothendieck llega aún a *trascender* el marco que él mismo elabora, pues, en una fulgurante premonición, observa que "sería indicado dar un tratamiento de «álgebra homológica no conmutativa»" [**1955-56**, 213] en un contexto de funtores y categorías que englobe la teoría de fibraciones y las extensiones de grupos de Lie: prospección asombrosa de fragmentos del programa de geometría no conmutativa de Connes.

---

152 Ver *SGA* [**1960-69**], nuestro *Capítulo 8* abajo.

3.3 Ejemplo detallado: suficiencia de inyectivos

La noción de módulo inyectivo aparece en Baer (1940)[153] y la "suficiencia de inyectivos" (para todo módulo A existe $M(A)$ inyectivo con $A \rightarrowtail M(A)$)[154] es luego extendida a resoluciones inyectivas en el tratado de álgebra homológica de Cartan-Eilenberg (1956)[xxx]. En este aspecto, como hemos señalado, el aporte esencial del *Tôhoku* [**1955-56**] consiste en la construcción del *cuadro axiomático general* donde tales construcciones pueden ser realizadas. La emergencia de las *categorías abelianas*, por un lado, y de los *funtores derivados*, por otro, abre sendas compuertas para un entendimiento global de la homología (y, sorprendentemente, la homotopía), como lo demostrará Grothendieck en la década de los ochenta (ver nuestra *Parte III* abajo).

Si volvemos ahora sobre la prueba grothendieckiana de la suficiencia de inyectivos en categorías abelianas con AB5 + generador [**1955-56**, 135-137, Teorema 1.10.1], podemos desbrozar sus argumentos en una rica red de enlaces metodológicos, conceptuales y calculatorios. Ante todo, la *estrategia metodológica* de la prueba está muy bien organizada y se divide en dos partes bien delimitadas: *(i)* caracterización de un objeto inyectivo

[153] La terminología es distinta en varios aspectos: *(i)* Baer trabaja con "grupos abelianos sobre anillos" (en vez de módulos), *(ii)* define una noción de grupo "completo" (en vez de inyectivo) vía la multiplicatividad de ciertos homomorfismos sobre ideales (en vez de extensiones). Véase R. Baer. "Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group". En: *Bulletin Amer. Math. Soc.* 46 (1940), págs. 800-806 (en particular, pp. 800, 802-803).

[154] La prueba original de Baer usa recursión transfinita (ibíd., p. 804). Esto parece una pista de que Grothendieck sí pudo haber leído a Baer, pero también debe señalarse que, para la época, el uso de la recursión transfinita en pruebas *matemáticas de fondo* (no sólo lógicas) era bastante corriente. En cambio, el Lema de Zorn, crucial para la prueba de Grothendieck, *no* aparece en Baer. Posteriormente a Baer, Cartan-Eilenberg y Grothendieck, algunas pruebas actuales de la suficiencia de inyectivos en la categoría de módulos (sobre un anillo R) construyen explícitamente el inyectivo mediante el grupo divisible $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e iteraciones de funtores representables: $M(A) = \prod_{Hom(A,Hom(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))} Hom(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

[xxx] H. Cartan y S. Eilenberg. *Homological Algebra.* Princeton: Princeton University Press, 1956. Para una historia de la cuestión, véase Krömer, óp.cit., p. 99.

general M mediante su *comportamiento restringido* a un generador de la categoría, *(ii)* construcción del inyectivo particular $M(A)$ mediante una *elevación iterada* a lo largo de una red ordinal de homomorfismos inyectivos, que luego se demuestra satisfacer *(i)*. El *péndulo grothendieckiano* se encuentra así en pleno movimiento, alternando entre descenso y ascenso, particularización y generalización. El *back-and-forth es imprescindible*: permanecer solo en alguno de los dos lados de la balanza no permitiría alcanzar el objetivo. Por otro lado, la *armazón conceptual* está decantada al extremo: *(iii)* uso *minimal* de propiedades de exactitud (descomposiciones, productos, prolongaciones) en una categoría abeliana, *(iv)* uso *explícito* de los supuestos de existencia de un generador y de los axiomas adicionales, para verificar las condiciones de aplicación del Lema de Zorn (AB5, esencial en el paso *(i)*) y para asegurar propiedades de inyectividad en la red que da lugar a $M(A)$ (AB4, consecuencia de AB5, esencial en el paso *(ii)*). Aunque Grothendieck no lo indica, se intuye también una cierta *necesidad* en el marco así elaborado, como si correspondiese al *más sencillo cuadro axiomático arquetípico* para una prueba de suficiencia de inyectivos[155].

Finalmente, la maestría técnica y la *fineza calculatoria* de la prueba reflejan con creces los marcos metodológico y conceptual. En la parte *(i)* de la demostración, en una categoría abeliana con AB5 + generador, Grothendieck caracteriza la inyectividad de un objeto M (para todo objeto A, todo subobjeto $B \rightarrowtail A$ y todo morfismo $u : B \to M$ existe una prolongación $\bar{u} : A \to M$) mediante su propiedad de extensibilidad acotada al generador U (para todo subobjeto $B \rightarrowtail U$ y todo morfismo $u : B \to M$ existe una prolongación $\bar{u} : U \to M$) [**1955-56**, 136, Lema 1]. Nos encontramos, a la vez, ante un paso de lo *local* (U generador) a lo *global* (todo A en la categoría), y ante una reducción correspondiente de lo *múltiple* a lo *uno*. La herramienta usada es aquella que permite pasar, justamente,

155 Puede tratarse de un problema posiblemente aún abierto, y tal vez ni siquiera formulado: ¿qué condiciones universales debe satisfacer una categoría abeliana con suficientes inyectivos para *forzar* la existencia de un generador, o AB5, o AB4?

de una multiplicidad ordenada a un ente que, de alguna manera, unifica la diversidad: un elemento *maximal* en un conjunto ordenado inductivo, cuya existencia resulta asegurada por el Lema de Zorn[156]. La *inductividad* del conjunto ordenado es una forma *equivalente* de expresar el axioma AB5 [**1955-56**, 136] y la *maximalidad* del elemento emergente es aquella que permite extender morfismos arbitrarios, haciéndolos pasar *a través de* U mediante productos y descomposiciones directas (propiedades de exactitud de la categoría abeliana).

Por otro lado, en el desarrollo de la segunda parte *(ii)* de la demostración, Grothendieck tiende la *red de subobjetos* de U en A, los *amalgama* en una adecuada suma directa y extrae un *conúcleo canónico* de esa construcción [**1955-56**, 136]. Con ello, obtiene un primer candidato para prolongaciones, denotado $M_1(A)$[157], que debe iterarse para cubrir las demás extensiones intermedias que no queden registradas en $M_1(A)$. Aparece entonces una definición por recursión transfinita, donde $M_0(A) = A$, $M_{j+1}(A) = M_1(M_j(A))$ y $M_{lim\ \eta_i}(A) = lim M_{\eta_i}(A)$, con correspondientes morfismos inyectivos (uso de AB4) entre los objetos [**1955-56**, 136-137]. Por argumentos de cardinalidad, mediante una altura ordinal suficiente, la cadena de los $M_i(A)$ debe estabilizarse y su límite $M(A)$ provee el objeto inyectivo buscado por encima de A ($A \rightarrowtail M(A)$), pues $M(A)$ satisface precisamente las condiciones del Lema 1, que caracterizan a los inyectivos [**1955-56**, 137].

Un hecho interesante es la *disimetría* existente entre la *natural* suficiencia de inyectivos en una categoría abeliana con generador + AB5, y la artificialidad de condiciones similares, matemáticamente relevantes, para una eventual *suficiencia de proyectivos.* De hecho, las condiciones duales que lo asegurarían (categoría abeliana con AB5* + cogenerador) parecen *no ocurrir* de manera natural en la matemática, algo que se explica por

---

156 Véase la construcción específica de ese conjunto inductivo en nuestra *Nota 136* arriba, p. 105.

157 Si V_i es subobjeto de U, todo morfismo $u_i : V_i \to A$ se extiende a un morfismo $U \to M_1(A)$.

un cierto *desbalance conjuntista* en las construcciones típicas del álgebra[XXII]. La situación merece entonces contrastarse con el equilibrio armónico entre las $\otimes$-normas *inyectivas y proyectivas* del *Résumé* [**1953c**]. Mientras que, en el ámbito del *Résumé*, las definiciones ocurren en un entorno *reticular* perfectamente simétrico, donde las construcciones vía elementos juegan un papel insignificante, la suficiencia de inyectivos en el *Tôhoku* [**1955-56**] no escapa del poder implícito de la teoría de conjuntos subyacente y, en particular, del poder esencialmente $\in$-transitivo de las estructuras del álgebra[158]. De esta manera, el entorno acotado de las 14 $\otimes$-normas naturales en productos tensoriales de espacios de Banach se contrapone con el entorno mucho más amplio de las categorías abelianas *at large*. En el fondo, el problema de los equilibrios y desequilibrios entre *inyectividad* y *proyectividad* permanecerá siempre en el *corazón* de la matemática grothendieckiana, y un intento de proveer una *simetría armónica* al problema, a lo largo de contextos categóricos muy extensos, es el arduo esfuerzo que llevará al par de miles de páginas finales de los *Dérivateurs* [**1991**] (ver nuestro *Capítulo 13* abajo).

---

158 En efecto, ese poder es notorio al recurrir a los ordinales (conjuntos $\in$-transitivos y $\in$-lineales, a la von Neumann) y a la recursión transfinita. Uno de los objetivos esenciales de Lawvere, en un cierto momento de la comprensión de los *topos elementales*, consistió, en cambio, en permitir elementos globales, pero que se alejaran de la jerarquía de elementos locales a la von Neumann.

XXII Las construcciones algebraicas clásicas tienden a funcionar básicamente vía productos y congruencias, es decir, vía *límites*: objetos a izquierda, descendientes a lo largo de la jerarquía conjuntista de von Neumann. Los colímites tienden a ocurrir menos en la práctica algebraica, al menos hasta el momento (un estudio sistemático de *co-álgebras* en décadas recientes puede estar ayudando a reversar la situación). No obstante, de una manera más general, la existencia de límites en un *topos elemental* fuerza la existencia de los colímites (Paré 1974).

4

Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch (1955-57)

Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch [**1955-57**] (que también denominaremos *Rapport Riemann-Roch*, siguiendo la terminología de Grothendieck) provee una profunda generalización del teorema clásico de Riemann-Roch. Aprovecha herramientas previas de Serre (hacificación del enunciado) y de Hirzebruch (topologización de la prueba), pero las lleva a un nivel estructural superior. La emergencia del grupo de la K-teoría y el gobierno de la ecuación de Riemann-Roch mediante una cuantización (Todd) en el *tránsito funtorial* entre la K-teoría y la cohomología (Chern) convierten el aporte grothendieckiano en la *clef de voûte* que sostiene la gran armazón arquitectónica subyacente al teorema. De esta manera, la *geometrización* de las funciones analíticas y meromorfas en la variable compleja, la *topologización* presente en las superficies de Riemann y los haces, la *aritmetización* de las curvas algebraicas asociadas, la *linealización* otorgada por la teoría de grupos, la *categorización* estructural de los entes en juego, se entrelazan en un *todo unitario* que tendrá enormes consecuencias en la matemática posterior del siglo XX.

4.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Aunque los intereses de Grothendieck alrededor de Riemann-Roch se pueden retrotraer explícitamente hasta los comienzos mismos de su estadía en Nancy[159], la concepción más profunda y los aportes técnicos se extienden entre 1955[160] y 1957[161]. La correspondencia con Serre exhibe (1) la intuición inicial (18 Febrero 1955) [**1955-87**, 5], (2) la demostración final (1 Noviembre 1957: "En anexo una demostración muy simple de Riemann-Roch, independiente de la característica" – "Te señalo que «moralmente» el nuevo método descansa sobre la determinación de $K(X)$ y $A(X)$" [**1955-87**, 57], enfatizando así la emergencia del grupo $K(X)$, fundamento de la K-teoría), (3) las correcciones y ampliaciones (12 Noviembre 1957: "De acuerdo con todas tus rectificaciones" – "Con la definición de clases de Chern para haces (...) el teorema de Riemann-Roch puede también enunciarse en el caso de variedades no proyectivas (lo que sucederá en el caso clásico, gracias a la definición trascendente de las clases de Chern)" [**1955-87**, 59]).

---

159 En efecto, en el registro de los encuentros bourbakistas, dentro de los "Temas para el *Seminario Bourbaki* 1951-1952", se menciona una "Demostración Kodaira del teorema de Riemann-Roch (Grothendieck)" (*Tribu* 25 (1951), p. 6), donde, a todas luces, Grothendieck debía exponer el nuevo acercamiento de Kodaira a Riemann-Roch. Esta nueva aproximación precedía los aportes posteriores de Serre (1955) e Hirzebruch (1956). La *sensibilidad* de Grothendieck a Riemann-Roch es por tanto bastante anterior al empuje que luego le ofrecerán Serre e Hirzebruch.

160 En carta a Serre del 18 de Febrero 1955, desde Kansas, Grothendieck afirma que "no veo por qué, vía los espacios universales (desde el punto de vista homológico, como se explica en la tesis de Borel) y los espacios clasificadores, *no se llegaría a la introducción de las clases características de Chern y otras, que jugarían el mismo papel en un Riemann-Roch algebraico, como en aquel que me has vagamente explicado*, que funciona en el caso complejo (debido a Hirzebruch)" [**1955-87**, 5]. Es un ejemplo de la *intuición* y la *visión* de Grothendieck, quien a menudo presagiaba la eclosión de un enorme campo de estudios a partir de una sencilla observación sintética preliminar. Es el caso también de la intuición de la prueba de las conjeturas de Weil en la conferencia de Edimburgo [**1958**], o la intuición de los motivos [**1968**] en los años del *IHES*, ver *Capítulos 5, 7-9* abajo.

161 Según lo subraya Grothendieck en la publicación posterior (1967) de su texto, el *Rapport* se termina de escribir el 1 de Noviembre de 1957 [**1955-57**, 20].

Por otro lado, los avances en el *Rapport* se entrelazan con otros aportes en esos años: *(i)* "Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann" (*Amer. J. Math.* 79 (1957): 121-138)[162] [**1955a**], *(ii)* "A general theory of fibre spaces with structure sheaf" (*preprint*, University of Kansas, Agosto 1955) [**1955**], *(iii)* "Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents" (exposición, *Seminario Cartan* 9.2, Febrero 1957) [**1957**]. En particular, el año 1957[163] adquiere una relevancia especial[xxxi]. Finalmente, debe observarse que la primera publicación completa de los resultados de Grothendieck se realiza *(iv)* en 1958, en el artículo A. Borel y J.-P. Serre. "Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck)". En: *Bull. Soc. Math. France* 86

[162] En palabras de Grothendieck, "la mayor parte del trabajo se realizó en 1955, mientras el autor era Visiting Associate Professor en la Universidad de Kansas", nota al pie en la primera página (121) del artículo.

[163] Recordando esa situación, Grothendieck comenta en *Récoltes et semailles*: "El año 1957 es aquel donde me vi llevado a despejar el tema «Riemann-Roch» (versión Grothendieck), que, de un día para otro, me consagró como "gran estrella" [*grande vedette*]. Es también el año de la muerte de mi madre, y, por tanto, de un quiebre importante en mi vida. Es uno de los años más intensamente creativos de mi vida, y no solo a nivel matemático" [**1983-86**, P.23, nota a pie de página].

[xxxi] Michael Atiyah recuerda también el momento con suma emoción: "Mi primer encuentro con el tornado que era Grothendieck ocurrió en el primero, y muy pequeño, *Bonn Arbeitstagung* en Julio de 1957. Tengo el recuerdo vívido de Grothendieck hablando durante horas todos los días, exponiendo su nueva K-teoría, generalización del teorema Hirzebruch-Riemann-Roch (HRR). De acuerdo con Don Zagier, los registros del *Arbeitstagung* muestran que habló por un total de doce horas repartidas en cuatro días. Fue una experiencia emocionante: ideas brillantes, trasmitidas con brío y convicción. Por suerte yo era joven en ese momento, casi de la misma edad de Grothendieck, y pude por tanto absorber y eventualmente utilizar su gran trabajo. (...) La introducción y el desarrollo de la K-teoría descansaban en su maestría del álgebra homológica y en su virtuosidad técnica, que apisonaban su vía por donde los meros mortales temían pisar. El resultado, el teorema de Grothendieck-Riemann-Roch, constituyó una brillante funtorialización de HRR ¡que redujo la prueba a un ejercicio dejado a Borel y Serre!", M. Artin y col. "Alexandre Grothendieck 1928-2014, Part 1". En: *Notices of the AMS* 63.3 (2016), págs. 242-255, cita de Atiyah en pp. 246-247. Obsérvense la mención al "tornado" (nuestro volcán) y a la "virtuosidad técnica" (precisión extrema en manejos matemáticos concretos, muy lejos del absurdo *abstract nonsense* que se le ha achacado). La excitación, la brillantez, el brío, la energía indomable, son otros aspectos característicos de la personalidad de Grothendieck, cuidadosamente registrados y apreciados por los matemáticos que tuvieron la fortuna de colaborar con él. Como veremos, se trata de una *juventud espiritual* que siempre fue mucho más allá de su mera juventud física.

(1958), págs. 97-136. Incluiremos un resumen mínimo del trabajo de Borel y Serre después del resumen mínimo del *Rapport*, y comentaremos estos cuatro trabajos *(i)-(iv)*, en su relación con el *Rapport*, en nuestra *Sección 4.2* abajo.

Resumen mínimo.

El reporte *Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch* [**1955-57**] está dividido en dos capítulos y un añadido (en lo que sigue, las referencias de números entre corchetes cuadrados remiten a la paginación baja de [**1955-57**]).

"*Cap. I. λ-anillos (preliminares formales)*". "1. Definiciones". Anillos con operadores homomórficos en series formales [21-23]. "2. Ejemplos". $K(G,k)$ para G grupo, k anillo conmutativo; casos de grupos algebraicos, topológicos, de Lie, formas cuadráticas, etc. ("¡Prometemos no necesitar todos esos ejemplos para tratar el teorema de Riemann-Roch!" [25, nota 1]); determinaciones específicas con condiciones adicionales sobre G; $K(X)$ para X variedad algebraica [24-28]. "3. El λ-anillo definido por un anillo graduado". Construcción formal y funtorial de un homomorfismo de Chern, que da lugar a las clases de Chern [28-33]. "4. Las operaciones $\lambda^p(N,x)$". Ecuaciones relativas, características (Euler-Poincaré), alternadas (Riemann-Roch), en el caso abstracto de anillos de series formales y polinomios universales [33-38].

"*Cap. II. Clases de haces algebraicos coherentes y clases de Chern*". "1. La teoría de Chow". "Fijaremos un cuerpo de base k que supondremos algebraicamente cerrado. Un gran fragmento de lo que sigue, y tal vez todo, es sin embargo válido sin esa restricción" [38]; anillo de Chow $A(X)$ (anillo graduado de clases de ciclos sobre una variedad X con buenas propiedades); matemática relativa: A como funtor contravariante; ecuación relativa; teoría Chow de clases de Chern [38-42]. "2. Definición de clases de Chern de haces algebraicos coherentes". Definición de $K(C)$ para C subclase de una categoría abeliana; matemática relativa: construcción de funtores cohomológicos entre los $K(C)$ gracias a resoluciones inyectivas; aplicación al caso de haces coherentes [42-47]. "3. Generalidades funtoriales sobre $K(X)$". Definición de multiplicación gracias a alternación de los funtores *Tor*; propiedades homomórficas y funtoriales; ecuación relativa [47-54]. "4. Algunos resultados técnicos". Propiedades funtoriales para filtraciones; descomposición celular (generación del grupo K) [54-63]. "5. Definición hacificada de clases de Chern. Aplicación al estudio de morfismos inyectivos". Ecuaciones relativas para el caso inyectivo; observaciones sobre limitantes, extensiones y modificaciones de la prueba (demostración "situada" en un espacio, aunque "ciertamente verdadera" en general) [63-68]. "6. El teorema de Riemann-Roch". Prueba en característica 0, ampliada a toda característica (ver añadido); referencias: Hirzebruch, Serre, Grothendieck [69-71].

Añadido. "Demostración del teorema de Riemann-Roch (Grothendieck, Noviembre 1 1957)" [71-76]. Prueba en característica arbitraria, "basada sobre un principio diferente" [69]. "Notamos $K(X)$ el grupo abeliano generado por las clases de haces coherentes sobre X (módulo la identificación de una extensión a una suma); la suma alternada de los *Tor* hace de $K(X)$ un anillo" [71]. "Notamos $A(X)$ el anillo graduado de las clases de ciclos de X (para la equivalencia racional, *cf.* Chow)" [72]. Clases de Chern (ch) y de Todd (T) (en $A(X) \otimes \mathbb{Q}$) [72]. Matemática relativa: dado morfismo propio $f : Y \to X$, construcción de homomorfismos naturales $f^* : A(Y) \to A(X)$, $f_! : K(Y) \to K(X)$ [72]. "Teorema de Riemann-Roch": en condiciones adecuadas, $f^*(ch(y)T(Y)) = ch(f_!(y))T(X)$ para $y \in K(Y)$ [73]. Condiciones de permanencia / reducibilidad para Riemann-Roch [73]. Con un "cálculo estándar" y con "cálculos elementales" se concluye la prueba [74-76].

Por otra parte, el artículo de Borel y Serre (1958) reconstruye, de manera bastante distinta[164], los trabajos de Grothendieck alrededor de Riemann-Roch (en lo que sigue, las

---

164 Para una comparación, ver nuestra *Sección 4.2* abajo.

referencias de números entre corchetes cuadrados remiten al artículo en cuestión). "Lo que sigue constituye las notas de un Seminario llevado a cabo en Princeton, en el otoño de 1957, sobre los trabajos de Grothendieck; los resultados nuevos que figuran se le deben a este último; nuestra contribución atañe únicamente a la redacción. El «teorema de Riemann-Roch» del que se trata es válido para variedades algebraicas (no singulares) sobre un cuerpo de característica arbitraria; en el caso clásico, donde el cuerpo de base es $\mathbb{C}$, el teorema incluye como caso particular aquel demostrado hace unos años por Hirzebruch" [97]. Generalidades sobre haces, haces coherentes y aplicaciones propias [98-102]. Matemática relativa: imágenes de haces, referencias al *Tôhoku* [**1955-56**], propiedades de permanencia de haces coherentes [102-104]. Grupo $K(X)$ de clases de haces sobre una variedad algebraica X; presentación de $K(X)$ a través del grupo $K_1(X)$ de fibrados, vía resoluciones y diagramas conmutativos largos [105-108]. Operaciones sobre $K(X)$: interior: anillo conmutativo; exterior: potencia; matemática relativa: imágenes directa e inversa (ecuación relativa) [108-111]. "El hecho $K(X) = K_1(X)$ permite extender la definición de clases de Chern a haces coherentes arbitrarios" – "En el caso de un cuerpo de base arbitrario, Grothendieck (...) reemplaza $H^*(X)$ por el anillo graduado $A(X)$ de las clases de ciclos sobre X, bajo equivalencia lineal a la Chow" [111]. Ecuación relativa para anillos $A(X)$ – Clases de Todd – Clase exponencial de Chern – Ecuaciones relativas para clases de Todd y de Chern [112].

"Enunciado del teorema Riemann–Roch": diagrama no conmutativo (obstrucción) entre clases de Chern (para imágenes inversas asociadas a un morfismo propio entre "buenas" variedades) y diagrama conmutativo (tránsito) entre clases de Chern "desviadas" (cuantizadas) por clases de Todd [113] – "El teorema R-R bajo la forma Grothendieck implica la fórmula R-R-Hirzebruch" – "La demostración se hará por reducción a los casos particulares de una proyección y una inyección" [113]. Lemas de reducción: "caso de la inyección (...) más difícil" [113-115]. Propiedades de exactitud y homotopía para

$K(X)$ [115-118]. Demostración R-R para el caso proyectivo: comportamiento funtorial de K con respecto a productos tensoriales, fórmula de Hirzebruch válida para espacios proyectivos [118-119]. Demostración R-R para el caso inyectivo: resoluciones locales de haces [120-124], fórmula de Hirzebruch para el caso inyectivo [124], pruebas locales [125] y "explosión" global [125-128], lemas de translación [128, 129-135], "fin de la prueba de R-R" [129]. "Manuscrito recibido Mayo 9 de 1958" [136].

Descripción más extensa.

El título oficial del *Rapport –Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch*[XXIII]– indica de entrada el lugar central de los *haces* en el trabajo. En efecto, el *Tôhoku* [**1955-56**] y el *Rapport* [**1955-57**] se entrelazan en su concepción, durante la estadía en Kansas (1955) y el año siguiente (1956)[xxxii], gracias a un entendimiento fino de nuevas construcciones basadas en ejemplos de haces (*haces abelianos* llevando a las categorías abelianas, *haces coherentes* llevando al grupo de la K-teoría). En realidad, los haces recorrerán consistentemente las matemáticas de Grothendieck en el periodo 1955-1970, y pueden verse como una suerte de *arquetipo metodológico*, o *sección global metodológica*, para ese entorno histórico (ver nuestra *Parte IV* abajo). En lo que sigue, dejamos de lado el *Capítulo 1* del *Rapport*, con

xxxii Véase Schneps, óp.cit., pp. 11-19, para un resumen de los movimientos de Grothendieck en esa época, entre Kansas, Chicago, Harvard y París. Ver también Bringuier, óp.cit., p. 41, Pradeau, óp.cit., pp. 76-77.

XXIII El *Teorema de Riemann-Roch* clásico (aparecido en el artículo de Riemann, *Teoría de funciones abelianas*, Sección V (1857)) presenta una *conjugación armónica* entre lo *uno* (geométrico) y lo *múltiple* (algebraico). El estudio de *una* función se determina por el estudio de una *multiplicidad* de funciones sobre la *superficie de Riemann* de la función original. De manera precisa, en términos modernos (ya todos implícitos en el enunciado original), si nos damos una función f holomorfa y S es su superficie de Riemann asociada (que podemos asumir compacta), si nos damos un sistema finito de puntos P_i en S afectados con multiplicidades m_i y definimos $m = \sum_i m_i$, si H es el espacio vectorial de las funciones *holomorfas* con m *ceros* asignados sobre S y M es el espacio vectorial de las funciones *meromorfas* con m *polos* asignados sobre S, entonces se tiene la ecuación de Riemann-Roch: $m - gen(f) + 1 = dim(M) - dim(H)$ (donde $gen(f)$ es el género de la superficie de Riemann S asociada a f). De esta manera, un *invariante geométrico interno*, dependiente del género (conteo de "huecos" en la superficie), puede calcularse mediante un *invariante algebraico externo*. El hecho es muy profundo y conlleva todo tipo de ramificaciones en los dominios más variados de la matemática. Puede considerarse como el inicio formal de la *geometría algebraica* moderna.

"preliminares formales" sobre los λ-anillos, pues el mismo Grothendieck observa que no se necesitan[165].

El *Capítulo 2*, "*Clases de haces algebraicos coherentes y clases de Chern*", construye, a la Grothendieck, el edificio general donde *se sumergen con naturalidad* los trabajos previos de Serre[XXIV] y de Hirzebruch[XXV] sobre Riemann-Roch. Contrariamente con los trabajos previos, enteramente autocontenidos (*Tesis* [**1949-53**], *Résumé* [**1953c**], *Tôhoku* [**1955-56**]), el *Rapport* [**1955-57**] deja de explicar muchos términos, propios del folclor del época, que tal vez Grothendieck no se vio llevado a exponer por tratarse de un *work in progress*, cuyo reporte debía fijar solo unas pautas destinadas a Serre y a él mismo[166]. Los resultados centrales del *Capítulo 2* se pueden enumerar como sigue: *(i)* para una variedad X con "buenas" propiedades (no singular, cuasi-proyectiva, conexa), definición del *anillo*

165 En la carta ya mencionada a Serre del 1 de Noviembre 1957, Grothendieck explica que resultan inútiles "la consideración sistemática de la estructura de λ-anillo y virtualmente todo el *Capítulo 1* (del cual solo se deben retener la definición del homomorfismo *ch* y la fórmula (1.30)" [**1955-87**, 57]. Grothendieck define el homomorfismo de Chern para todo λ-anillo, pero su restricción al anillo de la K-teoría (*Capítulo 2*) será suficiente para proceder. De manera similar, la ecuación (1.30) coliga, en general, el homomorfismo de Chern y las clases de Todd, pero bastará con observar ese enlace en el marco más restringido de la K-teoría. Es interesante observar cómo, en el ambiente Riemann-Roch, la adecuada abstracción para proceder se sitúa en un *término medio* (K-teoría) entre una generalización amplia, pero innecesaria (λ-anillos), y las formas hacificadas/topológicas (Serre/Hirzebruch) del enunciado clásico original.

166 El artículo de Borel y Serre llenó esos huecos solo un año después, por lo que Grothendieck no se debió sentir presionado a producir un texto final autocontenido como en los trabajos anteriores. En cambio, los monumentales *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**] seguirán muy pronto con el *estilo autocontenido* grothendieckiano, y lo llevarán a un extremo que ha incomodado a muchos de sus lectores.

XXIV Dado el entorno de definiciones alrededor del Riemann-Roch clásico, Serre considera el *haz* Θ de gérmenes de funciones meromorfas con polos asignados, con sus grupos de cohomología $H^0(\Theta)$, $H^1(\Theta)$ (espacios vectoriales complejos finito-dimensionales), y el *haz* Ω de gérmenes de funciones holomorfas con ceros asignados, con sus grupos de cohomología, y demuestra tanto un *teorema de dualidad* ($H^1(\Theta) \approx (H^0(\Omega))^*$), como una nueva ecuación tipo Riemann-Roch: $m - gen(f) + 1 = dim(H^0(\Theta)) - dim(H^0(\Omega))$. Véase Serre, óp.cit. El invariante geométrico se lee ahora bajo una *invarianza cohomológica*, a la cual Grothendieck resulta ser inmediatamente sensible.

XXV Sobre una variedad X con buenas propiedades algebraico-topológicas, Hirzebruch encuentra un enlace entre las clases de Chern (invariantes "aditivos" exponenciales en la cohomología $H^*(X)$), las clases de Todd (invariantes "multiplicativos" polinomiales en $H^*(X)$) y algunas sumas alternadas de dimensiones cohomológicas. Véase F. Hirzebruch. *Topological Methods in Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1956. De nuevo, el ambiente resulta ser el espacio perfecto para la llegada de Grothendieck.

$A(X)$ de la K-teoría[167] y estudio de sus propiedades funtoriales [**1955-57**, 38-41]; *(ii)* para una subclase $\mathcal{C}_0$ de una categoría abeliana, definición del grupo $K(\mathcal{C}_0)$ mediante un doble proceso de *liberación y simetrización*, y, en particular, para una variedad X con buenas propiedades, definición del *grupo* $K(X)$ de la K-teoría como $K(\mathcal{F}(X))$, donde $\mathcal{F}(X)$ es la categoría de *haces coherentes* sobre X [**1955-57**, 42-46]; *(iii)* estudio de las propiedades *funtoriales* de $K(X)$ [**1955-57**, 47-54]; *(iv) teorema de Riemann-Roch*: expresión funtorial y demostración en característica cero (extendida a cualquier característica en el *Añadido*) [**1955-57**, 69-70]. A continuación, revisamos algunos aspectos sobresalientes de *(i)-(iv)*.

En *(i)* y *(ii)* aparecen las nuevas estructuras fundamentales de la K-teoría. Si X es una variedad algebraica *suave*[168], Grothendieck define $A(X)$ como el anillo de clases de ciclos[XXVI] sobre X [**1955-57**, 38], y muestra que la construcción da lugar a dos tipos de funtores: un funtor contravariante $(\ )^*$ (dado $f : X \to Y$ morfismo *regular*[169] se tiene $f^* : A(Y) \to A(X)$) [**1955-57**, 39], y un funtor covariante $(\ )_*$ (dado $f : X \to Y$ morfismo *propio*[170] se tiene $f_* : A(X) \to A(Y)$ con una "fórmula clásica" (Chow) de distribución[171]:

167 Grothendieck denomina "anillo de Chow" al anillo $A(X)$ [**1955-57**, 38]. El nombre *K-teoría* (K por *Klassen*, clases) para la teoría desarrollada en el *Rapport* es posterior, posiblemente adoptado a lo largo de las extensiones topológicas de la teoría (Atiyah-Hirzebruch) que culminarán en el *Teorema del Índice* (Atiyah-Singer), ver *Sección 4.3* abajo.

168 En el caso del *Rapport*, la suavidad de una variedad se precisa como "no singular, cuasi-proyectiva, conexa". Algunos casos particulares de esa situación general están dados por los espacios proyectivos $\mathbb{P}^n$, o por sencillas curvas algebraicas de la práctica matemática.

169 En este caso, la suavidad se precisa como regularidad: un morfismo $f : X \to Y$ es *regular* si resulta ser, localmente, una restricción de funciones polinomiales (en los atlas correspondientes que cubran a X, Y).

170 Un morfismo $f : X \to Y$ es *propio* si posee buenas propiedades de clausura y de tipo finito (otra forma más de suavidad). Para detalles, ver nuestros *Capítulos 5, 7* abajo.

171 En realidad, se trata de una fórmula de *desiteración* en un sentido peirceano que trasciende esta situación y que la acerca a la lógica matemática. Ver nota 176 abajo, p. 129.

XXVI Un *ciclo algebraico* sobre una variedad algebraica X es una combinación lineal formal $\sum_i (n_i \cdot V_i)$ (coeficientes n_i en $\mathbb{Z}$ o en $\mathbb{Q}$) de subvariedades V_i de X. Los ciclos, como procesos de *descomposición* de objetos matemáticos sofisticados, serán esenciales en la emergencia de los *motivos* [**1968**]. Ver nuestro *Capítulo 9* abajo. En el texto de Grothendieck, las *clases de equivalencia* de ciclos se realizan módulo *equivalencia racional* (diferencia entre ciclos parametrizada vía funciones racionales) [**1955-57**, 38].

$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y)$ [**1955-57**, 39-40]. Por otra parte, dada una subclase $\mathcal{C}_0$ de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ (enlace directo con el *Tôhoku* [**1955-56**]), a partir del *grupo libre* generado por las clases (módulo isomorfismo) de los elementos de $\mathcal{C}_0$, Grothendieck define $K(\mathcal{C}_0)$ como el grupo cociente por el *subgrupo simetrizado*[xxxiii] del libre con respecto a ciertas extensiones[172] en $\mathcal{C}_0$ [**1955-57**, 42]. En particular, si X es una variedad suave y $\mathcal{F}(X)$ es la categoría de *haces algebraicos coherentes* sobre X, Grothendieck define $K(X)$ como $K(\mathcal{F}(X))$ [**1955-57**, 44]. Así, el grupo de la K-teoría, es decir, el grupo libre simetrizado de haces coherentes[173], emerge como el más *sencillo* objeto posible para medir formas generales de intersección en geometría algebraica (coherencia, ciclos), pues la libertad asegura que no se tenga *ninguna restricción ecuacional*[174] en el ambiente.

Con respecto a *(iii)* –estudio de las propiedades funtoriales de $K(X)$–, Grothendieck añade primero una operación adicional de multiplicación en $K(X)$ mediante la fórmula $\gamma(F) \cdot \gamma(G) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \gamma(Tor_i(F, G))$[XXVII] (donde $\gamma(F)$ denota la clase de equivalencia

---

172 E extensión de E' vía E'' en $\mathcal{C}_0$. Las simetrizaciones son entonces las clases de equivalencia de restas formales $(E) - (E') - (E'')$.

173 Equivalentemente, Grothendieck demuestra que $K(X)$ puede representarse como el grupo libre simetrizado de *fibrados vectoriales* sobre X [**1955-57**, 44-46], lo que provee otra sencilla descripción alternativa del grupo de la K-teoría.

174 A su vez, esta libertad asegura su enorme rango de aplicabilidad, como veremos abajo. Se trata de un ejemplo más, entre las decenas de construcciones grothendieckianas, donde el *ascenso* a una universalidad abstracta, general y libre, es el que permite luego *descender* fructuosamente sobre lo particular y lo concreto.

xxxiii Dado un *monoide* abeliano M, su *grupo simetrizado* $S(M)$ es el cociente de $M \times M$ con respecto a la relación de equivalencia $(x, y) \sim (x', y')$ ssi $\exists z\ (x + y' + z = x' + y + z)$ (lo que generaliza la definición usual de los enteros a partir de los naturales: $\mathbb{Z} = S(\mathbb{N})$). Ver M. Karoubi. “Rapport sur la K-théorie (1956-1997)”. En: *Development of Mathematics 1950-2000*. Ed. por J.-P. Pier. Birkhäuser, 2000, págs. 635-653, construcción en p. 635.

XXVII Los funtores *Tor*, que originalmente medían la existencia de *elementos de torsión* en módulos (elementos a en el módulo tales que $\exists n\ n \cdot a = 0$), pueden ser sencillamente descritos, con las técnicas de Grothendieck, como los *funtores derivados del funtor producto tensorial*. Esta nueva aparición de los productos tensoriales muestra la *extrema naturalidad* con que Grothendieck manejaba la noción. Más aún, con condiciones adicionales sobre G, se tiene $\gamma(F) \cdot \gamma(G) = \gamma(F \otimes G)$ [**1955-57**, 49].

del haz coherente F en el grupo cociente)[175] [**1955-57**, 49]. Nos encontramos entonces ante un anillo que formalmente se comporta como el anillo $A(X)$ de nuestro párrafo anterior, pero con *nuevos tránsitos relativos* entre los grupos. Específicamente, si $f : X \to Y$ es un morfismo propio, se tiene un morfismo $f^! : K(Y) \to K(X)$ con $f^!(\gamma_Y(Z)) = \gamma_X(f^{-1}(Z))$ (donde Z es un ciclo en Y), y se tiene otro morfismo $f_! : K(X) \to K(Y)$ con $f_!(\gamma_X(F)) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q\gamma_Y(R^q f_!(F))$ (donde F es un haz coherente y R^q es el q-ésimo funtor derivado) [**1955-57**, 53]. Se obtiene $(fg)_! = f_!g_!$ y K resulta ser entonces un funtor covariante con respecto a los morfismos propios. Por otro lado, vale una fórmula de *desiteración*[176] $f_!(x \cdot f^!(y)) = f_!(x) \cdot y$ (donde x, y son (clases de) fibrados vectoriales) [**1955-57**, 54].

Sigue una larga serie de resultados técnicos [**1955-57**, 54-68], que desemboca en *(iv)* el enunciado del teorema Riemann-Roch generalizado: dado $f : X \to Y$ morfismo propio, se tiene $f_*(ch_X(x)T(X)) = ch_Y(f_!(x))T(Y)$[177], donde $x \in K(X)$, $ch_X : K(X) \to H^*(X)$ provee las clases de Chern de fibrados vectoriales (definidas recursivamente [**1955-57**, 40-41] y "hacificadamente" [**1955-57**, 63-64]), y $T(X)$ es la clase de Todd (ver más abajo) asociada a la clase de Chern del fibrado vectorial tangente T_X sobre X. Grothendieck anuncia que no sabe "demostrar la fórmula sino en característica 0" [**1955-57**, 69] y pasa a hacerlo por casos, primero para un morfismo inyectivo, basándose en los resultados técnicos de los parágrafos anteriores (la parte más difícil), y luego para un morfismo proyectivo, gracias a resultados de descomposición para hiperplanos proyectivos [**1955-57**, 70].

---

175 Grothendieck indica que la fórmula "está evidentemente sugerida por la «fórmula de los *Tor*» de Serre en la teoría de intersecciones" [**1955-57**, 49].

176 Este tipo de fórmula tiene la estructura $T(xSy) = (Tx)y$, que recuerda la forma $(Ⓢxy)y = (Ⓢx)y$. La última igualdad es la regla de *desiteración* de Peirce en los gráficos existenciales (1903, única axiomatización conocida que provee axiomas *uniformes* para el cálculo proposicional clásico, la lógicas de primer orden y las lógicas modales), y es la fórmula que permite a Caicedo (1997) definir una *noción general de conectivo intuicionista*. Ver F. Zalamea. *Peirce's Logic of Continuity.* Boston: Docent Press, 2012, p. 123. Las conexiones formales de los trabajos de Grothendieck con la lógica se empezarán a dar en los años 1970s con la eclosión de la *lógica categórica*, pero parecen tener un hondo precedente en las ideas de Peirce.

177 Error en la fórmula, corregida 4 páginas después.

El *"Añadido"* (fechado 1 de Noviembre 1957) simplifica notablemente los resultados del *Rapport* y provee una disposición más simple de la prueba del teorema Riemann-Roch generalizado, que pasa a valer además para un campo de base de "característica arbitraria" [**1955-57**, 71]. Siguiendo a Hirzebruch, si $x \in K(X)$ y $C(x) = \prod(1+a_i)$ es una representación de la clase de Chern del fibrado vectorial x, se definen $ch(x) = \sum e^{a_i}$ y $T(x) = \prod(\frac{a_i}{1-e^{-a_i}})$, que resultan ser elementos de $A(X) \otimes \mathbb{Q}$ ($\approx K(X) \otimes \mathbb{Q}$) [**1955-57**, 72]. Con estas definiciones se tiene la misma fórmula generalizada Riemann-Roch (RR), $f_*(ch_X(x)T(X)) = ch_Y(f_!(x))T(Y)$[178] [**1955-57**, 73], pero su demostración adquiere ahora un carácter eminentemente estructural, exhibiendo así todo el interés técnico de la *matemática relativa* grothendieckiana.

En efecto, se tienen *propiedades naturales de transferencia* (dados $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ morfismos propios, si (RR) vale para f y g entonces vale para fg; si $g_!$ es sobreyectiva y (RR) vale para fg y g entonces vale para f; si f_* es inyectiva y (RR) vale para fg y f entonces vale para g [**1955-57**, 73]), y la prueba de (RR) puede reducirse entonces a estudiar los casos inyectivo y proyectivo por separado. El caso proyectivo corresponde a un "cálculo estándar" [**1955-57**, 73], mientras que el caso inyectivo se reduce a un hábil entramado de proposiciones particulares[179] donde sí vale (RR), que descomponen el caso general[180] [**1955-57**, 74-76]. El *Rapport* termina con un extracto de la carta central de Grothendieck a Serre (1 Noviembre 1957) donde indica que, "moralmente", la prueba reposa en el conocimiento estructural de $A(X)$ y $K(X)$.

[178] En el caso particular del fibrado tangente T_X sobre X, Grothendieck denota $T(X) = T(T_X)$.

[179] Las herramientas usadas incluyen descomposiciones ortogonales gracias a fibras, inyecciones en productos con espacios proyectivos, extensiones de variedades, ecuaciones relativas ligadas a filtraciones del espacio.

[180] Se trata de un ejemplo temprano de *dévissage* (forma de "deconstrucción" antes de tiempo), donde una proposición general se "desatornilla" en proposiciones más sencillas, que luego se vuelven a "atornillar" para producir el hecho general.

4.2 Síntesis conceptual

Los aportes principales de Grothendieck en la generalización de Riemann-Roch pueden resumirse a lo largo de tres vertientes esenciales: *(a) linealización* profunda del entorno (geometría algebraica, variable compleja, aritmética) gracias a la emergencia de las estructuras fundamentales de la K-teoría (grupo $K(X)$, anillo $A(X)$); *(b) relativización* de los resultados de Serre e Hirzebruch (haces, topología) al caso de un morfismo $f : X \to Y$ (variación de la base); *(c) naturalización* consiguiente de las transformaciones (Chern) entre K (grupos de la K-teoría) y H^* (cohomologías), ajustadas (diríamos hoy *cuantizadas*) vía clases de Todd. Nos ocuparemos del punto *(a)* en nuestra *Sección 4.3* abajo, y en esta sección nos enfocamos en *(b)* y *(c)*.

"Moralmente", al decir de Grothendieck, el punto *(a)* es central, pero *(b)* es igualmente contundente, como se indica en *Récoltes et semailles*[181], como lo reafirma Atiyah al recordar la emergencia de la K-teoría[xxxiv], y como aparece magníficamente expresado en el famoso "dibujo de los diablos" (1971, ver *Figura 4.1*). De hecho, los *tránsitos* entre variedades y las consiguientes *transformaciones naturales* entre los funtores de la K-teoría y la cohomología representan los modos de variación de los objetos (*tipos*), que permiten revelar un entronque natural (*arquetipo*) entre los hondos conceptos *armónicos* involucrados en Riemann-Roch: armonía geométrica (género), armonía compleja (enlace meromorfas / holomorfas), armonía cohomológica (dualidad de Serre), armonía lineal (K-teoría).

[181] "No habría podido, en característica $p > 0$, demostrar la fórmula de Riemann-Roch-Hirzebruch *ordinaria*, si no la hubiese generalizado primero como una fórmula hacificada para una *aplicación* propia entre variedades suaves" [**1983-86**, 4.880]; "Alrededor de mis reflexiones sobre el teorema Riemann-Roch, sentía que el enunciado correcto debía concernir, no una variedad sobre un campo, sino un morfismo propio $f : X \to Y$ (...)" [**1983-86**, 4.938].

[xxxiv] Véase M. Atiyah. *K-theory Past and Present*. URL: arXiv:math/0012213v1, p. 2.

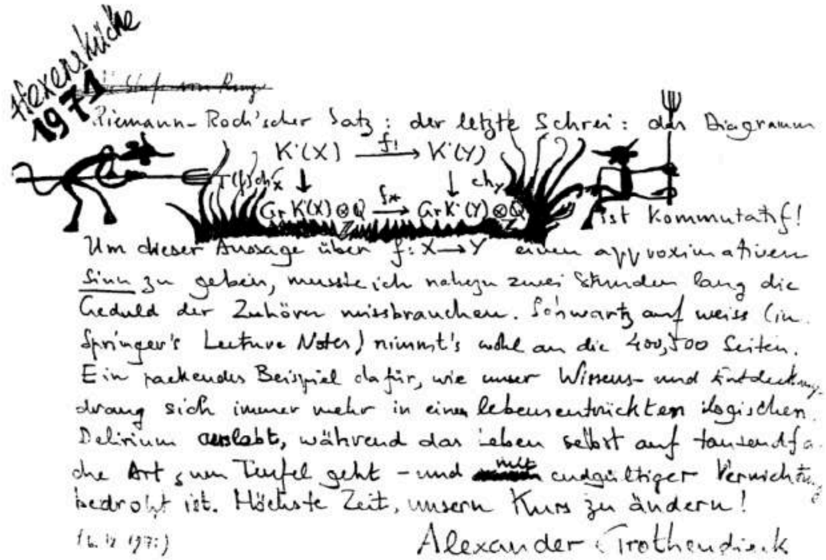


Fig. 4.1 – Coloquio de Bielefeld, 1971

El dibujo[xxxv] muestra cómo un par de diablos cocinan la conmutación del diagrama $ch_Y f_! = f_* ch_X$ (es decir, la fórmula generalizada (RR) que hemos visto en el *Capítulo 2* y en el *Añadido* del *Rapport* [**1955-57**]). Las altas llamaradas evocan la *no conmutación ingenua* de las transformaciones naturales en juego, mientras que los "diablos" insertan las clases de Todd para conseguir en cambio la conmutación deseada. De hecho, si f_*^K denota la imagen de $f : X \to Y$ bajo el funtor K, y $f_*^H : H^*(X) \to H^*(Y)$ denota la imagen de

[xxxv] La *Figura 4.1* está tomada de https://chernikov.wordpress.com/tag/grothendieck/ (*post* de Enero 29 2008). El dibujo se realiza en la época en la que Grothendieck se ha retirado del *IHES* y se lanza a su militancia ecológica. Siguiendo la traducción de Chernikov, el texto reza así: "Cocina de la Bruja 1971. Teorema de Riemann-Roch: último grito: ¡el diagrama es conmutativo! Para dar un sentido aproximado del enunciado sobre $f : X \to Y$, tuve que abusar de la paciencia de mis oyentes durante casi dos horas. Negro sobre blanco (en las *Springer Lecture Notes*) toma probablemente cerca de 400 o 500 páginas. Un ejemplo cautivante de cómo nuestra sed de conocimiento y descubrimiento se complace más y más en un delirio lógico muy alejado de la vida, mientras la vida misma se va al Infierno de mil maneras – y está bajo la amenaza de una exterminación final. ¡Tiempo urgente de cambiar nuestro rumbo!" Desde el año 1957, en el que nos encontramos por el momento, hasta la explosión "diabólica" de 1971, Grothendieck seguirá sin embargo entregando lo mejor de su vida y de sus energías a las matemáticas.

$f: X \to Y$ bajo los funtores cohomológicos[xxxvi], se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "f_*^K"] \arrow[d, "ch_X"'] & K(Y) \arrow[d, "ch_Y"] \\ H^*(X) \arrow[r, "f_*^H"'] & H^*(Y) \end{tikzcd}$$

no es conmutativo, y los morfismos de Chern no sirven *directamente* como una transformación natural entre K y H^*. En cambio, *indirectamente*, gracias a las clases de Todd que aparecen en la fórmula (RR) generalizada, sí se obtiene la conmutación[182].

En el caso particular en que Y *se reduce a un punto*[183], la fórmula de Grothendieck se reduce a la fórmula previa de Hirzebruch $f_*^H(ch_X(x)T(X)) = \sum(-1)^k dim(H^k(X,x))$ (donde x es un fibrado vectorial sobre X)[xxxvii], que, a su vez, se particulariza en la fórmula de Serre[184], expresión directa del Riemann-Roch clásico en términos cohomológicos. De esta manera, la *elevación* de una problemática concreta (Riemann-Roch original), a través

182 Este es un caso muy ilustrativo, como sucede con la *teoría de la ambigüedad* de Galois, donde una *obstrucción* revela el fondo matemático del asunto. De hecho, ciertas obstrucciones –como la *indiscernibilidad* de la raíces de un polinomio sobre un campo (*e.g.* $\pm\sqrt{2}$ indiscernibles sobre $\mathbb{Q}$), fuente de la aparición del grupo de Galois (transformaciones de los indiscernibles), o como la *no caracterización* de un espacio por su homología, fuente de la emergencia de la esfera de Poincaré (contraejemplo en homología) y de la conjetura de Poincaré (prueba en homotopía)– constituyen un manantial inagotable para programas y avances trascendentes en matemáticas.

183 De manera mucho más universal, en un entorno general de proyección, la reducción a un punto *elimina la variación posible sobre la base*, reduce la dinámica de un morfismo a la estática de un objeto, y cambia completamente *tanto la matemática* en juego (vía topos de Grothendieck), *como la lógica* subyacente (vía topos elementales). Véase nuestro *Capítulo 8* abajo.

184 Ver *Nota XXIV* arriba, p. 126. El lado izquierdo de la igualdad provee la característica de Euler del fibrado x, es decir la expresión $m - gen(f) + 1$ si x es la fibración de f sobre su superficie de Riemann, mientras que el lado derecho de la ecuación, restringido a $k = 0, 1$, provee la diferencia armónica cohomológica entre las meromorfas y holomorfas definibles sobre la superficie de Riemann de f.

xxxvi Seguimos aquí el recuento M. Karoubi. "L'influence d'Alexandre Grothendieck en K-théorie". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait.* Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 13-23, diagrama en p. 15.

xxxvii Ver ibíd., p. 15.

de nuevas mediaciones[185] (hacificación y cohomologización de Serre, topologización de Hirzebruch), lleva a un ambiente abstracto superior (K-teoría) donde se encuentran las *claves estructurales arquetípicas* de los objetos y las transformaciones en juego. Como veremos abajo (*Sección 4.3*), el paso de lo *local* (fórmula de Hirzebruch localizada en X) a lo *global* (fórmula de Grothendieck sensible a la variación $f : X \to Y$) tiene enormes consecuencias, *tanto metodológicas, como técnicas*, para el desarrollo de la matemática posterior (K-teoría topológica, teorema del índice).

La exposición de Grothendieck para el *Seminario Cartan*, "Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents" [**1957**], proporciona algunos datos complementarios sobre sus ideas en el momento. Ampliamente influenciada por el (FAC)[186] de Serre, la presentación se divide en "1. Generalidades sobre los haces algebraicos coherentes (Recordatorios)" [**1957**, 1-2], "2. Un teorema de desatornillamiento [*dévissage*]" [**1957**, 2-4], "3. Complementos de cohomología de haces" [**1957**, 4-6], "4. Resultados auxiliares sobre haces algebraicos sobre el espacio proyectivo" [**1957**, 6-7], "5. El teorema de finitud: enunciado" [**1957**, 7-8], "6. Un teorema de comparación algebraico-analítico: enunciado" [**1957**, 8-10], "7. Demostración de los teoremas" [**1957**, 10-14], "8. Haces algebraicos y haces analíticos sobre una variedad algebraica compacta" [**1957**, 14-16]. La

185 "Mixtos" diría Lautman (1934), ver A. Lautman. *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011.

186 Serre, óp.cit. El artículo "Faisceaux algébriques cohérents" (FAC, 1954-55) es posiblemente el trabajo *externo* (no propio de Grothendieck) que le llegó a lo más profundo de su sensibilidad matemática. El largo texto (82 pp., extensión más propia de Grothendieck que del mismo Serre) se divide en tres capítulos –"Haces", "Variedades algebraicas - Haces algebraicos coherentes sobre variedades afines", "Haces algebraicos coherentes sobre variedades proyectivas"– donde los haces se sitúan, por vez primera, como *llave maestra* para entender el mundo de la geometría algebraica. Grothendieck recuerda cómo "La principal, tal vez la única inspiración exterior para el súbito y vigoroso arranque de la teoría de los esquemas en 1958, fue el artículo de Serre bien conocido bajo la sigla FAC (...)" [**1983-86**, P.28, nota a pie de página]. En realidad, la inspiración debe retrotraerse a su estadía en Kansas, y la influencia ya es clara en el *Tôhoku* [**1955-56**] y en el *Rapport* [**1955-57**].

bibliografía *solo* menciona tres trabajos de Serre (FAC, GAGA, un artículo sobre variedades por aparecer), subrayando una vez más la profunda influencia de Serre en esos años[187]. En lo que respecta al entorno Riemann-Roch (*Rapport* [**1955-57**]), resultan de particular interés los siguientes temas: *(i)* generación de la categoría abeliana de haces algebraicos coherentes[188] vía subhaces irreducibles [**1957**, 2]; *(ii)* relectura cohomológica que permite construir f_* para $f : X \to Y$ continua, y estudiar las compuestas con los funtores derivados $R^q f_*$ [**1957**, 5]; *(iii)* definición y caracterización de morfismo propio [**1957**, 7], con teoremas de transferencia asociados (parte del programa grothendieckiano de la *matemática relativa*), tanto para haces algebraicos coherentes [**1957**, 8], como para haces analíticos [**1957**, 9]; *(iv)* prueba de los teoremas principales de la exposición[189], donde se combinan a fondo las técnicas idiosincráticas de Grothendieck – demostración de una propiedad para un objeto recurriendo a toda una categoría que le envuelve [**1957**, 11] y descomponiendo jerárquicamente los niveles de la categoría [**1957**, 12-13], enlace ubicuo hacificación-cohomologización-iteración [**1957**, 11-14], contrapunto con regiones diversas de la matemática[190] [**1957**, 12-13]. Una comparación con el *Rapport* detecta huellas en el camino, pero también refuerza la especificidad del documento final.

---

187 Por otro lado, aparecen varias referencias a un "Séminaire Grothendieck 1957" [**1957**, 2, 6, 7], que parece ser el espacio preliminar de envío hacia su entrada en el *IHES*.

188 Grothendieck denota $K(X)$ a esa categoría, contrariamente al uso que se da en el *Rapport* a la notación $K(X)$ como grupo de la K-teoría. Esto muestra que, en Febrero de 1957 (cuando ocurre la exposición en el *Seminario Cartan*), Grothendieck no había aún descubierto la K-teoría en forma final.

189 Las herramientas metodológicas se ajustan como un perfecto mecanismo de relojería, donde encajan sofisticados *procesos de descomposición*: *dévissage* [**1957**, 11], subrepresentación (Chow) de conjuntos algebraicos vía espacios proyectivos [**1957**, 10-11], inducción descendente en los exponentes de los funtores iterados [**1957**, 13]. El *estilo* de la escritura es, a su vez, enteramente *suave y fluido*: de manera similar a la *Tesis* [**1949-53**], Grothendieck va haciendo aparecer lemas y sublemas solo en la medida en que se necesitan *naturalmente* en las demostraciones.

190 En particular, en medio de un sublema, impacta la aparición de una "variante vectorial-topológica del teorema de Künneth" [**1957**, 12], donde se utilizan algunas propiedades de espacios nucleares de la variable compleja. Es difícil no imaginar a Grothendieck como un *gran tejedor*: nada queda aislado en su fantástica *mente correlativa*.

Hemos indicado arriba (p. 121) cómo otros dos trabajos –"Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann" [**1955a**], "A general theory of fibre spaces with structure sheaf" [**1955**]– se encuentran cerca de la emergencia de la K-teoría (y, en realidad, del álgebra homológica categórica y de la teoría de haces). Dejamos el primer artículo para nuestro *Capítulo 6* abajo[191], y revisamos ahora el Reporte Técnico inicial de Kansas [**1955**]. El trabajo, escrito en inglés, incluye una breve *Introducción* [**1955**, 1-2a] y cinco capítulos: "*Capítulo I.* Espacios fibrados generales" [**1955**, 3-15], "*Capítulo II.* Haces de conjuntos" [**1955**, 16-25], "*Capítulo III.* Espacios fibrados de grupos y haces de grupos" [**1955**, 26-38], "*Capítulo IV.* Espacios fibrados con haz estructural" [**1955**, 39-61], "*Capítulo V.* Clasificación de espacios fibrados con haz estructural" [**1955**, 62-100]. La extensión y el estilo autocontenido siguen primando, y el Reporte constituye tal vez la mejor *entrada directa* escrita por Grothendieck a la teoría de haces[192].

La *Introducción* señala la importancia de una noción general (espacio fibrado con haz estructural dado) que engloba temáticas previas (topología, geometría diferencial, variable compleja, álgebra) y que permite trabajar, de manera natural, con métodos cohomológicos asociados [**1955**, 1]. El objetivo central (y "origen del artículo") consiste en un "cuidadoso estudio de la sucesión exacta de cohomología asociada a una sucesión exacta de haces"[193] [**1955**, 2], lo que permite controlar cohomologías para subhaces y haces cociente[194]. El

---

191 Alrededor de aportes a la "geometría analítica", en un sentido bourbakista: geometría de las funciones analíticas de la variable compleja.

192 Recordamos (ver *Nota 7* arriba, p. 33) que Grothendieck defendió en su Doctorado una Tesina Secundaria sobre haces, aparentemente desaparecida. La reciente emergencia de los Archivos Grothendieck [**IMAG**] tampoco incluye ningún documento cercano a esa eventual Tesina. Tal vez el Reporte Técnico de Kansas pueda verse como una ramificación directa de esa labor secundaria doctoral.

193 El Reporte es fiel indicador del cambio realizado por Grothendieck en su *giro* hacia la geometría algebraica: "El reporte ha sido escrito sobre todo para servirle al autor en referencias futuras (...) Como el reporte consiste en una afortunada adaptación directa de nociones bien conocidas, no tuvo que superarse ninguna dificultad real y no se pretende ninguna originalidad (...) El autor solo espera que este reporte sea más agradable de leer que lo que fue escribirlo (...)" [**1955**, 2].

194 Se trata de una nueva expresión de la polaridad ubicua *inyectividad/proyectividad* en Grothendieck.

Capítulo I provee definiciones de espacio fibrado (tripla (X, E, p) con $p : E \to X$ función continua entre espacios topológicos) [**1955**, 3] y de sus variaciones (homomorfismos, imágenes directa e inversa, subespacios, cocientes, productos) [**1955**, 3-5], definición alternativa de una fibración vía cubrimientos [**1955**, 7-10], definición de secciones (inversas a derecha de p) y estudio del *funtor*[195] asociado $H^0(X, E)$ de secciones continuas [**1955**, 12-15]. El *Capítulo II* ofrece una excelente presentación autocontenida de la teoría de haces: definición de haz como espacio fibrado donde p es un homeomorfismo local[196] [**1955**, 16], definición de gérmenes de secciones de un haz [**1955**, 17] y problemática de reconstrucción del haz a partir de sus gérmenes [**1955**, 17-18], definición alternativa de haz vía cubrimientos [**1955**, 19-20], estudio de variaciones (homomorfismos de haces, subhaz, haz cociente) [**1955**, 21-22], ejemplos de haces de gérmenes en tres niveles (funciones, homomorfismos, subconjuntos) [**1955**, 24-25]. El *Capítulo III* define los espacios fibrados de grupos [*group bundles*] (espacios fibrados cuyas fibras son grupos, con operaciones que se despliegan continuamente sobre la base) y los haces de grupos [*sheaves of groups*] (fibrados de grupos que son, además, haces) [**1955**, 28], y, de nuevo, estudia sistemáticamente sus variaciones (*"sub-group-bundles and quotient-bundles, subsheaves and quotient sheaves"* [**1955**, 29-30]). Aparecen ahora, además, acciones de espacios fibrados de grupos (sobre otros espacios fibrados) [**1955**, 31] y teoremas de representación en este entorno extendido [**1955**, 32-33]. Como se puede ver, la *práctica grothendieckiana de la matemática relativa*

[195] Según escribe Grothendieck en la *Introducción*, "El aspecto funtorial de las nociones manejadas se ha subrayado a lo largo de todo el trabajo, y, como ahora parece, debería haber sido subrayado aún más" [**1955**, 1-2]. Tenemos así un registro preciso de los inicios de la *funtorialización a ultranza* a la que se abocará Grothendieck en el resto de su producción matemática.

[196] Grothendieck enfatiza que, aún si la base X es separada, el espacio desplegado E no tiene por qué serlo ("en las instancias más importantes no será separado" [**1955**, 16], en contraste con el haz de gérmenes de funciones holomorfas que sí resulta ser separado sobre la base $\mathbb{C}$ de los números complejos – véase nuestra *Nota VI* arriba, p. 33). La importancia de esta situación se tornará clara en el mundo de la *no separación*, con la invención de las técnicas que llevarán, una década después, a la resolución de las conjeturas de Weil. Ver nuestros *Capítulos 5, 7, 8* abajo.

(estudio de un concepto a través de una inspección sistemática de sus variaciones, jerarquías, representaciones, ejemplos) se encuentra ya en pleno florecimiento en el Reporte de Kansas.

El *Capítulo IV* introduce una *nueva estructura* grothendieckiana –espacio fibrado con estructura sobre otro fibrado con una acción fiel de grupos ("espacio fibrado con haz estructural")[197]– que permite *extender* nociones de fibrados principales [*principal bundles*], representaciones regulares, acciones con operadores [**1955**, 41-42], y que consigue *unificar* muy diversos manejos de la práctica matemática, alrededor de ejemplos clásicos: variedades diferenciales, analíticas o algebraicas, grupos topológicos, de Lie o algebraicos [**1955**, 42-43]. De manera similar a lo realizado en los capítulos anteriores, se caracterizan las nuevas estructuras mediante cubrimientos[198] [**1955**, 43-45], pero estas se consiguen caracterizar aquí además mediante un comportamiento *puramente funtorial* sobre fragmentos locales de las estructuras[199] [**1955**, 46-51]. El *Capítulo V*, finalmente, define los primeros grupos de cohomología $H^1(X, \underline{G})$ [**1955**, 65], los reconstruye vía cubrimientos [**1955**, 66-67], y estudia "paso por paso, de acuerdo con la exigencia de las hipótesis usadas, las

[197] Si Φ es un espacio fibrado con un haz de grupos $\underline{G}$ actuando fielmente (a izquierda) sobre X, "un *espacio fibrado de tipo estructural* Φ es un espacio fibrado E sobre X, localmente isomorfo al espacio fibrado Φ, junto con una sección del haz $G(\Phi, E)/\underline{G}$, cociente del haz $G(\Phi, E)$ de gérmenes de isomorfismos de Φ sobre E por el haz $\underline{G}$ de operadores a derecha" [**1955**, 39].

[198] Poco a poco, la noción de cubrimiento se tornará esencial en Grothendieck, hasta culminar en la aparición, tan sencilla como profunda, de las *topologías de Grothendieck* (noción sintética de recubrimiento en una categoría arbitraria). Ver *SGA* [**1960-69**], nuestro *Capítulo 8* abajo.

[199] Este aspecto funtorial local también puede verse como una anticipación (puramente analógica por el momento) de las técnicas usadas en la definición de las *topologías de Grothendieck*. Cuando se *abstraiga* suficientemente el manejo funtorial (vía funtores representables y el Lema de Yoneda, por ejemplo), se construirá el ambiente para la emergencia de los topos. Es interesante observar cómo algunas de las raíces de la honda transformación del concepto de espacio que se dará con los topos pueden retrotraerse a la *topología algebraica generalizada* del Reporte (y al comentario sobre la importancia del "aspecto funtorial de las nociones manejadas", que "debería haber sido subrayado aún más" – ver *Nota 195*). Por otro lado, una *inversión* de la situación surgirá con el *álgebra topológica generalizada* de la década de los 1980s (ver nuestra *Parte III* abajo). En cualquier caso, debe resultar patente para el lector la *continuidad* del pensamiento grothendieckiano.

definiciones y las propiedades de la sucesión generalizada exacta de cohomología [asociada a una sucesión exacta de haces]" [**1955**, 68]. Se trata de un detallado proceso de transferencias entre sucesiones exactas, cubrimientos, factorizaciones, haces, espacios fibrados con haces estructurales y grupos abstractos de cohomología H^1, que sirve de *mixto intermedio* para la emergencia de la categorización plena llevada a cabo en el *Tôhoku* [**1955-56**] y para la "moral" funtorial del *Rapport* [**1955-57**].

Terminamos esta *Sección 4.2* con una breve comparación del *Rapport* y el artículo de Borel y Serre[200] que tornó el teorema Riemann-Roch-Serre-Hirzebruch-Grothendieck accesible a la comunidad matemática[201]. Resumimos *cercanías* y *diferencias* en lo que respecta a *(i)* ideas técnicas y *(ii)* estilo. Desde el punto de vista *(i)* de las ideas técnicas, las *diferencias* ocurren en dos niveles: *(i1)* Borel y Serre enfatizan desde el comienzo la prueba en característica arbitraria [97] y señalan cómo el caso particular en característica 0 da lugar a la aproximación Hirzebruch, mientras que esos argumentos se sitúan al final del *Rapport*, *(i2)* Borel y Serre proporcionan una larga introducción a haces y haces coherentes [97-104], mientras que Grothendieck los asume conocidos (y redactados en el Reporte de Kansas, como acabamos de ver). Las *cercanías* incluyen en cambio *(i3)* el énfasis "moral" en el grupo $K(X)$ [105-106] y en el anillo $A(X)$ [108-109], *(i4)* las construcciones de f_*, $f_!$, el morfismo de Chern ch, las clases de Todd y la fórmula (RR) a la Grothendieck [110-113], *(i5)* la idea general de la prueba vía reducciones estructurales [113-115] y vía los casos proyectivo [118-119] e inyectivo [124-128].

200 Borel y Serre, óp.cit. En este parágrafo, los numerales entre corchetes cuadrados [ ] remiten a páginas del artículo de Borel y Serre.

201 A partir del "estrellato" conseguido con el teorema Riemann-Roch generalizado, Grothendieck resultará invitado como plenarista al Congreso Internacional de Matemáticos de 1958, y empezará la historia de un Maestro dedicado de lleno (*IHES*, 27 horas sobre 24...) a la comunidad matemática: un *loop* curioso que le llevará *de los márgenes al centro* (1958-1970, ver nuestra *Parte II* abajo), pero que luego se revertirá de nuevo completamente en los últimos 40 años de su vida (para el fragmento 1981-1991, ver nuestra *Parte III* abajo).

Desde el punto de vista *(ii)* del estilo, todo resulta ser en cambio *diferencia*: *(ii1)* la fluxión, la suavidad, la naturalidad del estilo de Grothendieck desaparecen en la forma recortada, distribuida, encajada de Borel y Serre, *(ii2)* el surgir de los conceptos en el discurrir del pensamiento grothendieckiano (formas *emergentes* de la creatividad) no existe en Borel y Serre, cuya escritura se encuentra meticulosamente armada *ad hoc*. Las ventajas y desventajas son claras de parte y parte: las subdivisiones y particiones de Borel y Serre (particularmente en la relojería de prueba para el caso inyectivo) otorgan una más fácil lectura *lógica*, aunque tienden a perder la armonía *matemática* del escrito de Grothendieck, el cual, por su lado, resulta complicado de seguir en el encadenamiento claro de los argumentos[202]. En el fondo, mediante la *combinación* del *Rapport* y del artículo de Borel y Serre es cómo se obtiene la visión más plena posible del teorema Riemann-Roch-Serre-Hirzebruch-Grothendieck.

4.3 Ejemplo detallado: inicios de la K-teoría

Como hemos visto[203], la intuición de la posibilidad de un Riemann-Roch generalizado queda registrada en la carta de Grothendieck a Serre (18 Febrero 1955) donde el joven postdoc de Kansas vislumbra cómo, vía espacios universales, espacios clasificadores, clases de Chern y otras, podría pensarse en un Riemann-Roch *algebraico* que extienda el Riemann-Roch *topológico* de Hirzebruch y que Serre le ha "vagamente explicado" [**1955-87**, 5]. Esto refleja el sinuoso camino de la universalización, a lo largo de regiones muy concretas de la matemática: variable compleja (Riemann-Roch clásico), haces y cohomología (Serre),

202 Aquí existe también un contraste con los escritos previos de Grothendieck, como lo hemos indicado: la claridad y la nitidez argumentativa de la *Tesis* [**1949-53**], el *Résumé* [**1953c**] o el *Tôhoku* [**1955-56**], destinados a publicación, se contraponen con el estilo más íntimo, y un poco más oscuro, del *Rapport* [**1955-57**].

203 Ver *Entorno cronológico* arriba, p. 120.

topología (Hirzebruch), álgebra y categorías (Grothendieck). Resulta fascinante observar cómo un *regreso* a una expresión geométrico-algebraica del teorema (conservando el sabor algebraico original, pero en el nivel superior de haces, cohomologías y funtorializaciones categóricas) haya debido pasar previamente por una expresión intermedia topológica, que permitió inscribir, en diagramas semiconmutativos y conmutativos, la correlación precisa de todos los términos en juego.

Por otro lado, sabemos también que, *dos años después*, en la exposición del *Seminario Cartan* sobre haces coherentes (4 y 11 Febrero 1957 [**1957**]), las estructuras esenciales de la K-teoría (grupo $K(X)$, anillo $A(X)$) no han aparecido aún[204], mientras que estas sí se encuentran ya del todo definidas y estudiadas en el *Rapport* [**1955-57**]. Puesto que en otra carta a Serre (1 Noviembre 1957), Grothendieck comenta cómo, bajo una nueva "demostración muy simple de Riemann-Roch" [**1955-87**, 57], la casi totalidad del *Rapport* resulta inútil[205], podemos colegir que este tuvo que ser escrito entre Marzo y Octubre 1957[206], y transmitido a Serre en esa época[207]. En todo caso, en Noviembre 1957, Grothendieck es ya plenamente consciente[208] de que la K-teoría posee las llaves reales para el entendimiento de Riemann-Roch. Progresivamente, emergen así las fuerzas *estructurales y arquetípicas* que gobiernan el panorama, y con las cuales múltiples especificidades locales y particulares (género, dimensión compleja, dimensión cohomológica, índice topológico, etc.) pueden verse unitariamente desde una perspectiva global y universal.

---

[204] Ver *Nota 188* arriba, p. 135.

[205] Ver *Nota 165* arriba, p. 126.

[206] Grothendieck menciona un *petit papier Riemann-Roch* (PPRR), distinto del *Rapport* (RRR), cuya redacción debió ser aún anterior [**1955-87**, 60, 62]. Algo de ello puede estar asociado a las *Notas manuscritas* sobre Riemann-Roch que han aparecido en los archivos [**IMAG**, cote 2].

[207] Sin embargo, no queda constancia de esa situación en la correspondencia, que presenta un bache largo entre Diciembre 1956 y Noviembre 1957.

[208] Rol "moral" central de $K(X)$ y $A(X)$ [**1955-87**, 57], simplificación de la prueba del teorema generalizado en el *Añadido* del *Rapport*, centrado en $K(X)$ y $A(X)$ [**1955-57**, 71-76].

Vale la pena enfatizar aquí el *cuidado*, lleno de suavidad[209], casi maternal[xxxviii], con el que Grothendieck envuelve a las nuevas estructuras emergentes: *(i)* el entorno de construcción de $K(X)$ y $A(X)$ es "agradable" y "simpático" [**1955-87**, 59], *(ii)* la caracterización axiomática de $K(X)$ y $A(X)$ se propone en un ámbito "sin obstrucciones" [**1955-87**, 60], *(iii)* $K(X)$ aparece (en el caso aún más general $K(\mathcal{C}_0)$ para una subclase de una categoría abeliana) como "solución de un *problema universal*" [**1955-57**, 42], *(iv)* $K(X)$ se puede describir suave, alternativa e isomórficamente, tanto a partir de haces coherentes, como a partir de fibrados [**1955-57**, 46]. De esta manera, en un sentido plenamente galoisiano[210], la *cualidad* suave del pensamiento estructural (grupo de Galois, grupo de la K-teoría)[xxxix] gobierna las *cantidades* concretas subyacentes (raíces, género, dimensiones).

Las ramificaciones inmediatas de la K-teoría, debidas a Atiyah entre 1959 y 1963[xl],

---

209 En *Récoltes et semailles* [**1983-86**], Grothendieck resaltará ampliamente el carácter femenino, *yin*, de su personalidad, y elaborará a partir de allí un extraordinario tratado (*Las puertas sobre el universo*, apéndice de *Récoltes et semailles*) sobre las polaridades *yin/yang* del pensamiento en general, y de la creatividad matemática en particular. Ver nuestro *Capítulo 14* abajo.

210 Grothendieck se identificará múltiples veces con Galois, hasta llegar a sentirse en algún momento como una "reencarnación" del joven genio malogrado. Ver *Récoltes et semailles*, nuestro *Capítulo 14* abajo.

xxxviii El año 1957, año de gran creatividad matemática para Grothendieck, es también el año en el que muere su madre (Diciembre 16, Scharlau, óp.cit., p. 194) y en el que encuentra a su futura mujer, Mireille, quien le consuela de su pérdida y se convierte, en cierto modo, en una nueva figura maternal (Bringuier, óp.cit., p. 46).

xxxix En el entorno de enteros algebraicos y funciones algebraicas cercano a las ideas de Galois, las construcciones de la K-teoría gobiernan estructuras centrales de la aritmética y el álgebra. Específicamente, si A es un anillo unitario, $\mathcal{M}$ es el monoide conmutativo formado por las clases de equivalencia (módulo iso) de módulos proyectivos de tipo finito sobre A y $K(A)$ es el grupo simetrizado de $\mathcal{M}$, se obtienen: *(i)* tomando A como el *anillo de enteros algebraicos de un cuerpo de números* (extensión galoisiana finita de $\mathbb{Q}$), $K(A) = \mathbb{Z} \oplus$ grupo de clases de ideales de A, *(ii)* tomando A como $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/I$ (con *I ideal de funciones algebraicas que se anulan sobre una variedad X*), $K(A) = K(X)$ grupo de Grothendieck. Véase Karoubi, "Rapport sur la K-théorie (1956-1997)", p. 636.

xl En trabajos conjuntos con Hirzebruch y Singer, ibíd., pp. 637-641.

permiten construir una K-teoría *topológica*[xli] y aplicarla al famoso *Teorema del Índice*[XXVIII]. Debe notarse aquí otra honda *inversión* en el desarrollo de los conceptos matemáticos: (1) RR clásico (Riemann-Roch) → (2) RR cohomológico (Serre) → (3) RR topológico (Hirzebruch) → (4) RR algebraico/categórico, K-teoría algebraica (Grothendieck) → (5) K-teoría topológica (Atiyah). Obsérvese que se trata de un *back-and-forth* ampliativo, que *no se reduce* a una mera dialéctica entre polaridades[211], y que está ligado a un crecimiento continuo de la creatividad[212]. En el tejido de contrapuntos entre formas numéricas y formas espaciales, el teorema de Riemann-Roch a la Grothendieck adquiere un *rol arquetípico*

[211] Dicho de otro modo, no es un círculo cerrado (tipo Hegel) tesis-antítesis-síntesis, sino una *espiral abierta* (tipo Peirce) 1-2-3(1a)... 1a-2a-3a(1b)... 1b-2b-3b... (etc.), parte de una semiosis peirceana infinita, de un *back-and-forth* cantoriano infinito, o de una ramificación riemanniana infinita.

[212] El *summum bonum* peirceano, o ideal regulativo de la estética, es el "crecimiento continuo de la potencialidad" (ver Zalamea, óp.cit., pp. 65, 111). Nos adentraremos en el papel de la estética y la belleza para la obra de Grothendieck al revisar sus ideas sobre el tema en *Récoltes et semailles* y en *La clef des songes* (nuestros *Capítulos 14, 15* abajo), pero sobre todo al desarrollar nuestras consideraciones transversales en la *Parte IV*.

[xli] Con los términos de la *Nota xxxix*, página precedente, al considerar el anillo A de las *funciones continuas sobre un espacio compacto* X (a valores reales o complejos) se obtiene la K-teoría topológica.

[XXVIII] El teorema (Atiyah-Singer 1963) combina *(i)* un enunciado de gran sencillez y universalidad (enlace preciso de transferencias y obstrucciones en el dominio de las ecuaciones elípticas), *(ii)* una colección de pruebas muy diversas, provenientes de ámbitos aparentemente contrastantes de la matemática (teoría de Riemann-Roch, K-teoría, cobordismo, ecuación del calor, etc.), *(iii)* una notable irradiación hacia un espectro matemático muy amplio (ecuaciones diferenciales, física matemática, análisis funcional, topología, variable compleja, geometría algebraica). En términos conceptuales latos, el *Teorema del Índice* enuncia que el balance entre tránsitos y obstrucciones en ciertos cambios de la naturaleza está completamente caracterizado por la *geometría* del entorno donde se realiza el cambio. En términos más precisos, dado un operador diferencial elíptico ("cambio"), el índice ("balance") –definido como el número de soluciones ("tránsitos") menos el número de restricciones ("obstrucciones") del operador– está completamente determinado por adecuados invariantes topológicos ("geometría del entorno"). En términos aún más acotados, si nos damos un operador diferencial elíptico D, y si definimos el *índice analítico* de D por $ind_{ana}(D) = dimKer(D)–dimCoker(D)$ (núcleo $Ker(D)$: "soluciones", es decir, funciones armónicas; conúcleo $Coker(D)$: "obstrucciones", es decir, restricciones en ecuaciones no homogéneas del tipo $Df = g$), el teorema del índice afirma que el índice analítico puede caracterizarse mediante un *índice topológico*, $ind_{top}(D)$, ligado a invariantes puramente cohomológicos del entorno geométrico del operador. La presencia ubicua de los operadores diferenciales elípticos en matemáticas –*e.g.* operador de Laplace ($\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, asociado a la ecuación del calor), operador de Toeplitz (dada f continua, tomar parte holomorfa en la multiplicación de f por holomorfa, asociado a las ecuaciones de Cauchy-Riemann), operador de Fredholm (derivación en los fibrados tangentes de una variedad, asociado a ecuaciones de elipticidad en las fibras)– asegura la irradiación del teorema. Un hecho de sumo interés consiste en observar cómo las soluciones y las obstrucciones, que son completamente inestables por separado (gran variación local de las ecuaciones diferenciales), resultan ser no obstante estables en su diferencia (unificación global de los índices).

especial, ya que prueba cómo un nuevo concepto de mediados de la matemática del siglo XX –la noción de *haz*– consigue proyectarse a la vez sobre el número (dimensión algebraica) y el espacio (género topológico). En realidad, la unificación del *espacio-número* en la K-teoría, con su enorme irradiación matemática y física a través del Teorema del Índice, debería considerarse como un aporte del mismo calibre que la unificación del *espacio-tiempo* en la teoría de Einstein.

Los vaivenes entre el álgebra y la topología, entre número y espacio, primordiales desde Poincaré, serán igualmente cruciales en la obra de Grothendieck. De hecho, podríamos muy *grosso modo* catalogar los años 1958-1970 (*Parte II* abajo) alrededor de una alta *topología categórica* con consecuencias profundas en la aritmética (topos *étale* de un esquema y conjeturas de Weil), y los años 1980-1990 (*Parte III* abajo) alrededor de otra alta *álgebra topológica* con consecuencias aritméticas sorprendentes (torre de Grothendieck-Teichmüller y geometría anabeliana de los *espacios moduli*).

Parte II

1958–1970

5

The cohomology theory of abstract algebraic varieties (1958)

La Conferencia de Edimburgo, en el Congreso Internacional de Matemáticos [**1958**], constituye otro *giro mayor* en la visión grothendieckiana. Si Grothendieck sitúa en 1955 su "giro crucial" hacia la geometría algebraica, con los grandes monumentos del *Tôhoku* [**1955-56**] y del *Rapport* [**1955-57**], su conferencia de 1958 otorga otra apertura, aún más ambiciosa, donde vislumbra una armazón arquitectónica que renovará completamente los fundamentos de la geometría algebraica. Aparecen entonces los *esquemas*, que permiten extender y suavizar muchas técnicas algo rígidas de las variedades algebraicas. En particular, los movimientos de base sobre los esquemas resultan fundamentales. Un sintético *par de líneas* en la segunda página de la conferencia ofrece una asombrosa visión del mundo *étale*, entronque profundo de Galois y Riemann, que se desarrollará extensamente con los esquemas (*EGA* [**1959-64**]) y con los topos (*SGA* [**1960-69**]), y que, bajo la construcción del *topos étale de un esquema*, proveerá la llave cohomológica para conseguir resolver las conjeturas de Weil ¡quince años y miles de páginas después de la conferencia!

5.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

El *International Congress of Mathematicians*, realizado en Edimburgo entre el 14 y el 21 de agosto 1958, bajo la tutela de William Hodge como coordinador del Comité Científico, es el ambiente oficial donde se reconoce a Grothendieck como uno de los matemáticos jóvenes más dotados del momento[213]. En 1958, a la sazón con 30 años, Grothendieck posee varios trabajos que ocuparían las vidas de muchos matemáticos, ha sido señalado al final de su *Tesis* [**1949-53**] como el mayor especialista mundial en espacios vectoriales topológicos (ver *Nota viii* arriba, p. 47), y ha sido promulgado como "*vedette*" con su prueba generalizada de Riemann-Roch [**1955-57**] (ver *Nota 163* arriba, p. 121). El recorrido resulta ser del todo notable, pero, no obstante, al efectuar en *Cosechas y siembras* un recuento de su carrera, el mismo Grothendieck considera 1958 como un año aún más excepcional:

> El año que siguió a ese intermedio[xlii] (1958) es tal vez el más fecundo de todos en mi vida de matemático. Es en ese año donde se sitúa la eclosión de dos temas centrales de la nueva geometría, con el fuerte arranque de la *teoría de los esquemas* (tema de mi exposición en el Congreso Internacional de Matemáticos de Edimburgo, en el verano de ese mismo año), y la aparición de la noción de «*sitio*», versión técnica provisional de la noción crucial de *topos*. Con una distancia de cerca de treinta años, puedo decir ahora que es el año donde verdaderamente nació la visión de la geometría nueva, en la estela de las dos herramientas madre de esa geometría: los esquemas (que representan una metamorfosis de la antigua noción de «variedad algebraica») y los topos (que representan una metamorfosis, más profunda aún, de la noción de espacio) [**1983-86**, P.24, nota inicial].

213 Grothendieck es uno los plenaristas del Congreso. La Medalla Fields se otorga en Edimburgo a Roth y Thom, Grothendieck la recibirá 8 años después.

xlii Se trata de un periodo de duda después de la muerte de su madre, el 16 de diciembre de 1957. Grothendieck se cuestiona si debe dejar las matemáticas (!) y seguir los pasos de su madre como escritor. Ver Bringuier, óp.cit., p. 46, Pradeau, óp.cit., p. 78., A. Jackson. "*Comme Appelé du Néant.* As if Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck". En: *Notices AMS* 51.4,10 (2004), págs. 1038-1056, 1196-1212, p. 1047.

Después de conseguir superar la tristeza ocasionada por la muerte de su madre, el año 1958 se torna en un periodo de pasiones: matemáticas (esquemas y sitios), amorosas ("descubrimiento de las mujeres"[xliii]), políticas (descubrimiento de un anarquismo alternativo y de la acción ecológica)[xliv]. La energía de Grothendieck explota, y es sabroso volver a vivir sus ardores irreprimibles del momento, cuando recuerda socarronamente una anécdota del Congreso:

> En un momento, Hirzebruch dejó entender que las matemáticas se hacían sobre todo por el trabajo de los jóvenes, más que por aquel de los matemáticos maduros. Estuve encantado y muy de acuerdo por supuesto, tenía justo treinta años, podía aún pasar por joven y ¡el mundo me pertenecía! En mi entusiasmo, debí gritar fuerte y lanzar grandes golpes sobre la mesa. Resulta que me encontraba sentado al lado de Lady Hodge, la esposa del eminente matemático que se honraba en esa ocasión, ya cerca de su retiro. Se giró hacia mí con los ojos bien abiertos y me dijo algo, que he olvidado – pero debí ver reflejada, en sus ojos asombrados, la grosería desprovista de tacto que se había desencadenado ante esa dama al final de su vida. Sentí entonces algo, que el término «vergüenza» da una imagen tal vez deformada – más bien una descarnada verdad sobre quién era yo en ese momento. No pude dar más golpes sobre la mesa ese día... [**1983-86**, 1.33].

Nos encontramos sin duda ante un gran idealista, limpio, tosco, ingenuo, honesto, impulsado por los *fuertes vendavales* de la vida y del conocimiento[xlv].

Por otro lado, desde el punto de vista de la genealogía interna de los conceptos matemáticos, el impulso para la aparición de los esquemas y los sitios resulta ser la construcción de un *entorno aritmético-algebraico-topológico-categórico muy general donde se puedan sumergir naturalmente* las conjeturas de Weil (1949). Como veremos más adelante en esta sección, el enlace entre las conjeturas de Weil, la búsqueda de una cohomología

---

[xliii] Ver Pradeau, óp.cit., p. 80. Encuentro con Mireille Dufour.

[xliv] Ver Douroux, óp.cit., pp. 139-142.

[xlv] Karin Tate recuerda otro ejemplo de su enérgico y maravillosamente ingenuo idealismo, cuando, al visitar por vez primera Harvard con Mireille en 1958, Grothendieck le ofrece *Moby-Dick* a su mujer ¡para mejorar su conocimento débil del inglés! Ver Jackson, óp.cit., p. 1047.

fina para abordarlas y la *visión* de que esa cohomología se podrá obtener mediante el desarrollo de las profundas herramientas de una “geometría nueva” –esquemas y topos– conforma una de las más asombrosas intuiciones prospectivas de la matemática del siglo veinte.

Resumen mínimo.

The cohomology theory of abstract algebraic varieties [**1958**] es el texto correspondiente a la conferencia plenaria pronunciada[xlvi] por Grothendieck en el *ICM* de Edimburgo. Dado el límite de páginas para una tal presentación, el autor adopta en el escrito un tono conciso y restringido, inusual para él. Sin embargo, el resultado es fascinante, pues Grothendieck se concentra en resaltar *ideas y problemas*, alrededor de una *gran visión* que le tomará una década en especificar completamente. A continuación, presentamos un resumen corto del texto (los números entre corchetes cuadrados envían a las páginas de [**1958**]), que ampliamos más abajo en nuestra descripción más extensa.

Influencia de Serre (*FAC* 1955)[214]: “Esbozo breve de algunas ideas y resultados” que *“inundarán” a la geometría algebraica “en los próximos años, desde los fundamentos hasta sus partes más avanzadas”* [103]. Tópicos centrales de la investigación cohomológica en geometría algebraica: *(I)* cohomología de Weil [103-104], *(II)* cohomología de haces algebraicos coherentes [104], *(III)* aplicaciones de la cohomología al álgebra local [104-105].

214 Serre, óp.cit.

xlvi En perfecto inglés, para felicidad de Sir William Hodge, bastante inquieto por la delegación francesa. Ver Pradeau, óp.cit., p. 84.

Tema (I). Influencia de Weil (*ICM* 1954)[215]: "Necesidad de una teoría cohomológica para variedades algebraicas abstractas" (coeficientes suaves, en característica 0, y propiedades formales, tipo Lefschetz) para darle sentido preciso a las conjeturas de Weil [103]. Obstrucciones en el paso de característica p a característica 0 (programa de Serre): fallas con haces sobre la topología de Zariski (obstrucción en característica), fallas con haces de vectores de Witt (obstrucción en generación finita). Necesidad de grupos de cohomología "verdaderos" [103]. "La cohomología de Weil debe ser definida por medio de una aproximación completamente diferente": "*conexiones entre cohomología de haces y cohomología de grupos de Galois, por un lado, y clasificación de cubrimientos no ramificados de una variedad, por otro lado*" (enlace entre Galois y Riemann, posteriormente denominado *étale*) [104]. "No he iniciado estas investigaciones seriamente aún" [104].

Tema (II). "Riqueza de nuevos métodos y nuevas nociones", siguiendo a Serre. *(a)* teoremas de finitud y comportamiento asintótico, *(b)* teoremas de dualidad y de residuos, *(c)* teoremas tipo Riemann-Roch, *(d)* resultados sobre variedades abelianas [104].

Tema (III). "Métodos esencialmente debidos de nuevo a Serre". Caracterización de anillos locales regulares, teoría de intersecciones "realmente satisfactoria por su sencillez algebraica y su generalidad". Teoría de dualidad local (formas diferenciales y residuos en contextos algebraicos generales) [105]. Pasos generales de lo local a lo global [105].

La continuación de la Conferencia [**1958**] está dedicada a "dar algunas ideas principales sobre el segundo tema, es decir, la teoría cohomológica de los haces algebraicos coherentes" [105]. "El espectro natural de las nociones y métodos usados en geometría algebraica no es realmente el de las variedades algebraicas", sino el de los *esquemas* [105-106], donde se trabaja con enunciados sobre anillos arbitrarios (conmutativos con unidad,

215 A. Weil. "Abstract versus classical algebraic geometry". En: *Proc. Int. Cong. Math. Amsterdam.* 1954, págs. 550-558.

y noetherianos si es el caso) [105]. Variación de variedades (afines) sobre un anillo [106]. Extensión: la variación de variedades abstractas sobre un anillo (característica arbitraria) da lugar a una correcta definición de esquemas (con nilpotentes admisibles, allende Nagata y Chevalley, base para un desarrollo eventual de un cálculo diferencial): *(i) esquemas afines*: haces de anillos locales sobre el espectro de ideales primos del anillo; *(ii) pre-esquemas*: haces topológicos localmente de tipo *(i)* ("el principio de la definición correcta se encuentra de nuevo en Serre"); *(iii) esquemas*: pre-esquemas con condición adicional de separación [107]. Productos de esquemas y productos tensoriales de álgebras [107]. Re-entendimiento de la geometría algebraica "usual" como el estudio de esquemas separados noetherianos con condiciones de tipo finito [107]. Las propiedades de variedades (*e.g.* variedad completa) se codifican en propiedades de morfismos entre esquemas (*e.g.* morfismo propio) [107]. *Máxima suavidad obtenida con respecto a las operaciones de la teoría de haces* [107].

Subtemas específicos dentro del *Tema II. (II-c).* "El teorema de Riemann-Roch, demostrado independientemente por Washnitzer y por mí en geometría algebraica abstracta se expondrá por Hirzebruch en este congreso" [107-108]. *(II-a).* "Resultados principales en la teoría cohomológica de morfismos de esquemas": cálculo específico de los grupos de cohomología "en el sentido general del álgebra cohomológica en categorías abelianas" [108-110]. Pruebas por reducciones sucesivas e inducciones decrecientes: interés y necesidad de los métodos cohomológicos [110]. *Riqueza de la vía geométrica, natural y general* [111-112]. *(II-b).* "Teoremas de dualidad": extensiones de trabajos de Poincaré, Serre, Cohen-Macaulay [112-115].

"Problemas abiertos" [115-117]: "es tal vez muy pronto, ya que las nuevas técnicas disponibles no se han ensayado aún con suficiente seriedad" [115]. *Problema A* (Kodaira): homología trivial en el caso de ciertos espacios fibrados [115-116]. *Problema B*: funtores derivados triviales en el caso de ciertos morfismos propios [116] – "Intuición heurística desde el punto de vista de los esquemas" [116]. *Problema C*: condiciones para reducciones puntuales de morfismos [116]. *Problema D*: propiedades de permanencia para esquemas de grupos [116-117]. *Problema E*: en esquemas, construcción de analogías con variedades de Picard – "la vía más simple concebible de cambios de base"; búsqueda, vía nilpotentes, de una estructura infinitesimal, "ni siquiera obtenida aún en el caso clásico" [117].

"El trabajo ha ya comenzado y será llevado a cabo en un *tratado sobre Geometría Algebraica que, se espera, será escrito en los próximos años por J. Dieudonné y por mí*, y que debe proveer un recuento sistemático de todas las preguntas mencionadas en esta charla" [117] (*EGA* [**1959-64**], por venir). *Bibliografía* [117-118]: Auslander & Buchsbaum, Barsotti, Borel & Serre, Cartier (2 entradas), Chevalley & Cartan, Godement, Grothendieck (3), Nagata, Rosenlicht, Serre (7), Tate, Washnitzer, Weil (2), Zariski (2).

Descripción más extensa.

La *Conferencia ICM* [**1958**] se encuentra dividida en cinco secciones bien definidas (no numeradas por Grothendieck, pero distinguidas por líneas en blanco entre las partes): *(1)* anuncio de una renovación de la geometría algebraica, comentarios sobre la problemática de las conjeturas de Weil, visión del camino para construir una adecuada cohomología que pueda resolver las conjeturas ("objetivo inicial") [**1958**, 103-104], *(2)* resumen de líneas de trabajo en la cohomología de haces algebraicos coherentes ("segundo tema central") [**1958**, 104], *(3)* resumen de líneas de trabajo en la aplicación de métodos cohomológicos al álgebra local ("tercer tema central") [**1958**, 104-105], *(4)* precisiones sobre el segundo tema central: definiciones de esquema y nociones conexas [**1958**, 105-107], comentarios sobre Riemann-Roch y variedades abelianas [**1958**, 107-108], enunciados e ideas de prueba de resultados sobre finitud, comportamiento asintótico y dualidad [**1958**, 108-115], *(5)* discusión sobre problemas abiertos [**1958**, 115-117].

(1). Grothendieck empieza comentando cómo "hace menos de cuatro años que los métodos cohomológicos fueron introducidos en Geometría Algebraica en el artículo fundamental de Serre [FAC], y ya parece seguro que inundarán esta parte de las matemáticas en los próximos años, desde los fundamentos hasta sus partes más avanzadas"[216] [**1958**, 103]. Grothendieck continúa explicando cuál es el objetivo central buscado con la introducción de métodos (co)homológicos en geometría algebraica:

> La necesidad de una teoría cohomológica para variedades algebraicas "abstractas" fue primero enfatizada por Weil, para poder dar un sentido preciso a sus célebres conjeturas en Geometría Diofántica. Por lo tanto, el objetivo inicial era el de encontrar la *"cohomología de Weil" de una variedad algebraica*, que debería tener como coeficientes algo "al menos tan bueno" como un campo de característica 0, y tener buenas propiedades formales (*e.g.* dualidad, fórmula de Künneth) para proporcionar el análogo de la "fórmula de punto fijo" de Lefschetz [**1958**, 103].

Se delinea así un panorama general bastante claro: las conjeturas de Weil[XXIX] deben *traducirse* a un entorno (co)homológico para campos finitos, donde debería poder encontrarse una *suavización* similar a la fórmula de Lefschetz[XXX] válida para coeficientes racionales[217].

[216] Vemos así, de entrada, una aparentemente ingenua declaración de entusiasmo, proferida, en la primera línea de una conferencia plenaria impartida a la máxima instancia de la comunidad matemática (*ICM*), por el joven "incontrolable" (palabras de Thom) que daba golpes sobre la mesa ante una atónita Lady Hodge... El tiempo mostrará que la declaración no era nada *ingenua*, sino llena de un *ingenio* visionario poco común.

[217] La *finitud* en las extensiones algebraicas de campos de característica p constituye una *obstrucción* profunda para obtener un cálculo diferencial o una cohomología natural. El deseo de superar esa formidable

[XXIX] A. Weil. "Numbers of solutions of equations in finite fields". En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), págs. 497-508. Entronque preciso entre lo discreto y lo continuo, las conjeturas intentan contar el número de puntos en ciertas variedades algebraicas sobre campos finitos, mediante ciertas funciones generadoras del tipo de las funciones Zeta, provenientes de la intuición continua complejo-topológica de Riemann. Dwork (1960) demuestra la racionalidad de las funciones Zeta, Grothendieck (1966) la ecuación funcional que las gobierna y Deligne (1974), el mayor alumno de Grothendieck, la adecuada distribución de sus ceros (lo que da lugar al control combinatorio de los puntos en la variedad). El resultado de Deligne es un verdadero *tour de force* técnico que le valdrá la Medalla Fields (1978), pero que le distanciará de Grothendieck, dada, según este, la "artificialidad" de la prueba de su discípulo – ver abajo *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14*.

[XXX] Si $f : X \to X$ es una función continua sobre un espacio X compacto, triangulable, la fórmula de Lefschetz *cuenta* el número de puntos fijos de f mediante ciertas trazas sobre los grupos de homología: $\sum_{x\in FIX(f)} i(f,x) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k Tr(f_* \restriction H_k(X,\mathbb{Q}))$ (donde $i(f,x)$ es el índice de f en x, intuitivamente, el número de giros de f alrededor de x). Mediante la fórmula de Lefschetz se intuye cómo un conteo de puntos en una variedad (lado izquierdo de la ecuación) está ligado al entendimiento de su homología (lado derecho).

Grothendieck pasa luego a explicar las dos estrategias propuestas por Serre para intentar superar la obstrucción de los coeficientes en característica p y construir esa cohomología de Weil: *(i)* usar una topología de Zariski[XXXI] que finalmente no evade los problemas de la característica, *(ii)* usar coeficientes sobre haces de vectores de Witt[XXXII], lo que resuelve las obstrucciones de característica, pero introduce problemas de no generación finita en los módulos asociados [**1958**, 103].

Vienen entonces las asombrosas líneas donde Grothendieck vislumbra todo su programa futuro:

> (...) Parece seguro ahora que la cohomología de Weil debe ser definida por una aproximación completamente diferente. Una tal aproximación recientemente se me reveló por las *conexiones entre la cohomología de haces y la cohomología de grupos de Galois, por un lado, y por la clasificación de los cubrimientos no ramificados de una variedad, por otro lado* (tal como se explica, poco sistemáticamente, en el tentativo artículo mexicano de Serre[218]), y por la idea de Serre de que un "razonable" espacio fibrado algebraico principal con grupo estructural G, definido sobre una variedad V, si no es trivial, debería poder trivializarse localmente gracias a algún cubrimiento de V *no ramificado* sobre un punto dado de V. Este ha sido el punto de partida de una definición de la cohomología de Weil (involucrando tanto una cohomología "espacial", como una cohomología de Galois), que parece ser la correcta, y que ofrece sugestiones claras de cómo las conjeturas de Weil pueden atacarse con la maquinaria del Álgebra Homológica [**1958**, 104, énfasis de Grothendieck].

obstrucción lleva a Grothendieck a intuir la existencia de una nueva cohomología ("étale" – ver más abajo) que actúa, para característica p (finitud), de la misma manera *suave* como la cohomología usual actúa en característica 0 (infinitud).

218 J.-P. Serre. "Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p". En: *Symp. Int. Top. Alg.* Mexico, 1958, págs. 24-53.

XXXI La topología de Zariski (1952) propone una topología natural en una variedad algebraica afín ($V \subseteq k^n$), al tomar como *cerrados* de la topología los conjuntos *algebraicos* (conjuntos de raíces, $V(S) = \{x \in V : f(x) = 0\ \forall f \in S\}$, donde $S \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$). En el caso de una variedad algebraica abstracta, Grothendieck pasa a través del espectro de la variedad (conjunto de ideales primos del anillo subyacente), y considera la topología de Zariski sobre el espectro. Ver la noción de *esquema* más abajo.

XXXII Los vectores de Witt (1936) consiguen representar la suma y el producto de números p-ádicos (series formales infinitas), vía una estructura natural de vectores infinitos (anillo de Witt). Esto permite, en el límite, un tránsito entre característica p (campos finitos de Galois sobre F_p) y característica 0 (anillo de Witt sobre F_p).

Las dos líneas (!) enfatizadas por Grothendieck contienen ya *in nuce* todo el programa para construir la cohomología de Weil, *entroncando ideas algebraicas a la Galois e ideas geométricas a la Riemann.* Como veremos más abajo, en la *Sección 5.3*, este es el inicio del entendimiento de la cohomología *étale*, que resultará ser el ingrediente central para resolver las conjeturas de Weil. Como lo sugiere Grothendieck en el párrafo anterior, la clave será enlazar un fragmento de lo galoisiano (separabilidad, *no* multiplicidad de las raíces) con un fragmento de lo riemanniano (*no* ramificación), y estudiar la *estructura sofisticada (esquemas + topos) de esa negación combinada, aritmética y espacial.*

(2). Después de indicar que "esas investigaciones no se han comenzado seriamente aún" y que, en la *Conferencia ICM*, "no se dirigirá más hacia la cohomología de Weil"[219] [**1958**, 104], Grothendieck pasa a resumir las ideas del "segundo tema central", alrededor de la teoría cohomológica de haces algebraicos coherentes [**1958**, 104]. Se refiere una vez más a Serre como iniciador de la teoría, y explica cómo ciertos resultados aparentemente alejados de la teoría de haces, como el lema de Zariski sobre funciones holomorfas[XXXIII] y sus variantes, recaen dentro de la teoría[220], con enunciados "más satisfactorios" demostrables mediante "métodos uniformes elementales" [**1958**, 104]. Luego, Grothendieck realiza una lista de los puntos esenciales del "segundo tema central" de la *Conferencia ICM*: "*(a)* Teoremas de finitud generales y de comportamiento asintótico, *(b)* Teoremas de dualidad,

219 Labor a realizarse en *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**]. Ver nuestros *Capítulos 7, 8* abajo.

220 Esto muestra de nuevo la estrecha conexión de la variable compleja con la obra grothendieckiana. El hecho de que la teoría de Zariski sobre funciones holomorfas abstractas se convierta en un caso especial de la teoría de los esquemas muestra la coherencia continua de algunos temas centrales en el pensamiento de Grothendieck. La suavidad y la variable compleja estarán siempre en su mente.

XXXIII El resultado de Zariski (1949) permite construir una teoría de funciones holomorfas sobre una variedad algebraica general, y, en particular, permite transportar la holomorfía de los puntos racionales a los puntos genéricos de la variedad. Pierre Samuel presentó en el *Seminario Bourbaki*, en Diciembre 1953, una comunicación sobre "las funciones holomorfas abstractas de Zariski", ver P. Samuel. "Les fonctions holomorphes abstraites de Zariski". En: *Séminaire N. Bourbaki* 86 (1953), págs. 335-343. En ese momento, Grothendieck se encuentra en Francia, después de su primer semestre en São Paulo, y puede haber asistido a la exposición de Samuel.

incluyendo (o respectivamente idénticos con) una teoría cohomológica de residuos, *(c)* Teorema de Riemann-Roch, incluyendo la teoría de clases de Chern para haces algebraicos coherentes, *(d)* Algunos resultados especiales, sobre todo concernientes a las variedades abelianas" [**1958**, 104].

(3). El "tercer tema central consiste en la *aplicación de métodos cohomológicos al álgebra local*" [**1958**, 104, énfasis de Grothendieck]. Por tercera vez, se señala cómo "el uso sistemático de esos métodos se debe de nuevo sobre todo a Serre" [**1958**, 104-105]. Se enfatiza "la posibilidad de dar (por primera vez como parece) una *teoría de intersecciones*, realmente satisfactoria por su sencillez algebraica y su generalidad"[221] [**1958**, 105], que permite explicar el hecho particular (Serre) de que los anillos locales regulares son los únicos de dimensión cohomológica global finita [**1958**, 105]. Grothendieck apunta a "varios resultados que he obtenido mediante una *teoría de dualidad local*, que parece ser la herramienta para reemplazar las formas diferenciales en el caso de características diferentes, y proporciona, en el contexto general del álgebra conmutativa, una clarificación de la noción de residuo, hasta ahora no bien entendida"[222] [**1958**, 105]. El problema esencial resulta ser entonces el *paso de lo local a lo global*[223], tanto para singularidades y fórmulas de tipo Lefschetz módulo p, como para saltos de dimensión en anillos de Krull[XXXIV].

---

221 Debe subrayarse la *satisfacción* obtenida con la sencillez y la generalidad, dos de las *tonalidades* buscadas sistemáticamente por Grothendieck. Se trata de un *oído* y un *ojo* realmente satisfechos por una *templanza armónica* general, donde la sencillez y la suavidad gobiernan la música del intelecto.

222 Se pueden intuir aquí las simientes de la *geometría diferencial sintética* que, en los años setenta y ochenta, se desarrollará bajo el impulso de Lawvere, Kock, Reyes y otros. Ver I. Moerdijk y G. Reyes. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* New York: Springer, 1991.

223 Tema central en la obra de Lautman, óp.cit.

XXXIV Un anillo de Krull (1931) puede caracterizarse como un dominio de factorización única en el que los ideales primos de altura 1 (*i.e.*, que no contienen ningún otro ideal primo entre (0) y él mismo) son principales. Esto permite realizar una "buena" (suave) teoría de factorización en el anillo. Todo dominio de Dedekind (dominio integral donde los ideales son producto de primos) es un anillo de Krull; el anillo $\{f \in \mathbb{Q}[X] : f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}\}$ no satisface ciertas condiciones de cadena ascendente y no es un anillo de Krull. Grothendieck asegura que, en el entorno de los anillos de Krull, lo "local" en dimensión $n+1$ da lugar a resultados "globales" en dimensión n [**1958**, 105].

(4). El texto de la conferencia se dirige luego a "dar algunas de las ideas centrales en el segundo tema, esto es, la teoría cohomológica de los haces algebraicos coherentes" [**1958**, 105]. Grothendieck señala ante todo que el "entorno natural de las nociones concernidas, y los métodos usados, no es en realidad el de las variedades algebraicas" sino el de sus "anillos de coordenadas", que, para muchos enunciados generales, pueden "asumirse ser solo anillos conmutativos unitarios, sometidos a veces a alguna restricción suave, como ser noetherianos[XXXV], por ejemplo" [**1958**, 105]. Detrás de esta extensión a anillos arbitrarios (conmutativos unitarios), Grothendieck explica uno de los puntos esenciales de su nueva visión:

> Geométricamente, esto significa que, en vez de considerar una única variedad algebraica afín V (definida por A), consideramos una "función regular" o un "morfismo" de V en otra variedad afín W, y las propiedades de la variedad V se generalizan entonces a propiedades del morfismo $V \to W$ (la noción "absoluta" para V obteniéndose entonces de una noción "relativa" más general, al reducir W a un punto)[224] [**1958**, 106].

En un segundo nivel de abstracción, así como los anillos responden primero a las variedades algebraicas afines, Grothendieck afirma que "se puede encontrar una adecuada generalización de variedades algebraicas arbitrarias (definidas sobre un campo arbitrario)" [**1958**, 105]. Es el inicio de la definición de *esquema*[225]. Grothendieck menciona a Nagata, Chevalley y Serre en el camino hacia la "definición correcta" [**1958**, 106]: *(i)* dado un

224 La emergencia explícita del tema absoluto/relativo es el puntal inicial de toda una "manera" que cubrirá la década larga 1958-1970.

225 En la *Conferencia ICM* aparecen definiciones iniciales que luego se desarrollarán muy extensamente en los *EGA* [**1959-64**]. Mencionamos aquí las definiciones originales como registro histórico, pero luego pasaremos (ver nuestro *Capítulo 7* abajo) a analizar las definiciones estándar que se han mantenido en el tiempo.

XXXV Un anillo conmutativo unitario es noetheriano si las cadenas ascendentes de ideales se estabilizan. Equivalentemente, esto significa que todo ideal es finitamente generado. Se trata por tanto de una condición doble de *suavidad*, tanto en los límites, como en la generación finita. Los campos, los dominios de ideales principales, el anillo de coordenadas de una variedad afín son anillos noetherianos; el anillo de enteros algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ o el anillo de polinomios en infinitas variables sobre un campo k no son noetherianos.

anillo A conmutativo (unitario), su espectro $Spec(A)$ formado por los ideales primos es un espacio topológico de manera natural[226], *(ii)* existe un haz de anillos definidos sobre $Spec(A)$, cuya fibra sobre P es el anillo local A_P[XXXVI] (llamaremos aquí a este haz, "haz de representación del anillo A"; en *EGA* [**1959-64**] se le llamará "esquema afín"), *(iii)* "un *pre-esquema* es un espacio topológico X con un haz de anillos $\mathcal{O}_X$ sobre X, llamado su *haz estructural*, tal que para cada punto de X se tenga una vecindad abierta isomorfa a algún $Spec(A)$"[227] [**1958**, 106], *(iv)* un morfismo $f : X \to Y$ entre pre-esquemas es una función continua $f : X \to Y$ con un homorfismo correspondiente $f^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ que preserva los ideales maximales sobre las fibras[228] [**1958**, 106], *(v)* un *esquema* es un pre-esquema con una "ligera condición de separación" [**1958**, 106], que se puede obtener observando ciertos productos dentro de la categoría entera de los pre-esquemas[229].

Grothendieck considera la categoría de *morfismos* de (pre)esquemas $f : X \to S$ *sobre un (pre)esquema fijo* S[230], destaca la idea de que "S juega el papel de un campo subyacente" (o base) [**1958**, 107], e introduce nociones de noetherianidad y de tipo finito para esos morfismos [**1958**, 107]. Entonces, "la mayoría de las nociones y los resultados de la Geometría Algebraica usual pueden ser ahora enunciados y probados en este nuevo

226 Esto es, "de manera clásica" [**1958**, 106], vía la topología de Zariski, cuyos cerrados están formados por ideales primos que contienen un subconjunto dado de A. Para la situación general, ver *Nota XXXI* arriba, p. 155.

227 Así, un pre-esquema puede describirse como un haz de anillos que se comporta localmente como el haz de representación de un anillo, o, equivalentemente, puede presentarse como un haz-pegamiento de haces de representaciones de anillos. Se trata de una *iteración* –haz de haces– a menudo central en el pensamiento grothendieckiano.

228 Es decir, $f^* : \mathcal{O}_{Y,fx} \to \mathcal{O}_{X,x}$ envía el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y,fx}$ en el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

229 Esta es una más de las técnicas grothendieckianas en las cuales el entendimiento de un objeto depende de toda una categoría (o más aún, de diversas categorías) que le envuelven. La unidad surge después de un amplio recorrido por la multiplicidad.

230 Lo que luego se llamará "categoría coma".

XXXVI A_P es el anillo de fracciones $A(A-P)^{-1}$ (localizado de A en P, generaliza la localización de $\mathbb{Z}$ en un número primo p). Se trata de un anillo local, es decir, con un único ideal maximal, aquel generado por P en el localizado.

contexto, con tal de que en algunas preguntas uno esencialmente se reduzca a esquemas noetherianos y morfismos de tipo finito" [**1958**, 107]. Otra traducción lleva a construir el análogo de una variedad completa[XXXVII]: "un morfismo $f : X \to S$ es *propio* si es de tipo finito y si, para cada esquema noetheriano Y sobre S, la proyección $X \times_S Y \to Y$ es cerrada"[231] [**1958**, 107]. Similarmente, traduciendo propiedades de proyectividad para variedades, pueden definirse las nociones de morfismo proyectivo y cuasi-proyectivo. Para concluir con el registro de definiciones generales, un haz de módulos F sobre un esquema X se llama *cuasi-coherente* si, sobre cada abierto afín U en X, F puede ser definido mediante un módulo M sobre el anillo A asociado a U ($\approx Spec(A)$), y, en el caso en que X sea noetheriano, F se llama *coherente* si los módulos M son finitamente generados (lo que extiende la definición original de Serre) [**1958**, 107]. Para Grothendieck, "los haces algebraicos cuasi-coherentes y coherentes se comportan bajo las operaciones usuales de haces (productos tensoriales, haces de homomorfismos, imágenes directas e inversas, funtores derivados) tan bien como posiblemente podría esperarse de ellos" [**1958**, 107].

Después de un corto párrafo en el que señala la importancia de haber podido expresar Riemann-Roch en *forma relativa* (vía morfismos propios) y de poder expresar en el futuro resultados de cohomología para variedades abelianas "en el contexto general de un esquema sobre otro" [**1958**, 108], Grothendieck enuncia "los resultados centrales en la teoría cohomológica de los morfismos de esquemas" [**1958**, 108]: *Teorema 1* (cálculo de grupos de cohomología en el sentido de categorías abelianas): si F es un haz cuasi-coherente sobre un esquema afín X (definido por un módulo M sobre el anillo A

231 Nuevo ejemplo de *definición holística*, donde se involucra toda la categoría en juego, y donde lo local y lo global alcanzan una profunda solidaridad estructural.

XXXVII Una variedad algebraica es completa si, para toda otra variedad Y, la proyección $X \times Y \to Y$ es cerrada (noción absoluta). Toda variedad proyectiva (es decir, el conjunto de ceros de una familia de polinomios homogéneos en un espacio proyectivo) es completa. Una variedad compleja es completa si y sólo si es compacta (así, las superficies de Riemann compactas son completas).

de coordenadas de X), entonces $H^i(X, F) = 0$ para $i > 0$ y $H^0(X, F) = M$ [**1958**, 108]; *Teorema 2* (cálculo de funtores derivados): si $f : X \to Y$ es un morfismo proyectivo con Y noetheriano y F es un haz coherente sobre X, entonces los haces $R^q f_*(F)$ son coherentes, con $R^q f_*(F(n)) = 0$ para $q > 0$ y n grande [**1958**, 110]; *Teorema 3*: extensión del teorema anterior al caso de un morfismo propio [**1958**, 110]; *Teorema 4* (cálculo específico de módulos y compleciones localizadas para los funtores derivados): si $f : X \to Y$ es un morfismo propio con Y noetheriano, $y \in Y$ y F es un haz coherente sobre X, entonces $R^q f_*(F)_y$ es un módulo de tipo finito sobre el anillo local $\mathcal{O}_y$ (con m_y su ideal maximal) y su compleción m_y-ádica es naturalmente isomorfa a $\lim_{\longleftarrow k} H^q(f^{-1}(y), F \otimes_{\mathcal{O}_y} (\mathcal{O}_y/m_y^k))$[232] [**1958**, 110-111]; *Teorema 5* ("enunciado más general del «teorema central» de Zariski en álgebra conmutativa"): si $f : X \to Y$ es un morfismo cuasi-proyectivo y Y es noetheriano, entonces los puntos aislados en las fibras $f^{-1}(f(x))$ forman un abierto $U \subseteq X$, y $f \restriction U$ puede factorizarse vía un esquema integral sobre Y (es decir, donde el anillo de secciones $\mathcal{O}_Y(U)$ es un dominio de integridad)[233] [**1958**, 112]. Grothendieck concluye indicando cómo los resultados cohomológicos abstractos producen nuevas pruebas de teoremas en variable compleja (Zariski) y álgebra conmutativa (Chow) [**1958**, 112].

---

232 Grothendieck comenta que este resultado "debería ser considerado como un enunciado completo del resultado central de Zariski sobre «funciones holomorfas»", donde el "grupo *lim* debe ser considerado como la «cohomología holomorfa» de X a lo largo de la fibra $f^{-1}(y)$". Véase nuestra *Nota 220* arriba, p. 156. En los comentarios adicionales a este teorema [**1958**, 111-112], Grothendieck explica cómo los trabajos de Stein en espacios analíticos motivaron algunas de sus construcciones algebraicas abstractas. El enlace de la *suavidad* en la variable compleja con la *transitabilidad* en la geometría algebraica abstracta se encuentra así en el *corazón de la visión* grothendieckiana. En esta línea, ver nuestro siguiente *Capítulo 6*, donde haremos una excursión por las exposiciones de Grothendieck en el *Seminario Cartan* sobre temas de variable compleja.

233 En la discusión siguiente a este teorema, Grothendieck subraya que los anillos locales de X y de Y pueden contener elementos *nilpotentes* (es decir, tales que sus potencias se anulan en algún momento) [**1958**, 112]. Gracias a los nilpotentes se obtiene una suerte de "infinitesimales algebraicos" con los cuales puede desarrollarse un cálculo diferencial local, potenciándose así la *suavidad* del entorno. Al decir de Grothendieck, "tener elementos nilpotentes es técnicamente de la más alta importancia" [**1958**, 113]. Ver *EGA* [**1959-64**], nuestro *Capítulo 7* abajo.

La serie principal de resultados alrededor de temas cohomológicos continúa alrededor de “teoremas de dualidad, aunque el tiempo no nos permita ofrecer enunciados precisos” [**1958**, 112]. Grothendieck recuerda el teorema de Serre[234] y sus generalizaciones[235], acentuando que estos resultados se obtienen en el ambiente de las variedades *no singulares* [**1958**, 112-113]. El interés de la formulación abstracta, en términos de esquemas, consiste entonces en proveer “una teoría general de residuos” [**1958**, 113], que permite obviar las condiciones de no singularidad[236]. Un caso importante, para un esquema X de tipo finito sobre un campo k, consiste en la aparición de un complejo $\mathcal{K}_X$ de haces algebraicos cuasi-coherentes con un operador diferencial que reduce (-1) el grado[237] [**1958**, 113]. La homología aporta entonces un nuevo control local para los espacios abstractos: “aunque $\mathcal{K}_X$ es demasiado grande para ser coherente”, “los haces $H_i(\mathcal{K}_X)$ son siempre coherentes” [**1958**, 114]. Otros apuntes (introducción de hipótesis locales tipo Cohen-Macaulay, extensión de dualidades tipo Poincaré o Serre) [**1958**, 114-115] terminan la sección más larga de la conferencia.

---

234 “Si X^n es una variedad proyectiva no singular definida sobre un campo algebraicamente cerrado k y E es un fibrado vectorial sobre X, entonces existe una dualidad natural entre $H^i(X, \mathcal{O}_X(E))$ y $H^{n-i}(X, \Omega^n_X(E'))$, donde $\mathcal{O}_X(E)$ es el haz de gérmenes de secciones regulares de E, y $\Omega^n_X(E')$ es el haz de gérmenes de formas n-diferenciales regulares sobre X con valores en el fibrado vectorial dual E'” [**1958**, 112].

235 Se trata de generalizaciones propuestas por Grothendieck en “Teoremas de dualidad para haces algebraicos coherentes”, *Seminario Bourbaki* 149 (Mayo 1957): 169-193. El autor indica que los resultados se encontraron “en invierno 1955 y en invierno 1956”, *ibid*, p. 169, demostrando, una vez más, la importancia de las secuelas de la estancia en Kansas para la obra grothendieckiana (“giro crucial en mi trabajo matemático”, ver arriba p. 89).

236 La singularidad *obstructiva* a nivel de variedades se *suaviza* al pasar a un nivel abstracto, donde un cálculo de residuos, que “puede ser considerado ahora como (potencialmente) clarificado completamente” [**1958**, 113], permite elaborar un sofisticado entramado de construcciones entre haces, operadores diferenciales y complejos residuales. En cierto modo, se trata de construcciones contrapuntísticas que permiten elevar armonías musicales superiores, a partir justamente de las disonancias obstructivas inferiores.

237 La construcción es general, pero, en el caso particular en que X (de dimensión n) es no singular y separable sobre k, $\mathcal{K}_X$ resulta ser una *resolución inyectiva* del haz Ω^n_X de gérmenes de formas diferenciales: regreso concreto e inesperado al mar del *Tôhoku* [**1955-56**]...

(5). La última sección consiste en un listado, anotado y comentado, de *problemas abiertos*[238]. *Problema A* ("teorema de desvanecimiento de Kodaira", expresado en el "contexto de la Geometría Algebraica"): si V es una variedad proyectiva no singular de dimensión n y L es una línea fibrada negativa sobre V ¿$H^i(X, \mathcal{O}_X(L)) = 0$ para $0 \leq i < n$? [**1958**, 115]. Se trata de un ilustrativo enlace entre los métodos cohomológicos *abstractos* y cálculos *concretos* en fibrados, como lo muestra Grothendieck en la discusión subsiguiente (vía hiperplanos, inmersiones, formas diferenciales, residuos, divisores) [**1958**, 116]. *Problema B* (cálculo de funtores derivados): si $f : X \to Y$ es un morfismo propio birracional[XXXVIII] entre variedades y X no es singular, ¿$R^q f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ para $q > 0$? [**1958**, 116]. Grothendieck indica que, usando la sucesión espectral de Leray[XXXIX], el problema equivale a preguntarse si, bajo las condiciones anteriores, se tienen isomorfismos entre $H^p(X, \mathcal{O}_X)$ y $H^p(Y, \mathcal{O}_Y)$ para cada p, es decir, si se tiene una forma de *invarianza cohomológica birracional.* Esto se encuentra ligado a problemas aritméticos profundos, como detectar si "el género aritmético de una variedad completa no singular es un invariante birracional" (algo solo conocido para variedades complejas proyectivas) [**1958**, 116], o asegurar que las clases de Todd recaen en clases de Todd (siguiendo la fórmula

[238] "Para concluir esta charla, debería enunciar algunas preguntas no resueltas. De hecho es tal vez demasiado pronto para hacerlo, puesto que las técnicas disponibles no se han ensayado lo suficientemente en serio para saber si son capaces, o no, de resolver esas preguntas" [**1958**, 115]. Honestidad ante todo, conjugada con la capacidad visionaria de un Maestro.

[XXXVIII] Un morfismo $f : X \to Y$ entre variedades es *birracional* si localmente, para adecuados abiertos de X y Y, se tienen isomorfismos otorgados por funciones racionales. Por ejemplo, el círculo es birracionalmente equivalente a la línea, mediante la proyección estereográfica. El *lema de Chow* afirma que toda variedad algebraica es birracionalmente equivalente a una variedad proyectiva. El *teorema de Hironaka* sobre "resolución de singularidades" (1964) asegura que toda variedad compleja es birracionalmente equivalente a una variedad proyectiva *suave*. Intrínsecamente, la birracionalidad se encuentra así muy cercana de las preocupaciones de Grothendieck, quien siguió atentamente los resultados de algunos matemáticos japoneses y chinos, como Kodaira, Hironaka, Chow, Chern. De hecho, como veremos en nuestra *Parte III* abajo, en Grothendieck se conectan profundamente una espiritualidad oriental y una matemática oriental, siempre en busca de formas escondidas de *suavidad*.

[XXXIX] La *sucesión espectral de Leray* (1946) asociada a un morfismo $f : X \to Y$ es un método calculatorio recursivo para aproximar la determinación de grupos de cohomología superiores, con coeficientes en haces A sobre X, mediante grupos de cohomología de dimensión inferior, con coeficientes en haces $R^q f_*(A)$ sobre Y.

Riemann-Roch-Grothendieck) [**1958**, 116].

Continúa Grothendieck: "Hay otras preguntas en las cuales los métodos cohomológicos y la intuición heurística provista por el punto de vista de los esquemas resultarán probablemente útiles. Las más importantes parecen por el momento ser las siguientes"[239] [**1958**, 116]. *Problema C* (subesquemas y reducciones): si X es un esquema noetheriano y Y es un subesquema completo de X, encontrar condiciones bajo las cuales Y pueda "reducirse" (*blow down*) a un punto (es decir, encontrar $f : X \to X'$ morfismo propio tal que $f(Y) = \{y\}$ y $X - Y \approx X' - \{y\}$) [**1958**, 116]. La variable compleja emerge de nuevo aquí, en conexión con la teoría de las funciones holomorfas de Zariski: "una condición necesaria (pero no suficiente) para el *blowing down* (...) es que el anillo de funciones holomorfas de X sobre Y debe ser noetheriano y de dimensión Krull igual a la dimensión de X" [**1958**, 116]. *Problema D* (esquemas cociente): si G es un esquema (de tipo finito) de grupos y H es un subesquema (de grupos) cerrado de G, probar la existencia del esquema G/H[240]. *Problema E* (cambios de base y estructura infinitesimal): si X es un esquema propio sobre Y noetheriano, probar la existencia de un esquema de grupos abelianos sobre Y que actúe como una variedad relativa de Picard[241] [**1958**, 117]. El último párrafo de la *Conferencia*

239 Es interesante subrayar aquí la aparición de una "intuición heurística provista por el punto de vista de los esquemas". Es un hecho que la *elevación hacia la abstracción* ofrecía nuevas alas a la *intuición* grothendieckiana. Este es un tema que ha sido poco entendido por los comentaristas de Grothendieck, y aún menos por la comunidad matemática en general, que no le ha leído y que achaca a su obra un erróneo "sinsentido abstracto". Por el contrario, en la abstracción, *lejos de obstrucciones particulares*, se obtienen un *sentido*, una *orientación* y una intuición fundamentales. Volveremos apliamente sobre este punto en nuestra *Parte IV* abajo.

240 Grothendieck busca así "propiedades de permanencia" en ciertas subcategorías de esquemas. Recuérdese su insistencia en tales propiedades de permanencia en la *Tesis* [**1949-53**] y en el *Tôhoku* [**1955-56**]. La *coherencia* de los métodos y las búsquedas será permanente en su obra.

241 "No daremos aquí la definición precisa de un «esquema relativo de Picard», pero podemos observar que si este esquema existe entonces se comporta de la manera más sencilla posible con respecto al cambio de espacio base Y (que debería ser mirado como el análogo del cambio de un campo base). Más aún, el hecho de que admitimos nilpotentes en los anillos locales provee una gran cantidad de información adicional sobre la variedad de Picard (especialmente su estructura infinitesimal), que no

ICM apunta al futuro:

> Como hecho bastante general, se cree que un mejor entendimiento en cualquier parte de la Geometría Algebraica, aún en las más clásicas, se obtendrá tratando de re-enunciar todos los hechos y problemas en el contexto de los esquemas. El trabajo ha ya comenzado y será llevado a cabo en un tratado sobre Geometría Algebraica que, se espera, será escrito en los próximos años por J. Dieudonné y por mí, y que debe proveer un recuento sistemático de todas las preguntas mencionadas en esta charla [**1958**, 117].

Así, la *visión grothendieckiana* no solo ahonda en grandes ideas y en grandes arquitectónicas, que subsumen lo clásico y lo particular dentro de lo contemporáneo y lo universal, sino se adentra también en la construcción práctica de una comunidad, vía su colaboración con Dieudonné y la formación del *IHES* (ver nuestro *Capítulo 7* abajo). Asombrosa combinación de intuición, traducción, concisión, prospección y tesón, la *Conferencia ICM* debe calibrarse sin duda como uno de los altos momentos reveladores en la matemática del siglo veinte.

5.2 Síntesis conceptual

La *Conferencia ICM* [**1958**] debe su riqueza a una *abundante multiplicidad de niveles*, tanto en los conceptos, definiciones, enunciados y ejemplos matemáticos, como en la escritura misma del trabajo, siempre oscilante entre lo preciso y lo sugerente. El *corazón* de la conferencia se dirige a uno de los núcleos esenciales de la matemática: la *dialéctica entre lo discreto y lo continuo.* Las conjeturas de Weil (ver *Nota XXIX* arriba, p. 154) constituyen una expresión precisa de esa dialéctica, e introducen en el ámbito de lo finitario (curvas sobre campos de Galois) las herramientas de lo continuo (función Zeta de Riemann expandida al estudio de extensiones algebraicas, vía la escuela alemana de Hilbert

parece haberse obtenido ni siquiera en el caso clásico" [**1958**, 115]. Deben enfatizarse la *sencillez* (vía cambios de base) y la *suavidad* (vía nilpotentes diferenciales) mencionadas por Grothendieck.

en teoría de números en la década de los 1920s: Artin, Hasse, Hecke). Después de la introducción de los esquemas (Serre, Chevalley, Nagata, 1955-56), donde se pegaban espacios afines, la noción de esquema abstracto propuesta por Grothendieck en la *Conferencia ICM* pega anillos locales sobre el espectro de ideales primos de un anillo conmutativo unitario arbitrario. La generalización (ampliación del espacio algebraico-topológico) resulta ser la herramienta requerida para poder estudiar las variedades algebraicas sobre un campo k de característica p (entorno *discreto* de los primeros esquemas Serre-Chevalley-Nagata) mediante adecuados grupos de cohomología con coeficientes en un campo F de característica 0 (entorno *continuo* donde se pueden utilizar las técnicas tipo Lefschetz para conteo de puntos, ver *Nota XXX* arriba, p. 154). Yendo aún más allá, aparece la *genialidad* de Grothendieck en estado puro: la intuición de que los esquemas *étales* (ver abajo, nuestra *Sección 5.3*) serán precisamente aquellos que permitirán construir las herramientas cohomológicas buscadas para transitar entre lo discreto y lo continuo, en el caso de las conjeturas de Weil.

Si el *enunciado* de las conjeturas de Weil (1949) puede entenderse como la *culminación* de la matemática moderna (herramientas de álgebra abstracta y de topología conjuntista para abordar la teoría de números: enlace *espacio-número* moderno), su *progresiva resolución* bajo la escuela de Grothendieck (1958-74) puede verse como el *inicio* de la matemática contemporánea (herramientas de álgebra homológica y de topología categórica para ahondar en la teoría de números: enlace contemporáneo *espacio-número / topos-esquemas*)[242]. En esa panoplia de prospecciones futuras, la *Conferencia ICM* [**1958**] adquiere un sentido especial: es una de las *puertas batientes*, uno de los *intercambiadores*, uno de los ejes de

242 Para un estudio extenso del *deslinde* entre lo moderno y lo contemporáneo, alrededor de la década de los años cincuenta, deslinde ligado en buena medida a la aparición de los haces y a la emergencia de la figura de Grothendieck, véase F. Zalamea. *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2009.

un *lugar tercero*[xlvii], donde se *trans/forma* el pensamiento matemático del siglo XX. En buena medida, la *visión panóptica* de Grothendieck ya engloba entonces[243] sus investigaciones principales de la década de los sesenta (ver abajo, esquemas *EGA* [**1959-64**], topos *SGA* [**1960-69**] y motivos [**1968**], nuestros *Capítulos 7, 8, 9*).

La *estructura* misma de la *Conferencia ICM* [**1958**] ofrece unos interesantes reflejos entre el método y las técnicas. Por un lado, una arquitectónica general (categoría de esquemas sobre un esquema base dado) deja vislumbrar ciertos pisos en el edificio (esquemas *étales*), que permiten puentes con otros constructos (cohomología *étale*) y ayudan a rastrear los tránsitos buscados entre los objetos (conjeturas de Weil). Por otro lado, las definiciones técnicas centrales (morfismo propio, esquema sobre un pre-esquema) convocan la arquitectónica general, mediante procesos de cuantificación sobre todos los morfismos de la categoría. En ese *ir y venir* entre el todo y la parte, entre lo abstracto y lo concreto, entre lo categórico y lo numérico, se sitúa realmente el *arte grothendieckiano*. Su *manera* es aquella del *mediador*, del *armonizador*, del *suavizador* entre los opuestos. Por un lado, la *invasión del mar* (categorías de esquemas) va erosionando los acantilados, de donde surgen suaves suelos de arena. Por otro lado, la *explosión del volcán* (fulguración de lo *étale*) va dejando lavas incandescentes, de donde se forman suaves paredes de ónix. En el *encuentro del mar y el volcán* vive lo mejor de la *manera* grothendieckiana[244].

---

243 Ver abajo nuestra *Sección 5.3*, donde recurriremos a los testimonios del mismo Grothendieck en *Récoltes et semailles* [**1983-86**].

244 En la teoría del arte de los siglos XVI y XVII, la *maniera* se encuentra en el núcleo de las discusiones críticas sobre los "modos de hacer" (inventar, crear) de los grandes pintores. Al degenerar *maniera* en "manierismo", emerge posteriormente la noción de *estilo* como substituto conceptual para captar las categorías mayores de la historia del arte (barroco, clásico, romántico, etc.) La *manera* de Grothendieck abre en buena medida el estilo de las matemáticas contemporáneas (1950-hoy). Exploraremos en nuestra *Parte IV* abajo, particularmente en los *Capítulos 18, 19*, algunos contrapuntos de la *manera* de Grothendieck con la *manera* de escritores, artistas y músicos afines.

xlvii Véase M. Serres. *Atlas.* Madrid: Cátedra, 1995, pp. 29-31.

Los temas más novedosos de la *Conferencia ICM* tienen que ver directamente con formas sofisticadas de *suavización*: *(i)* intuir un quiebre conceptual en el entendimiento de las conjeturas de Weil alrededor del concepto de *no ramificación*, enlazando en lo profundo Galois (separabilidad, no multiplicidad de las raíces) y Riemann (no ramificación en un punto no singular de una superficie)[245] [**1958**, 104], *(ii)* imaginar los esquemas como extensión *libre* del anillo de meromorfas sobre una variedad compleja (Riemann) y del espectro de una variedad algebraica (Galois-Dedekind) [**1958**, 106], *(iii)* permitir y aprovechar los nilpotentes en los anillos locales para poder desarrollar un *cálculo diferencial local* [**1958**, 106], *(iv)* estudiar el comportamiento relativo de los esquemas (vía morfismos propios), lo que torna más *plásticos* los objetos en juego [**1958**, 107], *(v)* subrayar una *flexibilización* de Riemann-Roch en el ámbito general de los esquemas [**1958**, 108], *(vi)* calcular los grupos de cohomología para haces coherentes y sus funtores derivados mediante formas abstractas de una *cohomología holomorfa* [**1958**, 108-111], *(vii)* obtener teoremas de dualidad para el caso de esquemas de *tipo finito* [**1958**, 115].

Por otra parte, cada uno de los puntos *(i)-(vii)* anteriores implica una verdadera *reconstrucción* de la geometría algebraica: extensión de la noción de variedad, relativización de conceptos y objetos, introducción de nuevas cohomologías, traducción hacia característica cero, hacificación a ultranza. Oigamos a Dieudonné en su presentación de Grothendieck para la *Medalla Fields* 1966:

> En la conferencia que pronunció en el Congreso Internacional de Edimburgo en 1958, menciona por vez primera el gran designio que estará en el centro de sus preocupaciones durante diez años: definir, para las variedades algebraicas sobre un campo de característica $p > 0$, grupos de cohomología con coeficientes en un *cuerpo de característica 0*, con las propiedades enumeradas por Weil para probar sus famosas conjeturas. Sin revelar aún los detalles del método que vislumbraba para lograrlo, Grothendieck concibe que para ello debe proceder a una *refundición de toda la Geometría Algebraica* (...) Bosqueja los trazos principales, que

[245] Esto llevará a las nociones de *lisura étale* en *EGA* [**1959-64**], pero, para anticipaciones, ver nuestra *Sección 5.3* abajo.

> habría de desarrollar en los miles de páginas de artículos y de seminarios que se conocen (...) Tuvo el mérito de ver que, para tener una idea justa de lo que debía ser la Geometría Algebraica, había que liberarse de *todas* las restricciones que figuraban en las diversas definiciones (...) Subrayó dos caracteres predominantes que quería darle a su teoría. Uno, poner en primer plano el estudio de los morfismos, en vez del estudio de los esquemas (...) Otro, extender las técnicas de cohomología de haces inauguradas por Serre[246].

La percepción de Dieudonné, colaborador íntimo de Grothendieck en el quinquenio siguiente, subraya el *lugar pivote* de la *Conferencia ICM* [**1958**]: visión, refundición, esquematización[247], liberación, relativización, hacificación.

5.3 Ejemplo detallado: emergencia de lo *étale*

En diversos lugares de *Récoltes et semailles*, Grothendieck indica cómo, en la época de la *Conferencia ICM* [**1958**], emergen simultáneamente varias de las ideas principales –a caballo entre esquemas y topos– que desarrollará en los años siguientes[248]:

> En el desarrollo de algunos de mis temas principales, las conjeturas de Weil se mantuvieron como mi principal fuente de inspiración, entre 1958 y 1969. [Nota al pie:] Los temas son los *topos*, la *cohomología étale* y *l*-ádica, los *motivos* y (en menor medida) los *cristales*. Despejé esos temas, uno después de otro, entre 1958 y 1966 [**1983-86**, P.30].
>
> La noción de sitio o de "*topología de Grothendieck*" (versión provisional de la noción de topos) apareció en el surco inmediato de la noción de esquema. Es ella la que a su vez provee el nuevo lenguaje de "localización" o "descenso", utilizado en cada paso en el desarrollo del temario y el instrumentario esquemáticos. La noción más intrínseca y más geométrica de topos, implícita a lo largo de los años siguientes, se despeja sobre todo a partir de 1963, con el desarrollo de la cohomología *étale*, y se impone poco a poco como la noción más fundamental [**1983-86**, P.31, nota al pie].

---

246 Dieudonné, óp.cit., pp. 6-8, énfasis de Dieudonné.

247 En un *doble sentido diagramático*: elaboración de categorías de esquemas y realización de un "bosquejo de trazos principales" del panorama general.

248 Véase también la cita extensa arriba, p. 148.

> Ese "arrancar con fuerza" de la teoría de los esquemas es el objeto de mi exposición en el Congreso Internacional de Matemáticos en Edimburgo, en 1958. El texto de esa exposición me parece ser una de las mejores introducciones al punto de vista de los esquemas, para (tal vez) motivar un lector geométrico a familiarizarse, mal que bien, con el imponente tratado (ulterior) "Elementos de Geometría Algebraica" [**1959-64**], donde se exponen de manera detallada (y sin perdonar ningún detalle técnico) los nuevos fundamentos y las nuevas técnicas de la geometría algebraica [**1983-86**, P.33, nota al pie].
>
> Cuando hablo de "llevar a cabo esa idea modesta", se trata de la idea de la cohomología *étale* como aproximación hacia las conjeturas de Weil. Inspirado por ese propósito descubrí la noción de sitio en 1958, y esa noción (o la noción muy cercana de topos) y el formalismo cohomológico *étale* se desarrollaron entre 1962 y 1966 bajo mi impulso (con la asistencia de algunos colaboradores) [**1983-86**, P.42, nota al pie].
>
> (...) 1958 es el año en que aparecieron, uno sobre otro, el tema esquemático y aquel de los topos (...) [**1983-86**, P.48].
>
> El principio de la definición de la cohomología *étale* asciende a 1958, y probé los "resultados clave" necesarios y suficientes para el formalismo completo (incluidos los teoremas de tipo "Lefschetz débil" y las nociones de profundidad cohomológica en el contexto *étale*) en febrero y marzo 1963 [**1983-86**, 4.842].
>
> (...) un primer paso de *naturaleza conceptual*, un paso "infantil", se parece a aquel que hice (en 1958) al introducir la noción de haz *étale* (conteniendo en germen la noción unificadora crucial de *topos*) [**1983-86**, 4.990].

De esta manera, en el recuento histórico que Grothendieck hace de su obra, el año 1958 aparece (casi tres décadas después) como un momento especial donde se "despejan" y se combinan las ideas iniciales de esquemas, topos y técnicas *étales*, que llevarán a la resolución de las conjeturas de Weil[249].

[249] Grothendieck habla a menudo de la *coherencia* general de su obra, una característica en la cual hemos insistido en esta monografía. En particular, es fundamental para Grothendieck la coherencia de su visión *étale* para la resolución de las conjeturas de Weil. En *Récoltes et semailles*, explica una situación muy dolorosa para él, cuando critica "el sentido profundo de la operación *SGA 4* $\frac{1}{2}$, que apunta a hacer explotar, en un conjunto amorfo de «digresiones técnicas» la *unidad profunda de mi obra alrededor de la cohomología étale*, mediante la «inserción violenta» del texto foráneo *SGA 4* $\frac{1}{2}$ entre las dos partes indisolubles *SGA 4* y *SGA 5* que desarrollan esa obra" [**1983-86**, 2.367, nota al pie, nuestro énfasis]. Volveremos sobre este tema abajo, en nuestros *Capítulos 8, 14*: la enemistad con Pierre Deligne, autor del *SGA 4* $\frac{1}{2}$, tuvo mucho que ver con la "incomprensión" metodológica de su discípulo, al haber introducido fuertes componentes "artificiales" en el entorno "natural" de lo *étale*.

Debemos volver ahora a la segunda página de la *Conferencia ICM*, con su asombrosa prospección:

> (...) Parece seguro ahora que la cohomología de Weil debe ser definida por una aproximación completamente diferente. Una tal aproximación recientemente se me reveló por las *conexiones entre la cohomología de haces y la cohomología de grupos de Galois, por un lado, y por la clasificación de los cubrimientos no ramificados de una variedad, por otro lado* (...) [**1958**, 104, énfasis de Grothendieck].

En las dos líneas enfatizadas –concisión sin igual– se encuentra el núcleo esencial de los enlaces entre Galois y Riemann, entre número y espacio, entre álgebra y geometría, entre esquemas y topos, que se concretarán alrededor de la idea emergente de lo *étale*[250]. Se trata de un *control combinado* sobre el modo *externo* de superposición ("cubrimiento no ramificado") de las fibras de un esquema ("haces") y sobre el modo *interno* de las estructuras ("grupos de Galois": testigos de finitud y separabilidad) dadas en las fibras. La genialidad de Grothendieck consiste en *imaginar* cómo ese *doble proceso de suavización en haces*, interno y externo, es el que permitirá *transferir*, hacia la cohomología de nuevos constructos abstractos, las fórmulas de conteo tipo Lefschetz necesarias para "domar"[251] las conjeturas de Weil. El *mar étale*, que "involucra a la vez una cohomología «espacial» y de Galois" [**1958**, 104], resulta ser entonces el *entorno natural* para poder navegar eficazmente entre formas espaciales, algebraicas y aritméticas.

---

250 El término "*étale*" en sí mismo sólo aparece unos años después, en los desarrollos de *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**]. Aún con algo más de distancia, en *Récoltes et semailles*, Grothendieck une la visión técnica de lo *étale* (formas algebraicas y geométricas de *no ramificación*) con la visión metodológica de la marea *lisa*, al referirse a un "trabajo, matemático u otro, que me es muy familiar «a la manera del mar que se extiende (alisa)» [à la façon de la mer qui s'étale]" [**1983-86**, 3.565].

251 La aparición de la "tame topology" (topología moderada = domada) en *Esquisse d'un programme* [**1984**] será otra forma conceptual y terminológica precisa para intentar "domar" los artificios –tanto matemáticos, como existenciales y humanos– contra los cuales luchó consistentemente Grothendieck toda su vida.

Unos meses después, en una exposición[252] en el *Seminario Bourbaki*, en Mayo de 1959, Grothendieck incide de nuevo en la idea de lo *étale* en gestación:

> Esta noción de recubrimiento no ramificado (debida a Serre y al conferencista) posee todas las propiedades elementales que se pueden esperar razonablemente, cuya lista no daremos aquí. Reduzcámonos a decir que da lugar a una *teoría de Galois* calcada sobre la teoría de Galois clásica (y que la contiene, las demostraciones siendo más simples que las demostraciones recibidas en el caso clásico) y la teoría galoisiana de los recubrimientos topológicos [**1956-62**, exp. 182, p. 210, énfasis de Grothendieck].

A partir de allí, Grothendieck señala que su "objetivo es desarrollar el análogo de la sucesión exacta de homotopía de los espacios fibrados, relativamente a un morfismo propio" [**1956-62**, exp. 182, p. 211]. Una *doble visión* se entrelaza indisolublemente aquí, como percibiendo, en un *instante privilegiado*[253], las grandes vertientes de la homología y la homotopía abstractas, que le llevarán, por un lado, al programa homológico *étale* de la década de los 1960s, y, por otro lado, al programa homotópico *anabeliano* de la década de los 1980s.

252 Alexander Grothendieck, "Géométrie formelle et géométrie algébrique", *Séminaire Bourbaki* 182 (1959): 1-28 [**1956-62**, exp. 182]. El acrónimo de la exposición –*GFGA*– parece querer jugar con el *GAGA* de Serre.

253 El "instante privilegiado" remite a Proust, así como a la "epifanía" de Joyce o al "punctum" de Barthes, momentos de emergencia *sine qua non* de la creatividad. Para un análisis detallado de estas situaciones, ver nuestra *Parte IV* abajo.

6

Techniques de construction en géométrie analytique (1961)

Como hemos indicado brevemente en los capítulos anteriores, los intereses de Grothendieck por la variable compleja se encuentran presentes desde los inicios mismos de su actividad matemática. En particular, los espacios de funciones holomorfas fueron objeto permanente de su atención, tanto desde el punto de vista particular de los ejemplos (esfera de Riemann), como desde el punto de vista general de la estructura (torre de Teichmüller). En este capítulo nos centraremos en las diez presentaciones que hizo Grothendieck para el *Séminaire Cartan* en 1960-61 (*Techniques de construction en géométrie analytique* [**1961**]), pero también recorreremos dos artículos previos de la década de los cincuenta (*Sur certains espaces de fonctions holomorphes I-II* [**1953a**] [**1953b**], *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann* [**1955a**]). En la *Esquisse thématique* [**1972**] que Grothendieck preparó después de su salida del *IHES*, este señala que su influencia en la "geometría analítica" se debe sobre todo a nuevos puntos de vista inspirados por la geometría algebraica y a diversas propuestas de resultados abiertos.

6.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Hemos visto arriba (*Nota 159*, p. 120) que ya desde 1951 Grothendieck se acercaba a pruebas modernas (Kodaira) de Riemann-Roch, y, en esa misma época, encontraba en ciertos espacios de funciones holomorfas los ejemplos característicos de los espacios nucleares inventados en su *Tesis* [**1949-53**] (ver nuestro *Capítulo 1* arriba). Continuando en esa línea, toda la década de los años cincuenta muestra la permanente acción de Grothendieck en el ámbito de la "geometría analítica"[254], desde la exposición informal inicial en los encuentros Bourbaki (1951), hasta las exposiciones formales en el *Séminaire Cartan* (1960-61), pasando por los artículos publicados en Alemania (1953) y Estados Unidos (1957), y alcanzando la honda generalización de Riemann-Roch [**1955-57**]. Una evidente *armonía natural* con la variable compleja se refleja en todos esos trabajos.

Desde una perspectiva geográfica, la década de los cincuenta constituye una década de errancia en los *bordes*, en los *márgenes*[255]: Nancy, São Paulo, Kansas, Harvard, con muchos cruces sobre el Atlántico[xlviii]. Todo el pensamiento grothendieckiano sobre la variable

[254] El término se debe a Serre, retomado luego por Dieudonné y Bourbaki, y refiere a la *geometría de las funciones analíticas*. Se trata de un intento fuerte de ruptura con la "vieja" matemática, enquistada en la "geometría analítica" clásica, repleta de cálculos de coordenadas, donde las funciones de variable compleja brillaban por su ausencia. La *protesta* y el *talante revolucionario* de los jóvenes bourbakistas coincidía por supuesto enteramente con el espíritu de Grothendieck.

[255] Vendrá luego una década en el *centro*, en el *IHES* de París, que Grothendieck convertirá a su vez en centro mundial de la matemática, aunque retornará a ciertos *bordes* (1972-1991: viajes en la acción ecologista, región de Montpellier), antes de concluir su periplo en el *margen final* de los Pirineos (1991-2014). En total, Grothendieck habrá pasado, *de lejos*, muchísimos más años de su vida en los márgenes que en el centro. Volveremos sobre esto, y sobre el impacto de los márgenes en su pensamiento, en nuestra *Parte IV* abajo. Los primeros bordes geográficos coinciden con un "trabajo solitario, que fue el mío durante los primeros quince años de mi actividad matemática (de 1945 a 1960 aproximadamente)" [**1983-86**, 1.59].

[xlviii] Véase, por ejemplo, Jackson, óp.cit., pp. 1044-1049.

compleja ocurre en esos márgenes (tanto en la década de los cincuenta, como en la década de los ochenta, ver nuestra *Parte III* abajo), *excepto* sus conferencias para el *Séminaire Cartan*. Es interesante observar entonces el momento en el que ocurren las *Techniques de construction en géométrie analytique* [**1961**], presentadas entre el 19 de Diciembre 1960 y el 8 de Mayo 1961: se sitúan en la misma época de los *inicios paralelos* de *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**], como si Grothendieck quisiera poder abarcar completamente las conexiones entre la *Geometría Analítica* y la *Geometría Algebraica*[256]. En el *corazón* mismo de la tarea fundacional de la geometría algebraica emprendida en el *IHES*, se encuentra así un intento de exploración sistemática de la estructura de los espacios holomorfos, es decir, de la torre de Teichmüller. En *combinación* con la elevación de los *edificios* geométrico-algebraicos, se encuentra la elevación de la *torre* geométrico-analítica. En el fondo, esa combinación constituye un nuevo entendimiento –a la Grothendieck, mediante grandes mareas naturales y grandes construcciones humanas[257]– de los tejidos entrelazados indisolublemente en Riemann-Roch: geometría, topología, análisis, álgebra, aritmética.

Resumen mínimo.

Presentamos aquí, en orden cronológico, resúmenes mínimos de los trabajos *(A) Sur certains espaces de fonctions holomorphes I-II* [**1953a**] [**1953b**], *(B) Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann* [**1955a**], *(C) Techniques de construction en géométrie analytique* [**1961**].

256 El acrónimo de esa conexión, *GAGA*, remite por supuesto al artículo pionero de Serre, J.-P. Serre. “Géométrie algébrique et géométrie analytique”. En: *Ann. Inst. Fourier* 6.1 (1956), págs. 1-42. La visión grothendieckiana en 1960-61 es, sin embargo, incomparablemente más profunda y extensa, pues las grandes arquitectónicas de su obra entran ya todas en juego. Resulta inverosímil imaginar la capacidad física de Grothendieck en esa época para aguantar semejantes esfuerzos.

257 Esto parece convocar a Víctor Hugo, ver V. Hugo. *Les travailleurs de la mer (1865-66).* Vol. Oeuvres Complètes, XII. Paris: Club Français du Livre, 1969. Véase también P. Georgel. *Les dessins de Victor Hugo pour Les travailleurs de la mer.* Paris: Herscher, 1985.

(A). Sur certains espaces de fonctions holomorphes I-II [**1953a**] [**1953b**] (los números [x] entre paréntesis cuadrados remiten a las páginas del texto). Esquema del artículo en tres partes: *(Ia)* funciones holomorfas a valores en un espacio vectorial topológico localmente convexo (evtlc) (§§2-3); *(Ib)* espacios de funciones holomorfas sobre la esfera de Riemann, representaciones integrales de aplicaciones lineales acotadas, teorema de estructura para todas las aplicaciones lineales continuas en un evtlc completo, estudio de una "vasta clase de ecuaciones elípticas sobre una variedad, gracias al formalismo de los núcleos-distribuciones introducido por L. Schwartz" [36] (§§4-6); *(II)* "estudio topológico de espacios de funciones holomorfas – la parte sin duda más original e importante" [36], "los métodos empleados son susceptibles de generalidad" [36], propiedades topológicas intrínsecas ligadas a espacios nucleares (§7), propiedades topológicas "elementales" ligadas a localidad (§8). Una *mirada topológica holística general* a los espacios de funciones holomorfas constituye el cariz peculiar del trabajo.

(B) Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann [**1955a**] (los números [x] entre paréntesis cuadrados remiten a las páginas del texto). *Par. 1.* Teorema general ("lie"zación), reducción del grupo estructural de un fibrado holomorfo sobre la esfera de Riemann S^2 (teorema 1.1) [122]. *Par. 2.* Teorema particular (linealización), descomposición directa, en fibras de dimensión 1, de un fibrado vectorial holomorfo sobre S^2 (teorema 2.1) [126]. *Par. 3.* Teorema dual (estructuración), un fibrado vectorial holomorfo sobre S^2 posee una estructura ortogonal ssi es isomorfo a su fibrado dual (teorema 3.2) [131]. *Par. 4.* Demostración del teorema principal (*Par. 1*), conjetura: "Parece plausible que la única variedad proyectiva X sobre la cual todo fibrado vectorial holomorfo pueda descomponerse en suma de fibrados holomorfos de fibra $\mathbb{C}$, sea la esfera de Riemann" [136]. Una *mirada topológica fibrada particular* a la esfera de Riemann constituye aquí la originalidad del trabajo. El *complemento matemático y metodológico entre (A) y (B)* muestra la ductilidad grothendieckiana entre lo abstracto y lo concreto.

(C) Techniques de construction en géométrie analytique [**1961**] (los números [$x.y$] entre paréntesis cuadrados remiten a la página y de la exposición x). "I. Descripción axiomática del espacio de Teichmüller y de sus variantes" [7.1-7.33] (19 Diciembre 1960 y 9 Enero 1961). "II. Generalidades sobre espacios anillados y espacios analíticos" [9.1-9.14] (16 Enero 1961). "III. Productos fibrados de espacios analíticos" [10.1-10.11] (23 Enero 1961). "IV. Formalismo general de los funtores representables" [11.1-11.28] (30 Enero 1961). "V. Fibrados vectoriales, fibrados proyectivos, fibrados en bandera" [12.1-12.15] (6 Febrero 1961). "VI. Estudio local de morfismos: gérmenes de espacios analíticos, platitud, morfismos simples" [13.1-13.13] (20 y 27 Febrero 1961). "VII. Estudio local de morfismos: elementos de cálculo infinitesimal" [14.1-14.27] (6 y 20 Marzo 1961). "VIII. Reporte sobre los teoremas de finitud de Grauert y Remmert" [15.1-15.10] (10 Abril 1961). "IX. Algunos problemas de módulos" [16.1-16.20] (17 y 24 abril 1961). "X. Construcción del espacio de Teichmüller" [17.1-17.20] (8 Mayo 1961).

Ejemplo de estrategia conceptual. El objetivo consiste en construir un espacio analítico de representación universal ("espacio de Teichmüller") que clasifique las demás curvas algebraicas sobre los espacios analíticos [7.8]. Grothendieck describe axiomáticamente las propiedades funtoriales [7.6] que debe verificar ese espacio, y condiciona teoremáticamente su existencia (global) a la existencia de una jerarquía escalonada (local) de funtores fibrantes ("funtores de Jacobi") que permitan controlar el número de automorfismos de las estructuras en juego (funtores rígidos) [7.32]. A su vez, la explicitación de estas condiciones técnicas se consigue por medio de recubrimientos y acciones de grupo [7.18-7.21], cambios de base [7.2] y operaciones libres sobre los mismos funtores rígidos [7.27]. Nos encontramos así ante una verdadera matemática en movimiento, una *matemática relativa* que, no obstante, permite encontrar ciertos *invariantes universales* ("espacio de Teichmüller") *debido a la variación misma* de los objetos matemáticos locales, a lo largo de una fina jerarquía de mediaciones que da lugar al objeto matemático global.

Descripción más extensa.

En esta subsección nos reduciremos a describir más extensamente algunas de las conferencias ofrecidas por Grothendieck en el *Séminaire Cartan* 1960-61: *Techniques de construction en géométrie analytique* [**1961**]. La primera intervención, "I. Descripción axiomática del espacio de Teichmüller y de sus variantes" (19 Diciembre 1960 y 9 Enero 1961), presenta de entrada los objetivos de las diversas exposiciones de Grothendieck en el *Seminario*[258]: *(a)* "Despejar un mecanismo funtorial general para una teoría global de módulos"[259] [**1961**, 7.1], *(b)* "Despejar la «buena formulación» de un cierto número de problemas de «módulos» en el marco de los espacios analíticos" [**1961**, 7.1], *(c)* "Gracias a hipótesis convenientes de «proyectividad» para los morfismos, dar teoremas de existencia utilizables para los problemas considerados en *(b)*, que incluirán en particular el teorema de existencia para el espacio de Teichmüller" [**1961**, 7.1], *(d)* "Revisar los fundamentos de la Geometría Analítica, inspirándose en la teoría de los esquemas. En particular, será de importancia admitir elementos nilpotentes en los anillos locales de los espacios analíticos. Solo con esta condición es cómo los teoremas pueden enunciarse sencillamente y en toda su fuerza" [**1961**, 7.1]. Vemos entonces aquí a Grothendieck poniendo todos sus hierros en el fuego: despeje, funtorialización, generalización, tipificación, formulación

[258] Las cuidadas redacciones de Grothendieck cubren la mayoría de los *Fascículos 1* y *2* del año 13 (1960-61) del *Séminaire Cartan*: *Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*. El título del *Seminario*, enfatizando "familias de espacios" y "fundamentos", es un reconocimiento directo de la impronta de Grothendieck. Este compartió su labor en el *Seminario* (10 exposiciones, 10 redactadas) con Adrien Douady (4 exposiciones, 3 redactadas – fibrados, espacios mixtos, deformaciones) y con Christian Houzel (6 exposiciones, 4 redactadas – geometría analítica local). Es interesante notar que esto sucede exactamente 13 años después del inicio del *Séminaire Cartan* en 1948-49, es decir, 13 años después de que Grothendieck apareciera en el *Seminario* con toda su energía y su inocencia, viniendo de su magra carrera de matemáticas en Montpellier. En el intermedio, Grothendieck ha sabido utilizar al máximo la herramienta fundamental de los *haces* puesta a punto en el *Seminario*. Constancia de un ciclo completado, el joven inquieto e irreprimible se ha convertido, apenas cruzados los treinta años, en un verdadero Maestro.

[259] Sabrosamente continúa Grothendieck: "Por temor a asustar al auditorio con un exceso de categorías abstractas, comenzamos con un caso típico, indicado en el título [espacio de Teichmüller]" [**1961**, 7.1].

correcta, proyectividad, esquematización, localización nilpotente, sencillez, todo con el objetivo concreto de entender la *fundamentación estructural del espacio de Teichmüller*[xlix].

Tal como lo evaluará Grothendieck una década después, en su *Esquisse thématique des principaux travaux mathématiques* [**1972**], “mi influencia en la geometría analítica se debe (...) a los puntos de vista directamente inspirados por la geometría algebraica que pude introducir” [**1972**, 6]. En particular, en un apartado de “Técnicas de construcción de espacios analíticos”, Grothendieck señala la aparición de espacios “modulares «globales»” (espacios de Picard, espacios analíticos compactos) y de “espacios modulares «locales» de deformación de una estructura analítica compleja dada” [**1972**, 7]. Obsérvese cómo la metodología general de la geometría algebraica, y de los haces en particular, se encuentra en juego, muy atenta a tránsitos (u obstrucciones) entre lo local y lo global. Con perspectiva, en esos vaivenes de (de)construcciones locales/globales, Grothendieck detecta los gérmenes de otros caminos posteriores: teoremas de dualidad (Verdier), extensiones de Riemann-Roch, cohomología cristalina compleja (ver nuestro *Capítulo 8* abajo), conexiones de la cristalinidad con espacios analíticos rígidos [**1972**, 8]. Y aún con algo más de perspectiva, podemos encontrar enlaces esenciales con los trabajos de la década de los 1980s alrededor de los espacios *moduli* de las superficies de Riemann y la geometría anabeliana (ver nuestros *Capítulos 10, 12* abajo).

[xlix] Una buena introducción a los espacios de Teichmüller (1937-39) se encuentra en Y. Imagoshi y M. Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Tokyo: Springer-Verlag, 1992. El *espacio de Teichmüller* sobre una superficie dada provee una parametrización de *todas* las estructuras complejas sobre esa superficie (se trata, por tanto, de un objeto *holístico universal natural*, de fascinación inmediata para Grothendieck). Si M_g es el espacio *moduli* riemanniano de género g (es decir, el conjunto de clases de isomorfismo de superficies de Riemann cerradas de género g), M_0 se reduce a un punto (clase de la esfera de Riemann), M_1 se reduce al plano complejo (vía funciones y curvas elípticas) y M_g ($g \geq 2$) puede parametrizarse mediante $3g - 3$ parámetros complejos (Riemann 1857). El *espacio de Teichmüller* T_g de género g resulta ser un cubrimiento adecuado de M_g, con ramificaciones asociadas al grupo fundamental de alguna (= cualquiera) superficie de Riemann cerrada de género g. T_g hereda entonces globalmente una *estructura canónica* de variedad compleja, a partir de los fragmentos locales producidos por la acción del grupo fundamental sobre M_g. La *estructura de todos los* T_g *(*$g \geq 0$*)* conforma lo que luego llamará Grothendieck la *torre* de Teichmüller [**1981**] [**1984**].

El parágrafo §1 de "I. Descripción axiomática del espacio de Teichmüller y de sus variantes" utiliza el lenguaje categórico para presentar las *variaciones* de los espacios analíticos, y en particular de las curvas (algebraicas) de género g, desde un punto de vista funtorial *unificado*. Los espacios analíticos pueden *desplegarse* unos sobre otros (es decir $X \to S$, S base fija) y conforman categorías A_S que miden las variaciones de las bases (si $S \to S'$ es un morfismo, se obtiene un funtor "cambio de base" $A_S \to A_{S'} : X \to X \times_S S'$) [**1961**, 7.2]. En particular, Grothendieck define una "curva (algebraica) de género g por encima de S" como un espacio analítico X sobre S tal que $f : X \to S$ es propio y simple (para todo $x \in X$ existen vecindades abiertas $V \ni x$, $U \ni f(x)$, $V \approx U \times C$ para alguna variedad compleja C), cuyas fibras son conexas, de dimensión (compleja) 1 y de género g [**1961**, 7.2]. Denotando ahora $A(S)$ el conjunto de clases de homeomorfismo de curvas de género g por encima S, se obtiene un funtor $A : An \to Con$ de la categoría de espacios analíticos en la categoría de conjuntos, y Grothendieck observa que *no* se trata de un funtor *representable* ($A(S) = Hom(S, M)$ para algún $M \in An$), puesto que, en general, las curvas de género g poseen *automorfismos no triviales* (que no estarán reflejados en la representación fija) [**1961**, 7.3]. Concluye Grothendieck: "Para llegar a una teoría satisfactoria, se deben entonces *eliminar los automorfismos* de las estructuras consideradas, mediante la introducción de nuevos elementos de estructura, que tendrán como efecto tornar «rígida» la estructura inicial" [**1961**, 7.3]. El método resulta fascinante: una primera fibración (A_S, $A(S)$) permite dar cuenta de las variaciones locales externas en la base, pero ocurre entonces una obstrucción global (representabilidad de A), que solo puede ser obviada mediante la eliminación de otras variaciones internas (automorfismos de la curva), algo que se obtendrá mediante nuevas propiedades estructurales. Tránsito-obstrucción-tránsito-obstrucción se convocan así en diferentes niveles, a lo largo de un *vaivén espiral ampliativo* que impulsa la emergencia de *creatividad* matemática y que permite explicar el interés de las formalizaciones categóricas.

En el parágrafo §2, el esfuerzo (abstracto, general) por eliminar los automorfismos lleva a la elucidación de nuevas estructuras complejas (concretas, particulares) en la torre de Teichmüller. Si X es una curva de género g por encima de S, el *recubrimiento de Teichmüller* de S asociado a X se define como el conjunto $P(X/S)$ de clases de homotopía de homeomorfismos que preserven orientación sobre las fibras X_S de X sobre S[260] [**1961**, 7.5]. Grothendieck precisa tres condiciones esenciales del recubrimiento P: *(i)* para S fijo, es *funtorial* en X/S, *(ii)* preserva imágenes inversas, *(iii)* asegura la trivialidad (identidad) de los automorfismos de $X \to S$ que inducen la identidad sobre $P(X/S)$[261]. Una P-estructura sobre una curva X de género g por encima de S se define como una *sección* de $P(X/S)$ sobre S [**1961**, 7.5]. Con estas definiciones de recubrimientos, grupos y acciones, Grothendieck puede entonces enunciar el teorema principal de las conferencias: existen un espacio analítico T[262] ("*espacio de Teichmüller*") y una P-curva algebraica V por encima de T que son *universales*, es decir, tales que para *toda* P-curva algebraica X por encima de S existe un morfismo único $\varphi : S \to T$ tal que X/S sea isomorfo a $\varphi^*(V/T)$ (teorema 3.1 [**1961**, 7.8]). El teorema enuncia así la existencia de un entorno *arquetípico para la clasificación* de curvas algebraicas[263]. Todas las lecciones siguientes del *Seminario* llevan a la prueba del teorema, conseguida en [**1961**, 17.16] ¡casi 200 páginas después!

[260] Grothendieck usa el hecho, probado luego en sus lecciones, que X es un *fibrado topológico* localmente trivial sobre S. Esto da lugar al *grupo de Teichmüller* γ de una curva (absoluta) de género g, formado por las clases de homotopía de homeomorfismos que preserven la orientación de la curva. El grupo γ actúa de manera natural (algebraicamente, topológicamente, analíticamente) sobre el recubrimiento $P(X/S)$ [**1961**, 7.3-7.5].

[261] Un funtor que verifica *(i)* y *(ii)* se llamará "cartesiano" en *EGA* [**1959-64**], un funtor que verifica *(iii)* se llama *rígido* [**1961**, 7.5-7.6]. De esta manera, mediante un recubrimiento se obtiene una condición de rigidez, de manera similar a como un despliegue *étalé* asegura una condición de *lisura étale*.

[262] T es en realidad "una variedad compleja de dimensión $3g - 3$ si $g \geq 2$, de dimensión 1 si $g = 1$" [**1961**, 7.8] (reencontrando los resultados de Riemann), y, además, T es "*homemorfo a una bola*, y por consiguiente *contractil*, en particular *conexo y simplemente conexo*" [**1961**, 7.9].

[263] Esta situación puede verse como una primera *expresión concreta* de los enlaces entre *universalidad* y *clasificación* que quedarán reflejados en la aparición de los *subobjetos clasificadores en topos*. Ver nuestro *Capítulo 7* abajo.

Si $\mathcal{F}$ es la categoría fibrada de las curvas de género g sobre espacios analíticos variables[264], Grothendieck apunta al resto de su primera lección: "veremos en los parágrafos siguientes que el espacio analítico T, dotado con el grupo de automorfismos γ, puede ser considerado como una solución satisfactoria del «problema de los módulos» para las curvas de género g, es decir, permite reconstituir completamente la categoría fibrada de partida $\mathcal{F}$, y resolver así, al menos teóricamente, todos los problemas que pueden expresarse en términos de esta categoría fibrada" [**1961**, 7.10]. Con ello, se consigue "olvidar el significado geométrico preciso de las palabras «curva de género g por encima de S», al interpretar los enunciados en términos del espacio analítico con operadores T" [**1961**, 7.12]. Estamos ante una estrategia que se repite incesantemente en el pensamiento grothendieckiano: *gobernar* un entorno amplio de estructuras matemáticas (tipos) a través de alguna superestructura que las clasifique (arquetipo)[265]. El proceso sigue unas etapas bien definidas: *(i) axiomatización* de algunas propiedades deseadas del arquetipo, *(ii) elevación* (= *categorización*) de niveles estructurales, cuyo *límite* provee la superestructura buscada, *(iii)* reconstrucción de los tipos iniciales vía *teoremas de representación* a partir del límite encontrado. Podemos denominar ese proceso como *inventividad abstracta*: visión holística de un entorno, capacidad axiomática estructural, circulación general dentro del panorama propuesto, proyectividad desde lugares sobresalientes de la arquitectónica.

Por otro lado, las *técnicas particulares* que acompañan ese *proceso universal* exhiben la extraordinaria *inventividad concreta* de Grothendieck. Los ejemplos *(i)*-*(x)* presentados a continuación proceden de las conferencias I-X del *Séminaire Cartan* (ver arriba, p.

264 Es decir, $\mathcal{F}$ es la categoría *An* introducida previamente, sin reducción aún a las clases de equivalencia módulo homeomorfismo.

265 Se trata de una *manera* ya muy visible en el *gobierno* de la *norma proyectiva* sobre las normas tensoriales en espacios de Banach (ver nuestro *Capítulo 2* arriba), o del objeto *generador* sobre los objetos inyectivos en adecuadas categorías abelianas (ver *Capítulo 3*), o del *grupo de la K-teoría* sobre los haces coherentes (ver *Capítulo 4*), o de la *cohomología étale* sobre las curvas finitas sobre campos de Galois (ver *Capítulo 5*).

177): *(i)* observación de que γ opera propiamente[266] en T [**1961**, 7.14, 7.32], *(ii)* estudio de haces de anillos (*espacios anillados*) locales [**1961**, 9.2-9.8] y del caso particular de haces de funciones holomorfas (haces coherentes cuyos anillos locales son noetherianos)[267] [**1961**, 9.9], *(iii)* prueba de que An posee límites (proyectivos) finitos, preservados por el funtor olvido $An \to Top$ [**1961**, 10.4-10.6], *(iv)* estudio de propiedades de *efectividad*[268] en la categoría An ("pegamiento de soluciones de problemas universales") [**1961**, 11.22-11.28], *(v)* prueba de la *representabilidad* de ciertos funtores fibrados sobre An/S

[266] Es decir, el morfismo natural $T \times \gamma \to T \times T$ definido por las operaciones de γ sobre T es propio, lo que corresponde a propiedades de finitud y de clausura para el grupo estabilizador γ_t ($t \in T$) [**1961**, 7.14]. Grothendieck indica que "este fenómeno está esencialmente ligado a la finitud de los grupos de automorfismos de las curvas de género g (...) Por el contrario, en la teoría de módulos de los toros complejos, la existencia de grupos de automorfismos infinitos muestra que estamos en presencia de un grupo discreto que no opera propiamente, y por tanto no se puede pasar al cociente de manera razonable, como lo han observado Kodaira y Spencer" [**1961**, 7.14]. Compárese el *tránsito suave* conseguido mediante propiedades algebraicas de finitud, versus la *obstrucción* determinada por la aparición infinitaria de $\mathbb{Z}$ sobre el toro. El mundo *étale* se acercará sistemáticamente a formas de ese tránsito suave (ver nuestros *Capítulos 7, 8* abajo), mientras que el mundo *anabeliano* intentará aprovechar nuevas técnicas del álgebra topológica para abordar las obstrucciones naturales asociadas a la geometría de los toros y a la aritmética correspondiente de las funciones elípticas (ver nuestros *Capítulos 10, 12* abajo).

[267] A partir de allí, dado un cuerpo valuado completo k, Grothendieck define un *espacio analítico* sobre k como un haz de anillos cuyas fibras son k-álgebras y que localmente es isomorfo a un haz finitamente generado de funciones holomorfas sobre k^n [**1961**, 9.9]. Los espacios analíticos conforman una categoría An, con morfismos naturales entre haces [**1961**, 9.10]. Grothendieck observa que los morfismos en An *no* están determinados por su estructura conjuntista subyacente, y explica que "la razón esencial es la posible presencia de elementos nilpotentes en los haces estructurales de los espacios anillados considerados" [**1961**, 9.13]. En cambio, en caso de no existir nilpotentes, la maquinaria produce una variante del *Nullstellensatz* [**1961**, 9.13]. Una vez más, esto muestra cómo, en el fondo del pensamiento grothendieckiano, subyacen los entornos clásicos esenciales de la geometría algebraica, *ampliados y suavizados* gracias a las nuevas técnicas de expansión local (nilpotentes) y de pegamiento global (haces de haces).

[268] Como preludio a un tal estudio, en un largo apartado "Formalismo general de los funtores representables" [**1961**, 11.1-11.22], Grothendieck presenta definiciones, límites, cambios de base, adjuntos, fibraciones, cocientes, relaciones de equivalencia y efectividad (cocientes construibles vía relaciones de equivalencia). Sin presuponer conocimientos previos, se trata de una exposición magistral donde Grothendieck sintetiza algunas de las técnicas esenciales de la teoría de categorías que ha venido inventando desde el *Tôhoku* [**1955-56**], independientemente de la escuela norteamericana (a desarrollarse sobre todo en la década de los sesenta). Resulta fascinante ver cómo lo *aparentemente* más abstracto (categoricidad) se pone al servicio de lo muy concreto (analiticidad).

y conexiones con fibrados grassmanianos y proyectivos (en *entornos relativos* dentro de la categoría de los espacios analíticos)[269] [**1961**, 12.8-12.9], *(vi)* estudio local de morfismos: gérmenes, platitud, simplicidad[270] [**1961**, 13.1-13.13], *(vii)* elaboración de elementos de *cálculo infinitesimal* para espacios analíticos arbitrarios[271], caracterización diferencial de inmersiones [**1961**, 14.14] y (dualmente) prolongación infinitesimal de morfismos y estructuras complejas [**1961**, 14.17-14.26], *(viii)* reporte sobre la *coherencia de funtores*

---

269 Grothendieck indica que "Desde el punto de vista de los fundamentos, se ve bastante claramente la necesidad, para la geometría analítica igualmente [como para la geometría algebraica], de desarrollar desde el inicio una *teoría relativa* de los espacios analíticos, por encima de los espacios anillados con anillos topológicos S suficientemente generales" [**1961**, 12.1]. Aquí y en otros lugares de las conferencias para el *Séminaire Cartan*, Grothendieck hace referencia al tratado *EGA* [**1959-64**] en curso, y sugiere cómo deberían *ir en paralelo* los fundamentos de la geometría analítica y la geometría algebraica. Aunque Grothendieck nunca conseguirá del todo el entrelazamiento *abstracto general* de esas dos arquitectónicas, muchas de sus ideas más originales de la década de los 1980s consistirán en profundas conexiones *concretas particulares* encarnadas en la torre de Grothendieck-Teichmüller y la geometría anabeliana (ver nuestra *Parte III* abajo).

270 Con su nuevo marco, Grothendieck extiende definiciones previas, y explica cómo una "familia compleja de variedades analíticas" según Kodaira y Spencer [**1961**, 13.13] es reemplazada por una noción de "morfismo simple" (cinco condiciones equivalentes, vía comportamiento de la fibración, isomorfismo entre anillos de polinomios, representabilidad topológica o prolongación analítica [**1961**, 13.9-13.11] – la fineza de los encadenamientos lógicos recuerda la maestría metodológica de la *Tesis* [**1949-53**] o del *Résumé* [**1953c**]). El interés de la simplicidad surge al observar que "guarda un sentido razonable sin hipótesis de no singularidad sobre el espacio analítico base. En la mayoría de los problemas de *moduli*, los espacios modulares pueden tener singularidades arbitrarias, lo que muestra la importancia de disponer de nociones de regularidad «relativas» de un espacio analítico X sobre otro Y, que no hagan mención a ninguna condición de regularidad sobre Y" [**1961**, 13.13]. La *suavidad* y la *relatividad*, puntales *sine qua non* del pensamiento grothendieckiano, se acercan aquí profundamente, y sirven de preludio a muchos de los grandes trabajos de la década de los 1980s (ver nuestra *Parte III* abajo).

271 La clave se encuentra en "la posibilidad de utilizar espacios anillados con elementos nilpotentes, lo que es particularmente agradable para poder formular geométricamente, sin contorsiones, las nociones fundamentales" [**1961**, 14.1]. Una *geometría sin contorsiones*, basada en la amplitud *agradable* de estructuras algebraicas y categóricas *sin restricciones*, fue sin duda una de las visiones revolucionarias de Grothendieck.

derivados asociados a morfismos propios de espacios analíticos (Grauert)[272] [**1961**, 15.1-15.5] y a morfismos estructurales de espacios proyectivos (Grauert-Remmert) [**1961**, 15.9], *(ix)* estudio[273] de problemas de representabilidad de espacios *moduli* ligados a cocientes coherentes[274] [**1961**, 16.1-16.5], *(x)* construcción del espacio de Teichmüller anunciado en la primera conferencia, vía rigidificación lineal[275] [**1961**, 17.2-17.7], recubrimientos [**1961**,

[272] Como consecuencia, si X es una curva de género 1 por encima de Y, Grothendieck muestra, mediante el haz de sus formas diferenciales relativas, que X debe ser necesariamente *proyectiva* sobre Y. Este resultado es el requerido para construir los *espacios moduli* prometidos en la primera exposición, ya que permite "aplicar las técnicas proyectivas, es decir la teoría de los esquemas, gracias al diccionario algebraico-analítico provisto por el teorema de Grauert-Remmer" [**1961**, 15.8]. La visión de la *teoría de los esquemas como una teoría general de la proyectividad* empata a la perfección con la naturalidad grothendieckiana por entender, y usar *continuamente* en sus trabajos, múltiples aspectos de lo proyectivo (ver, por ejemplo, la entrada "proyectividad" en nuestro *Índice analítico*).

[273] Merece mencionarse aquí que Grothendieck, en la exposición IX, se refiere varias veces a otras conferencias ofrecidas en el *Seminario Bourbaki*: Alexander Grothendieck, "Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I-IV", *Séminaire Bourbaki* 12 (nos. 190, 195) (1959/60), 13 (nos. 212, 221) (1960/61). Eso resalta, una vez más, cómo las *técnicas de construcción corrían paralelamente* en geometría algebraica y en geometría analítica. En palabras del mismo Grothendieck, sugiriendo una estrecha cercanía conceptual entre el *GAGA* (Serre, óp.cit.) y su propio GAGA, "habría que interpretar (...) la equivalencia entre la «geometría algebraica de los esquemas relativos proyectivos sobre Y» y la teoría de los «espacios analíticos proyectivos sobre Y»" [**1961**, 15.10].

[274] Dados X, T espacios analíticos sobre S y $\mathcal{E}$ haz (de espacios *moduli*) coherente sobre X, Grothendieck define $\mathcal{F}(T)$ como el conjunto de los haces coherentes, planos y propios, cocientes de $\mathcal{E}_T$ (= imagen inversa de $\mathcal{E}$ sobre $X \times_S T$) [**1961**, 16.1]. Esto da lugar a un funtor $\mathcal{F}$: $An_S \to An_T$ (con T variando en la categoría An_S de espacios analíticos sobre S), que Grothendieck llama *funtor de Hilbert* [**1961**, 16.2]. Los problemas centrales consisten en saber cuáles subfuntores de $\mathcal{F}$ son *representables*. En el caso en que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ (haz estructural) y X es proyectivo sobre S, $\mathcal{F}$ resulta ser representable y el espacio analítico representativo $Hilb_{X/S}$ se denomina espacio modular de Hilbert de X/S [**1961**, 16.2]. Nos encontramos entonces ante un ambiente general de *suavización*: "La existencia de elementos nilpotentes en los anillos locales de los espacios modulares de Hilbert debe ser considerada como un fenómeno muy frecuente, que se presenta en las situaciones más sencillas y más clásicas. Es solo al tener en cuenta esos elementos nilpotentes cómo se alcanza una comprensión de la estructura infinitesimal de esos espacios modulares" [**1961**, 16.5].

[275] Si X es un curva de género g por encima de S, una "rigidificación lineal" de X corresponde a darse un conjunto finito $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ de secciones que forman una base de $\mathcal{E}_{X/S}$, o, equivalentemente, un conjunto de secciones de un fibrado principal analítico localmente trivial sobre S cuyo grupo estructural es el grupo lineal complejo $G = GL(n, \mathbb{C})$ [**1961**, 17.2-17.3] (esto "elimina los automorfismos", como deseado, ver arriba p. 180). A partir de aquí, Grothendieck define un funtor $\mathfrak{A}_R$: $An \to Con$ (donde $\mathfrak{A}_R(S)$ = clases (módulo iso) de curvas de género g por encima de S provistas con una rigidificación lineal) y prueba que es *representable* mediante un espacio analítico M_R cuyos anillos locales son regulares y de dimensión $3g - 3 + dim(G)$ [**1961**, 17.3]. Para obtener el espacio de Teichmüller falta

17.13-17.15] y cocientes[276] [**1961**, 17.15-17.16]. En suma, en las exposiciones del *Séminaire Cartan* vemos a un matemático *con todos sus hierros en el fuego*, yendo y viniendo con la mayor comodidad entre técnicas algebraicas, geométricas, topológicas, analíticas, todo perfectamente enmarcado dentro de una arquitectónica categórica general.

6.2 Síntesis conceptual

Las *Techniques de construction en géométrie analytique* proveen un notable ejemplo de las maquinarias grothendieckianas *en acción*. Resulta fascinante ver cómo el continente mismo de las lecciones parece *reflejar* su contenido matemático. El espacio de Teichmüller T_g se postula primero axiomáticamente, se proveen luego herramientas generales de paso entre (y dentro de) las categorías An_S, se desarrollan herramientas de cálculo diferencial local en ellas y se reintegra finalmente el todo gracias a linealizaciones, recubrimientos y cocientes. De manera similar, el *texto mismo* de las conferencias adquiere un *tono* estructural –una *maniera* arquitectónica– con distintos niveles que se entrelazan en torres de definiciones, lemas, observaciones, ejemplos, cuyos *encajes y contrapuntos* parecen obedecer a una armonía musical escondida. Continente y contenido, forma y estructura, funtor y objeto se convocan unos a otros, en un extraordinario *back-and-forth* donde la *técnica* matemática y la *arquitectónica* metodológica se complementan entre sí.

entonces por reducir la dimensión sobrante de G, lo que termina de hacerse mediante recubrimientos de M_R y un cociente (por G) de esos recubrimientos.

276 Los cocientes se obtienen dentro de la categoría de los espacios analíticos gracias a buenas propiedades de efectividad en esa categoría (ver punto *(iv)* arriba). Por el contrario, Grothendieck señala que un intento de prueba más general, con esquemas arbitrarios, falla: "El método indicado en el texto choca [bute], en el contexto de los esquemas, sobre una dificultad de paso al cociente, que no existe en el caso trascendente" (es decir, de los espacios analíticos) [**1961**, 17.1]. Estamos ante una nueva instancia de *tránsitos y obstrucciones*. Finalmente, Grothendieck observa que Mumford ha encontrado paralelamente otra construcción de los espacios *moduli* gracias a un nuevo teorema de paso al cociente para curvas [**1961**, 17.1].

Algunas estrategias en las exposiciones del *Séminaire Cartan* resaltan la *suavidad* de los espacios de variable compleja: *(a) despejar* ("dégager") mecanismos funtoriales generales para el manejo de haces coherentes, aplicados en particular a la variable compleja, *(b) despejar* buenas formulaciones de problemas de espacios *moduli* (*representabilidad* de funtores adecuados) en el ámbito de los espacios analíticos, *(c)* enlazar propiedades de *proyectividad* con teoremas de existencia (*espacio de Teichmüller*), *(d)* acercar el marco de los esquemas (geometría algebraica) y el marco de las variedades holomorfas (geometría analítica), aprovechando en particular, en ambos casos, las propiedades infinitesimales de los *elementos nilpotentes en anillos locales.* Por otro lado, las *dialécticas* implícitas en los tránsitos de la variable compleja actúan con toda su fuerza: *(e)* procesos de *ascenso* (funtorialidad general, espacios globales) y de *descenso* (proyectividad, escalonamiento modular, localidad, nilpotencia), *(f) back-and-forth* entre lo uno (universalidad categórica) y lo múltiple (categorías concretas de esquemas y de espacios analíticos), *(g)* estructuración jerárquica del saber matemático en *niveles circulatorios* (combinación diferencial de objetos y funtores). Un hecho matemático y metodológico de gran interés –demostrado en las *Techniques de construction en géométrie analytique* [**1961**]– resulta ser la develación de *múltiples formas matemáticas particulares de suavidad (a-d)* gracias a una *unidad de dialécticas metodológicas abstractas (e-g).*

Grothendieck combina las artes del *arquitecto* y el *obrero.* Por un lado, las visiones axiomática (lección I), hacificada (II), categórica (IV) y graduada[XL] (V) preparan los planos de la obra. Por otro lado, los cálculos de límites (lección III), morfismos (VI),

[XL] Es decir, en el sentido de una *graduación* algebraica, a menudo utilizada por Grothendieck. Un *anillo graduado* es un anillo que puede representarse como *suma directa* de grupos abelianos. La suma directa provee niveles de descomposición (representación) de los elementos en el anillo. Un ejemplo central de anillo graduado es el anillo de polinomios $k[X_1, \cdots, X_n]$ en n variables, que resulta ser suma directa de los subgrupos A_d (no subanillos) generados por los monomios de peso $d \geq 0$ ($X_i^{\alpha_i} \cdots X_j^{\alpha_j}$ con $\alpha_i + \cdots + \alpha_j = d$). Este ejemplo muestra que, de entrada, en su ámbito privilegiado $k[X_1, \cdots, X_n]$, la geometría algebraica se organiza en una multiplicidad de niveles que encuentra un eco natural en la jerarquía de los espacios *moduli.* Riemann-Roch es una expresión precisa de esa *gradualidad general*, y la atención constante de Grothendieck por Riemann-Roch refleja su *inclinación natural* hacia ese tipo de situaciones en la matemática.

infinitésimos (VII), propiedades de coherencia (VIII, IX) y recubrimientos (X) construyen las diversas mamposterías, pisos y cuartos del edificio[277]. La *fábrica* grothendieckiana combina instalaciones, maquinarias y herramientas, piedras, ladrillos y argamasas, para poder *transformar* los conceptos, objetos y funtores matemáticos en juego, de la misma manera en que una fábrica industrial transforma diversas fuentes de energía. Es fácil ver aquí cómo el *volcán* y el *mar* se encuentran otra vez en acción: las forjas de Vulcano requieren de aguas que templen los metales, de la misma manera en que las grandes abadías medievales requerían de ríos cercanos para impulsar el alto rendimiento de sus hornos.

Uno de los efectos más potentes de la *acción combinada del volcán y el mar* se encuentra en la idea de *variar* y *rigidificar* una estructura, para eliminar automorfismos sobrantes, y, luego, *recubrirla* y *proyectarla*, para obtener su núcleo arquetípico esencial. Es como si, en una primera instancia, estallara un volcán submarino y sus lavas se endurecieran, y, en una segunda instancia, el efecto de las corrientes del océano alisara y suavizara las formaciones magmáticas. Al inicio, aparecen fuegos artificiales (*axiomas*), se escalan pirotecnias (*variantes del espacio de Teichmüller*) y se dibuja un espacio abrasado de tensiones lumínicas (*representabilidad de funtores sobre espacios analíticos*). Luego, las fuerzas de la marea recubren la explosión (*filtraciones, coherencia*), la moldean (*platitud, simplicidad, proyectividad*) y terminan de suavizarla (*cocientes*).

La *estructuración* de los espacios *moduli* puede verse como el aporte principal propuesto en *Techniques de construction en géométrie analytique* [**1961**], y consiste en *pasar* de tener los espacios *moduli* como objetos conjuntistas desconectados a verlos como estructuras categóricas conectadas: *paso a una multiplicidad* aritmética-algebraica-compleja-topológica-diferencial con profundos enlaces funtoriales entre las partes. Como lo dice Grothendieck en *Récoltes et semailles*,

---

277 Ver más abajo, en nuestro *Capítulo 8*, cómo Grothendieck describe, en *Récoltes et semailles* [**1983-86**], su *doble tarea* de arquitecto y obrero.

> La idea misma de las *multiplicidades* modulares se encuentra, «entre líneas» al menos, en mis exposiciones «Teichmüller» en el *Séminaire Cartan*, realizadas cuando el lenguaje de los sitios y los topos no existía aún [**1983-86**, 2.237].
>
> Es sobre todo desde mis exposiciones en el *Séminaire Cartan* sobre los fundamentos de la teoría de los espacios analíticos complejos, y sobre la interpretación geométrica precisa de las «variedades modulares con niveles» a la Teichmüller, hacia el fin de los años cincuenta, cuando entendí la importancia de una doble generalización de las nociones usuales de «variedad» con las cuales se ha trabajado hasta el momento (algebraica, analítica real o compleja, diferencial – o luego sus variantes en «topología moderada»). Una consiste en ampliar la definición para poder admitir «singularidades» arbitrarias y elementos nilpotentes en el haz estructural de las «funciones escalares» – siguiendo el modelo de mi trabajo de fundamentos con la noción de esquema. La otra extensión es hacia una «relativización» por encima de topos localmente anillados convenientes (las nociones «absolutas» obteniéndose al tomar como base un topos puntual) [**1983-86**, 2.391-392].

La reflexión posterior de Grothendieck muestra cómo, entre fines de la década de los cincuenta y comienzos de los sesenta, en esos años prolíficos donde se entroncan la *Conferencia ICM* [**1958**], las *Techniques* [**1961**] y los inicios de *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**], el objetivo principal consiste en *ampliar el espacio-número* a través de *variantes de la noción de variedad*. El caso específico de la *geometría analítica* parece servirle a Grothendieck de *laboratorio concreto* para poner a prueba esas concepciones amplias que darán lugar a los esquemas y los topos (ver nuestros *Capítulos 7, 8* abajo).

6.3 Ejemplo detallado: espacios de Teichmüller

En la década de los ochenta, Grothendieck centrará algunos de sus objetivos principales en la *torre de Teichmüller* $(T_g)_{g\geq 0}$ y algunos de sus conceptos más novedosos (acción de $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ sobre la torre, dibujos de niños, geometría anabeliana [**1981**] [**1984**], ver nuestros *Capítulos 10, 12* abajo) procederán de manipulaciones directas de los espacios *moduli* M_g y de sus correlaciones (numéricas, algebraicas, analíticas, topológicas, geométricas) con los espacios de Teichmüller T_g (ver *Nota xlix* arriba, p. 179). Con veinte años de diferencia, el contraste entre las *Techniques* [**1961**] y la *Longue marche* [**1981**] es muy interesante: mientras que en las *Techniques* se utilizan herramientas abstractas para construir y caracterizar *el espacio particular* T_g, en la *Longue marche* se utilizan ejemplos concretos para explorar la *multiplicidad de los* $(T_g)_{g\geq 0}$. Abstracción para entender lo particular (*Techniques* [**1961**]) y concreción para entender lo general (*Longue marche* [**1981**]) conforman una fascinante *inversión*, buen ejemplo de cómo las aproximaciones grothendieckianas no toman partido por adelantado y no siguen nunca una estrategia rígida: los mixtos, los vaivenes, las traducciones –ya sea a nivel matemático, ya sea a nivel metodológico– son fundamentales.

Si recordamos los trabajos sobre fibrados holomorfos en la esfera de Riemann, sobre Riemann-Roch y sobre los espacios nucleares (comienzos de los cincuenta, ver arriba, p. 174) y los conectamos con las labores alrededor de la torre de Teichmüller (década de los ochenta, ver *Capítulos 10, 12* abajo), pasando por los haces coherentes de gérmenes de funciones holomorfas (fines de los cincuenta, ver *Capítulos 3, 4* arriba) y por los esbozos de fundamentación de la geometría analítica (comienzos de los sesenta, este *Capítulo*), vemos cómo la variable compleja le sirve a Grothendieck de *laboratorio permanente* para estudiar todo tipo de *ascensos y descensos* tanto en la técnica, como en la concepción matemática. En el ámbito de la variable compleja ocurre así una *no separación* entre análisis funcional, geometría diferencial, topología, haces y geometría algebraica que yace en el *corazón* mismo del *pensamiento no separado* de Grothendieck. Muchas cuerdas, estirándose a lo largo de la vida de Grothendieck, conforman una soga firme que revela la *continuidad de sus ideas*. Es como si un *haz superior* se encontrara en juego, *pegando* las tareas que se *solapan coherentemente* a lo largo de cuatro décadas[278].

[278] Falta por saber qué sucede en los manuscritos finales del periodo 1991-2014. Es *muy poco probable* que esa coherencia desaparezca y no es difícil conjeturar que, aún en sus últimas décadas, Grothendieck siguiera desarrollando importantes matemáticas. Lejos del ermitaño huraño fácilmente descartado como "loco", debería surgir la imagen de un huraño ermitaño asombrosamente brillante aún.

Un *recorrido minimal inverso* en las *Techniques* [**1961**], suerte de *matemática en reverso*[XLI], permite ir desbrozando las construcciones y las hipótesis sobre las que se basa la emergencia del espacio de Teichmüller T_g: *(a)* el espacio T_g aparece como un cociente X/G (con fibras de dimensión $dim(X) - dim(G) = 3g - 3$) [**1961**, 17.16], donde $X = M_{R,\mathfrak{B}}$ en un espacio recubridor (asociado a un funtor "rigidificador" $\mathfrak{B}$ definido vía M_g) [**1961**, 17.13] y donde $G = GL(n, \mathbb{C})$ es el grupo lineal complejo [**1961**, 17.3], *(b)* el espacio recubridor $X = M_{R,\mathfrak{B}}$ (R por rigidez) aparece como el objeto que permite representar el funtor $\mathfrak{B} : An \to Con$ que asocia, a un espacio analítico S, el conjunto de todas las clases (módulo isomorfismo) de curvas de género g por encima de S con una rigidificación G [**1961**, 17.3], *(c)* esta representación depende de otra sub-representación analítica para sub-espacios cerrados de un proyectivo [**1961**, 17.4, 16.3], *(d)* la teoría de los funtores representables aparece como el marco general que lleva a la construcción del clasificador T_g [**1961**, 11.1], *(e)* los funtores rigidificadores, candidatos a representables, aparecen como "escalonadores" o "niveladores"[279] en la postulación axiomática de T_g [**1961**, 7.8].

279 El 19 de Diciembre 1960, Grothendieck anuncia que "parece que Serre puede probar, utilizando la teoría de anillos de variedades abelianas" que el funtor natural central de la teoría de Teichmüller es rígido [**1961**, 7.8]. El 8 de Mayo 1961, al culminar sus conferencias, incluye en apéndice la prueba de Serre [**1961**, 17.18-17.20].

XLI Las *reverse mathematics* (1985-2000) de Friedman y Simpson consiguen ubicar *subsistemas minimales y naturales* de prueba en la aritmética de segundo orden que *equivalen* a los teoremas usuales de la matemática derivados de ellos. Definamos *(i)* RCA_0 mediante los axiomas básicos para términos aritméticos, el axioma de inducción $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \varphi(x)$ restringido a fórmulas $\varphi \in \Sigma^0_1$ y el axioma de comprensión $\exists X \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow x \in X)$ restringido a fórmulas Δ^1_0 (fórmulas dentro de la jerarquía de Kleene-Mostowski: Σ^0_n reúne las fórmulas en primer orden con matriz recursiva, con n alteraciones de cuantificadores y con cuantificador externo $\exists$, Π^0_n se define similarmente con cuantificador externo $\forall$, $\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$; Σ^0_1 codifica lo recursivamente enumerable, Δ^0_1 lo recursivo), *(ii)* WKL_0 mediante RCA_0 + "lema débil de König" (todo subárbol infinito del árbol binario posee una rama infinita), *(iii)* ACA_0 mediante los axiomas básicos para términos aritméticos, el axioma de inducción restringido a *fórmulas aritméticas* (fórmulas de segundo orden sin variables conjuntistas cuantificadas) y el axioma de comprensión restringido también a fórmulas aritméticas. Entonces, por ejemplo, a los ojos de RCA_0, se tienen equivalencias plenas (deducción y retroducción) de WKL_0 con el lema de Heine-Borel, completitud de la lógica de primer orden, existencia de ideales primos en anillos conmutativos enumerables, teoremas locales de existencia para ecuaciones diferenciales, teorema de Hahn-Banach para espacios separables, etc., y se tienen equivalencias plenas de ACA_0 con el teorema de Bolzano-Weierstrass, existencia de ideales maximales en anillos conmutativos enumerables, existencia de bases para espacios vectoriales sobre campos enumerables, etc. Los *tránsitos deductivos* usuales, que van de lo *global* (sistema en su conjunto) a lo *local* (teorema particular del sistema), se encuentran aquí *invertidos* de manera impactante, y permiten un paso inesperado de lo local a lo global, gracias a la *equiconsistencia* del teorema deducido con el sistema entero que lo deduce. Ver Zalamea, óp.cit., pp. 140-141.

De esta manera, el *objeto universal* T_g de la geometría analítica emerge gracias a un encajonamiento sofisticado de procedimientos de linealización (álgebra), recubrimiento (topología) y representación (categorías), aplicados a la *categoría concreta*[XLII] de espacios analíticos (variable compleja).

Alrededor del anterior *esqueleto de prueba*, ocurren múltiples desvíos zigzagueantes que exhiben la *riqueza imaginativa* de Grothendieck: estructuración topológica[280], estructuración homotópica[281], estructuración hacificada[282], estructuración algebraica[283], estructuración diferencial[284], etc. De esta manera, el estudio de la teoría de Teichmüller da lugar a todo un rico *arsenal de variaciones* alrededor del *invariante universal* T_g. Esto

---

[280] "El espacio de Teichmüller es homeomorfo a una bola, y por lo tanto contractil, en particular conexo y simplemente conexo" [**1961**, 7.9].

[281] "Los grupos de homotopía del grupo de los homomorfismos diferenciables de una curva algebraica sobre ella misma, homotópicos continuamente a la identidad, son todos nulos (al menos si $g \geq 2$)" (...) "Podemos esperar que algún día se llegará por allí a eliminar completamente el Análisis de la teoría del espacio de Teichmüller, que debería ser puramente geométrica" [**1961**, 7.9]. Profunda intuición de la geometría anabeliana, a desarrollarse veinte años después... Ver *Longue marche* [**1981**] y *Esquisse* [**1984**], nuestros *Capítulos 10, 12* abajo.

[282] "Llamamos estructura de Teichmüller sobre una curva X de género g, por encima de un espacio analítico S, toda sección del recubrimiento de Teichmüller $P(X/S)$ por encima de S" [**1961**, 7.5] (ver p. 181 arriba). Más adelante, Grothendieck indica que "la definición de una estructura de Teichmüller no se traduce tal cual en geometría algebraica abstracta" [**1961**, 7.32]. En efecto, el ámbito de la variable compleja y de la geometría analítica cuenta con *procesos de suavización más plenos* que no se consiguen en la geometría algebraica abstracta. El GAGA de Grothendieck posee así sus propias *obstrucciones* y limitantes naturales.

[283] Los morfismos de espacios analíticos no están determinados por sus sustratos conjuntistas, debido a "la presencia posible de elementos nilpotentes en los haces estructurales de los espacios anillados considerados" [**1961**, 9.13].

[284] "La geometría infinitesimal de un espacio analítico X emerge como el estudio de diversas construcciones geométricas por encima de ciertos espacios analíticos con elementos nilpotentes canónicamente asociados a X" [**1961**, 14.1].

[XLII] A la estela de Grothendieck, la teoría de categorías estudiará posteriormente una dualidad natural entre *categorías abstractas* y *categorías concretas*. Las categorías concretas son categorías de conjuntos con estructura adicional (grupos, anillos, espacios topológicos, variedades, etc.), mientras que en las categorías abstractas se trabaja con definiciones y caracterizaciones generales vía el cuantificador $\exists!$ (existe único). El vaivén entre lo *(i)* abstracto/general y lo *(ii)* concreto/particular puede verse tal vez como el *gran cálculo (i) integral y (ii) diferencial* de nuestra época.

puede observarse también en unas notas manuscritas sobre espacios analíticos aparecidas en los *Archives Grothendieck* [**IMAG**, cote 55 (c. 1961)]. Grothendieck estudia allí las variaciones de un espacio analítico, más precisamente de un espacio de Stein X compacto[XLIII], y reconstruye los módulos de presentación finita sobre X mediante sus *variaciones tensoriales* vía secciones del haz estructural $\mathcal{O}_X$ (equivalencia categórica apropiada) [**IMAG**, cote 55 (c. 1961), 1-7]. Desde el punto de vista de la *génesis* de los conceptos matemáticos, es interesante observar que las notas manuscritas sobre espacios analíticos aparecen en el *reverso* de un texto tipografiado[285] que corresponde a avances corregidos en la elaboración de *EGA* [**1959-64**]. Se combinan así la emergencia viva de los conceptos (letra manuscrita) y el decantamiento de los sustratos de una arquitectónica en elevación (texto tipografiado) –*volcán y mar*– reflejo de los *muchos hierros en el fuego* que maneja Grothendieck a inicios de los sesenta, y que darán lugar a los dos grandes monumentos *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**], que repasaremos sintéticamente en nuestros dos capítulos siguientes.

[285] Las primeras catorce páginas del documento [**IMAG**, cote 55 (c. 1961)] se dividen en 7 *versos* dedicados a espacios anillados, productos tensoriales, límites, sucesiones exactas, noetherianidad, y en 7 *rectos* que recorren pre-esquemas noetherianos, cálculo de dimensiones en fibras, cálculo de dimensiones en componentes topológicas irreducibles, caracterizaciones de espacios topológicos noetherianos. La letra de Grothendieck se encuentra muy acostada, es casi lineal, difícil de leer, reflejo de un evidente apuro (comienzos de los sesenta: ¡muchas tareas en juego!) Las notas manuscritas terminan en otro tipo de papel, con un cálculo de dos páginas sobre un "*toro complejo* de dimensión (compleja) 2, fibrado sobre un toro complejo de dimensión 1 (...) que no es una variedad abeliana" [**IMAG**, cote 55 (c. 1961), 16-17]. *Siempre* los ejemplos concretos proveen un adecuado contrapeso a consideraciones abstractas.

[XLIII] Un espacio de Stein (1948) es una subvariedad de $\mathbb{C}^n$ adecuadamente convexa y separada. En general, una superficie de Riemann conexa y no compacta es un espacio de Stein. En dimensión 1, para el caso de espacios conexos, se tiene una equivalencia plena entre superficies de Riemann no compactas y espacios de Stein. En las notas manuscritas, dirigidas a espacios de Stein compactos, y por tanto a variedades que *no* son superficies de Riemann, Grothendieck explora entonces una suerte de *ámbito complementario* de T_g y de los espacios *moduli*. Para un enlace entre las ideas de Stein en variable compleja y la emergencia de algunas ideas de Grothendieck en geometría algebraica, ver *Nota 232* arriba, p. 161.

7

Éléments de Géométrie Algébrique (EGA) (1959-64)

Los *Éléments de Géométrie Algébrique (EGA)* [**1959-64**] conforman el primer gran edificio de sostén de la "visión" de 1958. La inventividad infatigable de Grothendieck y la escritura sistemática no menos infatigable de Dieudonné permiten elevar en pocos años una gigantesca arquitectónica que funda de nuevo la geometría algebraica. El estudio fino de los esquemas (donde se extiende la noción de variedad algebraica vía haces bien comportados que amplían las técnicas de representación en anillos) y de los morfismos *étales* entre esquemas (donde se estudian propiedades topológicas de "lisura" para objetos algebraicos), así como la construcción de un "cálculo diferencial abstracto" (donde los nilpotentes permiten codificar profundas propiedades de regularidad), orientan la multiplicidad extremadamente detallada del tratado. Paralelamente a la elevación de *EGA*, Grothendieck impulsa su famoso seminario *SGA* [**1960-69**], y, en la conexión de las ampliaciones del número (álgebra, esquemas, *EGA*) y del espacio (geometría, topos, *SGA*), se condensan algunos de los aportes mayores de la genialidad grothendieckiana.

7.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Los manuscritos de *EGA* [**1959-64**] fueron escritos entre 1959 y 1964, y publicados entre 1960 y 1966[286]. El entorno de trabajo es el *IHES*, instituto de investigación construido específicamente para Dieudonné[l] y Grothendieck[li]. Este recuerda el esfuerzo misionario de los primeros años en el Instituto:

> Durante los años heroicos del *IHES*, Dieudonné y yo fuimos los únicos miembros, y los únicos también en darle credibilidad y audiencia en el mundo científico, Dieudonné con la edición de las "Publications Mathématiques" (cuyo primer volumen apareció ya en 1959, al año siguiente de la fundación del *IHES* por Léon Motchane), y yo con los "Seminarios de Geometría Algebraica" [**1983-86**, 1.169].

Resulta ser una época de grandes aperturas y proyecciones, donde la energía *volcánica* del aún jovencísimo matemático solo conseguirá ser apaciguada por los *mares* profundos

286 De manera precisa, *EGA* se divide en IV volúmenes (y 7 partes): *volumen I* (228 pp., finalizado 17 Octubre 1959, publicado 1960), *volumen II* (222 pp., finalizado 22 Julio 1960, publicado 1961), *volumen III.1* (167 pp., finalizado 28 Junio 1961, publicado 1961), *volumen III.2* (91 pp., finalizado 15 Diciembre 1962, publicado 1963), *volumen IV.1* (259 pp., finalizado 15 Marzo 1963, publicado 1964), *volumen IV.2* (231 pp., finalizado 15 Diciembre 1963, publicado 1965), *volumen IV.3* (255 pp., finalizado 15 Noviembre 1964, publicado 1966). Labor asombrosa (profundidad, disciplina, eficacia) que suma cerca de 1500 páginas y que solo puede entenderse bajo la acepción literal de lo *monumental*.

l Cartier recuerda cómo Motchane, fundador del *IHES*, le ofrece a Dieudonné la primera cátedra de matemáticas del Instituto, pero este pone como condición de aceptación que se invite también a Grothendieck, ver P. Cartier. "Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les "motifs")". En: *IHES/M/00/75* (2000), págs. 2-33, p. 11. La generosidad de Dieudonné, quien, en la cima de su fama, se asocia con su antiguo estudiante y se pone enteramente a su disposición en la redacción de *EGA*, no tiene igual.

li Fundado en 1958, el *IHES* se radica primero en París ("en un lugar improvisado, en el Instituto Thiers, ante un auditorio que no debía pasar de diez personas" [**1983-86**, 4.865]), y a los tres años se instala en Bures-sur-Yvette, al pie del dominio forestal Bois-Marie, ver Douroux, óp.cit., pp. 131-132, Bringuier, óp.cit., pp. 42-43. Es fácil imaginar cómo las caminatas en el bosque debieron encantar a un Grothendieck gran amante de la naturaleza. De hecho, Luc Illusie recuerda cómo el "Maestro" caminaba con sus discípulos "por los bosques para contarles sus últimas ideas", ver Artin y col., óp.cit., p. 253.

de la década larga 1958-70. Época donde las horas no parecen pasar, donde se rumorea que Grothendieck nunca duerme, donde todo refleja una verdadera y genuina generosidad, donde todo *se hace*[lii], son los años en los que Grothendieck se entrega de lleno a la *comunidad* matemática. Sin embargo, en lo que respecta a *EGA* [**1959-64**], Grothendieck se sentirá posteriormente frustrado de que esa entrega no haya sido lo suficientemente apreciada:

> Aún el vasto trabajo de fundamentos comenzado con los *Éléments de Géométrie Algébrique* (con la inagotable asistencia de Dieudonné), que habría casi bastado con continuar sobre el impulso ya adquirido, fue dejado de lado [**1983-86**, L.8].
>
> He podido notar en ocasiones un propósito deliberado en mi amigo [Deligne] de mirar y presentar mis publicaciones (sobre todo *EGA* y *SGA*) como suertes de “compilaciones” de resultados más o menos técnicos, que “todo el mundo” conoce, y para los cuales yo habría hecho el loable esfuerzo de ponerlos en negro sobre blanco, para ofrecer al fin las referencias faltantes y que no se hablara más de ello. Él sabe, no obstante, qué sucede en el fondo: que cada uno de los volúmenes de *EGA* y *SGA* presentan ideas que yo introduje y de las cuales durante años fui el único poseedor y abogado, así como técnicas en las que nadie habría soñado (salvo yo), y que debí desarrollar, ensayar y perfeccionar con una paciencia inagotable, antes de que estuviesen perfectamente rodadas, y listas al fin para entrar en el dominio de lo “bien conocido” [**1983-86**, 4.813].

En los años del *IHES*, su casa[liii] se encuentra siempre abierta a visitantes y estudiantes,

---

lii En el folclor de la época, es famosa la réplica de Grothendieck a un visitante que se extraña por la pobreza de la biblioteca del *IHES*: “Aquí no leemos libros, los escribimos”, ver Jackson, óp.cit., p. 1050.

liii Casado con Mireille Dufour, se estabiliza su vida, crece la familia y nacen sus hijos Johanna (1959), Alexander (1961) y Mathieu (1965), ver Bringuier, óp.cit., p. 46. Las biografías de Grothendieck, hasta el momento, poco se adentran en la vida familiar de Grothendieck, y se tienen algunos prejuicios sobre un padre no demasiado dedicado a sus hijos. Resultaría sin embargo extraño que la pasión de Grothendieck por las matemáticas y su dedicación a estudiantes y amigos no se reflejara también en un comportamiento familiar, si no cariñoso, al menos no tan distante como podría parecer (es sabida la presencia de varias amantes de Grothendieck mientras seguía aún con Mireille). Un Grothendieck generoso en las matemáticas lo fue también en la vida (particularmente en su acción ecologista y en su sensibilidad por los humildes), y no sería muy consecuente que ese darse al mundo no hubiese cubierto también en buena parte a su familia. Para un recuento breve de las vidas de los hijos de Grothendieck, donde todo queda aún por precisarse, véase W. Scharlau. “Who is Alexander Grothendieck? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude. A Biography. Part 3: Spirituality.” 2010, cap. 12, ”Grothendieck’s Family I”.

y resulta proverbial su disposición para con los demás[liv]. Grothendieck convierte así al *IHES* en el *centro* del mundo matemático, e irradia desde allí toda su extraordinaria visión, todo su temple, toda su dedicación, todo su sometimiento a una vida matemática que le trasciende – la *vida matemática de los siglos* en los que incidirá su obra.

Resumen mínimo.

Presentamos aquí básicamente el índice de contenidos de las 7 partes de *EGA* [**1959-64**] (para fechas y extensiones de cada parte, ver arriba nuestra *Nota 286*, p. 196).

I. El lenguaje de los esquemas. Cap. 0 (*Preliminares*). Anillos, fracciones, haces, espacios anillados, haces coherentes, módulos planos, anillos ádicos. Cap. I. (*El lenguaje de los esquemas*). esquemas afines, pre-esquemas, morfismos, productos, sumersiones, reducciones, separación, condiciones de finitud, aplicaciones racionales, esquemas de Chevalley, cuasi-coherencia, esquemas formales. (Fuerzas principales del volumen *I*: sumersiones en lo suave, lo plano, lo finitamente generado).

II. Estudio global elemental de algunas clases de morfismos. Cap. II. (*Estudio global elemental de algunas clases de morfismos*). Morfismos afines, espectros primos, espectro

---

liv Véanse, por ejemplo, Bringuier, óp.cit., p. 43, y los recuerdos de Michel Demazure y Marvin Jay Greenberg, en Artin y col., óp.cit., pp. 250-251. Según Demazure, "Aquellos que comparten conmigo la experiencia única de haberse beneficiado de su «consejo» saben cuan fuerte e iluminador era. El medio día semanal sentado a su lado y garabateando en paralelo en hojas comunes es algo que nunca olvidaré. Me asombraba la manera en que descubría (¡veía!) cosas mientras llegaban, escalando feliz niveles de abstracción como si ya hubiese estado allí", ibíd., p. 250. Y rememora Greenberg: "Me exalté cuando me invitó a comer con él y con su esposa a su casa. Era una morada sin pretensiones, de la clase trabajadora. Su esposa estaba ocupada cuidando a su pequeño bebé. Grothendieck no perdió el tiempo en conversaciones de pequeña monta. Con papel y lápiz en la mano, dedicó casi todo nuestro encuentro a esbozar vías para usar el funtor que yo había encontrado. No pude seguir lo que me estaba sugiriendo (....) Tres años más tarde pude desarrollar un poco lo que Grothendieck me había indicado", ibíd., p. 251. La visión, la pasión, la entrega son patentes en estos comentarios de los jóvenes asombrados ante su Maestro.

homogéneo de un haz de álgebras, fibrados proyectivos, jerarquía de morfismos (cuasi-afines, cuasi-proyectivos, propios, proyectivos, enteros, finitos), criterios de valuación, explosiones, proyecciones, clausuras. (Fuerzas principales del volumen *II*: proyecciones desde lo primario, lo fibrado, lo hacificado).

III.1. Estudio cohomológico de los haces coherentes (1ª parte). Cap. 0 (*Preliminares, sigue*). Funtores representables, conjuntos constructibles, módulos planos, álgebra homológica, cohomología de haces, límites proyectivos. Cap. III (*Estudio cohomológico de los haces coherentes*). cohomología de esquemas afines, cohomología de morfismos proyectivos, morfismos propios (teorema de finitud, teorema fundamental), existencia para haces algebraicos coherentes. (Fuerzas principales del volumen *III.1*: representabilidad y estructura de cohomologías).

III. 2. Estudio cohomológico de los haces coherentes (2ª parte). Cap. III (*Estudio cohomológico de los haces coherentes, sigue*). Funtores *Tor* locales y globales, fórmula de Künneth, cambios de base en los funtores homológicos de módulos. (Fuerzas principales del volumen *III.2*: enlaces local-global, relatividad).

IV. 1. Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas (1ª parte). Cap. 0 (*Preliminares, sigue*). Topología combinatoria, anillos locales noetherianos, anillos regulares, extensiones de álgebras, álgebras lisas y anillos de Cohen, derivaciones y diferenciales, diferenciales en anillos de característica p, lisura formal, regularidad, anillos japoneses (clausuras integrales de anillos de enteros son de tipo finito, Nagata). Cap. IV (*Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas*). Condiciones de finitud relativas, conjuntos constructibles en pre-esquemas. (Fuerzas principales del volumen *IV.1*: diferenciabilidad en anillos suaves, regularidad, lisura; finitud y construibilidad).

IV. 2. Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas (2ª parte). Cap. IV. (*Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas, sigue*). Cambio de base y módulos planos, ciclos primos y descomposiciones primarias, cambio de base en los pre-esquemas algebraicos, pre-esquemas localmente noetherianos (dimensión, profundidad, regularidad, morfismos planos), completados de anillos locales noetherianos, anillos excelentes. (Fuerzas principales del volumen *IV.2*: relatividad y completitud en ámbitos suaves, planos).

IV. 3. Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas (3ª parte). Cap. IV. (*Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas, sigue*). Límites proyectivos de pre-esquemas, propiedades constructibles, pre-esquemas de Jacobson, morfismos planos (topología, fibras), jerarquía de morfismos (equidimensionales, universalmente abiertos). (Fuerzas principales del volumen *IV.3*: estructura y construibilidad, topología de lo suave).

Descripción más extensa.

La imposibilidad de acercarse siquiera medianamente a la extensión y a la profundidad de *EGA* [**1959-64**] nos obliga a escoger fragmentos de la obra, para poder adentrarnos en una descripción más extensa de ellos. Aprovecharemos aquí la mirada de Serre, quien, en su *Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck* (1965)[lv], subraya algunos de los puntos centrales de *EGA*:

> *Necesidad de la introducción de los esquemas.* (...) Se trató, *grosso modo*, de deshacerse de las hipótesis parásitas que obstruían a la geometría algebraica: cuerpo de base, irreducibilidad, condiciones de finitud. Una tal extensión era necesaria, por ejemplo, para el estudio de los problemas diofánticos (donde el anillo de base natural es $\mathbb{Z}$ y no un cuerpo), o para el estudio de las variaciones de estructura (un esquema de módulos pudiendo perfectamente tener elementos nilpotentes), o aún para el estudio de las propiedades diferenciales (los “puntos cercanos” definiéndose del modo más cómodo gracias a álgebras con elementos nilpotentes).

---

lv Véase J.-P. Serre. “Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck (1965)”. En: *K-Theory* 3 (1989), págs. 199-204.

> *Resultados técnicos.* (...) *(a).* Aquellos relativos a los morfismos *planos* [*plats*] (correspondientes a la noción topológica de fibración), a los morfismos *lisos* (fibrado con fibras no singulares), a los morfismos *étales* (recubrimientos no ramificados). Ver *EGA*, Cap. III y Cap. IV. (...) *(c).* La forma cohomológica del "teorema de funciones holomorfas" de Zariski (*EGA*, Cap. III).[lvi]

De acuerdo con estos lineamientos, nos reduciremos en lo que queda de esta subsección a presentar: (1) la construcción arquitectónica (definiciones, subdefiniciones, condiciones) de la noción de *esquema*[287], (2) la aparición natural de los *nilpotentes* para desarrollar técnicas de variación y de diferencia, (3) la clasificación de los tipos de *morfismos planos, lisos y étales*, dentro de la estrategia general de suavización de la geometría algebraica buscada por Grothendieck, (4) la aplicación a un enlace con la *holomorfía* en el teorema de Zariski[288].

(1). Los esquemas aparecen en *EGA.I*, después de un autocontenido *Capítulo 0 – Preliminares* [**1959-64**, I.11-78] donde se recuerdan temas de anillos[289], noetherianidad[290], haces y complementos sobre haces[291], espacios anillados[292], haces coherentes[293],

---

287 Como hemos visto, las intuiciones, los objetivos y los ejemplos principales ya habían emergido en la *Conferencia ICM* [**1958**], *cfr.* arriba nuestro *Capítulo 5*.

288 Esto ya ocurre preliminarmente también en la *Conferencia ICM* [**1958**], ver nuestro *Capítulo 5* arriba, p. 161.

289 Recuérdese la observación de Serre: Grothendieck empieza a extender la geometría algebraica al trabajar no con "*cuerpos* de base", sino con *anillos*.

290 La *noetherianidad* es una técnica básica para extender algunas fuerzas de la estructuración finitaria hacia ambientes abstractos, ver *Nota XXXV* arriba, p. 158. Esto coincide aquí también con la observación de Serre: deshacerse de la hipótesis parásita sobre "condiciones de finitud".

291 Los haces conforman *la* herramienta básica, *sine qua non*, de la obra grothendieckiana, como lo hemos indicado a lo largo de toda esta monografía.

292 Ver *Capítulo 6* arriba, p. 183.

293 Ver *Nota 143* arriba, p. 109.

lvi Ver ibíd., pp. 201-202.

módulos planos[294], anillos ádicos[295]. Al iniciar el *Capítulo 1 – El lenguaje de los esquemas*, Grothendieck indica en el resumen cómo las definiciones de esquemas afines, pre-esquemas y sus operaciones (productos, sub-estructuras, morfismos)[296], "no hacen más que desarrollar un lenguaje (...) una traducción en lenguaje «geométrico» de nociones conocidas del álgebra conmutativa" [**1959-64**, I.79]. En realidad, la construcción del *lenguaje*[297] y el proceso de *traducción*[298] están lejos de ser triviales, y constituyen una parte fundamental del *hacer dialéctico* –entre *variación* y *permanencia*– de las matemáticas[lvii].

294 Un módulo M sobre un anillo (conmutativo unitario) A es *plano* [*plat*] si el funtor $N \to M \otimes_A N$ es exacto en la categoría de A-módulos. Una condición suficiente es que para todo ideal $I \subseteq A$ de tipo finito, la aplicación canónica $M \otimes_A I \to M \otimes_A A = M$ sea inyectiva. Todo módulo *libre* es plano [**1959-64**, I.55]. El ser plano se refleja bien localmente y resulta ser una condición natural de correspondencia entre espacios anillados [**1959-64**, I.57-60].

295 Un *anillo ádico* captura una noción de *nilpotencia topológica* en el anillo (convergencias a 0 de potencias $(x^n)_{n\geq 0}$), estructura esa noción vía sistemas fundamentales de vecindades y solicita que la topología sea separada y completa [**1959-64**, I.60-62]. Los anillos ádicos se comportan bien bajo límites y comparaciones continuas [**1959-64**, I.63-66], y, si se les añade una condición de noetherianidad, se pueden representar como secciones de anillos de series formales [**1959-64**, I.69-71]. Con todo esto, Grothendieck está introduciendo el *mar suave* que permitirá anegar las previas construcciones hirsutas –"parasitarias"– de la geometría algebraica.

296 Grothendieck sigue aquí los lineamientos del álgebra universal desde Birkhoff, al considerar (1) álgebras producto, (2) sub-álgebras y (3) imágenes homomórficas, pero no aparece ninguna mención explícita al *modo* birkhoffiano de considerar una variedad de álgebras a través de sus descomposiciones (1)-(3).

297 En buena medida, una de las fuerzas centrales de la creatividad matemática consiste en el "arte" de proveer *buenas definiciones*, con las que se circunscribe un concepto o un objeto, y se le otorgan múltiples vidas, al extender su *espectro* de influencia. Grothendieck se sentía muy orgulloso de haber inventado "centenares, si no miles, de nociones nuevas, que entraron en el patrimonio común, con los nombres mismos que les había dado cuando las había despejado" [**1983-86**, P.19]. Grothendieck reconoce los aportes de sus colegas y alumnos en ese proceso, y se refiere explícitamente a las sugerencias de Dieudonné (morfismo "liso") y de Giraud ("sitio, campo, *gerbe*, enlace"), *ibíd.* La multitud de definiciones grothendieckianas constituye sin duda algo único en la historia de la ciencia.

298 Para una comparación con las teorías de Walter Benjamin, véase nuestro *Capítulo 17* abajo.

lvii Lawvere caracteriza la teoría de categorías como "la primera en capturar en forma reproducible una incesante contradicción de la práctica matemática: fijar un objeto dado con precisión, más que en cualquier otra ciencia, para construir, calcular y deducir; y, sin embargo, constantemente transformarlo en otros objetos", F. W. Lawvere. "Some thoughts on the future of Category Theory". En: *Proceedings of the Como Meeeting on Category Theory.* New York: Springer, 1991, págs. 1-13, p. 1.

Una de las técnicas esenciales de Grothendieck consiste en estudiar, para un anillo conmutativo unitario arbitrario [**1959-64**, I.11], el *espectro*[lviii] del anillo provisto con la topología de Zariski[299] [**1959-64**, I.80]. Con esto, Grothendieck puede pasar a definir el *haz estructural* $\widetilde{A} = \mathcal{O}_X$ del espectro $X = Spec(A)$ (A anillo conmutativo unitario) como el haz de anillos sobre X con base de abiertos $(X - V(\{f\}) = \{x \in X : f(x) = [f]_x \neq 0\})_{f \in A}$ y con fibras los anillos locales A_x ($x \in X$)[300] [**1959-64**, I.85]. Diversas disquisiciones sobre las propiedades funtoriales en juego [**1959-64**, I.93-96] preceden la aparición finalmente de los *esquemas afines*, como haces estructurales de anillos: "un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín si es isomorfo a un espacio anillado de la forma $(Spec(A), \widetilde{A})$" [**1959-64**, I.96]. De acuerdo con la filosofía grothendieckiana, el "§1 – Esquemas Afines" del *Capítulo 1* termina con una caracterización de los *morfismos* entre esquemas afines gracias a las propiedades locales de los homorfismos entre los anillos subyacentes [**1959-64**, I.96-97].

---

299 Dado A anillo conmutativo unitario y dado $E \subseteq A$, se define $V(E) = \{J \in Spec(A) : J \supseteq E\}$; es fácil ver que los $V(E)$ forman un sistema de *cerrados* para una topología sobre $Spec(A)$ [**1959-64**, I.80]. Grothendieck la llama *topología espectral*, para luego comentar: "la introducción de esta topología en geometría algebraica se debe a Zariski. Por tanto se la llama a menudo «topología de Zariski»" [**1959-64**, I.80]. Ver también nuestra *Nota XXXI* arriba, p. 155. Una propiedad básica de *permanencia* es que si A es noetheriano entonces $Spec(A)$ es noetheriano [**1959-64**, I.81]. Aunque el espectro no siempre es un espacio de Hausdorff, sí es siempre un espacio de Kolmogorov (T_0 en la terminología actual) [**1959-64**, I.81]. Para usos posteriores, si x es un ideal primo de A, denotamos $A_x = A(A-x)^{-1}$ (*anillo local*), $\mathfrak{M}_x = xA_x$ (*único ideal maximal* de A_x), $\mathbf{k}(x) = A_x/\mathfrak{M}_x$ (*cuerpo residual* de A_x) [**1959-64**, I.80].

300 Grothendieck (siempre bajo la redacción de Dieudonné) extiende la noción de haz estructural para un módulo arbitrario, y prueba que la categoría de tales haces es una *categoría abeliana* [**1959-64**, I.87-88], enlazando así el *EGA* con el *Tôhoku* [**1955-56**].

lviii Dado A anillo conmutativo unitario, $Spec(A)$ (*espectro*) es el conjunto de los *ideales primos* en A. La importancia de trabajar con ideales *primos* (en vez de ideales maximales como lo requería la tradición) es puesta de relieve en J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique.* Paris: PUF, 1974, vol. I, p. 194. La preservación de los ideales primos bajo imágenes inversas de morfismos (algo que no sucede con los maximales) es un requerimiento esencial en la filosofía de la *matemática relativa* de Grothendieck.

Emerge entonces la definición de *pre-esquema*[301], como *pegamiento* de esquemas afines: "se llama pre-esquema un espacio anillado $(X,\, \mathcal{O}_X)$ tal que todo punto de X admite una vecindad abierta afín" [**1959-64**, I.97]. Siguiendo las mismas estrategias que vienen desde su *Tesis Doctoral* [**1949-53**], Grothendieck pasa a observar las *propiedades de permanencia* de la noción de (pre)esquema, o, lo que es lo mismo, las construcciones estructurales de la categoría de los (pre)esquemas: morfismos [**1959-64**, I.98-101], productos [**1959-64**, I.104-111], subconstructos [**1959-64**, I.119-122], condiciones de separación [**1959-64**, I.132-140], condiciones de noetherianidad y de tipo finito [**1959-64**, I.140-147]. Es interesante observar aquí que *EGA.I* está lejos de contener muchos *ejemplos*[302] de la teoría general.

301 Con el tiempo, el término grothendieckiano "pre-esquema" se ha simplificado en el término común "esquema". Los "esquemas" grothendieckianos surgen como pre-esquemas *separados* [**1959-64**, I.135]. Pero como todo *esquema afín* es separado, este puede llamarse simplemente *esquema* [**1959-64**, I.138]. En todo lo que sigue hablaremos de "esquemas" en vez de "pre-esquemas". Curiosamente, este es uno de los pocos casos en los que el término inicial usado por Grothendieck ha resultado ser innecesariamente general. Por otro lado, los *esquemas formales afines* se definen al final de *EGA.I* vía límites proyectivos de haces de anillos topológicos [**1959-64**, I.181]. Grothendieck parece querer *suavizar* allí a ultranza ciertas categorías de esquemas, donde la coherencia [**1959-64**, I.204], la adicidad [**1959-64**, I.206] y las propiedades de tipo finito [**1959-64**, I.207] se comporten bien.

302 El ejemplo más desarrollado en *EGA.I* aparece bajo los numerales (2.3.2) y (5.5.11) [**1959-64**, I.101, I.139]. Se trata de la presentación de un *esquema no afín* ("recta proyectiva sobre un cuerpo K") (2.3.2) y de un *(pre)esquema no separado* ("plano afín sobre K con desdoblamiento del punto 0") (5.5.11). En el primer caso (2.3.2), sean K un cuerpo, $B = K[s]$ y $C = K[t]$ los anillos de polinomios con una indeterminada sobre K, y $X_1 = Spec(B)$, $X_2 = Spec(C)$ esquemas afines isomorfos. En X_1, sea U_{12} el abierto afín $D(s)$ cuyo anillo está formado por las fracciones racionales de la forma $\frac{f(s)}{s^m}$ con $f \in B$. De manera similar, se construye U_{21} intercambiando s por t y B por C. Considere entonces el isomorfismo de (pre)esquemas $u_{12} : U_{21} \to U_{12}$ asociado (contravariantemente) al isomorfismo de anillos $B \to C : \frac{f(s)}{s^m} \mapsto \frac{f(1/t)}{1/t^m}$. Grothendieck indica que se pueden pegar X_1 y X_2 gracias a u_{12} puesto que no hay condición previa de pegamiento. Entonces, el (pre)esquema X así obtenido *no es afín*, puesto que el anillo de secciones $\Gamma(X,\, \mathcal{O}_X)$ resulta ser isomorfo a K, por tanto su espectro se reduce a un punto, por tanto no es afín (el anillo de base de un esquema afín debe poseer varios ideales primos, no solo (0)). En efecto, una sección sobre X debe restringirse a un polinomio $f(s)$ sobre X_1 y a un polinomio $g(t)$ sobre X_2, y por las definiciones se tendría que tener $g(t) = f(1/t)$, lo que sólo sucede si $f = g \in K$ [**1959-64**, I.101]. En el segundo caso (5.5.11), se consideran los anillos $A_1 = K[s_1, t_1]$ y $A_2 = K[s_2, t_2]$, los esquemas afines $Y_1 = Spec(A_1)$ y $Y_2 = Spec(A_2)$, los abiertos $U_{12} = D(s_1) \cup D(t_1)$ y $U_{21} = D(s_2) \cup D(t_2)$, y u_{12} la restricción a U_{21} del isomorfismo $Y_2 \to Y_1$ correspondiente al isomorfismo de anillos $A_1 \to A_2 : f(s_1, t_1) \mapsto f(s_2, t_2)$. Entonces, el (pre)esquema obtenido al pegar Y_1 y Y_2 vía u_{12} resulta ser no separado (caracterización de separación vía generación de secciones) [**1959-64**, I.138-139].

Este es sin duda un contraste con los trabajos previos de Grothendieck, donde hemos visto cómo los ejemplos recorren siempre sus escritos: una situación que se debe probablemente al *estilo* de Dieudonné, parco, arquitectónico, extremadamente estructurado[303].

(2). Las dialécticas naturales *discreto/continuo*[304] llevan a elaborar una *suavización* diferencial abstracta en el marco general de los esquemas[lix]. El *paso natural* hacia lo diferencial lo proveen los elementos *nilpotentes* de los anillos locales[305], que actúan como *infinitesimales* cerca de 0. Dos observaciones de Raynaud y Mumford acentúan la importancia que la renovación grothendieckiana otorga a la geometría de lo diferencial/infinitesimal:

[303] Nos preguntaremos más adelante si esta "dureza" que Grothendieck exhibirá en la década 1960-1970, y que ocurre en parte por su necesidad de *guiar* con firmeza a toda una colectividad matemática, no habrá sido una de las varias razones que le impulsaron a dejar el *IHES*. Además de la reconocida protesta política de Grothendieck contra los fondos militares que apoyaron el *IHES*, es posible que la década de los sesenta –excesivamente *yang*– produjera un hondo desequilibrio con el lado natural, intuitivo, profundamente *yin* de la personalidad grothendieckiana. La lucha entre el *yang* y el *yin* es también rastreable en el vaivén pendular entre la *teoría general* y los *ejemplos particulares*. Resulta notable cómo la década de los ochenta estará impulsada por ese lado *yin* de los ejemplos particulares en geometría (poliedros, superficies de Riemann, combinatoria, dibujos de niños). Ver nuestros *Capítulos 10, 12, 14, 15* abajo.

[304] Teoría de números y anillos *discretos* $\rightarrow$ espectro *continuo* (vía topología de Zariski y otras: veremos que un problema esencial consistirá en refinar Zariski) $\rightarrow$ anillos locales *discretos* $\rightarrow$ nilpotentes (en los anillos locales) que permiten explorar lo *continuo* infinitesimal...

[305] Para la "más alta importancia" de tales elementos, ver *Nota 233* arriba, p. 161. Gracias a un sentido técnico preciso, los nilpotentes son suertes de "fantasmas" que nos permiten acceder a lo *invisible* (el "aura" de 0). La problemática central grothendieckiana *visible/invisible* adquiere aquí un apoyo definicional y teoremático de gran relevancia.

[lix] La categoría de esquemas resulta ser la *categoría dual* de la categoría de anillos (conmutativos unitarios), y los esquemas, al capturar *todas* las soluciones de ciertas ecuaciones algebraicas, resultan ser las generalizaciones naturales de las variedades algebraicas. Por ejemplo, $Spec(\mathbb{R}[X])$ captura números reales y complejos vía los ideales primos generados por polinomios lineales (soluciones reales) y por polinomios de segundo grado irreducibles (soluciones complejas conjugadas). Por otro lado, $Spec(\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2+Y^2-1))$ captura todo tipo de soluciones de $X^2+Y^2=1$ para los campos finitos de Galois $\mathbb{F}_p$, para p primo, y, en particular, permite reconstruir la diversidad local a partir de ciertos puntos *genéricos*. Finalmente, por el lado de la nilpotencia, si se considera la parábola $y=x^2$, la variedad asociada es trivial ($=\{0\}$), mientras que el esquema $Spec(\mathbb{R}[X]/(X^2))$ no lo es (los polinomios lineales $a+bX$ módulo X^2 aparecen como segmentos lineales tangentes "infinitesimales"). Para estos ejemplos, véase C. McLarty. "How Grothendieck Simplified Algebraic Geometry". En: *Notices AMS* 63.3 (2016), págs. 256-265, p. 261.

> Grothendieck magnifica la trilogía querida de la geometría diferencial: isomorfismos locales, inmersiones y submersiones, que se convierten en morfismos *étales*, no ramificados y lisos. Más aún, cada una de esas nociones se puede chequear agradablemente sobre el funtor. De hecho, toda la aproximación diferencial adquiere una nueva vida con las vecindades infinitesimales de la diagonal[lx].
>
> La parte más bella de su formulación me pareció ser su "reificación" de las deformaciones infinitesimales. Kodaira y Spencer, en su trabajo sobre espacios *moduli* analíticos, habían introducido $H^1(\Theta_X)$, donde Θ_X es el fibrado tangente sobre X, para describir las deformaciones de primer orden de una variedad compleja analítica compacta. Pero ahora Grothendieck decía que todas esas deformaciones de primer orden *eran actualmente familias*, familias cuyo espacio base era el vector tangente *encarnado* $\mathit{Spec}(k[\epsilon]/(\epsilon^2))$[lxi].

Esto corresponde en efecto enteramente a la visión de Grothendieck, tal como la expone en un *Seminario Bourbaki* (Mayo 1959), en la época del inicio de *EGA* [**1959-64**]:

> Ya sea que tuviéramos o no un cuerpo de base dado, no tenía por qué excluirse el caso de anillos con elementos nilpotentes. Hasta ahora, los geómetras habían rechazado tener en cuenta esas indicaciones y se habían obstinado en restringirse a la consideración de álgebras afines sin elementos nilpotentes, *i.e.* de espacios algebraicos en haces estructurales sin elementos nilpotentes (...) El conferencista piensa que ese estado de espíritu ha sido un obstáculo serio para el desarrollo de métodos verdaderamente naturales en Geometría Algebraica [**1956-62**, exp. 182, p. 193].

La "verdadera naturalidad" se consigue con las ampliaciones *suaves* que proporciona la noción de esquema: anillo en vez de cuerpo, ideales primos en vez de ideales maximales, anillos locales con nilpotentes en vez de álgebras sin nilpotentes, haces en vez de espacios topológicos. Las deformaciones infinitesimales *encarnan suavemente* entonces dentro de

---

lx M. Raynaud. "Grothendieck et la théorie des schémas". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait.* Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 25-34, p. 26

lxi D. Mumford. "My introduction to schemes and functors". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait.* Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 75-81, pp. 79. Mumford recuerda la "presencia hipnótica de Grothendieck" en su visita a Harvard de 1958: cómo sus pruebas parecían ser "magia negra" y cómo, en definitiva, "lo que ví fue suficiente para convertirle en un genio único entre las amistades matemáticas que tuve en mi vida", *ibíd.* pp. 78, 79, 81.

la *estrategia espectral natural*[306] de la teoría.

(3). En el ámbito de la *matemática relativa*[lxii], los *morfismos* entre los esquemas resultan ser los entes fundamentales a estudiar. Grothendieck propone una muy fina jerarquía de propiedades de *suavización*: *(i)* un morfismo entre esquemas (por lo tanto entre espacios anillados) $f : X \to Y$ es *plano* [*plat*] en un punto $x \in X$ si el funtor $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}fx}(-)$ es exacto[307] (esto se extiende similarmente a puntos $y \in Y$; f es plano si lo es en todos los puntos de X y Y)[XLIV] [**1959-64**, I.59], *(ii)* f es *fielmente plano* si es plano y sobre[308] [**1959-64**, I.60], *(iii)* f es *liso* si verifica una propiedad de "relevo de morfismos" [**1959-64**, IV.1.69] que, en el caso de esquemas afines $X = Spec(B), Y = Spec(A)$, corresponde a solicitar, para toda A-álgebra C y todo ideal nilpotente $\mathfrak{I} \subseteq C$, que la aplicación natural

306 Espectro, del latín *spectrum* – "fantasma", convoca todo un continuo invisible que solo nos está dado percibir por medio de fugaces "frecuencias" discretas. El espectro de los colores, el espectro electromagnético, el espectro de los valores propios de un operador, son construcciones conceptualmente similares al *espectro de un anillo*, objeto esencial de la dialéctica *visible/invisible* en Grothendieck.

307 Es decir, si el *módulo* $\mathcal{O}_x$ (sobre $\mathcal{O}_{fx}$) es plano (donde $\mathcal{O}$ es el haz estructural). Ver *Nota 294* arriba, p. 202. Grothendieck indica que "la noción de módulo plano [*platitude*] se debe a J.-P. Serre" [**1959-64**, I.54].

308 Para f entre espacios anillados arbitrarios, la condición es más exigente, pero se reduce a platitud más sobreyectividad en el caso de fibras con anillos locales, lo que sucede con los esquemas [**1959-64**, I.60]. La *fidelidad plana* es un requerimiento importante para la propiedad *fpqc* (*fidèlement plat quasi-compact*), clave para la construcción de la cohomología *étale*, ver *Capítulo 8* abajo.

lxii Raynaud recuerda una sabrosa anécdota de los años sesenta: "Cuando Serre llega con algo de adelanto al *IHES*, toma la tiza y escribe en el tablero

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

que se convierte en la marca registrada del Seminario de Bures". Ver Raynaud, óp.cit., p. 27. La *variación* de las bases en lo bajo y la búsqueda de *invariantes* en lo alto queda magníficamente simbolizada en el *calembour* gráfico de Serre.

XLIV Toda proyección sobre el espectro de un cuerpo es plana, toda proyección desde un espacio afín es plana; sin embargo, existen proyecciones desde modificaciones de $Spec(k[x, y])$ no planas. La *platitud* captura así una suerte de "buen comportamiento proyectivo" (libertad) allende eventuales ramificaciones (forzamientos) en la multiplicidad de las variables.

$Hom_A(B,C) \to Hom_A(B,C/\mathfrak{I})$ sea sobre[309] (en el caso de tener condiciones adicionales de noetherianidad y buenas preservaciones locales, lisura equivale a *regularidad*[310] [**1959-64**, IV.2.151-152]). La continuación de la jerarquía, hacia lo *no ramificado* y lo *étale*, no alcanza a completarse dentro de *EGA*, y debemos entonces remitir al estudio de *SGA*[311]. En cualquier caso, la estrategia grothendieckiana es clara: construcción progresiva de una inmensa arquitectónica donde ciertas singularidades profundas (quiebre de proyectividad, generación infinita, ramificación) van desapareciendo a favor de una regularidad más extensa. La arquitectónica actúa como un *mar*, barre los distintos compartimientos estancos entre los objetos y acerca las islas más alejadas del saber matemático[312].

---

309 Una parte gruesa de *EGA.IV.1* trata de *álgebras formalmente lisas* antes de pasar a los morfismos como tales. Al final del volumen, Grothendieck señala que "las nociones más importantes para los capítulos siguientes son aquella de *morfismo plano* [*plat*] *de presentación finita* y aquellas de *morfismo liso* y de *morfismo étale*, casos particulares de la primera. Su estudio detallado (junto a cuestiones conexas) comienza realmente en el §11" [**1959-64**, IV.1.223]. A duras penas, al final de *EGA.IV.3* aparece un tal §11, pero la arquitectónica rígida de *EGA* apenas deja avanzar, en medio de multitud de digresiones. En efecto, después de 221 páginas (!) del *Capítulo 0 – Preliminares* dentro de *EGA.IV.3* (*Capítulo 0* que se ha venido desarrollando sin fin a lo largo de los diversos volúmenes de *EGA*), aparece el índice de contenidos de *EGA.IV*, cuyo "§17 - Morfismos lisos, no ramificados, *étales*" [**1959-64**, IV.1.318] sería el objetivo central. Sin embargo *EGA* no alcanzó a cubrir un tal parágrafo. Paralelamente, en cambio, los avances en *SGA* [**1960-69**] fueron más rápidos, y se desarrollaron allí con más elasticidad las técnicas de suavización que llevaron al *despliegue del mundo étale*, y, eventualmente, a la resolución de las conjeturas de Weil. Ver nuestros *Capítulo 5* arriba y *Capítulo 8* abajo.

310 Es decir, en las fibras, los ideales maximales de los anillos locales son de tipo finito. Para desarrollos, ver abajo nuestra *Sección 7.3*.

311 La contraposición de *EGA* (con la marca de Dieudonné) y *SGA* (siguiendo en cambio a Grothendieck) es un interesante ejemplo de cómo los *estilos* y los *modos* (*maniera*) inciden en las matemáticas mismas, de cómo la *forma* afecta el *fondo*. Por otro lado, es justo reconocerle a Dieudonné el *inmenso mérito* de poder haber puesto en limpio las notas manuscritas o tipografiadas de Grothendieck. Si se observa, por ejemplo, un fragmento del manuscrito *EGA.V* aparecido entre los papeles de Grothendieck [**IMAG**, cote 25 (c.1967)], se puede intuir el notable esfuerzo (paciencia, reorganización, reescritura) que Dieudonné debió ejercer a menudo en los años sesenta.

312 Partiendo de las conjeturas de Weil en teoría de números, se recorrerán la topología (conjuntista y algebraica), las cohomologías, la teoría de haces, la variable compleja, el álgebra abstracta (anillos y álgebras), la geometría algebraica, la geometría diferencial, todo inmerso dentro de la teoría de categorías, para finalmente regresar sobre la teoría de números. La *navegación multidimensional* así efectuada, a lo largo de decenas de formas de lo discreto y lo continuo, no parece tener paralelo en la historia de la matemática.

(4). Un ejemplo de uso de la maquinaria abstracta de suavización es un reentendimiento estructural de temas en funciones holomorfas[313], siguiendo a Zariski[314]. La construcción (en *EGA.III*) se basa arquitectónicamente sobre las nociones de morfismo de *tipo finito*[315] (en *EGA.I*) y de morfismo *propio*[316] (en *EGA.II*). En este marco, los *Teoremas 4* y *5*[317] de la *Conferencia ICM* [**1958**] pasan a ser dos puntales centrales de la mampostería en *EGA*: *(i)* asociados a morfismos *propios* sobre esquemas noetherianos, expresión de funtores iterados como límites de secciones en las fibras [**1959-64**, III.1.130 (fórmulas 4.2.1.1, 4.2.4)], *(ii)* asociados a morfismos *cuasi-proyectivos* sobre esquemas noetherianos, control topológico de los puntos aislados en las fibras [**1959-64**, III.1.136 (teorema 4.4.3, "Main Theorem" de Zariski)]. Es interesante comparar aquí la rapidez de la *Conferencia ICM* con la lentitud de los §§ 3, 4 del *Capítulo 3* en *EGA III.1*: por un lado, esto evidencia de nuevo el extraordinario acumen ya presente en 1958, que resurge en su extrema particularización arquitectónica en 1961; por otro lado, demuestra el enorme trabajo de fundamentación[318] de todo el edificio emprendido por Grothendieck y Dieudonné.

---

313 Ver arriba, nuestras *Nota XXXIII*, p. 156 y *Nota 232*, p. 161.

314 Al inicio del *Capítulo 3* de *EGA*, Grothendieck y Dieudonné indican: "El contenido de los §§ 1 y 2 se debe a J.-P. Serre, y el lector constatará que no tuvimos sino que seguir la exposición (FAC). Los §§ 8 y 9 se encuentran también inspirados por (FAC) (las transposiciones necesarias debidas a contextos diferentes siendo sin embargo menos evidentes). Finalmente, como lo hemos dicho en la *Introducción*, el § 4 debe ser considerado como la puesta en forma, en lenguaje moderno, del «teorema de invarianza» fundamental de la «teoría de funciones holomorfas» de Zariski" [**1959-64**, III.1.82]. Se repiten así una vez más las generosas referencias al *(FAC)* de Serre, "Faisceaux algébriques cohérents".

315 Un morfismo $f : X \to Y$ entre esquemas es de *tipo finito* si Y es unión de abiertos afines cuyas preimágenes son a su vez uniones de abiertos afines en los cuales los anillos correspondientes son de tipo finito [**1959-64**, I.144]. Las inmersiones cerradas son siempre de tipo finito [**1959-64**, I.145].

316 Un morfismo $f : X \to Y$ entre esquemas es *propio* si es separado (véase nuestra *Nota 301* arriba, p. 204), es de tipo finito y preserva clausuras bajo pullbacks [**1959-64**, II.100]. Las inmersiones cerradas son propias [**1959-64**, II.100]. Un esquema afín propio sobre un cuerpo debe ser necesariamente finito [**1959-64**, II.147].

317 Ver arriba, p. 161.

318 En particular, los preliminares del *Capítulo 3* proveen una sección muy fina sobre los *funtores representables* [**1959-64**, III.1.5-9], aparecidos en el *Tôhoku* [**1955-56**]. Estos serán clave en muchos resultados posteriores de representación compleja [**1961**], algebraica [**1959-64**] o topológica [**1960-69**].

7.2 Síntesis conceptual

Sintetizamos en lo que sigue algunas grandes estrategias presentes en *EGA* [**1959-64**], que se extrapolarán a *SGA* [**1960-69**]: *(A)* la *ampliación* de la noción de espectro, que permite desarrollar formas de suavidad y de libertad en estructuras y haces, y que, a través de técnicas de funtorialidad, cohomología y noetherianidad, abre las puertas a una diferenciabilidad algebraica natural vía nilpotentes; *(B)* la construcción de un *nuevo camino* para el entendimiento de la teoría de números, que, paralelamente a la lectura clásica (números $\to$ puntos $\to$ espacio $\to$ separación $\to$ geometría discreta), propone la lectura (números $\to$ ideales primos $\to$ espectro $\to$ no separación $\to$ geometría continua), como soporte para una unificación de lo discreto y lo continuo; *(C)* la elaboración de un *tamiz filtrante* para poder pasar del ambiente de variedades algebraicas en característica p (entorno de las conjeturas de Weil) a un ambiente de formas diferenciales en característica 0 a través de topologías finas en haces, esquemas y cohomologías[XLV].

(A). Dado un anillo conmutativo unitario arbitrario, el *espectro* de los ideales primos del anillo constituye la base conceptual para desarrollar técnicas de suavidad, tanto en

[XLV] El camino grothendieckiano (variedades algebraicas $\to$ esquemas $\to$ topologías finas $\to$ formas diferenciales), en el ámbito de haces y cohomologías, llevará finalmente a la construcción del *topos étale de un esquema* (ver nuestro *Capítulo 8* abajo) donde se integran naturalmente aritmética, álgebra, topología. Debe anotarse que ese recorrido tendrá a su vez un paralelo de enorme relevancia en el *Programa de Langlands*, cuyo camino (variedades aritméticas $\to$ grupos lineales $\to$ L-representaciones $\to$ formas automorfas), en el ámbito de las formas modulares y las L-series, se ha constituido en uno de los ejes centrales de desarrollo de la matemática contemporánea. El entendimiento del grupo de Galois $Gal(K : k)$ de una extensión algebraica *abeliana* había sido llevado a cabo completamente por la escuela de Hilbert (Takagi, Hasse, Artin, Herbrand) en las primeras décadas del siglo XX ("teoría de cuerpos de clases"). No obstante, el caso *no abeliano* presentaba formidables obstrucciones. En parte, el Programa de Langlands, emergiendo de una larga carta (1967) del joven Langlands al maestro Weil, se adentra en esa comprensión a través de una doble estrategia (L-representaciones de dimensión n de $Gal(K : k)$ y formas automorfas ($K \subseteq \mathbb{C}$) asociadas al grupo lineal $GL(n : K)$) que debe permitir acercar un tratamiento aritmético y un tratamiento diferencial de los campos en juego (campos de Galois, campos de Riemann-Poincaré). Las L-series (Dirichlet) aparecen como objetos analíticos para representar la función ζ de Riemann; las L-funciones (Artin, Hecke) son continuaciones analíticas de las L-series que sirven para medir la ramificación de los ideales primos en extensiones algebraicas; la construcción abstracta del concepto de L-función *integra* entonces consideraciones aritméticas, analíticas y algebraicas. Un comparación de las *visiones* de Grothendieck y de Langlands resulta instructiva: mientras el primero *inunda* los campos y observa desde arriba (por medio de los topos) la noción de espacio-número, el segundo *desbroza* los campos y acordona desde abajo (por medio de correspondencias entre lo modular/automorfo y lo lineal) el espacio y el número. En Grothendieck todo se une antes de descender; en Langlands todo intenta enlazarse antes de ascender.

estructuras (anillos regulares, módulos planos, álgebras lisas), como en *haces* (espacios anillados, (pre)esquemas, haces coherentes)[319]. En ese medio, surge una dialéctica plena entre generación finita (una forma de discreción) y libertad (una forma de continuidad). La dialéctica, a su vez, es codificable en términos de funtores (cambio de base), adjunciones y teoremas de representabilidad. Con ello, diversas condiciones de finitud se contraponen (también funtorialmente) entre lo noetheriano y lo constructible[320]. Sumadas al uso de los nilpotentes en los anillos locales, esas condiciones proveen finalmente un tránsito suave entre lo discreto y lo continuo, gracias a un cálculo diferencial abstracto en el entorno de los esquemas. De esta manera, vemos cómo el *mar* (*EGA* [**1959-64**]) inunda aquí el *volcán* submarino (*Conferencia ICM* [**1958**]). Los fuegos de artificio de Edimburgo se subsumen dentro de la cuidadosamente ajustada arquitectónica de la pareja/dispareja Grothendieck-Dieudonné en el *IHES*. El cuidado de los *fundamentos* es extremo[321], y se intuye cómo un mecanismo de relojería intenta desmontar y "desatornillar" [*dévisser*] las obstrucciones que surgían en la geometría algebraica clásica. Los procesos de elevación y de abstracción funcionan como ascensos a nuevos puntos de perspectiva desde donde se vislumbran *nuevos flujos* que recorren regiones previamente inabordables[322].

---

319 En vez de ideales maximales, los ideales primos se prestan bien a las exigencias debidas a comparaciones, transferencias e invarianzas, ver *Nota lviii* arriba, p. 203.

320 En *EGA*, un espacio topológico es *cuasi-compacto* si de todo recubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento finito (lo que hoy llamamos compacto) [**1959-64**, I.21]; una parte Z de un espacio topológico X es *retrocompacta* si la inyección $Z \rightarrowtail X$ es cuasi-compacta, es decir, si para todo abierto cuasi-compacto $U \subseteq X$, $U \cap Z$ es cuasi-compacto [**1959-64**, III.1.12]; una parte de un espacio topológico X es *constructible* si pertenece a la más pequeña familia de partes de X que contiene a los abiertos retrocompactos y es cerrada bajo intersecciones finitas y complementos [**1959-64**, III.1.12]. En el caso de los espacios noetherianos, las partes constructibles coinciden con las reuniones finitas de partes localmente cerradas [**1959-64**, III.1.13]. Todo esto conforma una jerarquía fina de formas de suavidad dentro de la estrategia general de reducir estructuralmente ciertas situaciones de infinitud a condiciones de finitud.

321 El *Capítulo 0*, distribuido a lo largo de los diversos volúmenes, incluye 68 pp. (*EGA.I*) + 75 pp. (*EGA.III.1*) + 216 pp. (*EGA.IV.1*). Cerca de 350 páginas de *Preliminares*...

322 Esto recuerda ciertos *montajes* cinematográficos que nos permiten acceder a nuevas visiones detrás de nuestros "ojos ciegos". Para una comparación con Tarkovski, ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

(B). Uno de los objetivos centrales de los esquemas consiste justamente en permitir adentrarse en mundos donde los *indiscernibles* pasan a ser *discernidos*. Esto sucede, por ejemplo, cuando se introducen nuevos infinitesimales para captar diferencias[lxiii]. Siguiendo una suerte de forma de "dos-en-uno" (intuición primordial de Brouwer), los *espectros* permiten discernir aquello que estaba superpuesto y oculto[323]. En este proceso, se acercan una *geometría discreta* (aquella de los puntos usuales, los ideales maximales, la separación, los funtores representables) y una *geometría continua* (aquella de los puntos espectrales, los ideales primos, la no separación, los prehaces). De manera más precisa[lxiv], tres grandes técnicas entran en juego: *(i)* el *punto de vista relativo*: dado un esquema S, estudio de la *categoría* Esq/S de morfismos $X \to S$, *(ii)* los *cambios de base*: estudio de $X \to S$ a lo largo de $S' \to S$, que da lugar (vía pullbacks) a $X \times_S S' \to S'$, *(iii)* los modos de *representabilidad*: estudio de $X \to S$ vía el funtor representable $h_X : Esq/S \to Con$.

323 Con el ejemplo de Dieudonné, se ve literalmente "explotar" el *dos-en-uno* brouweriano: intuición arquetípica de un continuo que va luego desplegándose a través de marcas discretas (tipos) sobre ese continuo. Estamos ante una suerte de reacción *volcánica*, de verdadero *blow-up* conceptual y matérico (para cercanías de Grothendieck con el *Blow-Up* de Antonioni, ver nuestro *Capítulo 18* abajo). En muchos sentidos profundos, varias ideas de Brouwer enlazan con Grothendieck, lo que Lawvere pone de manifiesto al *demostrar* que la lógica intrínseca de los topos elementales es siempre intuicionista, pero no clásica en general (ver nuestro *Capítulo 8* abajo).

lxiii Dieudonné indica que "la idea de considerar esquemas afines $Spec(A)$, aún cuando A posee *nilpotentes* no nulos, puede parecer dictada por un deseo de generalización sin objeto; de hecho, esto permite también tener en cuenta fenómenos de «variedades múltiples» que la teoría clásica descuidaba completamente o que podía tratar solo mediante la teoría de intersecciones", Dieudonné, óp.cit., p. 201. Dieudonné ofrece un ejemplo ilustrativo. Considere la parábola $y^2 - x = 0$ en el plano complejo. ¿Cómo "leer" entonces el doble sentido oculto del 0 gracias a los esquemas? La inyección $\mathbb{C}[X] \rightarrowtail \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X)$ da lugar (contravariantemente) a un morfismo de esquemas $p : Spec(\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X)) \to Spec(\mathbb{C}[X])$. Los puntos *usuales* $\zeta \in \mathbb{C}$ están en correspondencia con los ideales *maximales* $(X - \zeta)$ en $\mathbb{C}[X]$, y para cada uno de esos puntos, las *fibras* son esquemas afines: $p^{-1}(\zeta) = Spec(\mathbb{C}[Y]/(Y^2 - \zeta))$. Si $\zeta \neq 0$, $\mathbb{C}[Y]/(Y^2 - \zeta) \approx \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, y la fibra posee dos puntos usuales, correspondientes a las dos soluciones distintas en la parábola. Pero si $\zeta = 0$ (caso interesante, indiscernible, invisible), nos situamos en $\mathbb{C}[Y]/(Y^2)$, que posee un nilpotente no nulo –la clase de (Y)–, lo que exhibe dos elementos de la fibra "infinitamente cercanos" (0 usual; (Y) no usual, espectral, fantasmal), ibíd., pp. 201-202.

lxiv Ver ibíd., *Aperçu historique*, VIII, §§ 27-47.

Las técnicas anteriores ayudan a entender –más allá de nuestros “ojos ciegos”– algunos tránsitos entre lo discreto y lo continuo, entre lo finito y lo infinito. Dado $f : X \to S$ morfismo de esquemas, dado $s \in S$, si $\chi(s) = \mathcal{O}_s/\mathfrak{M}_s$ es el cuerpo residual en s (cociente del anillo local por su único ideal maximal) y si se considera el cambio de base $Spec(\chi(s)) \to S$, la fibra $f^{-1}(s)$ puede verse como el espacio subyacente de $X_s = X \times_S Spec(\chi(s))$[lxv]. En consecuencia, X aparece parametrizado por los X_s, y la *suavización* consiste en determinar f a partir de las propiedades de los X_s. ¿Qué tanto las bases puntuales $Spec(\chi(s))$ determinan entonces la base general S? Los *límites* en la categoría Esq/S podrán resolver la cuestión: las propiedades de esquemas sobre extensiones arbitrarias se podrán reducir a propiedades de extensiones de tipo finito, y las propiedades de esquemas sobre anillos arbitrarios se podrán reducir a propiedades sobre álgebras de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$[lxvi].

Esto muestra cómo la *visión holística* de Grothendieck resulta ser, una vez más, esencial: las buenas (o malas) propiedades de transferencia y recubrimiento en un categoría determinan (o no) el entendimiento de los objetos que allí se subsumen. Pasando a cubrimientos no ramificados con buenas propiedades de finitud, el desarrollo natural de estas ideas lleva a la noción de morfismo *étale*[324], mediante una condición de control riemanniana/galoisiana sobre las fibras $f^{-1}(s)$: deben estar constituidas por puntos aislados x cuyos cuerpos residuales $\chi(x)$ sean extensiones finitas y separables de $\chi(s)$[lxvii]. De esta manera, los esquemas proveen progresivamente un nuevo esbozo de unificación de lo continuo (a la Riemann) y lo discreto (a la Galois), que terminará saldándose en la emergencia de los *topos* en el cuarto volumen (1963) de *SGA* [**1960-69**].

[324] Ver *Sección 5.3* arriba y *Capítulo 8* abajo.

[lxv] Para este párrafo, ver ibíd., pp. 198-200.

[lxvi] Dieudonné llama a esto la “realización del viejo sueño de Kronecker”, ibíd., p. 200.

[lxvii] Ver ibíd., pp. 199, 207.

(C). Hemos señalado (ver *Sección 5.1* arriba) cómo el interés central inicial de la *marea grothendieckiana* (*EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**]) consiste en despejar el ambiente natural adecuado para resolver (disolver) las conjeturas de Weil. La fórmula de Lefschetz (válida en característica 0) es la herramienta (co)homológica fundamental para determinar un conteo de puntos en variedades (ver p. 154 arriba), y entonces el paso controlado de cohomologías en característica $p > 0$ a cohomologías en característica 0 resulta ser esencial dentro del programa de Grothendieck. La elaboración de ese *tamiz filtrante* se consigue gracias al entorno general de lo *étale*[325] (topología de Grothendieck *étale*, topos *étale* de un esquema, cohomología *étale*)[lxviii], donde un florilegio de cohomologías (*étale*, cristalina, l-ádica, etc.)[326] permite acercarse más finamente (es decir, por medio de topologías de Grothendieck *más finas* que la topología de Zariski) al entorno discreto de la teoría de números.

En el fondo, se trata de elaborar una *teoría amplia de la suavización para entornos discretos*, o, lo que es lo mismo, una topologización sistemática del álgebra. Observamos entonces aquí las simientes de muchos de los trabajos mayores de la tercera década matemática grothendieckiana, entre 1981 y 1991, donde reina el *álgebra topológica*[327]. Es interesante comparar brevemente las décadas largas 1958-1970 y 1981-1981: mientras la primera se eleva hacia formas de suavización muy generales que luego descienden (inundan) los casos particulares (conjeturas de Weil), la segunda crece desde suavizaciones

325 Ver nuestro *Capítulo 8* abajo.

326 Ver *Capítulo 8* abajo.

327 Inversión de la *topología algebraica* de Poincaré: mientras Poincaré inventa herramientas algebraicas para controlar los espacios topológicos, Grothendieck inventa herramientas topológicas para controlar las estructuras algebraicas. Ver nuestra *Parte III* abajo.

lxviii Ver también ibíd., pp. 207-208, 222-224.

muy particulares (espacios *moduli*, dibujos de niños) hacia entornos de unificación globales (derivadores, enlazando universalmente homología y homotopía). Con perspectiva, *mirando toda la obra en su conjunto*, Grothendieck consigue construir entonces un *back-and-forth* realmente profundo entre formas universales/generales/arquetípicas y formas concretas/particulares/típicas de suavización, cubriendo la problemática[328] con todo tipo de aproximaciones: verticales (*EGA* [**1959-64**], *SGA* [**1960-69**]), horizontales (*Longue marche* [**1981**], *Esquisse* [**1984**]), diagonales (*Stacks* [**1983**], *Dérivateurs* [**1991**]).

7.3 Ejemplo detallado: regularidad

En *EGA*, múltiples formas de suavización encarnan en formas diversas de *regularidad*, a nivel de *(i)* elementos, *(ii)* estructuras, *(iii)* morfismos[329]. En lo que sigue, miraremos algunas definiciones y ejemplos en estos tres niveles. Una primera instancia de *(i) elemento* "suave" aparece con la definición de *elemento topológicamente nilpotente* en un anillo topológico A: $x \in A$ es topológicamente nilpotente si 0 es uno[330] de los límites de la sucesión $(x^n)_{n \geq 0}$ [**1959-64**, I.60]. A partir de allí, *(ii)* los conjuntos de elementos topológicamente nilpotentes resultan ser los *ideales de definición*[331] del anillo [**1959-64**,

[328] Resulta impactante notar cómo, meta-metodológicamente, una mirada consistente mediante *(re)cubrimientos* parece recorrer la obra grothendieckiana. Las *técnicas y los métodos se reflejan entre sí*, como si el matemático mismo se sumergiera en *formas de adjunción y de reflexión* que le trascendieran. Para entender a un Grothendieck *recubierto* por ciertas fuerzas trascendentes, de las cuales él sería simplemente un escribano, ver *La clef des songes* [**1987**], nuestro *Capítulo 15* abajo. Para un Grothendieck muy cercano a Melville y a los procesos de inmersión en *Moby-Dick*, ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

[329] Yendo así de lo *(i)* puntual/discreto/conjuntista a lo *(iii)* relativo/continuo/categórico.

[330] Si el espacio no es separado, cosa que a menudo sucede en el ámbito de las topologías que ocurren en la geometría algebraica, pueden existir varios límites para la sucesión. Esa *no separación* resultará ser una *clef de voûte* del pensamiento grothendieckiano.

[331] En un anillo topológico con un sistema fundamental de vecindades de 0 formado por ideales ("anillo linealmente topologizado"), un ideal abierto $I \subseteq A$ es un *ideal de definición* si para toda vecindad $V \ni 0$ existe $n > 0$ tal que $I^n \subseteq V$ [**1959-64**, I.60-61].

I.61], gracias a los cuales pueden definirse anillos *preádicos y ádicos* [**1959-64**, I.62] que se comportan bien bajo procesos de continuidad [**1959-64**, I.63-64]. Finalmente, *(iii)* los morfismos entre las topologías (pre)-ádicas en anillos capturan resultados clásicos en álgebra conmutativa (teorema de Krull, lema de Artin-Rees [**1959-64**, I.66]).

Otra situación de este tipo puede verse en el uso progresivo de la *visión funtorial* en *EGA*. Los niveles anteriores corresponden aquí a *(i)* objetos X, *(ii)* funtores representables h_X, *(iii)* transformaciones naturales [**1959-64**, III.1.5-8]. Nos encontramos ante un excepcional proceso de *suavización universal*: el "funtor canónico"[XLVI] $h : \mathcal{C} \to Hom(\mathcal{C}^{op}, Con)$: $X \mapsto h_X$ [**1959-64**, III.1.7] sumerge (plena y fielmente) *toda* categoría pequeña discreta en su categoría continua de prehaces ("continua": posee todos los límites). El proceso se obtiene gracias al paso de lo *(i)* elemental (puntual/conjuntista) a lo *(iii)* relacional (mórfico/categórico), y demuestra así el interés de una visión categórica que nos permite observar un *espectro más amplio* de la realidad matemática (los prehaces, "invisibles" ante nuestros "ojos ciegos", resultan ser colímites de los representables, "visibles"). No insistiremos más en los niveles *(i)-(iii)*, que pueden deducirse fácilmente del contexto.

La definición de *anillo regular* (aunque utilizada previamente en varios lugares de *EGA.I-III*) aparece en el *Capítulo 0 - Preliminares* de *EGA.IV.1*: un anillo regular es un anillo A local noetheriano de dimensión n[XLVII], tal que el (único) ideal maximal de A posee un sistema de generadores con n elementos[332] [**1959-64**, IV.1.39]. A partir de allí

332 Como es usual, Grothendieck presenta el concepto bajo varias definiciones equivalentes, aquí vía morfismos, ideales y rangos [**1959-64**, IV.1.39-40].

XLVI Posteriormente denominado *inmersión de Yoneda*, en homenaje a una vívida discusión sobre el tema entre Yoneda y Mac Lane en la *Gare du Nord* de París, en la misma época en que Grothendieck publicaba su *Tôhoku* [**1955-56**].

XLVII La dimensión de un anillo A es el supremo de la longitud de las cadenas no estacionarias de ideales primos en A (es decir, la llamada *dimensión de Krull* del espectro $Spec(A)$). La noetherianidad y la localidad del anillo fuerzan la finitud de la dimensión. Para un anillo local regular, ser de dimensión 0 equivale a ser un cuerpo. De esta manera, en el ámbito de los anillos locales regulares, la dimensión *no nula* se encuentra estrechamente ligada con la existencia de nilpotentes no triviales (inexistentes en un cuerpo): el crecimiento de la dimensión hace a su vez crecer la suavidad del entorno.

(volviendo atrás en el “tiempo” zigzagueante de *EGA*), se tiene (en *EGA.I*) la definición de *haz regular de anillos* en un punto si la fibra sobre ese punto es un anillo regular [**1959-64**, I.37]. En el caso de los *esquemas afines* (yendo ahora hacia adelante en *EGA*), si nos damos una extensión de campos $K : k$, resulta que $X = Spec(K)$ es regular si y sólo si la extensión $K : k$ es separable [**1959-64**, IV.2.148]. Este enlace entre regularidad y separabilidad es uno de los caminos que llevarán al desarrollo del mundo *étale*.

Por otro lado, en *EGA.IV.1* se define otra noción alternativa de suavización, la *lisura formal* (ver el punto (3) arriba, p. 207), con la que se estudian nuevas conexiones entre lo discreto y lo continuo [**1959-64**, IV.1.80]. En casos específicos (álgebras locales noetherianas sobre un campo) lisura y regularidad coinciden [**1959-64**, IV.1.102]: de esta manera, las distintas perspectivas propuestas en la axiomatización abstracta tienden a *cubrir* uniforme y suavemente los casos particulares esenciales. Yendo más allá, si A es un anillo topológico y B es una A-álgebra topológica, B es *formalmente no ramificada* si, para todo A-morfismo $p : E \to C$ de A-álgebras discretas con núcleo nilpotente y para todo A-morfismo continuo $u : B \to C$, existe *a lo sumo* un relevo $v : B \to E$ (A-morfismo continuo) tal que $u = pv$ [**1959-64**, IV.1.115]. En las mismas condiciones, B es *formalmente étale* si es formalmente lisa y formalmente no ramificada, es decir si los relevos existen (lisura) y son únicos (no ramificación) [**1959-64**, IV.1.115]. Dentro de la arquitectónica de *EGA*, esta es la primera aparición formal[333] de lo *étale*, entronque de lo regular/liso/separable (Galois) con lo no ramificado (Riemann), y es una de las fuentes neurálgicas de los desarrollos de *SGA* [**1960-69**], como veremos a continuación.

[333] La “formalidad”, nunca explícitamente definida, parece referirse a un entendimiento *externo* de lo *étale* (vía cubrimientos de álgebras), versus su entendimiento *interno* en las fibras de un morfismo (ver *Nota lxvii* arriba, p. 213).

8

Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA) (1960-69)

El *Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA)* [**1960-69**] debe verse como uno de los mayores encuentros comunitarios de toda la historia matemática. Combinando la *visión* extraordinaria de Grothendieck, una *dedicación* espartana al trabajo, una *recepción* entusiasta por una pléyade de jóvenes brillantes (Artin, Deligne, Gabriel, Demazure, Verdier, Giraud, Illusie, entre muchos otros), una *confirmación* que incluyó a la crema y nata de la matemática francesa (Serre, Dieudonné, Chevalley) y un *ambiente académico* paradisíaco (*IHES*), el *SGA* constituye una experiencia única, fundadora de algunos de los más altos caminos de la matemática contemporánea. Un estudio profundo del *grupo fundamental* en geometría algebraica, la emergencia de los *topos*, con su consecuente renovación completa en el entendimiento del *espacio-número*, el desarrollo fino del mundo *étale* y la construcción de las grandes maquinarias *cohomológicas* que llevarán a la resolución de las conjeturas de Weil, conforman los aportes principales de un filón inagotable.

8.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Los manuscritos de *SGA* [**1960-69**] fueron escritos entre 1960 y 1969, y multicopiados en el *IHES* en esos años[334], aunque fueron reeditados posteriormente, en un convenio con Springer (*Lecture Notes in Mathematics*) y en parte con North-Holland (*Advanced Studies in Pure Mathematics*)[335]. En su *Esquisse* [**1972**], Grothendieck indica que, dentro de sus

[334] De manera precisa, *SGA* se divide en 7 volúmenes (y 12 tomos): *SGA1. Revêtements étales et groupe fondamental* – "Un séminaire dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de Mme. M. Raynaud" (447 pp., 1960-61). *SGA2. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* – "Alexander Grothendieck (rédigé para un groupe d'auditeurs), augmenté d'un exposé par Mme. Michèle Raynaud" (287 pp., 1962). *SGA3. Schémas en groupes* – "Un séminaire dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Artin, J.E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud, J.P. Serre". *Tome 1: Propiétés générales des schémas en groupes*; *Tome 2: Groupes de type multiplicatif et structure des schémas en groupes généraux*; *Tome 3: Structure des schémas en groupes réductifs* (564 + 654 + 529 pp., 1962-64). *SGA4. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* – "Un séminaire dirigé para M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne, B. Saint-Donat". *Tome 1: Théorie des topos (Exposés I à IV). Tome 2: (Exposés V à VIII). Tome 3: (Exposés IX à XIX)* (525 + 418 + 640 pp., 1963-64). *SGA5. Cohomologie l-adique et fonctions L* – "Dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.P. Jouanolou, J.P. Serre" (484 pp., 1965-66). *SGA6. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* – "Un séminaire dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, avec la collaboration de D. Ferrand, J.P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud, J.P. Serre" (700 pp., 1966-67). *SGA7. Groupes de monodromie en géométrie algébrique. Tome 1* "Dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud, D.S. Rim". *Tome 2* "Par P. Deligne et N. Katz" (523 + 438 pp., 1967-69). La trama de colaboradores de Grothendieck es impactante, y simplemente con la lista de autores se puede intuir la efervescencia y la mística del grupo (ver abajo algunos comentarios de los participantes). Comparada con *EGA* [**1959-64**], se trata de otra labor asombrosa (inventividad, profundidad, disciplina, multiplicidad) que suma cerca de 6000 (!) páginas y que solo puede entenderse también bajo una idea de *monumentalidad*, en la que la *comunidad* ejerce ahora un papel preponderante.

[335] *SGA1* = LNM 224 (1971); *SGA2* = ASPM 2 (1968); *SGA3.1* = LNM 151 (1970); *SGA3.2* = LNM 152 (1970); *SGA3.3* = LNM 153 (1970); *SGA4.1* = LNM 269 (1972); *SGA4.2* = LNM 270 (1972); *SGA 4.3* = LNM 305 (1973); *SGA5* = LNM 589 (1977); *SGA6* = LNM 225 (1971); *SGA7.1* = LNM 288 (1972); *SGA7.2* = LNM 340 (1973). No incluimos aquí el denominado *SGA*$4\frac{1}{2}$ (LNM 569, 1977), *Cohomologie étale*, por Pierre Deligne, no reconocido por Grothendieck, y raíz de su posterior querella con su alumno (ver *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo). La *Société Mathématique de France* ha emprendido a su vez una reedición de *SGA1-3* en sus *Documents mathématiques* 3 (2003), 4 (2005), 7 (2011), 8 (2011).

labores en topología,

> La más fundamental me parece ser la ampliación de la topología general, en el espíritu de la teoría de haces (desarrollada inicialmente por J. Leray), contenida en el punto de vista de los topos. Introduje esos topos a partir de 1958[336] partiendo de la necesidad de definir una cohomología l-ádica para variedades algebraicas (más generalmente, para esquemas), que conviniera a la interpretación cohomológica de las célebres conjeturas de Weil. En efecto, la noción tradicional de espacio topológico no basta para tratar el caso de las variedades algebraicas sobre un cuerpo distinto al cuerpo de los complejos, ya que la topología propuesta anteriormente por Zariski no da lugar a invariantes cohomológicos "discretos" razonables [**1972**, 3-4].

El año 1958, en los recuerdos de Grothendieck (de 1972 y 1986), parece ser así el momento del inicio "implícito" de las ideas centrales[337] sobre la *localización* y el mundo *étale*[lxix] –en el entronque de esquemas y topos– que encarnarán a lo largo de *SGA*.

Vienen luego los años "heroicos" del *IHES*[lxx], donde un Grothendieck infatigable impulsa a su entorno. Es el tiempo de una mística comunitaria sin igual, en donde brilla

---

336 Para una corroboración de la fecha 1958, véase *Récoltes et semailles* [**1983-86**, P.24], que hemos citado arriba, p. 148. Por otro lado, en los *Archives Grothendieck* asociados al *SGA* [**IMAG**, cotes 27-42], no parece haber ningún otro registro temporal asociado a los inicios de la teoría de topos.

337 Ver arriba, al inicio de nuestra *Sección 5.3*, las diversas citas de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] que respaldan esta situación.

lxix Michael Artin recuerda que, en una visita de Grothendieck a Harvard en 1961, "le pedí que me contara la definición de la cohomología *étale* (...) Y realmente discutimos sobre la definición durante todo el otoño", ver Jackson, óp.cit., p. 1053. Se intuye aquí cómo el *zigzag* de la creación debió pasar por múltiples etapas, antes de llegar al decantamiento de expresiones limpias en *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**].

lxx El Seminario se desarrollaba todos los martes en la tarde, ver J. Murre. "Remembering Grothendieck (Interview with Ulf Persson)". En: *Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW)* 5/17.1 (2016), págs. 58-62, p. 59. Según Illusie, "empezaba a las 2.15pm y duraba hora y media", L. Illusie. "Reminiscences of Grothendieck and his school". En: *Notices of the AMS* 57.9 (2010), págs. 1106-1115, p. 1106. Jean Giraud recuerda que "Los estudiantes matemáticos en París teníamos un martes bien lleno. Serre daba su curso por la mañana en el *Collège de France*, y el seminario de Grothendieck ocurría por la tarde en el *IHES* en Bures. El viaje y el almuerzo servían de ocasión para las discusiones entre dos matemáticos con estilos profundamente originales y diferentes. Para nosotros era fascinante", J. Giraud. "Une entrevue avec Jean Giraud, à propos d'Alexandre Grothendieck (propos recueillis par Eric Dumas)". En: *Le journal de maths* 1.1 (1994), págs. 63-65, p. 64.

la *entrega* del Maestro. Los múltiples testimonios de sus alumnos y colegas ilustran bien la dedicación de Grothendieck y la excelencia de su público[lxxi]. Una combinación de rigor, disciplina y austeridad resulta esencial en su vida y en su trabajo[lxxii]. Los resultados son espectaculares, como lo indican Dieudonné y Serre:

> Su influencia fue inmediata e inmensa sobre los algebristas de todo el mundo. (...) Su éxito se entiende sin dificultad. Aún en las partes "elementales" de la teoría, el punto de vista de los esquemas da siempre la impresión de ser aquel que conviene exactamente a la pregunta, que todas las presentaciones anteriores no hacen sino obscurecer o deformar. (...) Hay pocos ejemplos en matemática de una teoría tan monumental y fecunda, edificada en tan poco tiempo y debida esencialmente a un solo hombre[lxxiii].
>
> Los trabajos de Grothendieck son ciertamente difíciles de leer; esto se debe a su lado sistemático, y también, sencillamente, a su amplitud. Pero constituyen una *obra*, de una

---

lxxi Según David Ruelle, "Grothendieck trabajaba en los fundamentos de la geometría algebraica siete días por semana, doce horas al día, y lo hizo a lo largo de diez años" (Jackson, óp.cit., p. 1198). Según Barry Mazur, al volver del centro de París al *IHES*, a pesar de que las puertas del Instituto cerraran a las 11.00pm, "tomábamos el último tren, completamente seguros de que allí estaría Grothendieck trabajando, en su mesa al lado de la ventana. Arrojábamos algo de grava a su ventana y bajaba a abrirnos la puerta" (ibíd., p. 1198). Según Jacob Murre, "Grothendieck estaba siempre ocupado (...) pero a pesar de todo siempre era muy paciente y explicaba todo con sumo cuidado" (Murre, óp.cit., p. 59). Según Illusie, "Entre la gente que iba al Seminario, recuerdo a Berthelot, Cartier, Chevalley, Demazure, Dieudonné, Giraud, Jouanolou, Néron, Poitou, Raynaud y su mujer Michèle, Samuel, Serre, Verdier. Por supuesto, teníamos también visitantes extranjeros, algunos durante largos periodos (Tits; Deligne, quien asistió desde 1965; Tate; y luego, Kleiman, Katz, Quillen...) Luego tomábamos el té a las cuatro en el salón del *IHES*. Era el lugar para encontrarnos y discutir. Otro lugar era el almuerzo en el *IHES* (...) Allí podía hallarse a Grothendieck, Serre, Tate, discutiendo motivos y otros temas que me pasaban muy por encima", Illusie, óp.cit., pp. 1107-1108. Ver también los testimonios de Demazure y Greenberg, nuestra *Nota liv* arriba, p. 198.

lxxii Illusie recuerda sus densas visitas de trabajo a la casa de Grothendieck: "Vivía en Bures-sur-Yvette, rue de Moulon, en un pequeño pabellón blanco, de dos pisos. Su oficina era austera y fría en invierno. Tenía un retrato a lápiz de su padre y sobre la mesa estaba la máscara mortuaria de su madre. Detrás de su mesa tenía unos archivadores. Cuando necesitaba algún documento, simplemente se giraba y lo encontraba en un segundo. Era alguien muy bien organizado. Nos sentábamos y discutíamos sus observaciones sobre mis redacciones. Empezábamos a las dos y trabajábamos hasta las cuatro, cuando decía «tal vez deberíamos descansar». A veces caminábamos, a veces tomábamos té. Después volvíamos a trabajar. Luego cenábamos alrededor de las siete, con su mujer y sus hijos. La cena no duraba mucho. Luego nos reuníamos de nuevo en su oficina, y le gustaba explicarme algo de matemáticas (...) Terminábamos usualmente a las once y media, me acompañaba a la estación y yo tomaba el último tren a París", ibíd., p. 1107.

lxxiii Dieudonné, "De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique", pp. 9, 14.

> potencia y una originalidad de la que constan pocos ejemplos. Cada año se ve aumentar el número de ramas de las matemáticas que se someten a su influencia; eran, primero, la geometría algebraica, luego la topología y también la geometría analítica; ahora, la teoría de grupos de Lie; próximamente, la teoría de números[lxxiv].

El reconocimiento del trabajo[lxxv] se obtiene con la *Medalla Fields* en 1966[338]. El *mar*[lxxvi] grothendieckiano inunda así las áreas más remotas de la matemática.

Resumen mínimo.

La imposibilidad de recorrer *SGA* nos restringe aún más que en el caso de *EGA*. A continuación, presentamos *(A)* algunos extractos de las *Introducciones*[339] a los diversos volúmenes, y *(B)* una síntesis breve de temas asociados a los *topos* en *SGA4.1, SGA 4.2.*

338 Los puntales centrales de reconocimiento en ese momento fueron las nuevas técnicas del álgebra homológica presentadas en el *Tôhoku* [**1955-56**] y el desarrollo de la K-teoría, con la prueba extendida de Riemann-Roch [**1955-57**], aunque ya se veían emerger los grandes edificios *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**]. La Medalla fue obtenida al mismo tiempo con Atiyah, Cohen y Smale, un grupo brillante que ya abría el espectro amplísimo de la matemática contemporánea. Serre fue el ponente de la obra de Grothendieck al Comité Fields (Serre, óp.cit.) y Dieudonné fue el presentador de su obra en el Congreso de Moscú (Dieudonné, óp.cit.). Por razones políticas (encarcelamiento de escritores soviéticos disidentes), Grothendieck no viajó a Moscú, y rechazó recibir la Medalla personalmente. Motchane la recibió en su nombre, y el monto del premio fue donado a causas por la liberación vietnamita. Desde ese entonces, se intuye la necesidad de Grothendieck de *despertar* hacia una realidad social y política, herencia de sus padres, que su obra matemática le había impedido atender. Para desarrollos sobre esa *conciencia humana*, ver nuestras *Partes III, IV* abajo.

339 Las introducciones corresponden a las *reediciones* posteriores de los diversos volúmenes (fines de los 60, comienzos de los 70), ver *Notas 334-335* arriba. No se escribió introducción o prefacio para *SGA7*. Ya la decepción de Grothendieck con su entorno, y en particular con Deligne, autor fundamental en *SGA7*, era muy grande (ver el inicio de nuestra *Parte III* abajo).

lxxiv Serre, “Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck (1965)”, p. 203. Recuérdese que, para Serre, la “geometría analítica” es la geometría de las funciones de variable compleja. Volveremos sobre la *presunta dificultad de leer* a Grothendieck: no es tal en las ideas centrales, aunque lo sea en muchos detalles técnicos.

lxxv Obsérvese también el testimonio de René Thom, según el cual “su superioridad técnica [Grothendieck] era aplastante”, Jackson, óp.cit., p. 1055.

lxxvi Recuerda Illusie las sesiones del *SGA*: “Era como un mar, como una corriente continua de matemáticas en el tablero”, Jackson, óp.cit., p. 1053.

(A). SGA1 [**1960-69**, 1, pp. 2-10] (agosto 1970). "Fundamentos de una teoría del grupo fundamental en geometría algebraica" [2][340] – "descripción axiomática del grupo fundamental de un esquema" [3] – "reformulación muy cómoda de la teoría de Galois usual" [2] – "presentación de la teoría del descenso" [3]. La "topología *étale* y la teoría cohomológica correspondiente (...) proveen un instrumento particularmente suave para el estudio del grupo fundamental" [4] – hay una "necesidad de desarrollar una teoría del grupo fundamental de un topos" [5]. Explicación de los enlaces entre *EGA* y *SGA* [5-8] – "juego natural de exigencias de coherencia lógica y estética" [7] – presentación del modo de trabajo en *SGA* [6-7]. "Comentario extra-matemático" [9-10]: presentación de las razones del abandono del *IHES*.

SGA2 [**1960-69**, 2, pp. 6-10] (abril 1968). Sistema de producción de *SGA2*: exposiciones orales, manuscritos, redacciones de estudiantes y/o colegas, recorrección y revisión por parte de Grothendieck ("armonización") [6]. Estudio de pasos de lo local a lo global, vía haces y cohomologías [7] – "teorema de finitud (...) resultado técnico central" caracteriza propiedades finitarias de transferencia entre haces coherentes y haces de cohomología [8-9] – aplicaciones al caso de espacios analíticos complejos [9-10].

SGA3.1 [**1960-69**, 3.1, pp. 2-8] (marzo 1970). Arquitectónica compleja de *SGA*: oralidades, (re)escrituras, revisiones, ampliación de temas del *Seminario Chevalley* ("Biblia"), enlaces progresivos y fluctuantes con *EGA* y con el *Seminario Bourbaki* [6-8]. Dos objetivos centrales: "fundamentos cómodos para la teoría general de esquemas en grupos", problemas de representabilidad de funtores y de pasajes al cociente [4]; "generalización a grupos sobre un pre-esquema de base arbitrario" de la teoría de estructura Borel-Chevalley de grupos algebraicos afines [5]. "Papel crucial de los toros" [5-6]. "Objetivo principal: desarrollar técnicas que se apliquen al estudio de esquemas en grupos sobre una base

[340] En toda esta subsección (*Resumen mínimo*), los paréntesis cuadrados [ ] reenvían a las páginas de los volúmenes correspondientes en *SGA*.

arbitraria" y profundizar en "propiedades infinitesimales (...) que permitan aplicar las técnicas de descenso en el caso no galoisiano" [6].

SGA4.1 [**1960-69**, 4.1, pp. 2-13] (noviembre 1969). "Objetivo inicial: desarrollar la teoría de la cohomología *étale* de esquemas" [2] – "el lenguaje de las topologías y los topos en geometría algebraica ha ido creciendo" [2]. Lugar central: topos, morfismos de topos, categorías, prehaces [3]. Aportes sustanciales de Deligne [3-7]. Topología *étale*: permite formular y demostrar resultados clásicos cohomológicos en un contexto ampliado [8], así como establecer pasajes (límites proyectivos) de cohomologías en característica p hacia cohomologías en característica 0 (cohomología de Weil) [9]. "Fenómenos esencialmente nuevos" procedentes de car. p, intratables mediante la topología *étale*, dan lugar a topologías más finas ("cristalina") [9-10]. Emergencia de problemas de homotopía (grupo fundamental, teoría de tipos de homotopía) [10]. Trabajos esenciales: "teoría de haces desde el punto de vista de los sitios, o mejor, de los topos"; "teoremas de cambio de base (...) con uso de coeficientes en haces de grupos no necesariamente conmutativos" [12].

SGA5 [**1960-69**, 5, pp. iii-vii] (febrero 1977, por Luc Illusie). "El corazón del Seminario está constituido por la fórmula de Lefschetz en cohomología *étale*" [iii] – "Todos los resultados anunciados por Grothendieck en su exposición del *Seminario Bourbaki* [alrededor de la racionalidad de las funciones L, 1968] se demuestran aquí completamente" [iii]. Comentarios sobre cómo el *SGA4*$\frac{1}{2}$ (Deligne) simplifica y generaliza diversos resultados [iii-v]. "En el curso del Seminario oral, Grothendieck había hecho una exposición sobre problemas abiertos y enunciado algunas conjeturas. La exposición desafortunadamente no fue redactada, ni tampoco su muy bella exposición introductoria, que revisaba las fórmulas de Euler-Poincaré y de Lefschetz en diversos contextos (topológico, analítico complejo, algebraico)" [vi].

SGA6 [**1960-69**, 6, pp. 2-5] (junio 1971). "El objetivo del presente Seminario es desarrollar una teoría global de intersecciones, y una fórmula de Riemann-Roch, para esquemas arbitrarios" [3]. "Un instrumento esencial para formular una teoría satisfactoria es la teoría de categorías derivadas de Verdier" [3]. Problema esencial: falta una "idea nueva" para poder englobar variantes generales de Riemann-Roch y Atiyah-Singer [4].

(B). SGA4.1 [**1960-69**, 4.1, *Exposé I*] (universos, por N. Bourbaki). "*Univers*" [185-217]. Grothendieck (jugando sobre los "papeles secretos" de Bourbaki) [185] introduce el axioma de suficientes universos y demuestra (prueba detallada usando recurrencia transfinita) [196-199] su equivalencia con existencia de cardinales (fuertemente) inaccesibles. Grothendieck comenta que "según dice Paul Cohen, parece difícil y aún indemostrable" asegurar que el axioma de universos es inofensivo [214]. *Observación.* La noción elemental de clasificador de subobjetos (Lawvere) no aparece tal cual en *SGA4*. Sin embargo, la representabilidad de familias infinitas de monos aparece en el *Exposé I* (secciones 8.2, 8.3), acorde con la importancia dada por Grothendieck al "yoga" de los funtores representables.

SGA4.1 [**1960-69**, 4.1, *Exposé II*] (topologías de Grothendieck, por J.L. Verdier). "*Topologies et faisceaux*" [219-263]. Definición de topologías (posteriormente denominadas "de Grothendieck"), vía axiomas (estabilidad, localidad, identidad) para cribas (subobjetos de funtores representables) [219-220]. Sitios: categorías con topologías [221]. Definición de pretopologías, vía axiomas para familias de morfismos (equivalencia de topologías y pretopologías en el caso de categorías cartesianas cerradas) [222]. Prehaces separados y haces de conjuntos sobre un sitio [223]. Caracterización de haces asociados a prehaces [224-226]. Topología canónica: topología más fina para la cual los representables son haces [226]. Teoremas de hacificación [228-230], caracterización funtorial [232-234] y reflexividad [234-235]. Límites (inductivos) y colímites (proyectivos) en categorías de haces (obtenidos a partir de la categoría de prehaces, vía reflexividad) [235-239]. Lemas tipo Giraud [257]. Haces a valores en categorías arbitrarias (anillos, grupos, módulos) [257-259]. Categoría abeliana formada por haces de módulos [260].

SGA4.1 [**1960-69**, 4.1, *Exposé IV*] (topos, por A. Grothendieck y J.L. Verdier).

"*Topos*" [299-525]. "Estabilidad notable" de los topos [300] y "ampliación substancial de la noción de espacio topológico" [301]. Ventajas de la localización (sitios) [301] y uso para estudio de invariantes homológicos y homotópicos [299]. Multitud de ejemplos: topos clasificador, modular, *étale*, cristalino, etc. [301]. "Parece razonable y legítimo a los autores del presente Seminario considerar que el objeto de la topología es el estudio de los topos (y no sólo de los espacios topológicos)" [301]. Definición de un topos como equivalente a una categoría de haces sobre un sitio [302]. Teorema de Giraud [302-306]: caracterización de topos por propiedades de exactitud. Ejemplos de topos [311-322]: topos asociado a un espacio topológico, topos inicial (vacío) y final (puntual), topos asociado a un espacio de operadores, topos de acciones de un grupo, topos clasificador de un grupo topológico, topos de prehaces, topos clasificador de un progrupo, ejemplo de no topos (falla en generador). Morfismos de topos (formas generales de continuidad) [323-332]: morfismos "geométricos" (terminología posterior), exactitud e intuición geométrica, equivalencias entre topos, 2-categoría de topos ("diferencia más importante" versus espacios topológicos) [331]. Ejemplos de morfismos de topos [332-365].

SGA4.2 [**1960-69**, 4.2, *Exposé VII*] (topos *étale* de un esquema, por A. Grothendieck). "*Site et topos étales d'un schéma*" [341-365]. Definiciones: morfismo *étale* entre esquemas, topología *étale* (cubrimientos *étales* de esquemas), sitio *étale* $X_{\text{ét}}$ de un esquema X, topos *étale* de un esquema (topos de haces sobre el sitio $X_{\text{ét}}$) [343]. (Pseudo)funtorialidad de los cambios de base: esquemas / topos *étales* (pseudo, por cambios de universos) [344-345]. El problema de universos es reducible [346]. Reconstrucción del primer grupo de homología como grupo de clases de haces principales y homogéneos sobre el sitio *étale* [348]. El paso de topología de Zariski a topología *étale* es la clave de la reconstrucción [349], ampliable a los grupos de homología superiores [350]. Generadores del topos *étale* [350]. Reticulado de topologías diversas: Zariski, *étale*, *fpqc*, etc. [353]. Correlaciones Zariski / *étale*: morfismos de topos y homomorfismos de funtores cohomológicos [354-355].

Descripción más extensa.

Para poder desarrollar una descripción más detallada de algunos temas, en lo que sigue nos concentraremos en *(I)* el *grupo fundamental algebraico* y sus variantes, *(II)* algunas *problemáticas cohomológicas* centrales. Dejamos una descripción de la *teoría de topos*, corazón de *SGA* [**1960-69**], para nuestra *Sección 8.3* abajo (que debe entonces leerse antes de nuestra *Sección 8.2. Síntesis conceptual*).

(I). La *unificación* de algunas ideas centrales de Galois y Riemann es esencial en la obra de Grothendieck. En particular, la construcción de un *grupo fundamental algebraico* que englobe las nociones de grupo de Galois (algebraico) y de grupo fundamental (topológico)[lxxvii] resulta ser uno de sus grandes aportes[lxxviii]. La primera aparición del grupo fundamental algebraico ocurre en un *Seminario Bourbaki* (Mayo 1959)[341] que complementa sus exposiciones en *EGA* y *SGA*. Mediante una noción general de *recubrimiento*

341 Ver arriba, pp. 172, 206. A. Grothendieck. "Geométrie Formelle et Géometrie Algébrique". En: *Séminaire Bourbaki* 182 (1959), págs. 193-220 [**1956-62**, exp. 182].

lxxvii Para una visión actual y completa de esta situación, ver T. Szamuely. *Galois Groups and Fundamental Groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, donde los énfasis en Galois y en Riemann son muy notorios (Cap.1 "Teoría de Galois", Cap.2 "Grupos fundamentales en topología", Cap.3 "Superficies de Riemann", Cap.4 "Grupos fundamentales de curvas algebraicas"), antes de proceder a las construcciones grothendieckianas (Cap.5 "Grupos fundamentales de esquemas", Cap.6 "Grupos fundamentales tannakianos").

lxxviii Según Jacob Murre, "En *característica 0*, el grupo fundamental algebraico es la compleción del grupo topológico fundamental de la variedad analítica subyacente, donde «compleción» significa compleción con respecto a la topología inducida por los subgrupos de índice finito. (...) En *característica positiva*, el entendimiento *profundo* de este grupo queda fuera de alcance si uno se restringe a los métodos de las *variedades* algebraicas, *i.e.* si las herramientas de elementos nilpotentes no están disponibles. (...) La herramienta esencial del método de Grothendieck consiste en elevar la curva y sus recubrimientos, de característica $p > 0$ a característica 0, primero gracias a elevaciones infinitesimales, y luego gracias a un teorema profundo de existencia y comparación". Murre pone el dedo en la llaga: "Grothendieck no busca *generalidad de por sí*, sino *naturalidad*. No vio solamente que era posible *extender* la teoría de *variedades* algebraicas a una teoría de *esquemas*; para él estaba claro que, para *entender* la teoría de variedades algebraicas, era *necesario* desarrollar una teoría de esquemas". Ver J. Murre. "On Grothendieck's work on the fundamental group". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 143-167, pp. 144-145.

no ramificado[342], Grothendieck indica que se puede construir una "*teoría de Galois* calcada sobre la teoría de Galois clásica (y que la contiene, las demostraciones siendo más simples que las demostraciones recibidas en el caso clásico) y sobre la teoría galoisiana de los recubrimientos topológicos" [**1956-62**, exp. 182, p. 210]. La construcción procede entonces *(i)* ampliando la noción de *punto*[343], *(ii)* asociándole a un recubrimiento no ramificado sobre X sus puntos geométricos por encima de un punto dado a, *(iii)* indicando que la construcción así obtenida $F(X,a) : R(X) \to Fin$ (categoría de recubrimientos no ramificados de X y categoría de conjuntos finitos) es *funtorial*, y *(iv)* observando que "si X es conexo, el par formado por $R(X)$ y $F(X,a)$ posee las propiedades formales necesarias para ser isomorfo al par análogo definido por un grupo topológico compacto totalmente discontinuo (*i.e.* límite proyectivo de grupos finitos)" [**1956-62**, exp. 182, p. 210].

SGA1 refunda arquitectónica y axiomáticamente este proceso[344]. La *Introducción* ya indica lo conseguido al inicio del Seminario: "El presente volumen presenta [sic] los fundamentos de una teoría del grupo fundamental en Geometría Algebraica, desde el punto de vista «kroneckeriano» que permite tratar de igual manera el caso de una variedad algebraica en el sentido usual, y el caso del anillo de enteros de un cuerpo de números, por ejemplo. Este punto de vista solo se expresa de manera satisfactoria en el lenguaje de los esquemas" [**1960-69**, 1.v]. Por otro lado, los dos temas principales en lo que se

---

342 Dados un esquema X y otro esquema X' sobre X, X' es un *recubrimiento no ramificado* de X si X' es finito sobre X (*i.e.* está definido por un haz coherente de álgebras A sobre X), A es localmente libre sobre X (*i.e.* las localizaciones son módulos libres), y para todo $x \in X$ el cociente $A_x/\mathfrak{M}_x A_x$ es separable sobre $\mathbf{k}(x)$ [**1956-62**, exp. 182, pp. 209-210] (ver nuestra *Nota 299* arriba, p. 203).

343 Un *punto geométrico* de un esquema X es un morfismo $a : Spec(\Omega) \to X$ donde Ω es un cuerpo algebraicamente cerrado, lo que equivale a darse una extensión algebraicamente cerrada del cuerpo residual $\mathbf{k}(x)$ para un punto apropiado $x = |a| \in X$ (x es la "localización" del punto geométrico a) [**1956-62**, exp. 182, p. 210]. Los puntos geométricos de un esquema dejan "ver" nuevos entes allende los puntos usuales del espacio topológico subyacente al esquema. Se trata de otro típico proceder grothendieckiano que ahonda en la dialéctica *visible/invisible* y que abre nuestros "ojos ciegos".

344 Sin embargo, *SGA* [**1960-69**], como registro del Seminario *en acción*, no posee el grado meticuloso de acumulación arquitectónica de *EGA* [**1959-64**].

refiere al grupo fundamental quedan también allí resumidos: “La exposición V presenta la descripción axiomática del grupo fundamental de un esquema, aún útil en el caso clásico de esquema reducido al espectro de un cuerpo, donde se encuentra una reformulación muy cómoda de la *teoría de Galois* habitual (...) La exposición X proporciona la teoría de la *especialización del grupo fundamental*, para un morfismo propio y liso, cuyo resultado más impactante consiste en la determinación (casi idéntica) del grupo fundamental de una curva algebraica lisa en característica $p > 0$, gracias al resultado conocido por vía trascendente en característica nula” [**1960-69**, 1.vi-vii]. Resumimos entonces brevemente ahora algunas definiciones y resultados centrales de las exposiciones V y X.

Las “condiciones axiomáticas para una teoría de Galois” aparecen en la sección 4 de la exposición V [**1960-69**, 1.118-126]. El tratamiento axiomático es *característico del estilo* de Grothendieck, y recuerda su proceder permanente de la primera década (*Tesis* [**1949-53**], *Résumé* [**1953c**], *Tôhoku* [**1955-56**])[345]. El objetivo consiste en *(i)* axiomatizar categóricamente la categoría $C(\pi)$ de conjuntos finitos donde un grupo topológico π opera continuamente, *(ii)* construir un modelo general de esos axiomas mediante un grupo topológico abstracto que sea límite proyectivo de grupos finitos, y *(iii)* proveer gracias a esta construcción la *definición* de un grupo fundamental algebraico que extienda las propiedades del grupo π[346]. Los axiomas en cuestión *(G1)-(G6)* postulan, para una categoría $\mathcal{C}$ y un funtor $F : \mathcal{C} \to Fin$, la existencia (en $\mathcal{C}$: *(G1)-(G3)*) de límites finitos, sumas finitas, cocientes por grupos de automorfismos, factorizaciones epi-mono adecuadas, y la

345 Este proceder contrasta inmediatamente con *EGA* [**1959-64**], donde los objetos se construyen acumulativamente, sin necesidad de axiomas que les gobiernen. Para una comparación de *EGA* y *SGA* en palabras del propio Grothendieck, ver [**1960-69**, 1.x-xi].

346 El paso de lo *particular* (grupo topológico y su acción) a lo *universal* (grupo fundamental algebraico), a través de los *axiomas que gobiernan sus entornos categóricos*, es una de las técnicas fundamentales del pensamiento grothendieckiano. Con ello se trascienden cualesquiera aproximaciones internalistas o externalistas, y en la *mediación relacional categórica* (forma de “mixto” a la Lautman) es donde se consigue una plena eclosión del conocimiento matemático.

satisfacción (para F: *(G4)-(G6)*) de condiciones de exactitud, preservación de algunas sumas, epis y cocientes, y reflexión de isos [**1960-69**, 1.118-119]. La elaboración del modelo general procede por etapas derivadas de los axiomas, y consiste esencialmente en la construcción de un límite proyectivo P de objetos "galoisianos" $(P_i)_i$ (*i.e.* $Aut(P_i)$ opera transitivamente sobre $F(P_i)$), que permite *representar* a F (*i.e.* $F(X) \approx Hom(P, X)$)[347], definir π (grupo topológico abstracto) como el grupo opuesto a $Aut(P)$, y obtener una *equivalencia* categórica $\mathcal{C} \cong C(\pi)$ [**1960-69**, 1.119-126]. Finalmente, en una categoría $\mathcal{C}$ *galoisiana* (*i.e.* equivalente a una categoría $C(\pi)$ con π grupo compacto, límite proyectivo de grupos finitos [**1960-69**, 1.127]), los funtores *fundamentales* (*i.e.* que proceden de la equivalencia $\mathcal{C} \cong C(\pi)$, funtores que satisfacen *(G4)-(G6)*) resultan ser isomorfos, y constituyen entonces un grupoide conexo, llamado "grupoide fundamental" de la categoría galoisiana $\mathcal{C}$. Al localizar en F, se tiene $Hom(F, F) = Isom(F, F)$, los isomorfismos pueden verse como "caminos" y se obtiene un *grupo fundamental algebraico* general: el grupo fundamental de $\mathcal{C}$ en F [**1960-69**, 1.130]. En el caso en que S sea un *esquema* apropiado (localmente noetheriano y conexo) y a un punto geométrico de S, si se toma $\mathcal{C}$ como la categoría de los recubrimientos *étales* de S y $F(X)$ como el conjunto de los puntos geométricos de X encima de a, se tienen las propiedades *(G1)-(G6)*, y el grupo fundamental de $\mathcal{C}$ en F, denotado como corresponde $\pi_1(S, a)$[lxxix], resulta ser el *grupo fundamental algebraico* de S en a [**1960-69**, 1.140].

[347] A. Grothendieck. "Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique". En: *Séminaire Bourbaki* 195 (1960), págs. 369-390 [**1956-62**, exp. 195]. En estas exposiciones del *Seminario Bourbaki* firma "Alexander", manteniendo su origen alemán (y por ende el marco social y político de sus padres); los dos apelativos "Alexander" y "Alexandre" correrán juntos toda su vida, posible reflejo de esa *mente demediada* que le hará, a la vez, amar y rechazar la vida académica.

[lxxix] Esto produce, como casos particulares notables, la teoría clásica de Galois (tomando S como el espectro de un campo) y la homotopía clásica de una variedad algebraica compleja (vía un "teorema de existencia de Riemann" [**1960-69**, 1.332]). Ver Murre, óp.cit., p. 152. Se obtiene así una *profunda unificación Galois-Riemann*, que alcanzará un grado aún mayor de compenetración en la teoría de topos.

El estudio de las posibles transferencias de información entre característica 0 y característica $p > 0$ comienza con un "teorema de semi-continuidad para grupos fundamentales" [**1960-69**, 1.268]: dados Y espectro de un anillo local noetheriano completo con cuerpo residual k, $X \to Y$ morfismo *propio*, $X_0 = X \times_A k$, a_0 punto geométrico de X_0, a punto geométrico correspondiente en X, se tiene $\pi_1(X_0, a_0) \approx \pi_1(X, a)$. El enunciado, según Grothendieck, "no es sino una traducción, en el lenguaje del grupo fundamental", de un *teorema de existencia*[348] previo para haces coherentes, y allí es donde "el teorema de existencia de haces en geometría algebraico-formal se introduce de manera esencial en la teoría del grupo fundamental"[349] [**1960-69**, 1.268]. Como consecuencia del teorema de semi-continuidad extendido a fibras geométricas arbitrarias (teorema de especialización, "que no parece tener aún análogo en topología algebraica" [**1960-69**, 1.269]), se tiene que, si $f : X \to Y$ es *propio y liso*, X_0 y X_1 son fibras geométricas apropiadas, y $\pi_1(X_i)^{(p)}$ ($p > 0,\ i = 0, 1$) es el cociente obtenido vía el normalizador de un p-Sylow del grupo $\pi_1(X_i)$, entonces $\pi_1(X_1)^{(p)} \approx \pi_1(X_0)^{(p)}$ [**1960-69**, 1.283]. Con ello, mediante un *argumento de transferencia de característica 0 a característica* $p > 0$, es decir, gracias a un argumento

[348] El "teorema de existencia de haces algebraicos coherentes" (*EGA* [**1959-64**, 3.1.149-156]) asegura que, en el caso de un morfismo propio $f : X \to Y$ entre esquemas, la categoría de los $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes con soporte propio en Y es una subcategoría *plena y fiel* de una categoría de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-módulos, donde $\widehat{X}$ es el "completado" (producto fibrado) de X a lo largo de un cerrado adecuado en Y [**1959-64**, 3.1.150]. La prueba se divide en diversos casos (proyectivo, cuasi-proyectivo, general), recordando la metodología utilizada en la demostración de Riemann-Roch [**1955-57**].

[349] De esta manera, la *formalidad alta* de la geometría algebraica abstracta es la que permite transitar de maneras nuevas entre estructuras *continuas* y estructuras *discretas*. Los desarrollos *naturales* de estas ideas llevarán a la *geometría anabeliana* (ver nuestro *Capítulo 12* abajo), donde el estudio del grupo fundamental con herramientas de la variable compleja y de la combinatoria (grupo de Grothendieck-Teichmüller) proveerá otras perspectivas enteramente originales. Desde un punto de vista metodológico, el *SGA* [**1960-69**] y la *Esquisse* [**1984**] se *contraponen* alrededor del grupo fundamental: mientras el *Seminario* procede de lo alto (grupo fundamental algebraico abstracto) a lo bajo (grupo fundamental de una curva), el *Esbozo de un Programa* procede de lo bajo (espacios *moduli* concretos) a lo alto (conjeturas anabelianas). Esto muestra, una vez más, la riqueza de un *pensamiento pendular* universal/particular, abstracto/concreto, libre/matérico, que no puede ser banalmente reducido a calificaciones burdas de "abstract nonsense".

trascendente aplicado a una situación *algebraica*[350], Grothendieck logra finalmente describir (vía generadores) el grupo fundamental $\pi_1(X_0)^{(p)}$ de una curva X_0 propia, lisa y conexa sobre un cuerpo de característica p [**1960-69**, 1.283]. Concluye así la tarea de construcción del *grupo fundamental algebraico* en sus tres niveles fundamentales[lxxx]: caso axiomático general, caso de un esquema, caso de una curva en característica $p > 0$.

(II). Una segunda unificación de Galois y Riemann ocurre en la definición de lo *étale*[351] y, particularmente, en temas relacionados con la *cohomología étale*. Al inicio de *SGA1* aparece ya la definición de morfismo *étale*: un morfismo entre esquemas $f : X \to Y$ es *étale* si es de tipo finito, plano[352] y "no ramificado o nítido", es decir, si para todos $x \in X, y = f(x)$, $\mathcal{O}_x/\mathfrak{M}_y\mathcal{O}_x$ es una extensión finita separable de $\mathbf{k}(y)$[353] [**1960-69**, 1.4]. Una vez se muestran las propiedades básicas de permanencia (compuestos, pullbacks, productos de *étales* son *étales* [**1960-69**, 1.4-5])[354], Grothendieck define la noción de *recubrimiento*

---

350 Grothendieck indica que su objetivo consiste en "empujar lo más lejos posible los fenómenos comunes a la teoría topológica y la teoría esquemática del grupo fundamental" [**1960-69**, 1.271]. Por un lado, la descripción (clásica) del *grupo fundamental topológico* de una curva X_0 propia, lisa y conexa de género g sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de *característica 0*, mediante $2g$ generadores que satisfacen una relación de normalidad, provee una descripción del *grupo fundamental algebraico* de X_0. Por otro lado, si k es de *característica* $p > 0$, usando el anillo A de vectores de Witt sobre k (ver *Nota XXXII* arriba, p. 155) y una extensión algebraicamente cerrada K del cuerpo de fracciones de A, K resulta ser de característica 0, existe un esquema X propio y liso sobre $Spec(A)$ que se reduce a lo largo de X_0, y se puede utilizar el (epi)morfismo de comparación $\pi_1(X \times_A K) \to \pi_1(X_0)$ para transferir información de característica 0 a característica p [**1960-69**, 1.271-272].

351 Ver nuestra *Sección 5.3* arriba.

352 Ver nuestra *Nota 307* arriba, p. 207.

353 Ver nuestra *Nota 299* arriba, p. 203. La planitud fuerza $\mathfrak{M}_y\mathcal{O}_x = \mathfrak{M}_x$ y, por tanto, la condición de no ramificación se expresa también diciendo que $\mathbf{k}(x)$ es una extensión finita separable de $\mathbf{k}(y)$ (recuérdese que la categoría de esquemas es la categoría *dual* de la categoría de anillos subyacentes, y las flechas se invierten en las estructuras sobre x y las estructuras sobre y). La *separabilidad* invoca a Galois, la *no ramificación* invoca a Riemann.

354 Múltiples otras transferencias de propiedades entre X y Y para un morfismo *étale* $f : X \to Y$ se estudian a lo largo de la exposición I del Seminario [**1960-69**, 4.1.6-28].

lxxx Para una guía mucho más detallada de los trabajos de Grothendieck en *SGA1* sobre el grupo fundamental, ver Murre, ibíd.

étale de un esquema Y como un morfismo $f : X \to Y$ *étale* y finito (es decir, X definido por un haz coherente de álgebras sobre Y) [**1960-69**, 4.5]. A partir de los recubrimientos se obtiene, en forma natural, una *topología* (ver *Sección 8.3* abajo), que enlaza directamente con las problemáticas cohomológicas centrales del programa de Grothendieck:

> El objetivo principal del presente Seminario es desarrollar el formalismo de la "cohomología de Weil" de los esquemas. (...) En el presente Seminario [*SGA4*], nos reducimos al estudio de la cohomología de los esquemas, relativamente a la *topología étale*. Esta topología, por su descripción, se encuentra muy cercana de las topologías de las variedades topológicas usuales, y veremos que la mayoría de los resultados clásicos que conciernen la cohomología de los espacios topológicos ordinarios (sucesiones espectrales, teoremas de finitud, Künneth, dualidad, teoremas de Lefschetz) pueden formularse y demostrarse en el nuevo contexto, a condición de acotarse cuando sea necesario a haces de torsión *primos con las características residuales* de los esquemas considerados. Se obtendrá una teoría cohomológica "con coeficientes de característica 0" (como solicitado por Weil) gracias a un paso esencialmente trivial vía límites proyectivos (*cf.* *SGA5*, exp. VI), que permite definir una cohomología con coeficientes en el anillo $\mathbb{Z}_l$ de los enteros l-ádicos a partir de coeficientes $\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}$, $\nu \to \infty$ [**1960-69**, 4.1.xi-xii].

Las cohomologías *étales* $H^i(X, \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z})$ funcionan bien con coeficientes de torsión[XLVIII], pero alcanzan allí su *obstrucción natural*. Para llegar a cubrir la característica 0, los coeficientes deben luego extenderse "infinitesimalmente", en los límites, dando lugar a la cohomología *l-ádica* $H^i(X, \mathbb{Z}_l)$.

Después de desarrollar técnicas cohomológicas en el ámbito de los esquemas, en los primeros años del *IHES* y en las visitas de Grothendieck a Harvard en 1961-63[lxxxi], la

---

lxxxi Ver nuestra *Nota lxix* arriba, p. 221, así como L. Illusie. "Grothendieck et la cohomologie *étale*". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 175-192, pp. 177-179. Illusie indica que "en menos de un año, de septiembre 62 a marzo 63, Artin y Grothendieck establecieron los teoremas fundamentales para los coeficientes de torsión" (*i.e.* la cohomologia *étale*), ibíd., p. 178.

XLVIII Los elementos *de torsión* de un grupo son sus elementos de orden finito (se "tuercen" hasta llegar a la identidad). Un grupo es de *torsión* si todos sus elementos son de torsión. Los grupos finitos (y en particular los grupos $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$) son de torsión. El grupo infinito $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y el grupo aditivo del anillo de polinomios sobre un campo finito (grupo también infinito) son de torsión. $(\mathbb{Z}, +)$ es el ejemplo arquetípico de grupo *no* de torsión. La propiedad "ser de torsión" no es axiomatizable en la lógica clásica de primer orden (uso del teorema de compacidad).

cohomología se desarrolla de forma más natural en los topos[355]. En la exposición V de *SGA4.2* (dependiente del entorno de los topos (*SGA4.1*), ver *Sección 8.3* abajo), Verdier presenta una "Cohomología en los topos" [**1960-69**, 4.2, exp. V] que utiliza el formalismo general de las categorías abelianas, los haces, los recubrimientos, los morfismos de topos, y que permite reconstruir los funtores derivados de la cohomología $R^q f_x$, aparecidos por vez primera en el *Tôhoku* [**1955-56**]. En la exposición VII (sobre la que volveremos más abajo en nuestra *Sección 8.3*), Grothendieck introduce el *sitio étale* $X_{\text{ét}}$ de un esquema X[356] [**1960-69**, 4.2.343], y define los *grupos cohomológicos étales* vía los funtores derivados derechos asociados[lxxxii]. Si G es un grupo conmutativo, X es conexo y a es un punto geométrico de X, Grothendieck observa que se tiene una conexión esencial con el grupo fundamental, $H^1(X, G) \approx Hom(\pi_1(X, a), G)$ (*), y afirma que "se puede decir que al pasar de la cohomología de Zariski a la topología *étale*, «se ha hecho lo que se necesitaba» para obtener el «buen» H^1 (que figura en el segundo miembro de (*)) para un grupo G constante finito de coeficientes. *Es un hecho notable, que será demostrado en lo que sigue del seminario, que esto basta también para encontrar los «buenos» $H^i(X, G)$ para todo grupo de coeficientes de torsión (al menos si G es primo con las características residuales de X)"* [**1960-69**, 4.2.349-350].

Como caso particular de esa situación (aunque en forma independiente, proviniendo

[355] El registro del cambio queda patente en la *Introducción* de Grothendieck a *SGA4*: "Desde el año en el que se desarrolló el seminario oral, la importancia del lenguaje de las topologías y de los topos en geometría algebraica ha ido creciendo, tanto para proveer un marco cómodo e intuitivo para las técnicas de descenso y de paso al cociente (indispensables en prácticamente todas las cuestiones de *construcción de esquemas*), como para desarrollar otras *teorías cohomológicas para los esquemas*" [**1960-69**, 4.1.v].

[356] $X_{\text{ét}}$ está determinado por la colección de morfismos *étales* sobre X, que conformará una *topología de Grothendieck* en la categoría de esquemas sobre X, ver nuestra *Sección 8.3* abajo.

[lxxxii] Para una presentación moderna, ver por ejemplo L. Fu. *Etale Cohomology Theory.* Singapore: World Scientific, 2011, pp. 176, 184, 210.

de trabajos anteriores), Artin escribe enteramente en *SGA4.3* los desarrollos de la cohomología *étale*[lxxxiii]. En *SGA4.3*, al inicio de la exposición IX, Artin y Grothendieck explican la *obstrucción fundamental* que ocurre en la cohomología de variedades sobre un campo de característica $p > 0$, a saber, la inexistencia de una "teoría «razonable» cohomológica con coeficientes enteros (o aún reales)" para esas variedades[357] [**1960-69**, 4.3.1]. *Esta*

[357] "Más precisamente, no existe ningún funtor contravariante H^1, definido, pongamos, en la categoría de esquemas proyectivos lisos sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica $p > 0$, a valores en la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ (o un subcampo de $\mathbb{R}$), que «conmuta con productos», *i.e.* tal que $H^1(X \times Y) \approx H^1(X) \times H^1(Y)$, y tal que $dimH^1(X) = 2$ si X es una curva conexa de género 1. En efecto, se seguiría que si X es una variedad abeliana sobre k, entonces la aplicación $u \mapsto u^1$ de $End(X)$ en $End(H^1(X))$ es *aditiva*, por tanto una *representación* del anillo opuesto de $End(X)$. Pero en característica p, existen curvas elípticas X cuyo anillo de endomorfismos es un orden maximal A de un álgebra de cuaterniones sobre $\mathbb{Z}$ [referencia a Deuring 1940], y una tal álgebra no tiene representaciones en un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$ puesto que $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ es un cuerpo (el cuerpo de los cuaterniones)" [**1960-69**, 4.3.1-2]. Una vez más, la percepción de barreras obstructivas en *entornos muy concretos* es la que lleva a una *mirada alta* donde se pueden anegar los muros de separación y construir fluidos de conexión entre las distintas perspectivas del problema. La abstracción *nunca es gratuita* y se dirige a crear ambientes donde se sumergen *suavemente* los problemas, y donde sus soluciones se desprenden *naturalmente*.

[lxxxiii] Illusie propone una lista precisa de esos aportes: "*(i)* estructura de la cohomología de curvas (*SGA4*, exp. X, sec. 4.6), *(ii)* cambio propio de base (*SGA4*, exps. XII, XIII), *(iii)* aciclicidad local de morfismos lisos (*SGA4*, exp. XV), *(iv)* pureza relativa y cambio liso de base (*SGA4*, exp. XVI), *(v)* finitud para un morfismo propio (*SGA4*, exp. XIV), *(vi)* acotaciones de la dimensión cohomológica, Lefschetz afín (*SGA4*, exps. X, XIV), *(vii)* comparación con la cohomología de Betti (*SGA4*, exps. XI, XVI), *(viii)* cohomología con soportes propios y dualidad global (*SGA4*, exps. XVII, XVIII), *(ix)* dualidad local (*SGA5*, exp. I)", Illusie, óp.cit., p. 178. Una comparación de las *estructuras naturales* que emergen en la topología *étale* y en la topología de Zariski es iluminadora: "Los esquemas *estrictamente locales*, *i.e.* los espectros de anillos locales estrictamente henselianos, son los objetos locales de la topología *étale*, así como los esquemas locales, *i.e.* los espectros de anillos locales, son los objetos locales de la topología de Zariski", ibíd., p. 177. [Un anillo local es de Hensel (o henseliano) si ciertas factorizaciones de polinomios mónicos en el cuerpo residual se elevan a factorizaciones similares en el anillo. Los campos, los anillos de números p-ádicos, los anillos de series de potencias sobre un campo local son henselianos. Un anillo es estrictamente henseliano si es de Hensel y, además, su cuerpo residual es separable y cerrado. La *henselización* asigna, a todo anillo local, el anillo henseliano libre generado por él (*i.e.*, ocurre como adjunción izquierda de la inclusión plena de la categoría de anillos henselianos en la categoría de anillos locales).] Con ello, "la fibra de un haz *étale* en un punto geométrico es el conjunto de sus secciones globales sobre el localizado estricto correspondiente (...) La henselización, que hace intervenir un límite inductivo filtrante, es en muchos sentidos mejor manejable que una compleción", ibíd., p. 177.

obstrucción lleva entonces a un nuevo tránsito, mediante cohomologías con *coeficientes de torsión*, es decir, mediante la cohomología *étale*. En la exposición XI, Artin muestra que el camino emprendido es correcto al demostrar que "la cohomología *étale* a valores en un haz localmente constante de torsión coincide con la cohomología clásica para un esquema liso sobre $Spec(\mathbb{C})$"[358] [**1960-69**, 4.3.64].

En lo que respecta a las conjeturas de Weil[lxxxiv], Grothendieck obtiene una fórmula de Lefschetz[359] generalizada en cohomología l-ádica ("fórmula de trazas") con la que prueba la *racionalidad* de las funciones Zeta y L involucradas en las conjeturas (sobre un campo de característica q)[360], y gracias a cuyas *ecuaciones funcionales* Deligne demostrará años

358 "La demostración (...) es elemental a partir del teorema de Grauert, que dice que todo recubrimiento finito de $X(\mathbb{C})$ proviene de un recubrimiento *étale* de X; por eso se presenta aquí, aunque se probará luego un resultado más completo, utilizando el teorema de resolución de singularidades de Hironaka" [**1960-69**, 4.3.64]. La *resolución de singularidades*, problemática de suavización de una variedad arbitraria, es un tema grothendieckiano por excelencia. La resolución que proporcionó Hironaka en característica 0 (ver nuestra *Nota XXXVIII* arriba, p. 163) impactó siempre a Grothendieck, y su extensión a característica p fue uno de sus sueños nunca enteramente realizados. Grothendieck recuerda cómo "acogí a un Hironaka aún desconocido en locales improvisados" (antes de que el *IHES* se radicara en Bures) [**1983-86**, 3.620], y cómo "me parece que la primera vez donde utilicé la resolución de singularidades a la Hironaka, y donde entendí la potencia extraordinaria de la resolución como instrumento de demostración, fue para una demostración «en tres cucharazos» de un teorema de Grauert-Remmert, que describía una estructura analítica compleja sobre ciertos recubrimientos finitos de un espacio analítico complejo, y el enunciado análogo en el caso de los esquemas de tipo finito sobre $\mathbb{C}$. (No es imposible que el principio me lo haya soplado Serre, en esa ocasión misma). Este último resultado es el ingrediente principal de la demostración del teorema de comparación de la cohomología *étale* con la cohomología ordinaria (el resto reduciéndose a desatornillamientos [*dévissages*], gracias al formalismo de los $Rf_!$, más algo adicional de resolución para pasar de los $Rf_!$ a los Rf_*..." [**1983-86**, 2.350]. Obsérvese de nuevo la conexión profunda entre la variable compleja ([**1961**], nuestro *Capítulo 6* arriba) y los desarrollos de la geometría algebraica abstracta.

359 Ver *Nota XXX* arriba, p. 154.

360 En su *Esquisse thématique*, Grothendieck indica que en aritmética "mi contribución principal consistió (en colaboración con M. Artin) en la demostración de la racionalidad de las funciones L asociadas a haces l-ádicos generales sobre variedades algebraicas sobre cuerpos finitos (...) Inspirándose de las conjeturas de Weil, se llega en efecto a expresar esas funciones L en términos de productos alternados de polinomios característicos del Frobenius operando sobre la «cohomología con soportes propios» de la variedad considerada (...) Hay allí un campo de estudio inmenso, que por la naturaleza de las cosas

lxxxiv Referimos aquí a Illusie, ibíd., pp. 183-185.

después (1974) "que los inversos de sus raíces son enteros algebraicos cuyos conjugados complejos poseen valor absoluto $q^{\frac{i}{2}}$, concluyendo así la prueba de las conjeturas de Weil"[lxxxv].

8.2 Síntesis conceptual

SGA [**1960-69**] provee una arquitectónica multidimensional donde se conjugan un hondo trabajo de fundamentos (esquemas y topos)[361], una nueva apertura hacia el álgebra topológica abstracta (grupo fundamental algebraico)[362], una construcción de teorías cohomológicas diversas[363], y un programa de aplicación de todo el aparataje hacia la resolución de las conjeturas de Weil[364] y, más generalmente, hacia un entendimiento de las conexiones *arquetípicas intrínsecas* entre número y espacio.

debería encontrarse centrado, tarde o temprano, sobre la noción de «motivo» (denominador común de los diversos tipos de cohomología que se le pueden asignar a una variedad algebraica)" [**1972**, 11].

361 "La introducción y el estudio de la *noción de esquema* [en *EGA*] (...) y sus generalizaciones muestran la parte conceptual importante que corresponde, en el lenguaje de los esquemas, a la noción general de localización, es decir a los *topos* [en *SGA*]" [**1972**, 12]. Ver nuestra *Sección 8.3* abajo.

362 "Desde un punto de vista algebraico-geométrico todo estaba por hacerse, desde la definición del grupo fundamental de una variedad arbitraria, pasando por propiedades de «descenso» que incluían resultados bastante formales de tipo van Kampen, hasta el cálculo del grupo fundamental en los primeros casos no triviales (...) Este programa se consiguió esencialmente en *SGA1*, utilizando a la vez los resultados clásicos sobre el cuerpo de los complejos (establecidos por vía trascendente) y una gama de instrumentos hechos a medida (teoría del descenso, estudio de morfismos *étales*, teoremas de existencia para haces coherentes...)" [**1972**, 14-15]. Obsérvese, una vez más, el enlace entre los *ejemplos clásicos* (guía concreta de los números complejos) y los nuevos *conceptos abstractos* (guía universal de liberación de hipótesis "parásitas").

363 "Cohomología «coherente» (...) *étale* (...) l-ádica (...) De Rham (...) cristalina" [**1972**, 14].

364 "Teoremas de Lefschetz locales y globales para los grupos de Picard, el grupo fundamental, la cohomología *étale*, la cohomología coherente. Se trata aquí de la comparación entre los invariantes (cohomológicos u homotópicos) de una variedad algebraica y de una sección hiperplana" (vía la fórmula de trazas) [**1972**, 15].

lxxxv ibíd., p. 184. Illusie señala (ibíd., p. 185) las riquísimas conexiones de los trabajos de Grothendieck y Deligne con el programa de Langlands, gracias a Lafforgue (2002) y Ngô (2010): una pléyade de Medallistas Fields en acción.

Nos sumergimos entonces en una *verdadera marea*[365], que –bajo la forma del lecho de un río muy profundo– Grothendieck describe memorablemente en *Récoltes et semailles*:

> El punto de vista y el lenguaje de los haces introducidos por Leray nos llevó a mirar los "espacios" y "variedades" de todo tipo bajo una nueva luz. Aquellos no tocaban, sin embargo, la noción misma de espacio, contentándose de hacernos aprehender más finamente, con nuevos ojos, esos "espacios" tradicionales, ya familiares para todos. No obstante, resultó que esa noción de espacio es inadecuada para dar cuenta de los "invariantes topológicos" más esenciales que expresan la "forma" de las variedades algebraicas "abstractas" (como aquellas a las que se aplican las conjeturas de Weil), o aún la forma de los "esquemas" generales (que generalizan las antiguas variedades). Para los "esponsales" esperados, "del número y la magnitud", era como un lecho decididamente apretado, donde solo uno de los cónyuges (a saber, la esposa) podía con dificultad anidarse, pero ¡nunca los dos al tiempo! El "nuevo principio" que quedaba por encontrar, para consumar los esponsales augurados por hadas propicias, no era otro que ese "lecho" espacioso que faltaba a los prometidos, sin que nadie hasta el momento se hubiese siquiera dado cuenta...
>
> El "lecho a dos plazas" apareció (como por un golpe de varita mágica) con la idea de *topos*. Esta idea engloba, en una intuición topológica común, tanto los espacios tradicionales (topológicos), que encarnan el mundo de la magnitud continua, como los (así llamados) "espacios" (o "variedades") de los geómetras algebraicos abstractos impenintentes, y otros innombrables tipos de estructuras, que hasta entonces parecían irremediablemente pegados al "mundo aritmético" de los agregados "discontinuos" o "discretos".
>
> Es el punto de vista de los haces el que me sirvió de guía silencioso y seguro, de llave eficaz (y para nada secreta), para llevarme sin dilaciones ni desvíos hacia la cámara nupcial con un vasto lecho conyugal. Un lecho tan vasto en efecto (cual un vasto y tranquilo río muy profundo) que "todos los caballos del rey pudiesen en él beber al tiempo [*tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble*]" – como lo dice una vieja canción que seguramente has debido cantar tú también [el lector supuesto de *Récoltes et semailles*], o al menos oído cantar [**1983-86**, P.37-38].

365 Según Grothendieck, "me parece que en mi trabajo soy tan «*yin*», tan «mar y movimiento», como se lo puede ser" [**1983-86**, 3.595]. Más precisamente, se trata de un modo de comprensión de las cosas que se asemeja a un "trabajo «a la manera del mar que se alisa» [*à la façon de la mer qui s'étale*], ya sea en el trabajo matemático o en cualquier otro" [**1983-86**, 3.565]. El "mar *étale*" aparece en *Les travailleurs de la mer* (1865-66) de Víctor Hugo: "*Le niveau uniforme du varech sur toutes les roches marquait la ligne de flottaison de la marée pleine et de la mer étale*", Hugo, óp.cit., p. 678. El nivel "*étale*" del mar es aquel donde la marea alta brevemente se estabiliza, se alisa, antes de descender de nuevo. El tema del mar, las olas y las mareas será crucial en *Récoltes et semailles* (ver nuestro *Capítulo 14* abajo), así como en una visión longitudinal de la obra de Grothendieck (*Sección 16.2* abajo).

Grothendieck y su entorno en el *IHES* se adentran así en una *nueva geometría* que sirve de "síntesis entre dos mundos, hasta entonces contiguos y estrechamente solidarios, pero no obstante separados: el *mundo «aritmético»*, en el cual viven los (así llamados) «espacios» sin principio de continuidad, y el *mundo de la magnitud continua*, donde viven los «espacios» en el sentido propio del término (...) *En la nueva visión, estos mundos antes separados, no forman sino uno solo*" [**1983-86**, P.30]. Desde un punto de vista conceptual, esta *unificación del espacio-número* debe entenderse como una síntesis aún más profunda que la misma unificación del *espacio-tiempo* propuesta por Einstein, pues el tiempo no es sino un modo específico de particularización de la idea de número. El que la *noción abstracta de haz* pueda *proyectarse uniformemente* sobre la idea de número (vía *esquemas*) y sobre la idea de espacio (vía *topos*) es un resultado asombroso, no solo técnicamente, sino filosóficamente, ya que propone un *arquetipo* universal (haz) desde donde se desprenden los *tipos* del número (discreción) y del espacio (continuidad)[366].

La idea revolucionaria central de Grothendieck puede expresarse como un *sencillo e infantil*[367] cambio de perspectiva en el entendimiento del espacio: en vez de *(i)* un espacio topológico X, considérense *(ii)* todos los haces sobre X, y tómese *(iii)* el topos $\mathcal{T}_X$ de todos esos haces sobre X; entonces *el entendimiento de la estructura de* $\mathcal{T}_X$ *resulta ser el verdadero entendimiento de* X[368]. En el lenguaje lleno de imágenes de Grothendieck:

366 La generalización de Riemann-Roch [**1955-57**] ya proponía un entendimiento arquetípico del género (invariante topológico) y de la "armonía meroforma" (invariante algebraico) de una superficie, a partir de una "desviación de conmutatividad" universal en los grupos de la K-teoría y de la homología.

367 Veremos repetidas veces en *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y en *La clef des songes* [**1987**] cómo una mirada ingenua, fresca, candorosa, infantil, es imprescindible para Grothendieck.

368 El *método general* resulta a su vez fascinante: para entender un ente dado, tómense todas las perspectivas (puntos de vista) sobre el ente, y búsquense los acuerdos estructurales entre esas diversas perspectivas. Desde un punto de vista filosófico, esto introduce una fundamental *dimensión semiótica* en el conocimiento (vía interpretantes ligados a puntos de vista), así como una *relativización* multidimensional abierta, pero no cae en el *relativismo* extremo del "todo vale" (o de la validez arbitraria de cualquier punto de vista), pues lo esencial consiste en encontrar la *estructura invariante* que subyace a la variación de las perspectivas. Para desarrollos de estas ideas, ver nuestro *Capítulo 19* abajo.

> Consideremos el conjunto formado por *todos* los haces sobre un espacio (topológico) dado, o, si se quiere, ese arsenal prodigioso formado por todos los "metros" que sirven para recorrerlo [*nota al pie*: haces de conjuntos que creo haber sido el primero en trabajar sistemáticamente, a partir de 1955 en la Universidad de Kansas]. Consideramos ese "conjunto" o "arsenal" provisto con su estructura más evidente, que aparece "a pronta vista" [*à vue de nez*]: a saber, una estructura de "categoría". (...) Es esta suerte de "superestructura de recorridos", llamada "categoría de haces" (sobre el espacio considerado), la que será considerada en adelante como aquella que "encarna" lo más esencial del espacio. Se trata de una cosa lícita (para el "buen sentido matemático"), ya que se puede "reconstituir" completamente un espacio topológico [*nota al pie*: en realidad, un espacio "sobrio" (...) lo que incluye en particular todos los espacios "separados" queridos por los analistas] a partir de esa "categoría de haces" asociada (o de ese arsenal de recorridos) [**1983-86**, P.38-39][369].

El doble proceso diferencial (*multiplicidad*, todos los haces) e integral (*unidad*, topos) que emerge en la ampliación general de la noción de espacio, ocurre también en los entornos del mundo *étale*. Desde la *perspectiva de los haces*, se contraponen (diferencian) la continuación analítica de Riemann y los grupos abelianos de Galois, las variedades analíticas y las variedades algebraicas, los anillos de funciones meromorfas y los anillos de enteros

[369] En una página preparatoria a este párrafo, Grothendieck sitúa su *genealogía espiritual* en lo que respecta a los haces: "Nuestra concepción de los invariantes cohomológicos se enriqueció y renovó profundamente con los trabajos de *Jean Leray* (realizados en cautiverio en Alemania, durante la guerra, en la primera mitad de los años cuarenta). La idea novadora esencial era aquella de *haz* (abeliano) sobre un espacio, al cual Leray asocia una sucesión de «grupos de cohomología» correspondientes (llamados «a coeficientes en ese haz»). Era como si el buen viejo «metro cohomológico» estándar del cual se disponía hasta el momento para «recorrer» un espacio, se hubiese visto de pronto multiplicado por una multitud inimaginablemente grande de nuevos «metros» de todos los tamaños, formas y substancias imaginables, cada uno íntimamente adaptado al espacio en cuestión, ofreciendo cada uno informaciones de precisión perfecta, y que sólo él podía otorgar. Fue esa la idea maestra de una transformación profunda en nuestra aproximación de los espacios de todo tipo, y con seguridad una de las ideas más cruciales aparecidas a lo largo del siglo. Gracias sobre todo a los trabajos ulteriores de Jean-Pierre Serre, las ideas de Leray tuvieron como primeros frutos, a lo largo del decenio siguiente a su aparición, una reactivación impresionante en la teoría de los espacios topológicos (alrededor notoriamente de sus invariantes llamados «de homotopía», íntimamente ligados a la cohomología), y otra reactivación, no menos capital, de la geometría algebraica llamada «abstracta» (con el artículo fundamental "FAC" de Serre [Serre, "Faisceaux algébriques cohérents"] aparecido en 1955). Mis propios trabajos en geometría, a partir de 1955, se sitúan en continuidad con esos trabajos de Serre y, por tanto, con las ideas novadoras de Leray" [**1983-86**, P.36-37].

algebraicos, y se armonizan (reintegran) alrededor de los *esquemas* vía los espectros primos de anillos conmutativos unitarios arbitrarios. En esa línea, la definición *negativa* de morfismo *étale* (no singular, no ramificado) apunta a la idea de una buena descomposición de los ideales en las fibras, en entornos separables (sin raíces múltiples, Galois) y lisos (sin puntos de ramificación, Riemann). Por otro lado, desde la perspectiva de las *topologías de Grothendieck*, se contraponen (diferencian) los recubrimientos de un objeto según los teoremas de representación de Riemann (funtores representables) y los operadores de clausura según la teoría de Galois (adjunciones), y se armonizan (reintegran) alrededor de los *topos* vía la estructura interna (teoremas de Giraud) de las categorías de haces. En esa línea, la definición de la *topología étale*, a través de cubrimientos con morfismos *étales*, apunta a una suavización intrínseca general del ambiente[370], hasta producir el *topos étale de un esquema* (ver *Sección 8.3* abajo), una de las claves estructurales centrales en el camino arduo y extenso de la resolución de las conjeturas de Weil.

De esta manera, las *mareas*[371] *van inundando sistemáticamente* los diversos problemas a los que se aboca Grothendieck: espacios de distribuciones sumergidos en espacios nucleares (*Tesis* [**1949-53**]), espacios de Hilbert sumergidos en espacios de Banach (*Résumé* [**1953c**]), la homología sumergida en las categorías abelianas (*Tôhoku* [**1955-56**]), Riemann-Roch sumergido en la K-teoría (*Rapport* [**1955-57**]), las conjeturas de Weil sumergidas en los topos *étales*[372] (*SGA* [**1960-69**]), y así sucesivamente: las cohomologías sumergidas en los motivos (*Motifs* [**1968**], *Capítulo 9* abajo), el grupo de

370 Para citas de Grothendieck sobre el entronque natural de estos conceptos, ver nuestra *Sección 5.3* arriba.

371 Ver la metáfora de la nuez y la marea en *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo.

372 Siguiendo esta metodología, Alain Connes ha sumergido la *hipótesis de Riemann* en su *topos aritmético*, A. Connes y C. Consani. *The Arithmetic Site*. 2014. Independientemente del éxito de la empresa (problemática aún abierta en 2018), la táctica de suavización es extraordinaria, y da lugar a una multitud de nuevas estructuras (vía campos de característica uno, geometría tropical, puntos globales en el topos y fórmulas de trazas) en la frontera entre lo discreto y lo continuo.

Grothendieck-Teichmüller y los espacios *moduli* sumergidos en la geometría anabeliana (*Longue marche* [**1981**], *Capítulo 10*), los tipos de homotopía sumergidos en los n-grupoides (*Stacks* [**1983**], *Capítulo 11*), las superficies de Riemann sumergidas en los dibujos de niños (*Esquisse* [**1984**], *Capítulo 12*), las conexiones entre homología y homotopía sumergidas en los derivadores (*Dérivateurs* [**1991**], *Capítulo 13*). La *extraordinaria coherencia* del pensamiento grothendieckiano resulta patente en la distribución metódica de su obra.

8.3 Ejemplo detallado: topos

SGA4.1 es el lugar del Seminario[373] donde emergen por vez primera los topos[lxxxvi]. En la exposición II, *Topologies et faisceaux* (por Verdier), aparece la definición de (lo que luego se llamará) “topología de Grothendieck”. Una *topología* sobre una categoría $\mathcal{C}$ consiste en darse, para cada objeto X en $\mathcal{C}$, un conjunto $J(X)$ de *cribas*[374] de X, bajo tres axiomas: *(i)* estabilidad por cambio de base (para todo objeto X en $\mathcal{C}$, toda criba $R \in J(X)$ y todo morfismo $f : Y \to X$ en $\mathcal{C}$, la criba pullback $R \times_X Y$ pertenece a $J(Y)$), *(ii)* localidad

[373] “Las exposiciones I a VI retoman la teoría de haces desde el punto de vista de los sitios, o mejor, de los topos, completando el Seminario Artin (Harvard) en numerosos puntos. La presentación y los resultados no contenidos en el Seminario Artin se deben en lo esencial a J. Giraud y J.L. Verdier. Las exposiciones VII y VIII desarrollan las primeras definiciones y propiedades relativas a la topología *étale* y a la cohomología *étale*” [**1960-69**, 4.1.xv].

[374] En una categoría arbitraria, una *criba* es una subcategoría plena, cerrada bajo morfismos a izquierda. Las cribas pueden identificarse con subobjetos en la categoría dual [**1960-69**, 4.1.20].

[lxxxvi] Como hemos indicado previamente, las ideas vienen desde 1958. Las elaboraciones técnicas posteriores corresponden a fechas precisas: “Históricamente, las topologías de Grothendieck fueron definidas primero en términos de familias recubridoras en el otoño 1961, mientras Grothendieck efectuaba una visita a Harvard. En la primavera 1962, Michael Artin animó un Seminario consagrado a esta nueva noción. En una exposición de mayo 1963, en el marco del *Seminario Bourbaki*, Giraud introdujo la noción de criba y dio la nueva definición de topología de Grothendieck que terminó por imponerse”, M. Bélanger. “Grothendieck et les topos : rupture et continuité dans les modes d’analyse du concept d’espace topologique”. Tesis doct. Université de Montréal, 2010, p. 181.

(para todas R, R' cribas de X, si $R \in J(X)$ y para todo $Y \to R$, $R' \times_X Y \in J(Y)$, entonces $R' \in J(X)$), *(iii)* identidad (para todo X objeto de $\mathcal{C}$, $X \in J(X)$) [**1960-69**, 4.1.219][XLIX]. A partir de aquí, "una categoría $\mathcal{C}$ provista con una topología se llama un *sitio*" [**1960-69**, 4.1.221]. El siguiente paso consiste en considerar los *haces sobre un sitio*: proceso *natural* de abstracción, generalización, universalización, suavización, de la noción *central* de haz dentro del programa grothendieckiano. Dado un sitio cuya categoría subyacente $\mathcal{C}$ vive en un universo U dado[375], un prehaz $F : \mathcal{C}^{op} \to (U)Con$ es un *haz* si, para toda criba R que cubre a $X \in \mathcal{C}$, $Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, F) \sim Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(R, F)$[376] [**1960-69**, 4.1.223]. De esta manera, los haces adquieren una *vida geométrica nueva* en entornos puramente asociados a teoremas de representación. Las diversas topologías sobre una categoría dan cuenta de esas representaciones[377], y el estudio sistemático de la categoría $\widetilde{\mathcal{C}}$ de todos los haces sobre un sitio (lo que luego se llamará "topos de Grothendieck") se convierte en objetivo central de *SGA4.1*.

375 Grothendieck (bajo el nombre Bourbaki) introduce un *universo* como un conjunto cerrado bajo pertenencia transitiva, pares, potencia y uniones [**1960-69**, 4.1.185]. Con un par de universos encajados (postulado equivalente a la existencia de cardinales inaccesibles, ver arriba p. 226) se eliminan los problemas de fundamentación para categorías "grandes".

376 $\widehat{\mathcal{C}}$ es la categoría de *prehaces* $\mathcal{C}^{op} \to (U)Con$, y $\widetilde{\mathcal{C}}$ denota la categoría de *haces*, "dependiendo del humor de la máquina de escribir" [**1960-69**, 4.1.224]. Algunos apuntes irónicos surgen a veces en medio de los escritos...

377 Por ejemplo, la "topología canónica" en $\mathcal{C}$ se define como la topología más fina para la cual los *funtores representables* son haces. "Para casi todos los sitios que hemos utilizado, la topología es *menos fina* que la topología canónica, es decir los funtores representables son haces" [**1960-69**, 4.1.226].

XLIX En términos de morfismos, una topología de Grothendieck consiste en darse, para cada objeto de la categoría, una noción de *cubrimiento* de tal manera que *(i)* pullback de cubrimiento es cubrimiento, *(ii)* cubrimiento de cubrimientos es cubrimiento, *(iii)* la identidad es cubrimiento. *Se trata de una idea muy simple, que expresa una forma de localización topológica de manera completamente natural dentro de la matemática relativa grothendieckiana.* Debe eliminarse por tanto cualquier tipo de prejuicio (supuestas dificultad, opacidad, vacuidad) en el ámbito de esta "abstracción" topológica. El gran interés de esta *lectura sintética de la topología* consiste en *refinar* las topologías usuales de la aritmética (tipo topología de Zariski) y construir aquellas *topologías de Grothendieck más finas* (*étale*, *l*-ádica, cristalina, etc.) que permiten dar cuenta de cálculos específicos cohomológicos dentro de la aritmética. Pero yendo aún más allá de esta situación, la *topología de la doble negación* en un topos elemental (axiomatización en primer orden de la noción de topos de Grothendieck, Lawvere 1970) exhibe el enorme *poder lógico* de los topos, cuya lógica interna resulta ser en general *intuicionista y no clásica*. La topología de la doble negación (diferente de la identidad, "*no-no*" no equivale a "sí") se ha usado para diversos tipos de pruebas de independencia (Freyd 1980) en teoría de conjuntos.

Un teorema de comparación fundamental consiste en asegurar que, dado un sitio $\mathcal{C}$, la inclusión $\widetilde{\mathcal{C}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ de haces en prehaces admite un *adjunto a izquierda* [**1960-69**, 4.1.234], con lo que se obtiene un *proceso natural y universal de hacificación.* A partir de la exactitud a izquierda del adjunto, "las propiedades de exactitud de la categoría de haces se deducen de las propiedades de exactitud de la categoría de prehaces"[378] [**1960-69**, 4.1.235], y se abren las puertas para un tratamiento axiomático de los topos de Grothendieck. En efecto, como se indica a inicios de la exposición IV, *Topos* (por Grothendieck y Verdier),

> Resulta que todas las nociones verdaderamente importantes ligadas a un sitio (por ejemplo, sus invariantes cohomológicos estudiados en la exposición V, diversos otros invariantes "topológicos", como los invariantes de homotopía estudiados recientemente por M. Artin y B. Mazur, y las nociones estudiadas en el libro de J. Giraud sobre la cohomología no conmutativa) se expresan de hecho directamente en términos del topos asociado. En esta óptica, conviene mirar dos sitios como esencialmente equivalentes cuando sus topos asociados son categorías equivalentes, y considerar que darse un sitio (al menos en el caso, sobre todo importante en la práctica, en el que su topología es menos fina que la topología canónica) corresponde a darse un topos $\mathcal{E}$ (a saber, el topos asociado, formado por los haces de conjuntos sobre el sitio) y una familia generadora de elementos de $\mathcal{E}$. Este punto de vista es análogo a aquel que consiste en asociar un grupo a un sistema de generadores y de relaciones entre esos generadores, y dirigir el interés más bien a la estructura del grupo que al sistema de generadores y de relaciones que sirvieron para generarlo (...) En la presente exposición, ofrecemos una caracterización (debida a J. Giraud) de los topos por propiedades de exactitud simples (...) Se puede por tanto decir que la noción de topos, derivado natural del

[378] Por ejemplo, epi + mono = iso [**1960-69**, 4.1.236], las relaciones de equivalencia son efectivas [**1960-69**, 4.1.237], los límites proyectivos finitos y las sumas directas son representables [**1960-69**, 4.1.249], existe una familia generadora [**1960-69**, 4.1.251], etc. Por otro lado, Grothendieck y Verdier explican algunas correlaciones con el *Tôhoku* [**1955-56**]: con restricciones en universos apropiados, si A es un haz de anillos y $\widetilde{\mathcal{C}}_A$ es la categoría de haces de A-módulos unitarios sobre un sitio $\mathcal{C}$, entonces $\widetilde{\mathcal{C}}_A$ es una categoría abeliana que verifica (AB5) y (AB3), posee una familia de generadores y posee suficientes inyectivos (aunque, en general, no admite suficientes proyectivos) [**1960-69**, 4.1.260-262]. La construcción anterior se generaliza para una "especie de estructuras" γ, y la categoría asociada $\widetilde{\mathcal{C}}_\gamma$ provee un entorno adecuado para hablar de *haces de estructuras arbitrarias* [**1960-69**, 4.1.258-260]. Se trata de una interesante anticipación del entorno categórico general cuya *lógica de haces de estructuras* (Caicedo 1995) contiene las claves de algunos de los teoremas esenciales de la teoría de modelos (ultraproductos, completitud, forcing, omisión de tipos, etc.): ver X. Caicedo. "Lógica de los haces de estructuras". En: *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 19.74 (1995), págs. 569-586.

> *punto de vista de los haces* en Topología, constituye a su vez una ampliación substancial de la noción de espacio topológico, al englobar un gran número de situaciones que antes no eran consideradas como propias de la intuición topológica. La característica de estas situaciones es que se dispone de una noción de "localización", noción formalizada precisamente por la noción de sitio y, en último análisis, por la noción de topos (vía el topos asociado al sitio). Como el término "topos" debe precisamente sugerirlo, a los autores del presente Seminario les parece razonable y legítimo considerar que el objeto de la Topología es el estudio de los *topos* (y no solamente de los espacios topológicos) [**1960-69**, 4.1.299-301].[lxxxvii]

Un *topos* (dentro de un universo U dado) es "una categoría $\mathcal{E}$ tal que existe un sitio $\mathcal{C} \in U$ tal que $\mathcal{E}$ sea equivalente a la categoría $\widetilde{\mathcal{C}}$ de los U-haces de conjuntos sobre $\mathcal{C}$" [**1960-69**, 4.1.302]. El *teorema de Giraud* expresa diversas propiedades equivalentes para presentar los topos: *(i)* $\mathcal{E}$ es un U-topos, *(ii)* $\mathcal{E}$ verifica (a) los límites proyectivos finitos son representables, (b) las sumas directas indexadas por un elemento de U son representables, disyuntas y universales (estables bajo cambios de base), (c) las relaciones de equivalencia son efectivas (representables vía conúcleos) y universales, (d) existe una familia generadora indexada por un elemento de U, *(iii)* los U-haces sobre $\mathcal{E}$ para la topología canónica son representables y $\mathcal{E}$ posee una familia generadora pequeña, *(iv)* existe una categoría $\mathcal{C} \in U$ y un funtor pleno y fiel $i : \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{C}}$ que admite un adjunto a izquierda que es exacto a izquierda [**1960-69**, 4.1.303]. De esta manera, los topos poseen propiedades notables,

---

lxxxvii Según Belanger, "En virtud del teorema de Giraud, el carácter espacial de una categoría no se encuentra por tanto ligado a la construcción de un sitio, sino más bien a la satisfacción de propiedades de exactitud. El carácter topológico encarna más bien en propiedades de exactitud, de tamaño y de existencia. En resumidas cuentas, una categoría puede ser un espacio en buena forma aún si no tiene ningún carácter topológico, o aún espacial. El teorema de Giraud confirma así la prerrogativa de los topos sobre los sitios. Resulta de ahí una transformación radical del concepto de espacio topológico. Primero, los topos invierten la relación dialéctica entre un espacio y sus puntos, en vigor en el marco tradicional. Desde una perspectiva puntillista, la estructura de espacio topológico depende de los puntos y de los subconjuntos del conjunto subyacente. Los puntos, considerados como átomos, son anteriores al espacio en la medida en que su organización es la que da lugar a una topología sobre el conjunto, la que permite definir una tal estructura sobre el conjunto. Los topos rompen con esta concepción, según la cual un espacio es un conjunto de puntos, puesto que no están determinados por sus partes. (...) Segundo, la concepción de la topología que da lugar a los topos hace que muchas situaciones que van más allá de los espacios topológicos tradicionales puedan ser calificadas como espaciales. La extensión del concepto de espacio es por tanto mucho más amplia desde el punto de vista de los topos que desde el punto de vista de los espacios topológicos tradicionales", Bélanger, óp.cit., pp. 194-195, 196-197.

tanto en niveles internos (*(ii)* exactitud, *(iii)* canonicidad), como externos (*(i)* hacificación, *(iv)* adjunción), que los tornan extremadamente *estables*[379].

Después de la prueba del teorema de Giraud (cuyos argumentos principales giran alrededor de controles de tamaño y de representaciones ligadas a condiciones de exactitud) [**1960-69**, 4.1.304-306], Grothendieck y Verdier proveen una extensa lista de *ejemplos de topos*, "destinados a facilitarle al lector el acceso al «yoga» de los topos" [**1960-69**, 4.1.311-322]. La variedad de las situaciones cubiertas muestra cómo el programa abarca con toda naturalidad las regiones comunes a los conjuntos, el álgebra y la topología, y cómo las técnicas introducidas acercan indisolublemente el número y la magnitud: topos asociado a un espacio topológico[380], topos puntual o final y topos vacío o inicial[381], topos asociado a un espacio de operadores[382], topos clasificador de un grupo[383], "*gros* sitio" y "*gros* topos"

---

379 Acudiendo a diversos ejemplos (pegamiento de topos, topos clasificador, "topos modular"), Grothendieck señala que se tienen indicaciones "de la estabilidad notable de la noción de topos a lo largo de diversas construcciones naturales, estabilidad que falla en el caso de la noción de espacio topológico" [**1960-69**, 4.1.300-301]. Así, una estabilidad estructural superior se conecta admirablemente con una suavización abstracta, allende la topología clásica usual. Por otros caminos, la *topología moderada* que emergerá en la *Esquisse* [**1984**] buscará también proveer una estabilidad que falla en los contraejemplos conjuntistas artificiales propios de la topología de puntos. Ver nuestro *Capítulo 12* abajo.

380 Topos de haces $Top(X)$ sobre el retículo de abiertos de un espacio topológico X, "equivalente a la categoría de los espacios topológicos *étalés* por encima de X" [**1960-69**, 4.1.311]. No debe confundirse aquí *étalé* con *étale*, extremos del péndulo como hemos indicado (y que retomaremos como tema central en la obra de Grothendieck, ver nuestros *Capítulos 16, 17* abajo), pero que varios especialistas grothendieckianos aún siguen confundiendo (*e.g.* Belanger, ibíd., pp. 189-190).

381 Topos puntual: categoría de conjuntos; topos vacío: categoría de conjuntos unitarios [**1960-69**, 4.1.313].

382 Topos de G-haces sobre X (X espacio topológico, G grupo discreto actuando sobre X), es decir, haces sobre X con operaciones de G compatibles con la acción [**1960-69**, 4.1.314]. Se trata de una construcción aparecida en el *Tôhoku* [**1955-56**]. Un caso particular es el topos de acciones de G sobre conjuntos, denotado B_G; Grothendieck indica que si G no es trivial, B_G es un topos no equivalente a los "topos topológicos" $Top(X)$ [**1960-69**, 4.1.314]. En los años setenta, dentro de los *topos elementales* de Lawvere, se mostrará que, si se extiende la construcción a un monoide M, B_M es un *topos booleano* (*i.e.*, posee una lógica clásica) si sólo si M es grupo: las acciones de un monoide arbitrario poseen una lógica intrínseca intuicionista y no clásica en general.

383 Topos B_G construido abstrayendo la situación anterior, al considerar los *objetos de un topos* $\mathcal{E}$ sobre los cuales el grupo G opera [**1960-69**, 4.1.315]. "La terminología adoptada se justifica por el hecho de que

de un espacio topológico[384], topos de la forma $\widehat{\mathcal{C}}$ [385], topos clasificador de un pro-grupo[386], "falso" topos[387]. Los ejemplos confirman así una verdadera extensión de la noción de espacio, donde alcanza a cristalizarse con gran precisión un paso profundo de lo puntual a lo estructural[lxxxviii].

B_G juega un papel universal para la clasificación de los «torsores» (o fibrados principales homogéneos) bajo G (...) B_G juega, en el contexto de los topos, el mismo papel que los espacios clasificadores clásicos de los grupos topológicos juegan en la teoría homotópica de los espacios topológicos" [**1960-69**, 4.1.315]. Para una continuación aún mucho más amplia y universal de estas ideas, ver los *Dérivateurs* [**1991**], nuestro *Capítulo 13* abajo.

384 *Gros* sitio: categoría $(Esp)/X$ de espacios topológicos por encima de un espacio topológico X, con cubrimientos dados por familias sobreyectivas de inmersiones abiertas $u_i : X_i \to X$; dado un universo U, el *gros* sitio no pertenece a U (de ahí el nombre *gros* = grueso, grande) y se requieren un par de universos $U \in V$. *Gros* topos: topos asociado ($\in V$) al *gros* sitio [**1960-69**, 4.1.316]. Con esto, "*un espacio X' sobre X se conoce, módulo X-isomorfismo, cuando se conoce el haz que define*; por tanto la noción de haz sobre (el *gros* sitio de) X puede ser considerada como una *generalización* de aquella de espacio topológico por encima de X, gracias a la cual todas las construcciones de la teoría de haces adquieren sentido para los espacios topológicos sobre X" [**1960-69**, 4.1.317].

385 Topos de prehaces que son haces con la topología "caótica" (o grosera, donde los cubrimientos se reducen al espacio: $J(X) = \{X\}$ [**1960-69**, 4.1.221]). Se trata de topos generados por familias pequeñas de objetos conexos proyectivos, lo que los distingue también de los topos de la forma $Top(X)$ [**1960-69**, 4.1.318-319].

386 Topos del tipo B_G en el caso de un sistema proyectivo de grupos $G = (G_i)$ actuando sobre conjuntos; caso particular esencial cuando $G = limG_i$ es un pro-grupo, o grupo profinito (grupo topológico compacto totalmente disconexo, límite de grupos finitos) [**1960-69**, 4.1.319-320]. La "intuición geométrica correcta de estos topos" se obtiene al considerar el *grupo fundamental* G en $x \in X$ (X espacio topológico con formas locales de conexidad): entonces "la teoría de Galois de los recubrimientos de X provee una equivalencia entre la categoría B_G y la categoría de los *recubrimientos étales* de X" [**1960-69**, 4.1.320-321]. De esta manera concluye y se cifra, en los *topos clasificadores de los pro-grupos*, todo un ciclo del entendimiento alrededor de Galois y Riemann.

387 Categoría de conjuntos de la forma B_G, para un pro-grupo estricto ($G_i \to G_j$ no isos) indexado por un conjunto I tal que $card(I) \notin U$; falla allí el criterio interno de pequeñez (d) en el teorema de Giraud [**1960-69**, 4.1.322].

lxxxviii Otro ilustrativo ejemplo posterior (Barr 1974) consiste en observar el topos de haces sobre un álgebra de Heyting. Si A es un álgebra de Heyting (modelo natural para la lógica intuicionista, paralelo de las álgebras de Boole para la lógica clásica) y si $a \in A$, el conjuntos de *cribas* sobre a se define por $Crib(a) = \{S \subseteq (a], S \text{ cerrado bajo } \leq\}$; A (conjunto ordenado) puede verse como una categoría $\mathcal{A}$ y una topología de Grothendieck en $\mathcal{A}$ puede definirse mediante los cubrimientos $J(a) = \{\text{cribas } S : supS = a\}$. Entonces los puntos del topos de haces $\widetilde{\mathcal{A}}_J$ están en correspondencia con los átomos de A y, por tanto, si A no posee átomos $\widetilde{\mathcal{A}}_J$ es un topos no vacío que no posee puntos. Ver Belanger, ibíd., p. 195.

Una de las construcciones centrales de *SGA*, donde se integran[388] los esquemas, el mundo *étale* y los topos, ocurre en la exposición VII de *SGA4.2*, *Site et topos étale d'un schéma* (por Grothendieck). Dado un universo U, (Esq) denota la categoría de esquemas[389] que viven en U, y la *topología étale* sobre (Esq) se define, para cada $X \in (Esq)$, como aquella generada por los cubrimientos $(u_i : X_i \to X)_{i \in I}$ (indexados por $I \in U$) donde los u_i son *étales* y $X = \bigcup_i u_i(X_i)$; si Et/X es la subcategoría de $(Esq)/X$ formada por los morfismos *étales* $X' \to X$, la topología inducida en Et/X por la topología *étale* en (Esq) se llama "topología *étale* sobre X" y $X_{\text{ét}}$ denota el sitio así obtenido (*sitio étale* de X); finalmente, el topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ de U-haces sobre $X_{\text{ét}}$ es el *topos étale* de X [**1960-69**, 4.2.343].

Después de algunos resultados de comparación entre sitios y topos *étales* [**1960-69**, 4.2.344-346], Grothendieck pasa a contrastar diversas topologías en (Esq), y por tanto en $(Esq)/X$: topología de Zariski $<$ topología *étale* $<$ topología canónica $<$ topología *fpqc* (donde $<$ significa "menos fina") [**1960-69**, 4.2.347, 4.2.353]. La comparación particular de las topologías de Zariski y *étale* es instructiva: si X_{Zar} designa el sitio de Zariski, se tiene una inclusión canónica $X_{\text{Zar}} \hookrightarrow X_{\text{ét}}$, y por tanto un morfismo de sitios $u : X_{\text{ét}} \to X_{\text{Zar}}$, que permite definir los funtores $u_* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widetilde{X_{\text{Zar}}}$ (imagen directa, $u_*(F) = F \circ u$) y $u^* : \widetilde{X_{\text{Zar}}} \to \widetilde{X_{\text{ét}}}$ (imagen inversa, vía pullbacks). Las imágenes directa e inversa resultan ser dos funtores adjuntos entre sí (lo que luego se llamará *morfismo geométrico*), a partir de los

[388] La construcción ocurre en un entorno *doblemente integrador*, propio de la matemática relativa, donde *dos niveles* de morfismos –*en el* topos (internalidad) y *entre* topos (externalidad)– proporcionan una riqueza geométrica adicional. Para Grothendieck, "El hecho de que los U-topos (elementos de un universo U) forman una 2-categoría, y no solo una categoría ordinaria como los espacios topológicos ordinarios, es el que constituye desde un punto de vista técnico la diferencia más importante entre la teoría de los topos y la teoría de los espacios topológicos. Este hecho es la fuente de algunas complicaciones técnicas a las que hemos aludido, pero también de hechos esencialmente nuevos con respecto a la topología tradicional" [**1960-69**, 4.1.331]. La continuación de estas ideas llevará a las n-categorías y los *Stacks* [**1983**], nuestro *Capítulo 11* abajo.

[389] Los paréntesis en (Esp) y en (Esq) –(Sch) en el original– parecen recordar que se trata de categorías con problemas de tamaño, que pueden eliminarse (como se eliminarían los paréntesis) al restringirse a adecuados universos.

cuales surge un homomorfismo de funtores cohomológicos $H^*(X_{\text{Zar}}, u_*(F)) \to H^*(X_{\text{ét}}, F)$, cuya sucesión espectral permite resolver un buen número de cálculos cohomológicos [**1960-69**, 4.2.354-355]. Vemos así cómo la gran maquinaria grothendieckiana se asemeja a un reloj de precisión donde todo encaja perfectamente[390], con un *continuo natural* de ideas en el periodo 1955-1963.

390 Según Lawvere (2015), "el trabajo de Grothendieck iluminó y avanzó el trabajo de Cantor, Grassmann, Volterra, Hausdorff, Hurewicz, Galois, Kan, Eilenberg & Mac Lane, e inspiró a toda nuestra comunidad; continuará a inspirar y guiar el trabajo de las generaciones futuras", Lawvere, óp.cit., p. 8.

9

Standard conjectures on algebraic cycles (1968)

A mediados de los años 1960, Grothendieck empieza a vislumbrar un "sueño", donde una forma común pretende unificar las diversas cohomologías (los "instrumentarios más potentes del siglo"), tanto clásicas como propias del *Seminario SGA* [**1960-69**], que han emergido hasta el momento. Se trata de la teoría de *motivos*, donde un motivo (unidad) permite representar diversas cohomologías (multiplicidad). La línea de desarrollo *esquemas* $\rightarrow$ *topos* $\rightarrow$ *motivos* condensa los aportes mayores de la década de los sesenta. Contrariamente a su costumbre, Grothendieck publicó poco sobre los motivos (aunque escribió mucho [**IMAG**]), y nos concentraremos aquí en una de sus expresiones decantadas, el artículo *Standard conjectures on algebraic cycles* [**1968**], así como en otro manuscrito de mediados de los sesenta, *Motifs* [**1967**]. Poco a poco, los trabajos de la escuela rusa fueron luego construyendo *casos* particulares y axiomatizando adecuadas *categorías* de motivos, hasta concretar 30 años después fragmentos del sueño grothendieckiano.

9.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Pendularmente con las labores de extremo detalle arquitectónico en *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**], Grothendieck propone la *teoría de motivos* como una visión difusa, *especulativa* y *programática.* El carácter abierto e inacabado de la empresa presagia la necesidad de *nuevos aires* en la actividad intelectual de Grothendieck, que terminarán inscritos en su vida misma, a partir de la ruptura[391] con el *IHES* (ver nuestra *Parte III* abajo). En *Récoltes et semailles*, Grothendieck recuerda los inicios de los motivos:

> [Nota al pie: Despejé estos temas [topos, cohomología *étale* y *l*-ádica, motivos, cristales] progresivamente entre 1958 y 1966] [**1983-86**, P.30].
>
> (...) me parece aún el tema más profundo que he introducido en matemáticas: el tema de los motivos (él mismo nacido del “tema cohomología *l*-ádica”). [Nota al pie: Es el tema más profundo, al menos en el periodo “público” de mi actividad como matemático, entre 1950 y 1969, es decir hasta el momento de mi partida del escenario matemático. Considero el tema

[391] Otra ruptura con Bourbaki había surgido en 1960, cuando Grothendieck renunció al grupo, a los 32 años, mucho antes de los 50 estipulados por el reglamento. La carta de renuncia reza así (ver el original reencontrado por William Messing, W. Messing. “Alexandre Grothendieck 1928-2014, Part 2”. En: *Notices AMS* 63.4 (2016), págs. 405-407, p. 406): “París, 9.10.1960. – A Mr. Nicolas Bourbaki – Señor y querido Maestro, – Le agradezco su carta, marcada a la vez con sabiduría y mansedumbre. Parece vano en efecto que una diferencia personal pueda ser la ocasión de la partida de un discípulo. Reconozco que era vano que yo esperase del Maestro que arbitrara una disputa que no le concierne, y que un tal arbitraje no podía resolver nada. – Me pregunté varias veces a lo largo de los años de mi colaboración con el Maestro si mis costumbres poco sociables, mi carácter apasionado y mi repugnancia en vencer las repugnancias ajenas, me tornaban no apto para colaborar fertilmente en los congresos. Sin querer buscar otra causa más que en mí mismo, pienso ahora que así es, y que alcancé antes de la edad tradicional el momento en el que serviré mejor al Maestro con mi partida, más que permaneciendo bajo sus amigables instancias. – Me esforzaré en seguir siendo digno de las enseñanzas que Usted me ha prodigado durante tanto tiempo y en no traicionar el espíritu del Maestro, que, espero, seguirá visible en mi trabajo como en el pasado. – Su muy devoto alumno y servidor – A. Grothendieck”. Es fácil observar cómo la *pasión*, la *diferencia* y la *renuncia a todo compromiso* tienen que ir alejando a Grothendieck de los diversos entornos sociales en los que se va insertando: Bourbaki, *IHES*, *Collège de France*... En el fondo, su carácter anárquico, su deseo de soledad, su comunión con los más desposeídos, su sensación de sufrimiento siempre prevalecen, y le hacen situarse *naturalmente* en los *bordes* de la sociedad (ver nuestra *Nota 255* arriba, p. 174).

de la geometría algebraica anabeliana y la teoría de Galois-Teichmüller, desarrollado desde 1977, como de una profundidad comparable] [**1983-86**, P.44-45].

(...) el "motivo común" (o la "*razón* común") subyacente a una multitud de invariantes cohomológicos diversos asociados a una variedad (...) es la quintaesencia de una idea infantilmente sencilla de nuevo, delicada y audaz a la vez. Desarrollé esta idea, al margen de las tareas de fundamentos que consideraba más urgentes, bajo el nombre de "teoría de motivos" o de "filosofía (o *yoga*) de los motivos", a lo largo de los años 1963-69. [Nota al pie: Expliqué mi visión de los motivos a quien quisiera escucharla, a lo largo de esos años, sin preocuparme por publicar con detalle sobre el tema (al no faltarme otras tareas que realizar al servicio de los demás)] [**1983-86**, P.47].

El yoga de los motivos nació justamente, en primer lugar, de un "yoga de pesos" [de naturaleza aritmética] que adquirí de Serre. [Nota al pie: Lo que tomé de Serre (¿comienzos de los años 60?) es una idea o intuición de partida, que me hacía comprender que ¡había algo importante por comprender! Esto actuó como un impulso inicial, provocando una reflexión que se prosiguió en los años siguientes, primero sobre un "yoga" de los pesos y luego sobre un yoga más vasto de los motivos] [**1983-86**, 2.185].

(...) yoga que desarrollé a lo largo de un periodo de cerca de diez años (...) desde 1964 desarrollé la noción de grupo de Galois motívico (...) [Nota al pie: Los comienzos de mi reflexión sobre los motivos se sitúan antes de la aparición de Deligne. Mis notas manuscritas sobre la teoría de Galois motívica están fechadas en 1964] [**1983-86**, 2.211-212].

(...) me dirigí a Deligne en innumerables cara a cara entre 1965 y 1969 (...) [**1983-86**, 4.862].

Se deduce así la existencia de una *génesis de largo aliento* de los motivos, desde inicios de los años sesenta (yoga vago alrededor de los pesos aritméticos de Serre) hasta la segunda mitad de la década (largas conversaciones con Deligne[392]), pasando por un centro inventivo neurálgico en los años 1963-1964, y por las reuniones cruciales en Mayo 1967 con Manin[lxxxix], a partir de las cuales se desarrollará la teoría de motivos en la escuela rusa.

392 Grothendieck se sentirá luego "traicionado" y "enterrado" por su alumno, al no haber éste reconocido suficientemente la paternidad de su maestro sobre los motivos. Véase el final de nuestro *Resumen mínimo* abajo.

lxxxix Y. I. Manin. "Forgotten motives: the varieties of scientific experience". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait.* Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 299-307, p. 299. Manin recuerda "cinco o seis semanas de intenso entrenamiento con Grothendieck", *ibíd.*, p. 300.

Por otro lado, la primera publicación relacionada con el tema de los motivos es el artículo *Standard conjectures on algebraic cycles* [**1968**], procedente de una intervención de Grothendieck en 1968, en el Tata Institute de Bombay[393]. Según Grothendieck, las conjeturas estándar "pueden ser entendidas en dos sentidos diferentes. Ante todo, en el sentido literal, como las formulé en el Coloquio de Bombay en 1967[394]. (...) Pero mi principal motivación no se dirigía hacia los ciclos en sí mismos, sino hacia el medio que proveen (tal vez...) para edificar una teoría de motivos semisimples sobre un cuerpo" [**1983-86**, 4.1215]. En lo que sigue, nos concentraremos en el texto *Standard conjectures on algebraic cycles* [**1968**], en el manuscrito coetáneo *Motifs* [**1967**] y en las evaluaciones ulteriores de esos trabajos en *Récoltes et semailles* [**1983-86**].

Resumen mínimo.

(I). Algunos apartes principales del artículo *Standard conjectures on algebraic cycles* [**1968**] son los siguientes (los números entre paréntesis cuadrados corresponden a las páginas de la publicación).

"Enunciamos dos conjeturas sobre ciclos algebraicos que surgieron de un intento por entender las conjeturas de Weil (...) trabajadas hace tres años" – "La primera (...) formalmente análoga al teorema de estructura de Lefschetz (...) la segunda formalmente análoga a las famosas desigualdades de Hodge" [193]. Correlaciones de las conjeturas con acciones naturales del endomorfismo de Frobenius [194]. Motivación algebraico-aritmética y forma débil $C(X)$ de la primera conjetura [194-195].

393 Una bella fotografía del momento muestra a Grothendieck discutiendo con Armand Borel, parado, con un muy elegante traje y... con los pies descalzos sobre la hierba...

394 Esta es una confusión de Grothendieck: el encuentro se realizó en 1968 y los *Proceedings* se publicaron en 1969. En otros pasajes de *Récoltes et semailles* se refiere sin embargo a la fecha correcta, 1968 [**1983-86**, 3.467, 3.769].

Primera conjetura: $A(X)$ (isomorfismo dual entre grupos de cohomología de una variedad X suave y proyectiva – generaliza prueba de Lefschetz para el caso de los complejos), $B(X)$ (algebraicidad de adecuada operación en la teoría de Hodge), prueba de la equivalencia entre $A(X)$ y $B(X)$ [196]. "Estabilidad" de $B(X)$, integralidad de los coeficientes de la función Zeta a partir de la conjetura B – "Tengo una idea para una posible aproximación a la conjetura B" [197].

Segunda conjetura: $Hdg(X)$ (adecuada forma bilineal restringida a ciclos algebraicos es definida positiva) – indicación de prueba de que "$B(X)$ y $Hdg(X)$ implican, por ciertos argumentos de Weil y Serre (...) todas las conjeturas de Weil" [197].

"Conclusiones. La prueba de las dos conjeturas estándar produciría resultados bastante más allá de las conjeturas de Weil. Formarían la base de la así llamada «teoría de los motivos», es decir, una teoría sistemática de las «propiedades aritméticas» de las variedades algebraicas, encarnada en los grupos de clases de ciclos para equivalencia numérica. Tenemos por el momento solo una muy pequeña parte de esa teoría en dimensión uno, contenida dentro de la teoría de variedades abelianas. Al lado del problema de la resolución de singularidades, la prueba de las conjeturas estándar me parece la tarea más urgente de la geometría algebraica" [198].

(II). Algunos apartes principales del manuscrito *Motifs* [**1967**] (fecha conjetural) son los siguientes (los números entre paréntesis cuadrados corresponden a las páginas de la transcripción del manuscrito). Para detalles ver nuestra *Sección 9.3* abajo.

"Motivos - no distribuir - do not distribute" [1]. Combinación de estrategias globales y locales a la Grothendieck: categoría abeliana de "motivos efectivos" asociada a un esquema noetheriano [1], variación de la categoría de motivos de acuerdo con variación del esquema [2], caso de variación vía límite inductivo [2], comparabilidades funtoriales y compatibilidades [2], casos aritméticos [3], expansión canónica a una categoría de motivos [3], funtores Hom [4], tipos de motivos [4], filtraciones [5-6], anillos de motivos [6-8], “interpretación topológica de los tipos dimensionales” [9], “homomorfismo fundamental” entre grupos generados por esquemas de tipo finito y motivos [9-10], preguntas sobre superficies [11], caracterizaciones “galoisianas” – “conjetura de Weil/Riemann” – “conjetura de Tate” [12], “promotivo fundamental” [13], “cohomología absoluta” y “teorema de dualidad absoluto” [13-15]. Siguen otras siete páginas de cálculos y preguntas cohomológicas.

(III). Algunos apartes principales de las reflexiones sobre motivos en los primeros volúmenes de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] son los siguientes (los números entre paréntesis cuadrados corresponden, respectivamente, a páginas del *Prefacio* y del *Volumen 2*).

Prefacio (enero 1986). “Despejé, hacia el año 1968, una versión más fuerte y, sobre todo, más «geométrica» de las conjeturas de Weil” [44]. “Desarrollé esa idea (...) bajo el nombre de «teoría de motivos» o «filosofía (o yoga) de motivos» a lo largo de los años 1963-69” [47]. “El espíritu mismo de las conjeturas de Weil es expresar y captar lo «aritmético» (o lo «discreto») por la mediación de lo «geométrico» (o lo «continuo») (...) Mi reformulación consistió en despejar una suerte de «quintaesencia» (...) que llamé «conjeturas estándar» (...)” [44]. “El tema más profundo que he introducido en matemáticas es el de los motivos (él mismo nacido del «tema cohomológico l-ádico»), corazón o alma, la parte más escondida de los temas de esquemas (...) quintaesencia última (...) «corazón del corazón» de la nueva geometría” [44-45]. “(...) «motivo común» (o «razón común») subyacente a la multitud de invariantes cohomológicos diferentes asociados a la variedad (...) que serían como desarrollos temáticos diferentes, con su «tempo», «llave» y «modo» («mayor» o «menor»), a partir de un mismo «motivo de base» (llamado «teoría cohomológica motívica»)” [46]. “El motivo me parece ser el más profundo «invariante de la forma» que se ha podido asociar hasta el momento a una variedad algebraica, aparte de su «grupo fundamental motívico». Ambos invariantes representan para mí como las «sombras» de un «tipo de homotopía motívico» que faltaría por describir" [47].

Volumen 2 (abril 1986). "Los motivos: entierro de un nacimiento" [205]. Producto de "años de gestación de una visión, fina y elusiva al comienzo, que se enriquece y se precisa a lo largo de meses y años, con esfuerzos obstinados", emerge el "yoga de los motivos, como aquel de mis «huérfanos» que más cercano estaba a mi corazón" – y que sus sucesores (Deligne en particular) presentan "como salido de la nada, sin alusión de paternidad" [206]. Tres grandes sueños impulsan el desarrollo de los motivos: *(i)* "Intuición de Serre" – "misterio a sondear": grupos profinitos discretos como base de un sistema proyectivo de grupos analíticos y algebraicos [206] – "como amo soñar (...) recuerdo haber entrado en ese misterio (...) por el mero hecho de la presencia de una categoría de motivos «lisos» sobre un esquema (...) con estructuras internas similares a las de la categoría de representaciones lineales de un pro-grupo algebraico" [206-207] – "aproximación a una teoría de Galois motívica", ligada a grupos fundamentales de esquemas y al manejo de cohomologías como fibras y secciones – "recuerdo el placer y la maravilla" [207]. *(ii)* Procesos de descubrimiento: sueños, impresiones ("comentarios de Serre"), adivinanzas, coherencias, trabajo interior [208] – "filtraciones", "pesos" y comportamiento de las "seis operaciones" en la explicitación de las conjeturas estándar [209] – "nunca tuve la impresión de inventar, sino siempre de descubrir" [209]. *(iii)* "Matrimonio de los sueños precedentes" *(i, ii)* – estudio de "las diferentes estructuras suplementarias que posee la categoría de motivos", "traduciendo" hechos sobre las representaciones lineales de grupos algebraicos [209] – "polarización de un motivo" ligada a "la idea de Serre (¡siempre él!) de un análogo «kähleriano» de las conjeturas de Weil" [209-210]. Potencia de la visión, armonía, realidad, trabajo [210-211]. Desarrollo: Hilbert, Riemann, el Soñador [214], Grothendieck y alumnos (decepción con Deligne, aprecio de Saavedra) [211-214].

Descripción más extensa.

Los motivos, entendidos como *corazón del corazón* de la obra grothendieckiana, adquieren un peso enorme en las remembranzas del inventor/descubridor[395]. El *alma*, la *quintaesencia*, lo *profundo* sirven para apuntar a la eventual existencia de *motivos comunes* que gobiernan toda una multiplicidad de estructuras y de invariantes. Se conjetura así la existencia de nuevos *arquetipos* que se proyectarían sobre toda una variedad de tipos de la experiencia. Entre los arquetipos y los tipos emerge una *red mediadora*[396] de correlaciones que sostiene el "sueño" motívico, y que queda en parte plasmada en *Standard conjectures on algebraic cycles* [**1968**]. Pasamos ahora a describir en detalle este artículo.

En la Sección 1, "Introducción" [**1968**, 193-194], Grothendieck propone "dos conjeturas sobre ciclos algebraicos[397], que surgieron de un intento por entender las conjeturas de Weil sobre las funciones ζ de variedades algebraicas (...) trabajadas hace alrededor de tres años[398] independientemente por Bombieri y por mí":

> La primera es una aserción de existencia para ciclos algebraicos (considerablemente más débil que las conjeturas de Tate), y está inspirada por y es formalmente análoga al teorema de estructura de Lefschetz sobre la cohomología de una variedad proyectiva suave sobre los complejos.
>
> La segunda es un enunciado de positividad, que generaliza el conocido teorema de positividad de Weil en la teoría de variedades abelianas. Es formalmente análogo a las famosas desigualdades de Hodge, y es de hecho una consecuencia de estas en característica cero [**1968**, 193].

[395] Por otro lado, con las perspectivas actuales (2018), y gracias en particular a las reevaluaciones de Olivia Caramello y los trabajos de punta de Alain Connes, los *topos* parecen seguir siendo la mayor invención grothendieckiana. Sin embargo, esto puede deberse a un estadio de desarrollo aún preliminar del gran "sueño" sobre los motivos. *Time will tell.*

[396] Suerte de *mixtos* a la Lautman, las "conjeturas estándar" acordonan de manera precisa lo "ideal" (motivos) y lo "real" (invariantes cohomológicos).

[397] Ver *Nota XXVI* arriba, p. 127.

[398] Esto confirma un núcleo inventivo central alrededor de los motivos en los *entornos* de 1964 (es decir, entre 1963 y 1965).

Grothendieck pasa entonces a delinear las consecuencias de las dos conjeturas para una eventual resolución de las conjeturas de Weil, "cuando se aproximan a través de la cohomología l-ádica" [**1968**, 193]. El primer paso consiste en recordar la racionalidad (obtenida previamente por Artin y Grothendieck en el *SGA* [**1960-69**]) que gobierna la función Zeta Z de una variedad X con buenas propiedades (suave, proyectiva, irreducible) de dimensión n sobre un campo finito $\mathbb{F}_q$:

$$Z(t) = \frac{L'(t)}{L(t)},\ L(t) = \frac{\prod_{i=0}^{n} L_{2i}(t)}{\prod_{i=1}^{n} L_{2i-1}(t)},\ L_i(t) = \frac{1}{P_i(t)},\ P_i(t) = t^{dimH^i(\bar{X})} Q_i(t^{-1})$$

donde Q_i es el polinomio característico de la acción del endomorfismo de Frobenius[L] de X sobre $H^i(\bar{X})$, H^i designa el i-ésimo grupo l-ádico de cohomología (l primo diferente de q) y $\bar{X}$ denota la extensión de X a la clausura algebraica de $\mathbb{F}_q$ [**1968**, 193-194]. El segundo paso consiste en señalar que la primera conjetura fuerza que los P_i tengan coeficientes enteros (independientemente de $l \neq q$), y en observar ("por una idea esencialmente debida a Serre" [**1968**, 194]) que las dos conjeturas al tiempo fuerzan que los valores propios del Frobenius (es decir, los recíprocos de las raíces de los P_i) tengan valor absoluto $q^{\frac{i}{2}}$, con lo que se probarían las conjeturas de Weil[399] [**1968**, 194]. En página y media queda así concisa y limpiamente dibujado un vasto panorama, aún abierto hoy (2018) en múltiples de sus facetas.

399 El camino de prueba que adoptaría Deligne para el final de las conjeturas de Weil es completamente distinto. Grothendieck nunca aceptó esa prueba, a su modo de ver artificial, alejada del *camino natural* ofrecido por las conjeturas estándar (y, en el fondo, los motivos). Ese *descontento matemático* es una de las diversas razones, en un entramado complejo de desilusiones, que le alejaron de Deligne y de la comunidad matemática en general.

L El *endomorfismo de Frobenius* de un anillo conmutativo A de característica p es la función $F: A \to A, x \mapsto x^p$. Gracias a la característica p se tiene $(x+y)^p = x^p + y^p$ (la exponenciación ideal de los pre-universitarios...) y F resulta ser un endomorfismo. El grupo de Galois de una extensión de campos finitos está generado por una potencia adecuada del endomorfismo de Frobenius. Las acciones del Frobenius sirven para codificar profundas armonías aritméticas y geométricas. Se trata, por tanto, de un instrumento de particular atractivo para Grothendieck, sobre el que volverá muchas veces en la década de los ochenta (ver nuestra *Parte III* abajo).

La Sección 2, "Una forma débil de la conjetura 1" [**1968**, 194-195], muestra cómo, mediante cálculos de trazas de endomorfismos entre clases de cohomología, y mediante una *hipótesis adicional* sobre ciertos ciclos, puede deducirse la integralidad de los coeficientes de los P_i (independientemente de l). Si X es una variedad de dimensión n sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, con $car(k) \neq l$, y si Δ es la clase de cohomología de la diagonal en $X \times X$, Δ puede escribirse $\Delta = \sum_o^n \pi_i$ (donde las π_i son las proyecciones de Δ sobre $H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)$). Entonces, la hipótesis adicional $C(X)$ sobre ciclos, "forma débil de la conjetura 1", afirma que los π_i^l son algebraicos (y proceden de un ciclo algebraico inicial, independiente de l)[400] [**1968**, 195].

La Sección 3, "La conjetura 1 (de tipo Lefschetz)" [**1968**, 195-197], enuncia dos formas equivalentes $(A(X), B(X))$ de la conjetura 1 y las compara con la conjetura $C(X)$. Si $C^i(X)$ denota el conjunto de i-clases de cohomología de ciclos algebraicos, Grothendieck indica que se tiene (mediante proyecciones vía hiperplanos: operador de Lefschetz) un homomorfismo (*) $H^i(X) \to H^{2n-i}(X)$ $(i \leq n)$ y vale un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C^j(X) & \longrightarrow & C^{n-j}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2j}(X) & \longrightarrow & H^{2n-2j}(X). \end{array}$$

La conjetura $A(X)$ postula entonces que (*) es siempre un isomorfismo[401] y que, si $i = 2j$, (*) induce también un isomorfismo (vía el cuadrado conmutativo) a nivel de los ciclos algebraicos $C^j(X) \to C^{n-j}(X)$ [**1968**, 196].

400 Este es un ejemplo más de un ente arquetípico (ciclo inicial) que se *proyecta* sobre la variedad de los tipos (los π_i^l), de una manera *universal* (independiente de l). La superación de las apariencias diversas y el encontrar una unidad profunda detrás de lo múltiple convocan la gesta de *Moby-Dick*, como sabemos la novela preferida de Grothendieck.

401 Grothendieck señala que esto había sido establecido por Lefschetz sobre el cuerpo de los complejos, por métodos trascendentes, y que se espera que su generalización algebraica sea cierta para todas las características [**1968**, 196]. El *tránsito entre lo continuo y lo discreto* adquiere así una nueva forma de expresión.

La conjetura $A(X)$ puede presentarse de otra forma, a través de la teoría de Hodge, donde se define otro operador Λ relacionado con (*), vía elevaciones, pegamientos y proyecciones. Grothendieck enuncia entonces una conjetura $B(X)$ que postula la algebraicidad de Λ (es decir, Λ es inducido por un ciclo algebraico) [**1968**, 196], y procede a demostrar la equivalencia entre las conjeturas A y B (validez sobre todas las variedades X). En efecto, $B(X) \Rightarrow A(X)$ ya que la algebraicidad de Λ implica aquella de Λ^{n-i}, que sirve de inversa para (*); inversamente, por la definición de Λ, se tiene directamente $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$ [**1968**, 196]. Por otro lado, Grothendieck afirma que $B(X)$ es *estable* bajo productos, secciones hiperplanas, especializaciones, y que vale para el caso proyectivo, para grassmannianas y para variedades abelianas[402] [**1968**, 197]. Finalmente, $B(X) \Rightarrow C(X)$ ya que los π_i pueden ser expresados como polinomios (con coeficientes en $\mathbb{Q}$) sobre los operadores de Lefschetz y de Hodge [**1968**, 197]. Una críptica frase revela los hondos fondos del océano en los que intenta penetrar Grothendieck: "Tengo una idea para una aproximación posible a la conjetura B, que se basa a su vez sobre algunas cuestiones geométricas no demostradas, y que deberían ser resueltas de todas maneras" [**1968**, 197].

La Sección 4, "Conjetura 2 (de tipo Hodge)" [**1968**, 197-198], propone una nueva conjetura que postula el buen comportamiento de una forma bilineal sobre "ciclos primitivos". En detalle, si $\xi \in H^2(X)$ es la clase de una sección hiperplana, si $P^i(X)$ $(i \leq n)$ es la "parte primitiva" de $H^i(X)$ (es decir, el núcleo del morfismo de Lefschetz inducido por ξ^{n-i+1}), y si se define el conjunto de (clases de) ciclos primitivos por $C^j_{Pr} = P^{2j} \cap C^j(X)$, se tiene entonces una forma bilineal simétrica $C^j_{Pr} \to \mathbb{Q} : (x, y) \mapsto (-1)^j K(x \cdot y \cdot \xi^{n-2j})$,

402 Esta búsqueda de una suerte de estabilidad estructural evoca inmediatamente los inicios del pensamiento matemático de Grothendieck, con la recurrente aparición de *propiedades de permanencia* en su *Tesis* [**1949-53**]. La *permanente búsqueda de formas de permanencia* en la obra del autor no es en ningún modo casual, y constituye una de las características esenciales de su personalidad. El *deseo de permanencia* se ve reflejado en un estilo suave (crecimiento delicado de las mareas), un dolor hondo ante la fragilidad de lo pasajero (derivado de las condiciones difíciles de la vida de sus padres) y un anhelo metafísico (supervivencia de las ideas y de la especie), únicos en la historia de la matemática.

donde K es el isomorfismo $H^{2n}(X) \approx \mathbb{Q}_l$. La conjetura $Hdg(X)$ afirma entonces que esa forma es positiva definida[LI] [**1968**, 197]. Grothendieck indica que, en característica cero, $Hdg(X)$ se deduce inmediatamente de la teoría de Hodge, y explica el gran interés *técnico* de contar simultáneamente con las dos conjeturas en característica arbitraria:

> $B(X)$ y $Hdg(X \times X)$ implican, por ciertos argumentos de Weil y Serre, lo siguiente: si f es un endomorfismo de X tal que $f^*(\xi) = q \cdot \xi$ para algún $q \in \mathbb{Q}$ (necesariamente > 0), entonces los valores propios de $f_{H^i(X)}$ son enteros algebraicos de valor absoluto $q^{\frac{i}{2}}$, lo que implica todas las conjeturas de Weil [**1968**, 197].

Por otro lado, Grothendieck señala que la conjunción $Hdg(X)$ y $B(X)$ fuerza que el operador Λ de Hodge provenga de un ciclo algebraico con coeficientes racionales, *independientemente de l* [**1968**, 198]. De esta manera, sondeando en lo profundo, empiezan a vislumbrarse ciertos *arquetipos globales formales* (motivos) que se proyectan uniformemente sobre *estratos locales estructurales* (l-cohomologías).

Las *Conclusiones* del artículo [**1968**, 198] han sido citadas por entero arriba (ver nuestro *Resumen mínimo*, final del parágrafo (I), p. 255). El hecho de situar las conjeturas estándar como *base* de una teoría de los motivos muestra la importancia de una técnica que se pone al servicio de una *visión* más amplia. La *combinación de lo bajo y lo alto* es característica del pensamiento grothendieckiano, donde se entrelazan finamente controles técnicos (comportamiento estructural de los ciclos) con calibraciones conceptuales más abstractas (tratamiento axiomático *at large* de los motivos – ver *Sección 9.3* abajo). Así, el "sueño" grothendieckiano provee nuevos caminos técnicos y nuevas perspectivas conceptuales para generaciones ulteriores de matemáticos.

LI Si V es un espacio vectorial real, una forma bilineal simétrica $B : V \times V \to \mathbb{R}$ es *definida positiva* si $B(x, x) \geq 0$ para todo x. Las formas definidas positivas corresponden a formas cuadráticas, instrumentos básicos para mediciones aritméticas (Gauss) o métricas (Riemann), y están asociadas a problemas centrales de representación y de optimización. La emergencia de una forma bilineal definida positiva en la geometría algebraica, cercana a las conjeturas de Weil, sirve así de enlace *natural* entre aritmética, álgebra, topología, geometría: instrumento de *mediación* muy atractivo para Grothendieck.

9.2 Síntesis conceptual

Las conjeturas de Weil motivan en Grothendieck, por un lado, la invención de los *topos*, y su consiguiente entrelazamiento natural con la cohomología *étale* [**1960-69**], y, por otro lado, el descubrimiento[403] de los *motivos*, asociados a ciertas acciones naturales (*conjeturas estándar* [**1968**]) sobre los grupos de cohomología. En esta última línea, Grothendieck explora analogías formales con *igualdades de tipo Lefschetz*[404] –rasgos de algebraicidad y dualidad en la *primera conjetura (formas A, B, C)*– y con *desigualdades de tipo Hodge*[405] –rasgos de bilinealidad y positividad en la *segunda conjetura (Hdg)*–. A partir de allí, la "quintaesencia", o el "corazón del corazón" [**1983-86**, P.44-45], busca "captar lo «aritmético» (o lo «discreto») por la mediación de lo «geométrico» (o lo «continuo»)" [**1983-86**, P.44], en el ámbito de un *back-and-forth* cohomológico entre lo uno (arquetipo) y lo múltiple (tipos).

Grothendieck vislumbra así una *teoría de los motivos*, donde imagina *nuevas formas para introducir la variación continua dentro de la variación algebraica*[406] [**1983-86**, P.46]. Como a menudo sucede en la obra de Grothendieck, la *visión* intenta luego ser capturada mediante *redes de axiomas*, y se procede a un estudio axiomático[407] de categorías (multiplicidad) que representen *la forma* (unidad) *de las analogías formales.* De esta manera, los motivos gobiernan (desde lo alto) las conjeturas estándar, o, inversamente,

---

403 Para un análisis de la dialéctica invención/descubrimiento, ver *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo.

404 *Coincidencias* de morfismos entre variedades, reducidas a teoremas de punto fijo.

405 *Comparaciones* de estructura entre subvariedades, reducidas a propiedades de combinación lineal (con coeficientes racionales) de clases de cohomología.

406 Esta es una encarnación, por tanto, de expresiones del *álgebra topológica*, donde se *invierten* las técnicas de la topología algebraica. El álgebra topológica adquirirá un rol preponderante en la década de los ochenta. Ver nuestros *Capítulos 10, 11, 12, 13* abajo.

407 Para un esbozo de esta aproximación axiomática, ver nuestra *Sección 9.3* abajo.

las conjeturas estándar guían (desde lo bajo) los motivos. Mediante una combinación de técnicas geométricas (sistemas proyectivos, geometría kähleriana[LII]) y algebraicas (grupos algebraicos, pro-grupos), Grothendieck estudia expansiones y compatibilidades canónicas, descensos y filtraciones (a la Galois), anillos y topologías (a la Riemann), teoremas de representación, vaivenes de variaciones e invarianzas. Poco a poco emerge entonces un *gran sueño*:

> Entramos aquí en el dominio del sueño despierto matemático, donde intentamos adivinar "lo que podría ser", siendo tan insensatamente optimistas como nos lo permiten los conocimientos parciales que tenemos sobre las propiedades aritméticas de la cohomología de las variedades algebraicas. La noción de motivo puede definirse con todo rigor con los medios disponibles (esto ha sido realizado por I. Manin y M. Demazure), pero cuando se quiere ir más lejos y formular propiedades fundamentales "naturales", uno se choca con conjeturas actualmente indemostrables, como aquellas de Weil o Tate, y otras análogas que la noción misma de motivo sugiere irresistiblemente. Esas propiedades han sido objeto de numerosas conversaciones privadas y de varias exposiciones públicas, pero nunca han sido objeto de una publicación, puesto que no se usa en matemáticas (aunque sí en física) publicar un sueño, por más coherente que sea, y seguir hasta el fin dónde nos pueden llevar sus diversos elementos. Es evidente, no obstante, para cualquiera que se sumerja suficientemente en la cohomología de las variedades algebraicas, que "hay algo" – que "los motivos existen". Hace algunos años aún, jugué con la idea de escribir, contrariamente con la costumbre, un libro enteramente conjetural sobre los motivos – una suerte de ciencia-ficción matemática. Me lo impidieron algunas tareas más urgentes que las tareas de un matemático (...) [**1972**, 17-18].

El *insensato* acceso a lo que *podría ser* ha siempre impulsado a los grandes creadores. El *optimismo* es también una característica del *vidente matemático* Grothendieck[408]. El

408 En cambio, la visión termina por estar más tristemente temperada en su acción humana, social o ecologista, no tanto por un escepticismo interior (que nunca existió), sino por condiciones externas que sin duda le golpearon fuertemente.

LII Una variedad kähleriana (por Erich Kähler, 1933) es una variedad riemanniana X de dimensión par con una estructura compleja sobre el espacio tangente (es decir, $J : T_x X \to T_x X$ tal que $J^2 = -Id$) con buenas propiedades de preservación (métrica de la variedad, transporte en el espacio tangente). La estructura kähleriana puede ser también definida vía formas simplécticas o formas diferenciales, lo que la convierte en una estructura muy dúctil y multifacética. Los espacios complejos euclideanos ($\mathbb{C}^n$) o proyectivos ($\mathbb{PC}^n$), los toros complejos, los espacios de Stein (ver *Nota XLIII* arriba, p. 193) son variedades kählerianas.

matemático se *sumerge* así en el sueño, en busca de una elusiva sabiduría, como lo sugiere Melville al relatar en *Moby-Dick* la segunda caída de Pip del bote ballenero y su inmersión en los estratos inferiores del océano[409]. *Cifrar aritméticamente la estructura cohomológica de las variedades* (Grothendieck) es una visión profunda del mismo tenor que intentar cifrar analíticamente la estructura compleja de la teoría de números (Riemann). No es un azar por tanto que una prueba de las *conjeturas estándar* (o una construcción axiomática, decantada, sencilla y natural, de los motivos) se encuentre en un primer rango de interés entre los hondos temas abiertos en matemáticas, como la *Hipótesis de Riemann*[410].

Una *búsqueda de arquetipos* es particularmente patente, a lo largo de varios estratos bien definidos. Yendo de lo más concreto/particular/típico a lo más abstracto/universal/arquetípico, encontramos: (1) curvas, (2) variedades algebraicas, (3) grupos de cohomología (singular), (4) cohomologías diversas (plural), (5) conjeturas estándar, (6) motivos, (7) grupo fundamental motívico y (8) tipo de homotopía motívico. En este camino progresivo hacia lo depurado y lo arquetípico, *(i)* el comportamiento aritmético de las curvas está codificado en las estructuras cohomológicas correspondientes, *(ii)* las cohomologías son proyecciones de los motivos, y *(iii)* los motivos resultan ser "*sombras* de un tipo de

409 "El mar había burlonamente mantenido arriba su cuerpo finito, mientras anegaba la infinitud de su alma. No anegada por entero, sin embargo. Más bien hundida viva en portentosas profundidades donde extrañas formas del desenhebrado mundo primario se deslizaban de un lado para otro ante sus ojos pasivos; y el avaro tritón, la Sabiduría, revelaba sus tesoros apilados", H. Melville. *Moby-Dick, or The Whale (1849-51).* Ed. por H. Hayford, H. Parker y G. T. Tanselle. Evanston y Chicago: Northwestern University Press, 1988, p. 414 (nuestra traducción). La *infinitud del alma* grothendieckiana está aquí maravillosamente descrita, un siglo antes de su aparición. Las *portentosas profundidades* de la matemática nos han conmovido al intentar describir la obra grothendieckiana. El *desenhebrado mundo primario* convoca fielmente el mundo de los motivos. Los *tesoros apilados* vislumbrados por el grumete (Pip) y por el niño (Grothendieck - ver *Récoltes et semailles* [**1983-86**]), en parte "expoliados" por sus alumnos, son ahora estudiados por nuevas generaciones de matemáticos.

410 La aproximación de Connes a la hipótesis de Riemann, mediante su sitio aritmético y su topos aritmético (ver Connes y Consani, óp.cit.), resulta ser *profundamente grothendieckiana.* La infinita inmersión melvilleana en las portensosas profundidades de un mundo primario sirve también como adecuada descripción de la tarea hercúlea de Connes.

homotopía motívico" [**1983-86**, P.47]. De esta manera el *corazón* de la aritmética entra en sintonía armónica con el *corazón del corazón* del programa grothendieckiano. El *arkhê* se proyecta así sobre las cosas[411], en una metáfora que recuerda plenamente la caverna platónica, pero que se enriquece a través de una rica variedad de *estratos intermedios* entre el foco luminoso (axiomatización categórica universal) y la pared de la cueva (entorno de categorías concretas) por donde corren las sombras. En el reino depurado de lo universal, en el sueño, *se conjugan finalmente la homología y la homotopía*: buena parte de las dos mil páginas de los *Dérivateurs* [**1991**] consiste precisamente en intentar capturar y axiomatizar ese espacio enrarecido de las formas universales que se proyectan *simultáneamente* sobre la homología y la homotopía.

En el acceso al reino de los sueños, el *lenguaje* resulta ser crucial. Pierre Cartier recalca la destreza de Grothendieck: "Era un maestro en el nombrar, y usó esa habilidad como una de sus estrategias intelectuales centrales. Tenía un talento particular para nombrar las cosas antes de poseerlas y conquistarlas (...) Contaba con un sentido notable de la estética (...) En francés, tenía un uso fantásticamente variado del lenguaje, yendo de lo más familiar a lo más elaborado, con un sentido absolutamente extraordinario de las palabras"[xc]. El sueño armónico de los *motivos* corresponde a toda una metaforología musical, donde los motivos dan lugar a desarrollos temáticos diferentes, con sus *tempos*, llaves y modos [**1983-86**, P.46]. Un sentido hondo de la *belleza* sostiene la plausibilidad del *camino motívico* (1)-(8) observado arriba. Una armonía conceptual se relaciona con

[411] La raíz etimológica de arquetipo –*arkhê*– denota un "principio" que, a la vez, comienza (*arkhô*) y comanda (*arkhên*), y que se dirige a estudiar los *transvases* de lo universal.

[xc] P. Cartier. "A country of which nothing is known but the name: Grothendieck and "motives"". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait.* Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 269-298, p. 289. Recuérdese el orgullo de Grothendieck por haber introducido "centenares, si no miles, de nociones nuevas" (ver *Nota 297* arriba, p. 202).

una armonía matemática, y esta a su vez se cifra en una fina armonía lingüística. Más aún, Cartier recuerda otra muy diciente armonía natural y geográfica[xci]:

> La imagen que el mismo Grothendieck describía era la de una rocosa línea costera en la noche, iluminada por un faro. El foco de luz gira, iluminando primero una parte de la costa y luego otra. De la misma forma, las diversas teorías cohomológicas conocidas, varias de las cuales fueron inventadas por él, son lo que vemos, y es necesario retornar atrás a la fuente, y construir el faro que unificará la representación de toda la línea costera. En un cierto sentido, la estrategia científica es la inversa de aquella usada en la teoría de esquemas. En la representación diagramática, un S-esquema X está dado y, a partir de allí, se pueden realizar sus diversas encarnaciones: para cada S-esquema T, se puede construir el conjunto de T-puntos sobre X. En cambio, aquí el lugar de partida es desconocido, y solo poseemos las diversas encarnaciones: ¿es esta una imagen teológica?[412]

Manin fue el primero en publicar sobre los motivos[xcii] y conoció por tanto de primera mano la emergencia de la teoría. Según Manin, "La intuición básica que guió al mismo Grothendieck fue la imagen de la categoría de motivos puros de Chow[413] Mot_k como receptáculo de la «*teoría cohomológica universal*» $V_k \to Mot_k : V \mapsto h(V)$. La teoría universal

---

[412] Sabemos cómo, en otras instancias de la historia de la matemática (Cantor, Hilbert, Brouwer, Gödel, entre otros), los creadores de nuevas visiones abstractas fueron tildados de hacer teología, y no matemáticas. En todos los casos, se ha demostrado la cortedad de miras de los escépticos, y no hay razón para que no suceda lo mismo con Grothendieck. Es evidente que en *grandes visiones* –como la generatividad ordinal en Cantor, la axiomática estructural en Hilbert, la constructividad intuicionista en Brouwer, la consistencia lógica relativa en Gödel o la universalidad categórica en Grothendieck– se conjuguen iluminación (mística), fe (teológica) y belleza (estética). Lo que resulta extraordinario, en cada uno de estos casos, es que la visión mística-"teológica"-estética haya dado lugar a un conglomerado notable de nuevas técnicas matemáticas que han transformado completamente la disciplina.

[413] Ver nuestra *Sección 9.3* abajo para un repaso de algunos de los tratamientos que se han dado a *categorías* de motivos. Si los motivos *en-sí* no han podido aún ser captados técnicamente, los motivos *en-múltiple* (es decir, categorías de motivos) sí lo han sido a partir de Voevodsky.

[xci] Ver ibíd., p. 295.

[xcii] Y. I. Manin. "Correspondences, motives and monoidal transformations". En: *Math USSR-Sb.* 6 (1968), págs. 439-470. Rememora Manin: "Al regresar a Moscú en Junio 1967, después de cinco o seis semanas de intenso entrenamiento con Grothendieck, pasé varios meses escribiendo sus definiciones centrales relacionadas con los motivos (...)", íd., "Forgotten motives: the varieties of scientific experience", p. 300. Manin recuerda también una carta de Grothendieck (Febrero 5 1969, escrita en ruso, aprendido probablemente con su padre) en la que le comenta su trabajo, ibíd., p. 300.

se necesitaba para unir diversas construcciones cohomológicas, como Betti, Rham-Hodge y la cohomología *étale*"[xciii]. Sin embargo, una obstrucción importante con la categoría de los motivos puros es que "desde el inicio trataba *solo* con ciclos algebraicos, representados por correspondencias, y no era para nada claro intuitivamente cómo podía proveer información sobre ciclos trascendentes. De hecho, la función central de las «Conjeturas Estándar» era servir como puente conveniente entre lo algebraico y lo trascendental"[xciv]. De esta manera, se establece un nuevo *transvase* entre lo discreto y lo continuo, donde las conjeturas estándar y los motivos ayudan a guiar una intuición fina de correspondencias entre formas conjeturales de un Todo (trascendente) y representaciones estratificadas parciales de una red (algebraica) que actúan como *residuos*[414] de esa totalidad.

9.3 Ejemplo detallado: manuscrito *Motifs*

El manuscrito *Motifs* [**1967**] procede de los papeles que recibió en un cierto momento Jean Malgoire[415], cuando Grothendieck se retiró completamente de su enseñanza en Montpellier.

---

414 Para conexiones con Warburg o Benjamin, ver nuestras *Notas 69, 145* arriba, pp. 63, 109, y nuestro *Capítulo 17* abajo.

415 La portada reza "No difundir – Do not distribute / Motivos / por Alexandre Grothendieck", y una nota al pie explica: "Transcripción de un manuscrito (muy preliminar y de desciframiento difícil) de Grothendieck consagrado a los «fundamentos» de la teoría de motivos. Parece que el texto (con sus revisiones) haya sido escrito en el periodo 1965-1970. La transcripción fue realizada por Ph. Elbaz-Vincent con la ayuda de J. Malgoire. Para indicaciones complementarias, contactar a J. Malgoire" [**1967**, portada]. La transcripción ha preservado las "notas al margen, observaciones añadidas, distribución de la página, notaciones, etc.": tenemos así un acceso directo a la *matemática grothendieckiana en gestación*, algo característico del tercer periodo 1981-1991. Ver nuestra *Parte III* abajo.

xciii Ver ibíd., p. 301.

xciv Ver ibíd., p. 301. Un salto en la comprensión de las conjeturas y los motivos fue, según Manin, "el tratamiento de las correspondencias mediante álgebra homológica sofisticada (en parte generada por el desarrollo de la cohomología *étale* y por la introducción de las categorías derivadas y trianguladas por Grothendieck-Verdier)", ibíd., p. 301. Para un breve vistazo sobre las categorías derivadas y trianguladas, ver nuestra *Sección 9.3* abajo.

El texto de Grothendieck, que parece ser posterior a la visita de Manin en 1967[416], propone diversas propiedades para una categoría $\mathcal{M}^+(X)$ de "motivos efectivos" sobre un esquema X (con condiciones adecuadas de noetherianidad) [**1967**, 1]. La construcción $\mathcal{M}^+(\ )$ no se define explícitamente, pero Grothendieck discute algunas propiedades básicas que debe poseer: *(1)*[417] $\mathcal{M}^+(X)$ es una $\mathbb{Q}$-categoría abeliana (es decir, $m1_M$ es un automorfismo de M para cada objeto M en la categoría y cada $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$) y posee un producto tensorial $\otimes$ conmutativo, unitario y exacto a derecha [**1967**, 1], *(2)* dado $f : X \to Y$ morfismo de esquemas noetherianos, se tiene un funtor exacto $f^* : \mathcal{M}^+(Y) \to \mathcal{M}^+(X)$ compatible con $\otimes$, y, a partir de allí, se tienen los funtores correspondientes a f^* entre las categorías derivadas asociadas[LIII] [**1967**, 2], *(3)* la construcción $\mathcal{M}^+(\ )$ se preserva bajo límites ($\mathcal{M}^+(X) \approx \varinjlim \mathcal{M}^+(X_i)$ si $X = \varprojlim X_i$) [**1967**, 2], *(4)* se tienen funtores "aritméticos" $T_l : \mathcal{M}^+(X) \to \mathcal{M}^+{}_l(X)$ (donde $\mathcal{M}^+{}_l(X)$ es "la categoría deducida de la categoría de «sistemas l-ádicos de haces de l-torsión construibles»"), funtores que resultan compatibles con el producto tensorial, con cambios de base, con derivaciones y con el isomorfismo de Künneth (homología de un producto isomorfo al producto de las homologías) [**1967**, 2],

416 Pues, en caso contrario, el arduo trabajo definicional de Manin se hubiese simplificado, cosa que no parece haber sucedido según su testimonio ("pasé varios meses escribiendo sus definiciones centrales...", ibíd., p. 300).

417 En lo que sigue, los numerales *(1)*-*(15)* corresponden a las quince secciones iniciales del manuscrito. Dejamos aquí de lado las tres secciones finales: *(16)* cohomología de variedades abelianas [**1967**, 16-19], *(17)* formas positivas [**1967**, 19-20], *(18)* diccionario sobre funciones L [**1967**, 21-22].

LIII Dada una categoría abeliana $\mathcal{A}$, su *categoría derivada* $D(\mathcal{A})$ captura las propiedades que poseen los *funtores derivados* definidos sobre $\mathcal{A}$ (propiedades procedentes del *Tôhoku* [**1955-56**] y axiomatizadas en la *Tesis* de Verdier, J.-L. Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes (1967)*. Vol. Astérisque 239. Paris: Société Mathématique de France, 1996). Explícitamente, los objetos de $D(\mathcal{A})$ son cadenas de complejos sobre $\mathcal{A}$ y los morfismos de $D(\mathcal{A})$ son morfismos entre cadenas módulo cuasi-isomorfismo (es decir, tales que los morfismos inducidos sobre los grupos de homología son isomorfismos). Las categorías derivadas introducen *condiciones naturales de homotopía* entre las cadenas de complejos, y se obtiene así un nuevo enlace entre homología y homotopía. Si $\mathcal{A}$ posee *suficientes inyectivos*, los funtores derivados *locales* R^nF ($F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtor entre categorías abelianas) pueden entonces ser capturados por un funtor *total* RF asociado a $D(\mathcal{A})$. El formalismo de las categorías derivadas ayuda a simplificar largos cálculos de (co)homología. Las categorías derivadas (naturales) fueron propuestas por Verdier sobre un formalismo previo de *categorías trianguladas* (más artificales), que axiomatizan una suerte de combinatoria de pegamientos entre diagramas triangulares distinguidos de la categoría. Los axiomas triangulares de Verdier son bastante *ad-hoc* y complicados, y es un problema aún abierto encontrar axiomas más sencillos y naturales. En parte, las propuestas de Grothendieck en los *Dérivateurs* [**1991**] responden a esa búsqueda de entronques más naturales entre la homología y la homotopía.

(5) se tienen elementos canónicos $\mathbb{Q}_l(-n)$ en $\mathcal{M}^+(X)$ que ayudan a representar ciertos módulos de Tate[LIV] y que corresponden uniformemente a cálculos precisos de funtores derivados [**1967**, 3], *(6)* la categoría $\mathcal{M}^+(X)$ puede completarse en una categoría $\mathcal{M}(X)$, de tal manera que el funtor $M \mapsto M \otimes \mathbb{Q}(-1)$, plenamente fiel al ser considerado en $\mathcal{M}^+(X)$, resulte ser una *equivalencia* al elevarlo a $\mathcal{M}(X)$ [**1967**, 3], *(7)* se tienen funtores Hom (en $\mathcal{M}(X)$) y $RHom$ (en $D(\mathcal{M}(X))$) compatibles con el producto tensorial y con los funtores T_l [**1967**, 4], *(8)* las propiedades de torsión de los $T_l(M)$ son independientes de l [**1967**, 4], *(9)* se tienen filtraciones de $\mathcal{M}^+(X)$ y de $\mathcal{M}(X)$ por "pesos" y por "tipos dimensionales" [**1967**, 5-6], *(10)* $\mathcal{M}^+(X)$ y $\mathcal{M}(X)$ resultan ser anillos graduados, cuyas operaciones aditivas capturan ciertas particiones vía módulos simples y cuyas operaciones multiplicativas cifran los pegamientos de las sub-particiones [**1967**, 6-8], *(11)* se provee una interpretación topológica de los tipos dimensionales [**1967**, 9], *(12)* se cuenta con un homomorfismo fundamental $\sigma : L(K) \to \mathcal{M}^+(K)$ (donde K es un cuerpo y $L(K)$ es el grupo K-generado por los esquemas de tipo finito sobre K), definido por una fórmula tipo Lefschetz cuyas componentes ("motivos virtuales") generalizan los números de Betti, y mediante el cual se obtienen ciertos *invariantes fundamentales* para los esquemas de tipo finito sobre K[418] [**1967**, 9-11], *(13)* se obtiene una caracterización galoisiana de las filtraciones mediante las caracterizaciones (para E en $\mathcal{M}(X)$):

> "Conjetura de Weil/Riemann": $cl(E) \in \mathcal{M}_i(X) \Leftrightarrow$ para todo punto cerrado $x \in X$, los valores propios del Frobenius en $T_l(E)(x)$ son de valor absoluto $N(x)^{\frac{i}{2}}$,

418 Unos comentarios sobre *ejemplos* (curvas, superficies, variedades regladas) se acompañan con repetidas marcas de interrogación (seis apariciones de un doble signo "??" en una página) [**1967**, 11]. Las inquietudes y las dudas de Grothendieck resultan patentes aquí, en un manuscrito, lo recordamos, anotado en la portada con "No difundir".

LIV Los *módulos de Tate* (1966), construidos sobre categorías de grupos o de esquemas, codifican propiedades aritméticas módulo p y propiedades de acciones de grupos de Galois. Su uso en variedades abelianas y en campos de números permite acercar técnicas de la teoría de números, el álgebra abstracta y la geometría algebraica.

> "Conjetura de Tate": $cl(E) \in \mathcal{M}^+(X) \Leftrightarrow$ para todo punto cerrado $x \in X$, el polinomio característico de $Frob_x^{-1}$ en $T_l(E)(x)$ posee coeficientes *enteros* (*i.e.*, los vectores propios del Frobenius son *enteros* algebraicos) [**1967**, 12; *cl* denota la clase de cohomología],

(14) gracias a los motivos y a invariantes de acciones de Galois, la conjetura de Tate se puede expresar en términos puramente cohomológicos, que a su vez corresponden a teoremas de conmutación[419] [**1967**, 12-13], *(15)* se propone una *cohomología absoluta*, expresión de ese anhelado arquetipo inicial que debe poder proyectarse sobre las diversas cohomologías relativas, y que se precisa a través de funtores "absolutos" (definibles sobre la variación de *todos* los motivos y provenientes de un funtor universal de categorías trianguladas $D(\mathcal{M}(X)) \to D(Ab)$, uniforme y canónicamente para todo X) [**1967**, 13-16].

Más allá del carácter inacabado y tentativo del manuscrito[420], podemos observar con *claridad* el panorama delineado por Grothendieck. Ante todo, la aproximación del ente (motivo) no se realiza directamente, sino a través de sus *propiedades estructurales (1), (9), (10), (11)* y de sus *propiedades de permanencia (2), (3), (6)*. Una vez se han "despejado" así el interior estructural y el exterior representacional de la noción de motivo, se correlacionan los motivos con la aritmética, a través de *propiedades de compatibilidad (4), (5), (7)*. Con ello, se obtienen nuevas formas de expresar los *fondos conjeturales* esenciales de la teoría *(12), (13), (14)*, y se postula la existencia de *arquetipos profundos* que deben gobernar canónicamente la situación *(8), (15)*. La estrategia de *suavizar* los entornos arquitectónicos de una *geometría aritmética* global se apuntala entonces a través de un preciso despliegue de mamposterías locales *(1)-(15)*.

---

419 Al final de la sección, Grothendieck especula sobre un arquetipo casi del todo evanescente: "Para M más y más grande, se encuentra un *pro-motivo* (en álgebra de Lie) canónico, llamado *pro-motivo fundamental*, que puede también construirse de manera canónica en términos de la categoría de motivos provista con sus estructuras tensoriales... ¿Cuál es la parte «algebraica» de ese pro-motivo? [Sobre un cuerpo finito, es todo ¡el pro-motivo no siendo más que $\mathbb{Z}(0)$! – en todos los demás casos creo que es *nulo*...]" [**1967**, 13].

420 O, más bien, gracias precisamente a ello: el carácter conjetural del texto permite observar horizontes estructurales *limpios y abiertos*.

Algunos manuscritos preservados en el *Archivo Grothendieck* [**IMAG**] se ocupan de los motivos. Se tienen apuntes sobre categorías tensoriales [**IMAG**, cote 10, c. 1958], formalismo de correspondencias [**IMAG**, cote 11, c. 1961; cote 16, 1966-1967], grupos de Galois motívicos [**IMAG**, cote 12, c. 1964; cote 13, 1965], ciclos algebraicos y conjeturas de la teoría de números [**IMAG**, cote 14, c. 1965], aritmética galoisiana de motivos [**IMAG**, cote 15, c. 1965], motivos y teoría de Hodge [**IMAG**, cote 18, c. 1969]. Los entornos de 1964 se confirman como el periodo de eclosión de los motivos[421] y se observa una *enorme actividad* en ese aspecto ¡con más de mil páginas de apuntes manuscritos sobre el tema! La emergencia del grupo de Galois motívico[422] y el estudio de las conjeturas de Hodge, Tate, Lefschetz y Weil, que luego serán generalizadas en las conjeturas estándar[423], muestran el interés profundo de Grothendieck por construir una *geometría aritmética* amplia, que trascienda a la geometría algebraica, y que provea nuevas aproximaciones al entendimiento del *espacio-número*[424].

421 Una carta de Grothendieck a Mumford, fechada el 1 de Noviembre 1965, desde Algiers (Argel), habla de ciclos algebraicos y las conjeturas de Tate y Hodge, pregunta sobre un caso específico de superficie que cumpla ciertas propiedades cohomológicas, y se extiende sobre las "variedades modulares que se obtienen al considerar la teoría de Galois motívica" [**IMAG**, cote 13, 13-19]. El carácter exploratorio de la carta se subraya con un diciente "¡realmente no sé qué creer!" [**IMAG**, cote 13, 18].

422 El grupo de Galois motívico es un conjetural grupo algebraico sobre $\mathbb{Q}$ que serviría para representar la categoría de motivos puros. Es interesante observar cómo Grothendieck intenta describir el grupo a través de diferentes inmersiones, proyecciones y acciones, sin nunca definirlo internamente [**IMAG**, cote 13, 3-6]. El grupo de Galois motívico se relaciona con el grupo de Grothendieck-Teichmüller ($\widehat{GT}$): conjeturalmente $\widehat{GT}$ sería un *cociente* del grupo motívico (Drinfeld 1991). A su vez, se conjetura que el grupo de Grothendieck-Teichmüller es isomorfo al grupo de Galois absoluto $Gal(\bar{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ (se sabe $Gal(\bar{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{GT}$, Drinfeld 1991). Siguiendo un *crecimiento natural de arquetipos*, se tendrían así extensiones conceptuales sucesivas: algebraico $\hookrightarrow$ combinatorio-complejo $\hookrightarrow$ motívico. En este ámbito convergen armónicamente la variable compleja y la teoría de números, guiadas por la geometría algebraica y la teoría de categorías. Ver nuestros *Capítulos 10, 12* abajo.

423 Con fecha 27 de Agosto 1965, se encuentra el original tipografiado de una carta a Serre sobre las conjeturas estándar [**IMAG**, cote 14, 43-46] que ya se aproxima mucho al texto final publicado [**1968**].

424 De esta manera, paralelamente con los *topos*, los *motivos* se adentran en la exploración *profunda* de los enlaces entre cantidad (número/aritmética) y cualidad (espacio/geometría). Con tintes melvilleanos, buscando los "tesoros apilados" de la Sabiduría, Grothendieck se sumerge en el *arkhê* del conocimiento matemático.

Desde los inicios de la teoría de motivos hasta su primera formalización rigurosa por Voevodsky[xcv] pasaron cerca de 30 años[xcvi]. Voevodsky[425] introdujo la cohomología motívica (1990-2000)[xcvii], un aporte que responde en parte a las esperanzas de Grothendieck y que le valió la Medalla Fields (2002). En vez de trabajar, como en topología algebraica, con cirugías algebraicas del espacio (cohomología singular, anillo de grupos de cohomología), Voevodsky propone una colección más delicada de *cirugías de una variedad algebraica*, al introducir nuevas formas de topología para los objetos algebraicos (topologías finas de Grothendieck sobre sitios de esquemas – consecuciones parciales en el programa grothendieckiano del *álgebra topológica*). Con ello, consigue definir teorías homotópicas para variedades algebraicas y para esquemas, gracias a una sofisticada categoría concreta para las homologías $H(V)$ asociadas funtorialmente a variedades V, caso especial de una *categoría triangulada de motivos* más general. Un tronco central de las cohomologías, alrededor de los motivos, ha empezado entonces a "despejarse", concordando con la extraordinaria intuición matemática de Grothendieck.

---

[425] Vladimir Voevodsky (1966-2017) forma parte de la gran escuela rusa –Gelfand, Manin, Beilinson, Drinfeld, Suslin, Kontsevich, Zilber, Gromov, entre otros tantos– que recuperó cuidadosamente las ideas de Grothendieck y que tiende consistentemente a revelar hondas estructuras unitarias detrás de múltiples fenómenos matemáticos y físicos. Su muerte prematura siega la presencia de uno de los matemáticos creadores más cercanos a la *herencia plena* (vital, espiritual, ideológica, conceptual, técnica) de Grothendieck.

[xcv] A. Suslin y V. Voevodsky. "Singular homology of abstract algebraic varieties". En: *Inv. Math.* 123 (1996), págs. 61-94; V. Voevodsky. "The $\mathbf{A}^1$-homotopy theory". En: *Proc. Int. Congr. Math.* Vol. 1. Berlin, 1998, págs. 579-604. Véanse también las lecciones sobre cohomología motívica ofrecidas por Voevodsky en Princeton (1999-2000): C. Mazza, V. Voevodsky y C. Weibel. *Lecture Notes on Motivic Cohomology.* Vol. 2. Clay Mathematics Monographs. Providence: American Mathematical Society, 2006.

[xcvi] Para fascinantes enlaces con la *geometría no conmutativa*, intermedios entre Grothendieck y Voevodsky, véase Manin, óp.cit., p. 304.

[xcvii] Para una introducción técnica a los trabajos de Voevodsky, véase C. Soulé. "The Work of Vladimir Voevodsky". En: *Fields Medallists' Lectures.* Ed. por M. Atiyah y D. Iagolnitzer. New Jersey: World Scientific, 2003, págs. 769-772.

Parte III

1981–1991

10

La longue marche à travers la théorie de Galois (1981)

Después de su retiro del *IHES* (1970), después de unos años de actividad ecologista radical (1970-1973) y después de sus primeras labores matemáticas en la Universidad de Montpellier (1973-1980), Grothendieck reaparece como *gran visionario* en la década de los ochenta. Es el tiempo donde surgen algunos de sus más extensos y originales manuscritos matemáticos (*Longue marche* [**1981**], *Stacks* [**1983**], *Esquisse* [**1984**], *Dérivateurs* [**1991**]), así como sus grandes ensayos reflexivos y filosóficos sobre la creatividad matemática y sus conexiones culturales (*Récoltes et semailles* [**1983-86**], *Clef des songes* [**1987**]). *La longue marche à travers la théorie de Galois* [**1981**] descubre las bases de la *geometría anabeliana* y de la *teoría de Grothendieck-Teichmüller*, sobre las que girarán muchas de las intuiciones más profundas de toda la obra grothendieckiana. En ese sentido, se observa la *honda continuidad* de un matemático que nunca dejó de preocuparse por su disciplina. Nuestra *Tercera Parte* recorre los pilares mayores de la década de los ochenta, procediendo antes a un somero recordatorio del entorno cronológico de la década de los setenta.

10.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

La década de los años setenta.

El retiro de Grothendieck del *IHES* (1970)[426] se debe a una compleja diversidad de factores, no reducibles a una sola perspectiva: agotamiento técnico[xcviii], liberación individual[427], concienciación social[428], incomodidad académica[429], decepción con la comunidad

[426] Carta extensa de renuncia al Comité Científico (25 Mayo 1970) y corta misiva al Director Motchane (9 Junio 1970). Poco después, en Septiembre 1970, en el ICM de Niza, Grothendieck protagonizó varias protestas políticas, para incomodidad de Leray (Presidente del Congreso) y de Dieudonné (Presidente del Comité Científico) (véanse los recuerdos de Cartier, en Jackson, óp.cit., p. 1200). En buena medida, Dieudonné había organizado el Congreso en su naciente Facultad para honrar a Grothendieck y su escuela, después de la Medalla Fields 1966, y la actuación irreverente de Grothendieck cortó una larga amistad. En el fondo, Grothendieck sumaba ocasiones para efectuar un drástico corte con su pasado. El simbolismo de atentar contra sus grandes mentores, Leray y Dieudonné, debió dejar un remanso de amargura en el torturado Grothendieck de la época, quien apenas cruzaba los 40 años.

[427] La salida del *IHES* constituye para Grothendieck una suerte de *renacimiento*: "revelación de una liberación – como una puerta que de pronto se hubiese ampliamente abierto (¡había bastado que la empujara!) sobre un mundo insospechado, que me llamaba a descubrirlo. Y cada nuevo despertar desde entonces ha sido también una nueva liberación" [**1983-86**, 1.65]. A la vez, esto corresponde a una afinidad natural con las comunidades *hippies* y los movimientos libertarios de fines de los años sesenta, de los cuales Grothendieck se sintió muy cercano.

[428] Reverberación sin duda del ejemplo de sus padres, que le acerca a un "compromiso en una acción militante" [**1983-86**, 1.159] alrededor de un hondo sentido, vital y ético, en la salvación del planeta. Tres semanas de clases en Vietnam, en 1967, en medio de los bombardeos, ya habían demostrado la convicción de su militancia.

[429] Grothendieck se sintió muy afectado por ser tratado de "mandarín" en las protestas estudiantiles parisinas de Mayo 1968, y por verse involucrado en supuestos "antagonismos de clase" [**1983-86**, 1.156]. Por el contrario, él se sentía entreverado con sus alumnos en un nivel horizontal no jerárquico, y el "mandarinazgo" iba en contra de sus valores anarquistas fundamentales.

[xcviii] Pierre Cartier, en varias entrevistas, ha señalado este aspecto como primordial. En efecto, el agotador esfuerzo técnico realizado *sin cesar entre 1949 y 1969* tiene que haber afectado profundamente a Grothendieck, por más de que su capacidad de trabajo pareciese ser sobrehumana. Esto coincide también con el comentario de Serre en su penúltima carta a Grothendieck (8 Febrero 1986): "Tengo la impresión de que, a pesar de tu energía bien conocida, estabas simplemente agotado por el enorme trabajo que habías emprendido" [**1955-87**, p. 250].

matemática[430], rechazo de la presencia de fondos militares en el sostén económico del *IHES*[431], etc[xcix]. Se repite, sin razón, que Grothendieck abandona entonces el mundo de las matemáticas. La situación es mucho más compleja. Es cierto que Grothendieck dedica (1970-1973) una enorme energía al movimiento ecologista *Survivre et vivre* (ver más abajo). Pero también es verdad que sigue presente en el dominio matemático, de *forma continua* a lo largo de toda la década, como profesor en el *Collège de France* (1970-1972), en la Universidad de París en *Orsay* (1972-1973) y en la Universidad de Montpellier (1973-1984)[c], y como conferencista muy activo (Rumania, Canadá, Alemania, Francia, Suiza, Estados Unidos)[ci]. Si su trabajo matemático no alcanza[432] la profundidad de los periodos 1949-1969 y 1981-1991, este sigue siendo constante[cii].

430 Grothendieck hace coincidir su retiro del *IHES* con "la primera ocasión donde se expresó un antagonismo profundo de uno de mis alumnos conmigo" [**1983-86**, 1.65], episodio que presagia su larga frustración posterior con Deligne.

431 Este es el argumento "estándar" esgrimido por Grothendieck en *Récoltes et semailles* [**1983-86**, pp. L3, 1.169], pero no puede considerarse como la razón esencial de su retiro. Más bien, todo el entorno complejo de las perspectivas anteriores se cifra en la circunstancia de los fondos militares como una "excusa" apropiada para la necesidad de cambio que la matemática y la vida de Grothendieck requerían.

432 Al menos si nos basamos en lo que se conoce de sus publicaciones y de los archivos digitalizados en Montpellier. Falta por ver si las más de cincuenta mil páginas de su herencia, no clasificadas aún (2018), produzcan sorpresas mayores.

xcix Para perspectivas diversas sobre el retiro de Grothendieck del *IHES*, véanse Douroux, óp.cit., pp. 204-205; Bringuier, óp.cit., pp. 49-56; Pradeau, óp.cit., pp. 103-108. Para un estudio más detallado de la situación, véase el Capítulo 1 "The Great Turning Point" del tercer volumen de la biografía de Grothendieck, Scharlau, óp.cit., así como el excelente artículo D. di Cesare. "Il deserto dentro: le ragioni della «grande svolta»". En: *Matematica ribelle. Le due vite di Alexander Grothendieck*. Ed. por G. Giorello. Corriere della Sera, 2014, págs. 63-79 (agradezco a Marco Dubini el haberme hecho conocer este volumen).

c Ver Scharlau, óp.cit., tercer tomo, Cap. 7, "Professor at the Collège de France and Orsay, 1970-1973", Cap. 13, "Professor at Montpellier, 1973-1984".

ci Ver ibíd., tercer tomo, Seción 6.5, "Grothendieck's Lecture Tours".

cii En particular, Scharlau señala tareas alrededor de *(i)* los grupos de Barsotti-Tate, cristales y deformaciones infinitesimales (*Collège de France*, con tesis doctorales de Messing e Illusie), *(ii)* cursos sobre funciones analíticas, topología, grupos y geometrías del cubo y del icosaedro (Universidad de Montpellier). Esta última aproximación a la geometría desde figuras elementales tendrá un impacto importante en sus trabajos de la década de los ochenta. Ver nuestro *Capítulo 12* abajo.

Para Grothendieck, la década de los setenta constituye sobre todo un periodo de solidaridad social y de renovación espiritual. En buena medida, esto se logra a través de un hondo reencuentro con los *márgenes*[433]: la actividad en las comunas (fundación de la comuna *Germinal* en las afueras de París, en Châtenay-Malabry 1973), el "entierro" en la provincia (vida en pequeños pueblos cerca de Montpellier: Villecun 1973-1979, Mormoiron 1979-1991)[ciii], la protesta radical (ecologismo extremo, posiciones contra la investigación científica, 1970-1973)[434], la atención al llamado interior de su espíritu, la exploración de temas "menores" en matemáticas[civ]. En esta sensibilidad a lo alternativo y lo marginal, son particularmente importantes su dedicación a *Survivre et vivre* y su reflexión sobre los "renacimientos" que provee la alteridad. La *conjugación* de técnicas no estándar del pensamiento matemático, de redes sociales incluyentes y de accesos a estratos psicológicos ocultos configura el peculiar entramado grothendieckiano de esos años.

A raíz de una conferencia (4 Julio 1970, Montréal) donde Grothendieck combina

433 Ver *Nota 255* arriba, p. 174.

434 Entre las cuales dicta su famosa conferencia en el *CERN*, "Allons-nous continuer la recherche scientifique?" (27 Enero 1972). El audio se encuentra disponible en Internet: es fascinante oír la voz plástica, casi femenina, de Grothendieck, lanzado en ristre contra la investigación nuclear en el templo mismo de esa actividad. El coraje es algo que nunca faltó al hijo de los valientes Sascha y Hanka. Los comentarios agresivos del público al final de la intervención de Grothendieck chocan con la *suavidad* de su voz.

ciii Su quinto y último hijo, John, nace en Villecun en 1973, con su última compañera estable, Justine Skalba, a quien había conocido en una de sus giras de conferencias en Estados Unidos (Rutgers 1972). Ver Bringuier, óp.cit., pp. 70-74. Poco después, Justine retorna a los Estados Unidos con su hijo, y empiezan los "años de revelación" (hondos sondeos en la psiquis, ver más abajo en esta sección), donde Grothendieck se ve envuelto en "llamaradas de amor" con su modesto entorno (ver Scharlau, óp.cit., Cap.11, "Retreat to the country side, Villecun").

civ Para todo lo anterior, ver Scharlau, ibíd., *passim*, Douroux, óp.cit., pp. 204-226, Bringuier, óp.cit., pp. 49-81, Pradeau, óp.cit., pp. 116-124, así como S. Montefiori. "Profugo, luminare, eremita: una vita tra scienza e anarchia". En: *Matematica ribelle. Le due vite di Alexander Grothendieck.* Ed. por G. Giorello. Corriere della Sera, 2014, págs. 29-48 y S. Gattei. "Ricerca e pacifismo: Einstein, Pauling, Grothendieck". En: *Matematica ribelle. Le due vite di Alexander Grothendieck.* Ed. por G. Giorello. Corriere della Sera, 2014, págs. 103-128.

matemáticas (cohomología cristalina) y denuncia social (falta de ética de la comunidad científica), se funda el movimiento ecologista *Survivre* (20 Julio 1970). El grupo se orienta a un apostolado de "salvación del planeta" donde predomina el cariz apocalíptico de la situación (preocupación por "sobrevivir")[cv]. Un par de años después, el grupo se ha expandido notablemente (1500 ejemplares de la revista distribuidos), y ha adquirido el nombre *Survivre et vivre*, donde se combinan la denuncia crítica negativa ("sobrevivir") y la acción radical positiva ("vivir"). Con su pasión acostumbrada[cvi], Grothendieck trabaja incansablemente[435] en los frentes de la denuncia y de la acción. Se convierte en editor, publicista, impresor y distribuidor del boletín del grupo, escribe muchos de los artículos principales y deja su impronta en la mayoría de los demás[cvii]. Las denuncias elaboradas por Grothendieck, propias de la "contra-cultura" de aquellos años, se dirigen contra una multitud de degradaciones (excesos del aparato militar, normatividad del cientismo, conservatismo de la casta científica, abusos de la civilización industrial, peligros de lo nuclear,

435 El mismo Grothendieck recuerda la situación en *La clef des songes*: "(...) me dediqué cuerpo y alma al grupo durante los dos años siguientes [1970-1972] (...)" [**1987**, §33, 116] .

cv La descripción reza: "*Survivre* – movimiento internacional para la supervivencia de la especie humana". Para un recuento breve del movimiento, ver Scharlau, óp.cit., tercer tomo, Cap. 6, "Survivre et vivre, 1970-1972". Para una presentación exhaustiva, donde se hace una selección de los artículos aparecidos en la revista del movimiento, ver C. Plessis. *Survivre et vivre. Critique de la science, naissance de l'idéologie.* Montreuil: Éditions l'Échapée, 2014. La aparición de varios matemáticos bourbakistas (Chevalley, Samuel, Godement) en *Survivre et vivre* va de la mano del liderazgo de Grothendieck.

cvi El testimonio de Gordon Edwards, presente en la reunión de Montréal, es indicativo: "Me emocioné profundamente por su entrega apasionada a la verdad y a la honestidad, y por sus esfuerzos dramáticos por despertar a los científicos en lo que respecta a las consecuencias impensables de seguir derivando hacia la catástrofe inevitable (...) La ausencia casi completa de sentido ético y de acción efectiva llevaba según él a una abdicación casi total de responsabilidad con la raza humana", Scharlau, óp.cit., Cap. 6, "Survivre et vivre. 1970-1972".

cvii Según Scharlau, "en los años 1970-1975, diecinueve ejemplares del boletín fueron publicados, sumando cerca de 700 páginas en total. El número de copias llegó a diez mil. No hay duda de que Grothendieck cargó con la tarea central de edición en los primeros años", ibíd. La participación de Grothendieck en *Survivre et vivre* se restringió esencialmente al periodo 1970-1973, antes de asumir sus tareas de enseñanza en Montpellier.

despilfarro, etc.) y abogan, por el contrario, por nuevas formas de comunión con la sociedad y con el planeta (objeción al servicio militar, equilibrio ecológico, lucha contra la polución, agrobiología, nuevos métodos de enseñanza en la escuela, etc.)[436].

La *suavidad*, la elaboración de puentes hacia los demás, va acompañada de un ejercicio denso de sondeos y descensos hacia una psiquis oculta. Es el comienzo de los años de “revelación” para Grothendieck. Algunos apartes de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y de *La clef des songes* [**1987**] recuerdan la situación[437]:

> Al inicio de 1974 es cuando, por primera vez, me rendí a la evidencia de que la destrucción en mi vida, que me seguía paso a paso, no podía venir *solo* de los demás, sino que había algo *en mí* que la atraía, la alimentaba, la perpetuaba [**1983-86**, 1.168].
>
> Los llamados a la renovación desembocaron, en la vida de mi madre como en la mía, en un largo estancamiento espiritual. (...) En mí, duró treinta años, hasta 1974 – hasta el momento donde me encontré de pronto en una crisis interior muy similar a la que mi madre había eludido treinta años antes. [Nota al pie. Esta crisis tuvo lugar en abril 1974 y no desembocó inmediatemente sobre un trabajo de reflexión consciente (...)] [**1987**, §32, 113].
>
> El episodio en el que me alejé de la comunidad para no volver más, en 1970, fue vivido primero como un doloroso desprendimiento, antes de sentirlo como una liberación (...) No puedo negar un alcance “espiritual” a ese giro decisivo en mi vida. Pero lo veo ahora sobre todo como un primer *shock* saludable, inicio de un trabajo que se prosiguió en profundidades ignotas, y cuyos verdaderos frutos espirituales se manifestaron solo cuatro años después, con el “momento de verdad” (en abril 1974) y el trabajo de reflexión que le siguió (junio a agosto del mismo año), y sobre todo a partir de las grandes conmociones interiores de 1976, año de una verdadera “fundición de los hielos” en la psiquis [**1987**, §33, 114-115].

---

436 Una fascinante tabla de Robin y Janine Clark (*Survivre et vivre* 14 (octubre-noviembre 1972), p. 32) resume algunas características de una *tecnología suave* (“technologie douce”) donde se contraponen una “sociedad con tecnologías duras” y múltiples “comunidades con tecnologías suaves”. Las contraposiciones entre lo duro y lo *suave* incluyen las entradas siguientes: 7. alta especialización / *especialización minimal*; 8. núcleo familiar / *unidad comunitaria*; 10. separación de la naturaleza / *integración con la naturaleza*; 19. motor de la sociedad: capital anónimo / *motor de la comuna: trabajo de los individuos*; 26. monocultura / *diversidad cultural*; 27. cantidad / *cualidad*; 32. ciencia y tecnología en manos de los especialistas / *ciencia y tecnología practicadas por todos*”, etc. (ver Plessis, óp.cit., pp. 199-200). Es interesante observar cómo la *suavidad grothendieckiana* se extiende aquí explícitamente a la política y a la cultura, e integra *naturalmente* el conocimiento y la vida, a la *maniera* “otra” de Grothendieck.

437 Ver abajo nuestros *Capítulos 14, 15* para precisiones y análisis.

> La degradación solo finaliza con la entrada de la meditación en mi vida (octubre 1976) [**1987**, §33, 118].

El entorno de 1981.

La enseñanza de Grothendieck siguió siendo importante en la década de los setenta y comienzos de los ochenta. Alrededor de temas de investigación, una decena de jóvenes y talentosos matemáticos se reunieron periódicamente con él en Montpellier, a los que se unieron Jean Malgoire y Christine Voisin, quienes seguirían allí como profesores. En particular, Monique Hakim (geometría de topos anillados, 1972), Hoàng Xuân Sính (grupos categóricos, 1975)[cviii], Yves Ladegaillerie (cortes e isotopías en superficies topológicas, 1976)[cix] y Carlos Contou-Carrère (geometría de grupos, equivarianzas y variedades, 1983) terminaron en esa época sus tesis (doctorales o de estado) bajo Grothendieck[cx].

Las experiencias alternativas acumuladas en Montpellier hacen que Grothendieck

---

cviii Sính había sido estudiante de Grothendieck en Vietnam en 1967, y todo indica que mantuvo con él una "intensa relación personal" periódicamente hasta 1975 (ver Scharlau, óp.cit., Cap. 14, "Grothendieck's seminar in Montpellier"). Sính se convirtió luego en la primera mujer en ser profesora titular en un campo científico en una universidad vietnamita.

cix Los recuerdos de Ladegaillerie, entre 1973 y 1976, son particularmente vivos: "Desde 1973, Alexander Grothendieck vivió en Villecun, una aldea cerca de Lodève (a 60 km de Montpellier), en una casa vieja y desvencijada. La casa no tenía confort, pero, como decía, poseía un alma. Las tardes se alumbraban con una vieja lámpara de aceite, y había leche de cabra y comida orgánica producida localmente, que Alexander comía con palitos, una costumbre adoptada en Vietnam. Era básicamente vegetariano. Su casa estaba abierta a todos. (...) Alexander manejaba un viejo Citroën 2 CV, primero sin permiso de conducir, puesto que había fallado el examen muchas veces [9 veces (!) según su hija Johanna, ibíd., Cap. 11]. (...) Dormía en una tira de tablas sobre el suelo. Me contó que se sentía bien en ella, ya que en el campo de concentración se había sentido bien en una tira similar, que le había servido de único refugio en ese momento. (...) Me dedicó una gran cantidad de tiempo y demostró una paciencia ejemplar al introducirme a su manera de hacer matemáticas. (...) En París había yo tenido como profesores a algunos de los más brillantes matemáticos del momento, de Schwartz a Cartan, pero Grothendieck era completamente diferente, como de otro mundo. En vez de traducir las cosas a otro lenguaje, pensaba y hablaba directamente en el lenguaje de las matemáticas estructurales modernas, que había contribuido a crear", ver M. Artin y col. "Alexandre Grothendieck 1928-2014, Part 2". En: *Notices of the AMS* 63.4 (2016), págs. 401-413, pp. 401-402. Ese *sentido, casi musical, de escuchar directamente la voz de las estructuras* será resaltado varias veces por el mismo Grothendieck en *Récoltes et semailles* [**1983-86**]. Ver nuestro *Capítulo 14* abajo.

cx Para todo esto, ver Scharlau, óp.cit., Cap. 14, "Grothendieck's seminar in Montpellier".

piense y escriba de manera realmente diferente en *La longue marche à travers la théorie de Galois* [**1981**]. En *Récoltes et semailles* [**1983-86**], aparecen diversas menciones al giro matemático realizado en los alrededores del año 1981:

> He recordado la reflexión matemática más larga que perseguí de un solo jalón en los últimos catorce años. Se realizó de enero a junio 1981, y la llamé *La larga marcha a través de la teoría de Galois*. De una cosa a otra, tomé conciencia que el sueño despierto que perseguía esporádicamente desde hacía algunos años, que había terminado por tomar el nombre de "geometría algebraica anabeliana", no era otra cosa sino una continuación, "una consecución última de la teoría de Galois y en el espíritu sin duda de Galois". Cuando esa continuación se me reveló, en el momento de escribir el pasaje de donde extraigo la línea citada, una felicidad me atravesó, no disipada aún. (...) Eso me recuerda que retomar hoy la herencia de Galois es seguramente aceptar también el riesgo de la soledad, que fue suya en su tiempo [**1983-86**, 1.16].
>
> Ese descubrimiento [sobre mapas celulares y cuerpos de números asociados a un dibujo de niños – ver *Esquisse d'un programme* [**1984**], nuestro *Capítulo 12* abajo] (...) fue el punto de partida y el primer material de ese otro *sueño* matemático, de dimensiones comparables al de los motivos, que empezó a tomar forma solo tres años después (enero-junio 1981), con *La larga marcha a través de la teoría de Galois*. Esas notas y otras del mismo periodo (en dos mil páginas manuscritas) constituyen una ronda muy primeriza a través de ese "continente nuevo" que una observación trivial sobre un dibujo de niños me había dejado entrever [**1983-86**, 2.247].
>
> El "periodo de frenesí" se extiende de febrero a junio 1981. Es el de *La larga marcha a través de la teoría de Galois*. (...) Desemboca sobre un largo periodo de meditación sobre mi relación con la matemática (...) que va del 19 de julio hasta diciembre 1981 [**1983-86**, 3.522].
>
> Sin haberlo previsto ni buscado, mi programa se renovó, al tiempo con mi visión y mi aproximación de las cosas matemáticas. A lo largo de los años, el acento se desplazó tanto en los temas, como en los propósitos: en vez de llevar a cabo grandes *tareas* de fundamentos meticulosos, mi primer propósito ahora es sondear los *misterios* que me han fascinado más, como aquel de los "motivos", o aquel de la descripción geométrica del grupo de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sobre $\mathbb{Q}$. Al hacer camino, por cierto, no podré impedirme esbozar algunos fundamentos aquí y allá, como inicié a hacerlo (entre otros) en *La larga marcha a través de la teoría de Galois*, o como ahora lo hago en la *Persecución de los campos*. El propósito ha cambiado sin embargo, así como el estilo que lo expresa. Por decirlo de otra manera: he entrevisto en los últimos diez años cosas misteriosas y de una gran belleza en el mundo de las cosas matemáticas. No son cosas personales, están hechas para ser comunicadas – el sentido mismo

> de haberlas entrevisto, así lo siento, es el de comunicarlas, para ser retomadas, comprendidas, asimiladas... Pero comunicarlas, así sea solo a mí mismo, es también profundizarlas (...) [**1983-86**, 1.138-139].

La fascinación por el *misterio*, por el *sondeo*, por la *belleza* de los objetos matemáticos, por la *profundidad* de la tarea, acerca de nuevo naturalmente Grothendieck a *Moby-Dick*. En ese proceso, como veremos, la renovación del *estilo*, muy cercano al acto mismo de la *emergencia creativa*, abre compuertas inesperadas para poder obtener un mejor entendimiento global –*volcán y mar*– de la obra grothendieckiana.

Resumen mínimo.

La longue marche à travers la théorie de Galois [**1981**] es un manuscrito inédito, escrito entre enero y junio 1981, no destinado a publicación, que cubre cerca de 1600 páginas en el texto principal y cerca de 1000 páginas adicionales en notas y *addenda*. Algunas transcripciones parciales son las siguientes: *(i)* Tomo 1 §§1-37: *La longue marche à travers la théorie de Galois: transcription d'un manuscrit inédit* (ed. Jean Malgoire), Montpellier: Université de Montpellier, 1995, 253 pp. *(ii)* Tabla de Contenidos + Tomo 1 §§26-37 + Tomo 2 §49 (ed. Leila Schneps), disponibles en www.grothendieckcircle.org[cxi]. Debe observarse que algunas ideas centrales de *La longue marche à travers la théorie de Galois* se integran luego dentro de *Esquisse d'un programme* [**1984**] (ver nuestro *Capítulo 12* abajo). En lo que sigue de este resumen mínimo, sintetizamos algunos temas principales de la *transcripción Schneps* (*Tabla de Contenidos*, *Tomo 1 §§26-37*, *Tomo 2 §49*). En nuestra descripción más extensa (abajo) volveremos sobre algunos parágrafos iniciales del manuscrito (*transcripción Malgoire*, *Tomo 1 §§1-37*).

cxi La descripción más completa y un breve estudio del manuscrito se encuentran en L. Schneps. "Grothendieck's «Long March through Galois Theory»". En: *Geometric Galois Actions. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme.* London: Cambridge University Press, 1997, págs. 59-66.

Tabla de Contenidos (compilada por el mismo Grothendieck). Tomo 1 §§1-37: topos multigaloisianos, cubrimientos de topos, variaciones pro-multigaloisianas, "conjetura anabeliana fundamental", ajustes de hipótesis, analogía topológica ("donde el desorden de los grupoides puede expresarse completamente, en los casos anabelianos, por los grupos exteriores de lazos"), caso aritmético, digresión cohomológica, cubrimiento de huecos, torre de Teichmüller, espacios y grupos de Teichmüller, profinitud y discretización, enlace con el topos modular de Teichmüller, cambios de tipos, relaciones entre los espacios de Teichmüller ("donde se reconstituye todo el topos *étale* de una curva algebraica completa, a partir del π_1 de un abierto anabeliano"), isomorfismo entre el grupo de Galois absoluto y $T_{1,1}$, módulos de curvas elípticas vía Legendre. Tomo 2 §§38-53 ("de carácter aún más exploratorio", según los transcriptores): relaciones y variados cálculos específicos asociados al caso $(g, n) = (0, 3)$, grupos $M_{g,n}$ generales, esquemas en grupos, "la torre de Fermat", aproximaciones tipo Lie de sistemas Galois-Teichmüller, el grupo especial de Teichmüller $ST_{1,1}$. – Emergencia de un *nuevo estilo*: conjeturas, reflexiones, digresiones, ajustes, crítica, heurística, paráfrasis, cambios de notación, "peleas", cálculos, borradores...

Tomo 1 §§26-37. §26. "Grupos de Teichmüller profinitos (discretificación y prediscretificación)" (1-10)[438]. Grupo profinito a lazos (de tipo (g, ν)), grupo de Teichmüller extendido, bases, discretificaciones, subgrupos de Teichmüller geométricos, grupos Γ_Σ (vía enlaces con automorfismos exteriores aritméticos), "determinar la indeterminación de manera precisa" (5), conjetura $\Gamma_\mathbb{Q} \approx Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$, conjeturas asociadas a la descripción del grupo absoluto como cociente. §27. "Cambios de tipo (g, ν)" (10-17). Cocientes, bases, normalizadores, isomorfismos canónicos (en la red de los $\Gamma_{g,\nu}$). §28. "Cambios de tipo (g, ν) (sigue)" (17-23). Enlaces entre discretificaciones, consecuencias sobre la red de los Γ_Σ, grupoides asociados, caso del grupoide de curvas aritméticas exteriores. §29. "Crítica

[438] Las referencias numéricas siguientes (entre paréntesis) corresponden a las páginas de las transcripciones disponibles en www.grothendieckcircle.org.

de la aproximación anterior" (24-29). "La aproximación de los parágrafos anteriores parece finalmente muy brutal" (24), trabajo con subgrupos más pequeños, estructura simplicial de extensiones sucesivas (estructura en el infinito dentro del π_1 de multiplicidades modulares $M_{g,\nu}$), descripciones estructurales (cocientes, transportes), categoría de recubrimientos universales con fibras grupoides (emergencia de los *stacks*). §30. "Propiedades de los $N_{g,\nu}$, $\Gamma_{g,\nu}$" (29-33). Acciones, centralizadores, subgrupos finitos, "conjeturas estándar topológicas" (32). §31. "Digresión sobre los elevamientos de una acción exterior de un grupo finito G sobre un grupo profinito a lazos π" (33-34). Problema de extensión de los desarrollos anteriores al caso profinito. §32. "Regreso sobre los aspectos aritméticos del llenar huecos: relaciones entre $\Gamma_{g,\nu}$ y $\Gamma_{g,\nu-1}$" (34-50). Límites proyectivos para una eventual representación fiel de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, equivalencias de categorías "aritméticas" y "algebraicas", reconstrucciones axiomáticas de las redes a partir de "datos puramente grupoidales y topósicos" (47), conjeturas provisorias, dudas, círculos viciosos. §33. "Digresión topológica: anti-involuciones de superficies orientadas algebroides" (50-66). Estudio y descenso a tierra de las construcciones anteriores, al mirar casos concretos: discos, esferas, cilindros, grupo modular, grupos dihedrales, etc. §33bis. "Estudio de recubrimientos finitos – relación entre los $N_{g,\nu}$ y $\Gamma_{g,\nu}$ para g variable" (66-69). "Se desearía ver lo que en el yoga anterior es independiente de toda conjetura" (67), "creo poder mostrar, gracias al resultado del ruso [Drinfeld] que me señaló Deligne, que $\Gamma_{\mathbb{Q}} \to \Gamma_{0,3}$ es un isomorfismo" (68), "la cuestión esencial es caracterizar $\Gamma_{0,3}$ algebraicamente, así como los $N_{g,\nu}$" (68). §34. "Descripción heurística profinita de la categoría de curvas algebraicas definidas sobre subextensiones finitas K de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$" (69-72). Estudio de los puntos algebraicos de una variedad modular $M_{g,\nu}$ con grupos fundamental aritmético y geométrico dados. §35. "La inyectividad de $\Gamma_{\mathbb{Q}} \to Autext_{lac}(\widehat{\pi}_{0,3})$" (72-77). Prueba del teorema enunciado vía el entendimiento preciso de $\widehat{\pi}_{0,3}$ (Belyi). §36. "El isomorfismo $\Gamma_{\mathbb{Q}} \approx \Gamma_{1,1}$" (77-89). Acciones naturales fieles de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, presentaciones diversas de $\pi_{0,3}$, estudio del "topos modular $M_{1,1}$ clasificador de las curvas elípticas" (83). §37. "Teoría de módulos de curvas elípticas según Legendre (rigidifación de escala 2)" (89-110). Esquemas ligados al topos modular, enlace con Deligne-Mumford, recubrimientos galoisianos universales, "curva de Fermat" (107).

Tomo 2 §49. Un nuevo estilo: recorridos explícitos por los caminos de la invención y el descubrimiento. Multitud de cálculos específicos (*e.g.* numeración de 37 fórmulas en §49.I, 95 fórmulas en §49.II, etc.), incesante vaivén reflexivo sobre el desarrollo del texto (retomas, rectificaciones, llamados de atención, etc.), modificación progresiva de las hipótesis (inconvenientes, obstrucciones, generalizaciones, deducciones parciales, etc.), búsqueda permanente de las notaciones más sencillas posibles (lucha entre lo particular y lo general, adecuaciones locales, etc.) Ejemplos del *nuevo estilo*: "Retomemos la situación *ab ovo*" (7) – "Para una rectificación sistemática de las notaciones que siguen (...)" (7) – "Atención" (8, 83) – "Me parece que la introducción (...) no era muy juiciosa (...)" (9) – "No parece *a priori* que haya inconvenientes mayores en suponer (...)" (10) – "Debe poder sin inconveniente postularse la existencia de una escisión canónica (...)" (11) – "Tenemos casi (...)" (11) – "Remordimiento. Finalmente, en todos estos desarrollos, no se ha realmente utilizado la denominada «hipótesis fundamental» (...)" (16) – "Habría sido mejor (...)" (19) – "Observación. Al escribir las relaciones, resultaba evidente que las notaciones utilizadas en toda esta sección eran inadecuadas (...) pues me había inspirado del caso modular y no del caso universal (...)" (20) – "Me parece haber visto suficiente para poder retomar «a mano alzada» las construcciones anteriores y acabarlas, con notaciones más adecuadas" (36) – "Vamos a intentar salvar la apuesta (...)" (62) – "Me pregunto si (...)" (63) – "Me planteo la cuestión si (...)" (69) – "Sería tiempo de rectificar la confusión (...)" (79) – "Por lo tanto habría que introducir también, que lo queramos o no (...)" (80) – "Me doy cuenta de que estoy diciendo tonterías, al haber perdido un poco el contacto con el contenido geométrico de mis cálculos" (89) – "La obstrucción, como se debe (...)" (91) – "La obstrucción se interpreta (...)" (91) – "Recapitulación, refinamiento (...) habría más bien que parafrasear (...) dudo en introducir notaciones (...)" (102) – "La incomodidad resulta finalmente del hecho de que es demasiado grande (...)" (114) – "Podemos también hacer una hipótesis adicional (...)" (115) – "Tengo buenas razones para pensar que esa condición se satisface en todos los casos verdaderamente útiles" (115) – "¿Otra manera de proceder?" (116) – "Tal vez haya aún errores de orientación bastante groseros, que se rectificarán con el examen de casos particulares" (116) – "Este deshielo de los grupos da un poco de mareo [*mal de mer*]" (117).

Descripción más extensa.

El "mal de mar" y las lavas volcánicas se traslapan en *La longue marche à travers la théorie de Galois* [**1981**]. El manuscrito burbujea de una inventividad irrefrenable, y se adentra en dos de las *inversiones* fundamentales que Grothendieck propondrá en la década de los ochenta: *(A)* la creación de un *álgebra topológica* donde las estructuras del álgebra pretenden capturarse por propiedades topológicas (inversión de la topología algebraica de Poincaré, donde las estructuras topológicas se caracterizaban por propiedades algebraicas), *(B)* el estudio de los *espacios moduli* en la torre de Teichmüller, modelos particulares que orientan una organización *posterior* general de la clase de variedades en juego (inversión del proceso universal/abstracto → particular/concreto, usado en la década de los sesenta). A su vez, estos procesos se acompañan de *(C)* una gran *libertad* expresiva, donde se observa fielmente la *eruptividad* del matemático: gestualidades, penumbras, dudas, apuestas, rectificaciones, usualmente escondidas en una escritura arquitectónica depurada. En lo que sigue de esta descripción nos ocuparemos de estos aspectos *(A)-(C)* a lo largo de los parágrafos iniciales de la *transcripción Malgoire*[439] [**1981**].

[439] Como vimos, la "Tabla de Contenidos" de la *Longue Marche*, compilada por el mismo Grothendieck, incluye 53 parágrafos [**1981**, pp. i-v], de los cuales sólo se han transcrito los 37 primeros.

El §1 del manuscrito, "Topos multigaloisianos", introduce un entorno categórico con el cual Grothendieck va a poder estudiar las acciones de los grupos de Galois $Gal(\overline{K} : K)$, donde K es un cuerpo de números algebraicos sobre $\mathbb{Q}$, y sus conexiones con los grupoides y grupos fundamentales de los espacios *moduli* M_g[440]. Grothendieck propone ante todo cuatro condiciones equivalentes[441] sobre una categoría, mediante las cuales define un *topos multigaloisiano*. La caracterización central dice que $\mathcal{E}$ es un topos multigaloisiano si y sólo si $\mathcal{E}$ es equivalente a la categoría dual de la categoría $\mathcal{C}$ de puntos[LV] de $\mathcal{E}$ [**1981**, 1]. Con ello, Grothendieck obtiene (el dual de) un ambiente de prehaces ($\mathcal{E}$) determinado por un grupoide ($\mathcal{C}$) que captura la idea de *grupoide fundamental del topos* ($\mathcal{C}= \Pi_1(\mathcal{E})$) [**1981**, 1]. Por otro lado, emergen cinco condiciones equivalentes[442] para describir un *recubrimiento universal* de un topos multigaloisiano. Si S es un objeto de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}/S$ recubre universalmente a $\mathcal{E}$ si el funtor representable $Hom_{\mathcal{E}}(S, -)$ es también representable sobre $\mathcal{C}$ [**1981**, 2]. Con esto, "darse un punto del topos multigaloisiano, o darse un recubrimiento universal, resulta ser esencialmente lo mismo: cada uno determina al otro" [**1981**, 2]. Así, en las dos primeras páginas del que será su monumental tratado, Grothendieck imbrica ya la herencia de Galois (grupoides fundamentales) con la herencia de Riemann (recubrimientos), y las sitúa en el corazón mismo de su empresa.

El §2, "Aplicaciones a recubrimientos de topos" [**1981**, 3-4], plantea la posibilidad

440 Ver nuestra *Nota xlix* arriba, p. 179.

441 Desde el inicio, los tanteos son manifiestos: para una de las implicaciones, el autor indica que "tal vez haya que suponer" conexidad local o suficiencia de puntos [**1981**, 1].

442 Algunas condiciones tienen que ver con propiedades de conexidad en un topos (0-conexidad generalizando conexidad, 1-conexidad generalizando conexidad simple) [**1981**, 1-2], suerte de germen de un "ambiente riemanniano" que se desarrolla inmediatamente a continuación.

LV Los puntos de $\mathcal{E}$ son los morfismos geométricos $Con \to \mathcal{E}$ (funtores adjuntos tales que el izquierdo preserva límites finitos). La generalización de la noción de punto en la teoría de locales puede verse como un paso intermedio hacia la noción de morfismo geométrico. Los morfismos geométricos son los transmisores naturales de información lógica, algebraica y topológica en la categoría de topos de Grothendieck.

de construir sucesiones $\mathcal{E} \to \cdots \mathcal{E}_{[i]} \to \mathcal{E}_{[i-1]} \to \cdots \mathcal{E}_{[1]} \to \mathcal{E}_{[0]}$, “mediante hipótesis convenientes sobre $\mathcal{E}$ (de tipo contractibilidad local)”, donde $\mathcal{E}_{[0]}$ es el topos discreto definido por $\Pi_0(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}_{[1]}$ es una “envolvente multigaloisiana” de $\mathcal{E}$, y los $\mathcal{E}_{[i]}$ aparecen como secciones (que “deben poderse definir” [**1981**, 4]) en un recubrimiento conjetural de $\mathcal{E}$. El carácter exploratorio del texto (hipótesis ajustables, definiciones eventuales) se refuerza con el título del §4, “Complemento-remordimiento sobre las categorías multigaloisianas”[443] [**1981**, 5]. El remordimiento “precisa la intención que, para un topos $\mathcal{E}$, el dato de un objeto $S \in \mathcal{E}$ define un topos inducido $\mathcal{E}/S \to \mathcal{E}$, y que S se reconstituye módulo isomorfismo por el conocimiento del topos inducido como topos *por encima* de $\mathcal{E}$” [**1981**, 5]. De esta manera, el paradigma de la variación de la base[444] resurge en un entorno categórico que va a pretender cubrir las variaciones de las extensiones de campos (en particular, de los campos de números, extensiones algebraicas de $\mathbb{Q}$). En efecto, “si k es un campo base, la categoría $\mathcal{E}$ de los esquemas *étales* sobre k se describe, en términos de una clausura separable k_s de k y del grupo profinito $\Gamma = Gal(k_s : k)$, como los grupoides profinitos por encima del grupoide profinito (pt, Γ)...” [**1981**, 5].

A partir de aquí, el §5, “Introducción del contexto aritmético, la «conjetura anabeliana» fundamental” [**1981**, 7-9], se adentra en el corazón mismo de *La larga marcha a través la teoría de Galois*. En efecto, si K es una extensión de tipo finito sobre $\mathbb{Q}$, $\overline{K}$ es una clausura algebraica de K y $\Gamma = Gal(\overline{K} : K)$, el estudio (1) aritmético, (2) algebraico, (3) geométrico y (4) topológico de las *acciones* de Γ sobre (1) curvas, (2) esquemas, (3) espacios *moduli* y (4) dibujos de niños se convierte en el programa central de la *Longue*

---

443 El §3, “Variantes pro-multigaloisianas, respectivamente profinitas” [**1981**, 4] solo incluye el título. En el §4 aparece en francés “complément-remord”, con un lapsus (debería ser “remords”) que puede provenir de la transcripción, pero que también puede ser típico de Grothendieck, quien a menudo incurría en fallas de ortografía. Su carácter “infantil” (ver nuestros *Capítulos 14-16* abajo) se refleja también así en ciertos fragmentos de tipografía “ingenua”.

444 Recuérdese el “lenguaje módulo C” de Serre (ver arriba, p. 106) y sus consecuencias metodológicas sobre las categorías cociente.

marche [**1981**] y del *Esbozo de un programa* [**1984**]. Grothendieck empieza estudiando el caso de los pares (X, S) donde X es un esquema proyectivo liso sobre K de dimensión ≤ 1 y S es un subesquema finito reducido[445] apropiado [**1981**, 7]. Se puede entonces pensar en la *categoría* formada por los pares (X, S) con morfismos de esquemas $(f : X' \to X)$ que preservan inversamente los soportes $(supp(S') = f^{-1}supp(S))$, y el objetivo consiste en buscar "una «descripción galoisiana» de esta categoría" [**1981**, 7]. En el caso en que X es una curva proyectiva lisa conexa sobre Ω campo algebraicamente cerrado y S es una parte finita de X, si $\mathcal{U} = X \setminus S$, g es el género de X y $n = card(S)$, Grothendieck enuncia la equivalencia de tres condiciones *(i)* $\pi_1(\mathcal{U})$ no abeliano, *(ii)* $Aut(\mathcal{U})$ finito, *(iii)* disyunción $(g \geq 2)$ o $(g = 1, n \geq 1)$ o $(g = 0, n \geq 3)$, y define que el par (X, S) es *anabeliano* si verifica alguna de las tres condiciones anteriores[446] [**1981**, 7].

Como a todo esquema X localmente de tipo finito sobre S (y, en particular a los pares (X, S) recién mencionados, ya sean anabelianos o no) se le puede asociar "un objeto «de naturaleza galoisiana», a saber el grupoide fundamental profinito $\Pi_1(X)$" [**1981**, 7], asignación que resulta ser funtorial y puede localizarse en un punto $(X \mapsto \pi_1(X, \xi))$[447],

---

445 Un esquema X es *reducido* si sus anillos estructurales $\mathcal{O}_U(X)$ (para todo abierto U) no poseen nilpotentes no nulos. Todo esquema finito reducido es finito *étale* [**1981**, 7]. Como a menudo sucede, las hipótesis de Grothendieck proveen un *ambiente de suavización* donde pueden emerger ciertas *conjeturales naturales*. Aquí, la proyectividad, la lisura, la finitud y la reducción proveen el ambiente plástico que lleva naturalmente a las conjeturas anabelianas.

446 Además, en el caso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, propone otra condición equivalente: el recubrimiento universal de $X \setminus S$ es isomorfo al semiplano de Poincaré [**1981**, 7]. Y en el caso $\Omega = \overline{\mathbb{Q}}, S \neq \emptyset$, surge otra condición más: el recubrimiento universal de $X \setminus S$ es isomorfo a $\mathbb{P}^1_\Omega \setminus \{0, 1, \infty\}$ [**1981**, 7]. Esta última equivalencia se acompaña de un significativo signo "??" en el margen, y puede verse como la primera intuición de sus ideas posteriores sobre los *dibujos de niños* (ver nuestro *Capítulo 12* abajo). Vemos cómo se combinan en estos *flashs* iniciales intuiciones globales y dudas particulares, estructuras profundas y ejemplos concretos, comenzando a desarrollarse así un *nuevo estilo* en el pensamiento de Grothendieck.

447 ξ es un punto geométrico sobre $\overline{K}$ y $\pi_1(X, \xi)$ es el grupoide fundamental profinito sobre $\pi_1(K, \xi)$ [**1981**, 9]. Recuérdese, en otro contexto, el *grupoide fundamental* de una categoría galoisiana (ver arriba, p. 230): las investigaciones de Grothendieck siempre ofrecen múltiples contrapuntos, *a la búsqueda de arquetipos perdidos* que permitan cobijar suavemente la multiplicidad matemática. Estudiaremos algunas conexiones con *A la búsqueda del tiempo perdido* de Proust en nuestro *Capítulo 18* abajo.

la *conjetura anabeliana fundamental* consiste entonces en asegurar que la restricción de ese funtor a los pares anabelianos es pleno y fiel[448] (con lo que una variedad anabeliana estaría completamente *caracterizada* por su grupo fundamental[cxii])[449] [**1981**, 9]. Debe observarse aquí la *inversión esencial* del programa propuesto por Poincaré en la *topología algebraica*: mientras Poincaré construye objetos algebraicos (grupos de homología y homotopía) para intentar caracterizar objetos topológicos, Grothendieck percibe las mareas del *álgebra topológica* y construye objetos topológicos (grupos profinitos fundamentales) para intentar caracterizar objetos algebraicos (variedades y esquemas). Así como la *conjetura de Poincaré* dio lugar a un siglo de técnicas extraordinarias, la *conjetura anabeliana* de Grothendieck está dando lugar ahora a un despliegue de fascinantes matemáticas.

[448] Una conjetura previa (5.5) propone una caracterización sin puntos geométricos, a lo cual Grothendieck añade a pie de página: "es un poco falso" [**1981**, 9]. La progresiva precisión de la conjetura anabeliana (5.5 bis) toma muchas de las páginas posteriores de la *Longue marche*.

[449] Siguiendo el comentario de Schneps, puede observarse en Japón una de las grandes ramificaciones de la obra de Grothendieck. Por otro lado, si se combina esa recepción japonesa con las fuertes penetraciones en las escuelas rusa (Drinfeld, Kontsevich, Voevodsky), norteamericana (Mumford, Quillen), inglesa (Atiyah) y francesa (Connes, Lafforgue), por solo mencionar una pléyade de Medallistas Fields cercanos a su obra, se alcanza a sentir plenamente la *universalidad* de la influencia grothendieckiana.

[cxii] Resulta útil aquí una descripción actualizada (1997) de esa conjetura. Según Leila Schneps, uno de los dos temas principales de la *Longue marche* es: "1. *Geometría anabeliana.* Sea X una variedad algebraica definida sobre un campo K, y sea x un punto geométrico de $X_{\overline{K}} = X \otimes \overline{K}$. Existe entonces una sucesión *split* exacta $1 \to \widehat{\pi_1}(X_{\overline{K}}, x) \to \widehat{\pi_1}(X_K, x) \to Gal(\overline{K} : K) \to 1$, donde $\widehat{\pi_1}(X_{\overline{K}}, x)$ denota el grupo fundamental algebraico de X, isomorfo a la compleción profinita del grupo fundamental topológico de X, y $\widehat{\pi_1}(X_K, x)$ es el grupo fundamental *mixto* o *étale* o *aritmético*, isomorfo al producto semidirecto $\widehat{\pi_1}(X_{\overline{K}}, x) \rtimes Gal(\overline{K} : K)$ (...) La pregunta anabeliana es: *¿cuánta información sobre la clase de isomorfismo de la variedad X se encuentra en el conocimiento del grupo fundamental étale?* Grothendieck llama *variedades anabelianas* aquellas variedades que se encuentran completamente determinadas por sus grupos fundamentales *étales*; su "sueño anabeliano" consiste en clasificar las variedades anabelianas en todas las dimensiones sobre todos los campos. Sobre $\mathbb{Q}$, espera que los espacios *moduli* $M_{g,n}$ sean ejemplos anabelianos básicos. En el caso particular de dimensión 1, conjeturó que todas las curvas hiperbólicas definidas sobre campos de números eran variedades anabelianas, una conjetura primero probada para líneas proyectivas punteadas por Nakamura (inicio de los 90s), para curvas afines por Tamagawa (1995) y finalmente para todas las curvas hiperbólicas definidas sobre campos de números por Mochizuki (1996)". Véase ibíd., pp. 59-60.

El §6, "Análisis local de (X, S) en un $s \in S$" [**1981**, 9-11], introduce consideraciones aritméticas en ámbitos locales (henselizados, cuerpos residuales, sistemas de Tate, multidiscos y multicoronas aritméticas) y plantea diagramas de grupoides (Π) y de grupos (π) que capturan en parte esos tránsitos locales. El §7, "Reformulación «desordenada» de la conjetura (el purgatorio necesario)"[450] [**1981**, 11-26], es un buen ejemplo del *laboratorio categórico grothendieckiano* en acción. A cada (X, S) (con las propiedades asumidas al inicio del §5), Grothendieck le asigna un noneto canónico de (tres) grupoides y (seis) funtores [**1981**, 11-12], que capturan universalmente las propiedades libres de conmutatividad aritmética asociadas a la situación. A su vez, a un nivel 2-categórico, los morfismos entre los nonetos forman una categoría (en realidad, un grupoide)[451] [**1981**, 13]. Los nonetos con sus morfismos forman una categoría *bordélique* $\mathcal{B}$, donde literalmente estalla la información categórica ligada a los esquemas, y se obtiene un funtor de la categoría de los pares (X, S) en la categoría $\mathcal{B}$. Grothendieck propone entonces su *conjetura bordélique* (7.1): al reducirse a los (X, S) donde X es proyectivo, liso, de dimensión ≤ 1 y *anabeliano*, el funtor anterior resulta ser pleno y fiel[452] [**1981**, 14]. El resto del §7 consiste en reformular "la

450 El término usado por Grothendieck es "*bordélique*", adjetivo burlón del lenguaje corriente para "desorganizado", "desastroso", "estallado". El "*bordel*" se conecta con el "purgatorio", espacios de una *obra negra* en gestación, como se ve en las páginas del §7, cubiertas de ensayos categóricos y de diagramas conmutativos que se pliegan [**1981**, 11, 13, 19, 23] y despliegan [**1981**, 12, 16, 18] sobre el papel, a la búsqueda de una concisión sintética que tarda en llegar.

451 Este hecho puede verse como un encuentro natural con las n-categorías, que Grothendieck desarrollará luego en *Pursuing Stacks* [**1983**]. Ver nuestro siguiente *Capítulo 11* abajo.

452 Una nota marcada (**) a pie de página señala que "la fidelidad es fácil"... [**1981**, 14]. Por otro lado, el §7 exhibe muchas dudas en problemas de unicidad: "solamente?", "isomorfismo?", "único??", "un núcleo?", etc. [**1981**, 15, 18, 19, 21]. Ciertas propiedades de *unicidad* son siempre fundamentales para Grothendieck, ya que están estrechamente ligadas a sus búsquedas de *naturalidad*. La importancia de la *marcha* es aquí manifiesta: Grothendieck desbroza un panorama como andando en zigzag en la *selva oscura* del Dante. El *carácter exploratorio de la marcha* nos permite apreciar la riqueza inventiva de un gran matemático, que percibe una cima a lo lejos y que luego debe construir todo un complejo andamiaje de redes y caminos para acceder a esa cima.

categoría *bordélique* en términos de teoría de grupos"[453] [**1981**, 14], hasta caracterizar sus objetos como *morfismos de grupos profinitos* y sus morfismos como *torres de adecuación* entre los distintos niveles[454] de los grupos profinitos [**1981**, 18-19].

Después de haber presentado en detalle la *emergencia* de la conjetura anabeliana, recorreremos ahora más rápido los parágrafos siguientes de la *Longue marche* [**1981**]. En una larga serie de observaciones que pretenden ir refinando la conjetura *bordélique* mediante el *estudio de casos particulares*, Grothendieck recorre fragmentos de la aritmética (§8, "Reflexiones taxonómicas" – conjetura de Mordell, teorema de Fermat [**1981**, 30]), del álgebra diferencial (§9, "Estructura tangente sobre los $s \in S$" – estructuras de torsión [**1981**, 35]), del álgebra geométrica (§11, "Condiciones sobre los sistemas de grupoides obtenidos a partir de situaciones geométricas" – subgrupos abiertos, homomorfismos exteriores [**1981**, 37]), de la topología (§12, "La analogía topológica" – recubrimientos, grupoides fundamentales, topos [**1981**, 40]). El *back-and-forth*, los ires y venires, los zigzags, los regresos sobre las páginas previas son constantes (§10, "Ajuste de las hipótesis (remordimiento)" [**1981**, 36]; §13, "Regreso al caso aritmético" [**1981**, 48-49]; §13bis, "Regreso sobre la noción de grupo con lazos" [**1981**, 50-51]; §15, "Regreso al caso topológico" [**1981**, 62-70]; §17, "Complementos sobre las operaciones de grupos finitos sobre las superficies" [**1981**, 79-80]), y resulta patente el *proceso sinusoidal de la creación*, donde los ajustes permanentes del autor van refinando el tejido conjetural. El §16, "Tapadura [*bouchage*] y perforación [*forage*] de huecos. Preliminares toposicos generales" [**1981**, 71-78], provee justamente el

[453] Las traducciones se hacen en términos de núcleos, sucesiones exactas, morfismos inyectivos, espectros, factorizaciones canónicas, conmutaciones [**1981**, 14-25]. Los enlaces con la maestría técnica del *Tôhoku* [**1955-56**] son manifiestos, exhibiendo, una vez más, la *continuidad profunda* del pensamiento grothendieckiano, más allá de quiebres en el estilo o de modificaciones en la metodología de investigación.

[454] Esto se enlaza conceptualmente con la torre de Teichmüller (ver *Sección 6.3* arriba), así como con los desarrollos posteriores sobre la acción del grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ y su teoría combinatoria en la *Longue marche* [**1981**] (ver esta sección abajo) y en *Esquisse d'un programme* [**1984**] (ver *Capítulo 12* abajo).

entorno categórico general en el cual pueden rellenarse los diversos huecos encontrados al marchar. El resultado lleva a un diagrama de topos que corresponde al diagrama de grupoides que inicia los apuntes de la *Longue marche* [**1981**], y con el cual Grothendieck se siente satisfecho: "Tengo la impresión de haber entendido más o menos el mecanismo de las acciones de grupos sobre los topos multigaloisianos, y la operación de paso de un topos $\mathcal{B}$ operado por Γ al topos «cociente» $(\mathcal{B}, \Gamma) =$ «$(\mathcal{B}/\Gamma)$» (... «tapadura de huecos»). El momento parece entonces maduro para entenderse con la hipotética operación inversa de «perforación de huecos»" [**1981**, 78].

El vaivén tapadura/perforación (*bouchage/forage*) lleva a la teoría combinatoria de Galois[cxiii]. El §18, "Perforación [*forage*] de huecos. Aplicación a las acciones exteriores de grupos finitos" [**1981**, 81-87], estudia las correlaciones *naturales*[455] entre los grupos de homotopía no abelianos en superficies con huecos y las sumas amalgamadas de topos alrededor de puntos geométricos asociados a los huecos; como caso particular del enlace *grupos fundamentales – topos*, emerge el caso de "$T_{g,\nu}$ grupo fundamental del topos modular complejo $M_{g,\nu}$ de las curvas complejas"[456] [**1981**, 83]. A su vez, esto conduce al §19, "Torre de Teichmüller" [**1981**, 88-101], donde se estudian en abstracto (es decir, sin especificar aún a espacios *moduli*) los grupos de automorfismos de superficies *suaves*

455 La naturalidad está ligada a la *funtorialidad* y Grothendieck afirma: "Estas construcciones son tan funtoriales que conmutan con las acciones de grupo" [**1981**, 84].

456 Ver arriba nuestra *Sección 6.3*. Género g, con ν puntos especificados.

cxiii Schneps describe como sigue el segundo tema fundamental de la *Longue marche* [**1981**]: "2. *Teoría combinatoria de Galois.* El otro problema mayor examinado en la *Longue marche* es esencialmente si $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ puede identificarse/redefinirse/caracterizarse al considerar solo sus propiedades relacionadas con su papel de grupo de automorfismos de los grupos fundamentales algebraicos de los $M_{g,n}$, respetando la estructura natural «estratificada» de esos grupos, que proviene de la estructura correspondiente de los espacios mismos (*i.e.*, el divisor al infinito de $M_{g,n}$ está formado por espacios *moduli* de dimensión inferior)". Ver ibíd., p. 60.

adecuadas[457], así como sus descomposiciones algebraicas (vía conjugados, cocientes, estabilizadores, normalizadores, subgrupos exteriores). Se define así una torre de *grupos de Teichmüller* que luego (§21, "Enlace con los espacios de Teichmüller" [**1981**, 109-113]) Grothendieck conecta con los *espacios de Teichmüller* estudiados veinte años antes en las *Techniques de construction en géométrie analytique* [**1961**] (ver nuestro *Capítulo 6* arriba[458]). El resultado fundamental indica que los espacios de Teichmüller juegan el papel de *espacios clasificadores*[LVI] para los grupos de Teichmüller asociados [**1981**, 112], abriendo así nuevos caminos en el *corazón multivalente* del entronque entre aritmética, variable compleja, álgebra y topología: en el caso *anabeliano*, "el hecho de que $\widetilde{M_{g,\nu}}$ sea *simplemente conexo* (lo que puede expresarse al interpretar $\widetilde{M_{g,\nu}}$ como recubrimiento universal de un *topos modular* $\mathcal{U}_{g,\nu}$) es un resultado profundo que no parece poder entrar en el marco de la topología..." [**1981**, 112].

Después de algunos estudios de grupos de Teichmüller especiales, la *transcripción Malgoire* de la *Longue marche* [**1981**] termina con los §§26-37[459], que han sido descritos

457 La *suavidad* corresponde aquí a compacidad + conexidad + orientabilidad [**1981**, 88]. Con esas hipótesis, el dato del género g especifica el tipo de superficie de acuerdo con el teorema de uniformización para superficies de Riemann. Por otro lado, el dato $2g + \nu \geq 3$ (equivalente a la condición *(iii)* arriba, p. 292) asegura una situación de *anabelianidad*: un *entorno riemanniano alto para las $M_{g,\nu}$ que trasciende a la esfera de Riemann*, "único caso enteramente refractario" a ser tratado con herramientas anabelianas [**1981**, 101]. Así, en esta situación, la esfera de Riemann actúa como *arquetipo negativo inicial*, que espera subsanarse en el *ascenso* a otras superficies.

458 Los espacios T_g de 1961 se denotan $\widetilde{M_{g,\nu}}$ en 1981, en referencia más explícita a los espacios *moduli* y a los huecos/puntos fijados en un inicio. Una vez más, la *continuidad del pensamiento grothendieckiano* resulta explícita, por más de que ocurran *ligeramente* cambios de notaciones o se ahonden *profundamente* nuevas perspectivas.

459 Transcritos de hecho estos últimos por Pierre Lochak y Leila Schneps, como indica el mismo Malgoire [**1981**, *avertissement*].

LVI Dado un grupo discreto G, un *espacio clasificador* para G es un espacio topológico T adecuado tal que $\pi_1(T) \approx G$. El círculo S^1 es un espacio clasificador para $\mathbb{Z}$, así como el toro $S^1 \times S^1$ es un espacio clasificador para $\mathbb{Z}^2$. Por otro lado, los espacios proyectivos infinito-dimensionales real y complejo sirven (respectivamente) como espacios clasificadores para $\mathbb{Z}_2$ y para S^1 (entendiéndose en este último caso, de manera más amplia, la noción de espacio clasificador para un grupo topológico).

con cuidado por Schneps en su artículo[cxiv]. Los temas tienen que ver con dos descripciones de los grupos de Teichmüller (denotados $\Gamma_{g,\nu}$ en el caso de la teoría general aplicada a los espacios *moduli*) mediante sucesiones exactas, la segunda de las cuales[cxv] tiene la esperanza de poder caracterizar completamente los grupos en *todos los casos anabelianos*: $\Gamma_{g,\nu} \approx Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ siempre que $2g + \nu \geq 3$. Como señala Schneps, "Grothendieck observa que cree poder probar que $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ es isomorfo a $\Gamma_{0,3}$ usando el teorema de Belyi, y en los §§34-35 así lo hace, describiendo esencialmente los inicios de la teoría de los *dessins d'enfants*[460]"[cxvi].

10.2 Síntesis conceptual

La longue marche à travers la théorie de Galois [**1981**] provee un amplio arsenal de ideas, visiones y conjeturas, impulsadas gracias a un estudio meticuloso de los espacios *moduli* y sus grupos de automorfismos. Grothendieck combina a la vez perspectivas holísticas (tratamientos categóricos, torres) y observaciones particulares (espacios *moduli* concretos, tapaduras de huecos, dibujos de niños). El *todo* y la *parte* se conjugan admirablemente en su investigación, así como los procesos de la emergencia creativa (el *volcán*) y la suavización definicional-teoremática (el *mar*). El estudio de la *variabilidad algebraica* mediante herramientas topológicas y la develación de *estructuras universales* (grupo fundamental algebraico, grupo de Grothendieck-Teichmüller), detrás de Galois, Riemann y Poincaré, se adentran en los fundamentos del *álgebra topológica* en la década de los ochenta.

460 Ver *Esquisse d'un programe* [**1984**], nuestro *Capítulo 12* abajo.

cxiv Ver ibíd., pp. 62-64.

cxv Ver ibíd., p. 63.

cxvi Ver ibíd., p. 63.

Desde una perspectiva metodológica de conjunto, la primera década (1949-1957), con la *Tesis* [**1949-53**], el *Résumé* [**1953c**], el *Tôhoku* [**1955-56**] y el *Rapport* [**1955-57**], muestra al joven genio autodidacta orientándose de lo concreto a lo abstracto ("mis problemas"); la segunda década (1958-1970), con la visión del *ICM* [**1958**], los *EGA* [**1959-64**] y el *SGA* [**1960-69**], exhibe formas de descenso de lo abstracto a lo concreto; y, finalmente, la tercera década (1981-1991), con la *Longue marche* [**1981**], la búsqueda *Pursuing stacks* [**1983**], la *Esquisse* [**1984**] y los *Dérivateurs* [**1991**], remonta de nuevo los caminos de lo concreto a lo abstracto. Así, en un *incesante vaivén* matemático, metodológico y conceptual, Grothendieck recorre todo tipo de *variaciones topológicas y algebraicas*, a lo largo de un panorama extremadamente vasto, del que busca (y encuentra) sus invariantes y arquetipos principales.

En lo que concierne a la década de los ochenta, dos grandes temas se contraponen: *(i)* un entendimiento profundo de la topología y geometría de superficies (geometría anabeliana, teoría de Teichmüller, topología moderada, dibujos de niños), donde se estudian los procesos de *suavización combinatoria* de las superficies, a través de múltiples ejemplos particulares (descenso a lo concreto) y *(ii)* un entendimiento profundo de la homología y la homotopía categóricas (motivos, *stacks*, derivadores), donde se estudian los procesos de *suavización axiomática* de las homo/logías/topías, a través de amplias categorizaciones universales (ascenso a lo abstracto). El *pliegue* y el *despliegue* grothendieckianos –capturados en la dualidad esencial *étale* / *étalé*–[461] parece girar en la década de los ochenta alrededor de la *filosofía del no* de Bachelard[462]: aperturas a la geometría anabeliana (en lugar de lo abeliano), a los grupoides (en lugar de los grupos), al grupo fundamental *étale* (en lugar de lo ramificado), a la suavidad y la moderación (en lugar de lo singular).

---

461 Ver arriba, p. 52.

462 G. Bachelard. *La philosophie du non.* Paris: PUF, 1940.

Hemos visto cómo los dos temas esenciales de la *Longue marche* [**1981**] son (A) la *geometría anabeliana* y (B) la *teoría de Grothendieck-Teichmüller*. En lo que respecta al tema (A), resulta central el estudio de una variedad (álgebra – teoría de números – Galois) o esquema (Grothendieck) vía su grupo fundamental topológico (topología – geometría – Poincaré) o *algebraico* (Grothendieck). Dado un esquema X (automáticamente espacio topológico), se considera el grupo fundamental de homotopía $\pi_1^{top}(X, x)$ (Poincaré) para algún punto $x \in X$ (si X es arco-conexo se puede olvidar el punto base x), y la *compleción profinita* de $\pi_1^{top}(X)$ es por definición el *grupo fundamental algebraico* $\pi_1^{alg}(X)$ de X (Grothendieck). Este grupo clasifica lo *étale*, pues sus órbitas finitas continuas resultan ser precisamente los cubrimientos *étales* del esquema. Un ejemplo fundamental es el plano proyectivo P excepto tres puntos: en ese caso, el grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ actúa sobre $\pi_1^{alg}(P)$ y esconde fondos aritméticos profundos (dibujos de niños). El problema central del *álgebra topológica* resulta ser ¿cómo detectar o describir aquellas variedades X completamente caracterizadas por $\pi_1^{alg}(X)$? Se trata, por definición, de las *variedades anabelianas*, cuyas geometría y aritmética se encuentran así codificadas en el grupo fundamental algebraico (no abeliano). La conjetura esencial de Grothendieck consiste en afirmar que los espacios *moduli* $M_{g,\nu}$ constituyen las variedades anabelianas sobre $\mathbb{Q}$, y, como caso especial, que las curvas hiperbólicas sobre campos de números son anabelianas. Mochizuki resuelve en 1996 la conjetura particular[463] y se lanza desde entonces a su ambicioso programa de refundación de la *geometría aritmética*[464].

[463] S. Mochizuki. "The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields". En: *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 3 (1996), págs. 571-627.

[464] S. Mochizuki. *Inter-universal Teichmüller Theory I-IV*. inf. téc. Kyoto University, 2011-2012. Una fuerte polémica alrededor de los trabajos de Mochizuki (juzgados incomprensibles) se encuentra en pleno auge (2015-2018, véase el reporte de Ivan Fesenko, https://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/ibf/files/iut-i-rep.html). Es curioso observar cómo uno de los grandes herederos del programa anabeliano grothendieckiano se ve ahora envuelto en el mismo tipo de desconfianzas y "obscuridades" que envolvieron a su Maestro.

En lo que se refiere al tema (B), resulta central el estudio del grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ (álgebra – teoría de números – Galois) a través de sus *acciones sobre objetos geométricos* (variable compleja – geometría – Riemann). En un cierto sentido, tal como lo indica su mismo nombre, el grupo de Galois "absoluto" es una forma de *arquetipo* que espera ser entendido a través de sus acciones sobre diversos *tipos*: curvas, espacios *moduli*, grupos fundamentales (homotópico, algebraico), dibujos de niños, torres combinatorias. Partiendo de una variedad $M \in M_{g,\nu}$ y de su grupo fundamental de homotopía $\pi_1^{top}(M)$, Grothendieck considera su compleción profinita $\widehat{\pi_1^{top}(M)}$ y pasa a un estudio abstracto de los grupos profinitos de lazos, mediante automorfismos, automorfismos interiores, cocientes ($C_1(g,\nu)$), discretificaciones (bases del grupo) y caracteres ($C_2(g,\nu)$). Una estrategia para entender el grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ consiste entonces en presentarlo (§§26-28) como un cociente de la forma $C_1(g,\nu)/C_2(g,\nu)$, *uniformemente* sobre todo (g,ν) con $(2g+\nu \geq 3)$[cxvii]. Sin embargo, el mismo Grothendieck observa que se trata de una estrategia "muy brutal" [**1981**, 163], y que debe pasarse (§29) a "proceder de una manera más inductiva, partiendo de la presencia de $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ [en la torre de Teichmüller] (por razones aritmético-geométricas), e intentar despejar propiedades de esa presencia lo suficientemente fuertes como para terminar dando una caracterización puramente algebraica"[cxviii] [**1981**, 165]. En todo esto, podemos ver cómo Grothendieck *marcha en zigzag, despejando una justa armonización entre polaridades vitales*: visible/invisible, exterior/interior, discreto/continuo, local/global, red/compleción.

---

cxvii En realidad, Schneps indica que esta aproximación falla al menos en $(g,\nu) = (0,3)$ debido a un resultado posterior de Drinfeld. Ver Schneps, óp.cit., p. 62.

cxviii El programa será desarrollado luego por Drinfeld (1991), vía lo que denominará el *grupo de Grothendieck-Teichmüller* $\widehat{GT}$. Una descripción delicada de $\widehat{GT}$ se puede realizar mediante subgrupos y productos de $\widehat{F_2}$ (compleción del grupo libre con dos generadores), $\widehat{K_5}$ (compleción del grupo de trenzas de Artin) y $\widehat{\mathbb{Z}}$ (compleción de los enteros). Drinfeld conjetura que $\widehat{GT}$ resulta ser también el *grupo de automorfismos de la torre de Teichmüller* y se sabe que existe un homomorfismo inyectivo $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{GT}$ (Drinfeld, Ihara, Belyi). Una prueba de la conjetura abierta $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}) \approx \widehat{GT}$ proveería la "caracterización puramente algebraica" soñada por Grothendieck. Véase ibíd., pp. 64-66.

10.3 Ejemplo detallado: la marcha creativa

En la *Longue marche* [**1981**], el *zigzag* grothendieckiano resulta notorio en la *escritura misma* del manuscrito. Hemos observado en nuestro *Resumen mínimo*[465] cómo el *estilo* de Grothendieck en la *Longue marche* está enteramente abierto a la *pesquisa dubitativa*, con todo tipo de rectificaciones, remordimientos, preguntas, salvamientos, recapitulaciones, paráfrasis, caminos alternos, etc. Grothendieck resume la situación bajo la bella metáfora de un *deshielo* de las estructuras y de un "mal de mar" donde se pierde la orientación[466]. Imaginamos entonces al creador navegando dificultosamente entre las aguas altas, en un navío que debe someterse sin cesar a las inclemencias matemáticas del error y de la duda.

Las inclemencias son patentes en los manuscritos alrededor de la *Longue marche* [**1981**] existentes en el *Archivo Grothendieck*[467]. Por ejemplo, un manuscrito denominado "Primavera 1981"[468] contiene un texto principal atravesado con constantes tachaduras y observaciones al margen. Los *nota bene* (NB) recorren el manuscrito, intentando complementar los lineamientos iniciales de la *marcha* grothendieckiana. Las primeras páginas de cálculos se refieren a acciones de grupos sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$, demostrando el interés temprano de Grothendieck por el teorema de Belyi[LVII]. En la página 17 por ejemplo (ver

465 Ver descripción breve del *Tomo 2, §49*, arriba, p. 288.

466 Ibíd.

467 [**IMAG**, cotes 140-1/4 (c. 1978-1982), cotes 141-149 (c. 1978-1983)].

468 "Printemps 1981" [**IMAG**, cote 145 (1981)].

LVII El *teorema de Belyi* (1979) afirma que una curva X compleja, suave y proyectiva está definida sobre un campo de números si y sólo si existe un morfismo no constante $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (plano proyectivo complejo) con a lo sumo tres puntos críticos. En ese caso, X representa una superficie de Riemann compacta que es un cubrimiento ramificado de la esfera de Riemann ($S^1 \approx \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$) en a lo sumo tres puntos. Se trata de un teorema de representación que enlaza topología, variable compleja, teoría de números, álgebra y combinatoria en un *enunciado muy sencillo* que disparó la imaginación de Grothendieck. Obsérvese la reacción *inmediata* al teorema, pues debieron pasar sólo unos pocos meses entre el teorema y su recepción en los escritos de Grothendieck. Esto, como en muchos otros casos, muestra la *fina atención* que Grothendieck prestaba por lo que sucedía dentro de la comunidad matemática, contrariamente a los repetidos prejuicios sobre su aislamiento que se han hecho en la literatura secundaria.

Figura 10.1 abajo), vemos tachaduras, regresos al texto ("NB"), bloqueos ("no se ve..."), correcciones ("es falso..."). Las *aguas turbias* de la invención tienen poco que ver aquí con las supuestas "aguas claras" de la filosofía analítica.

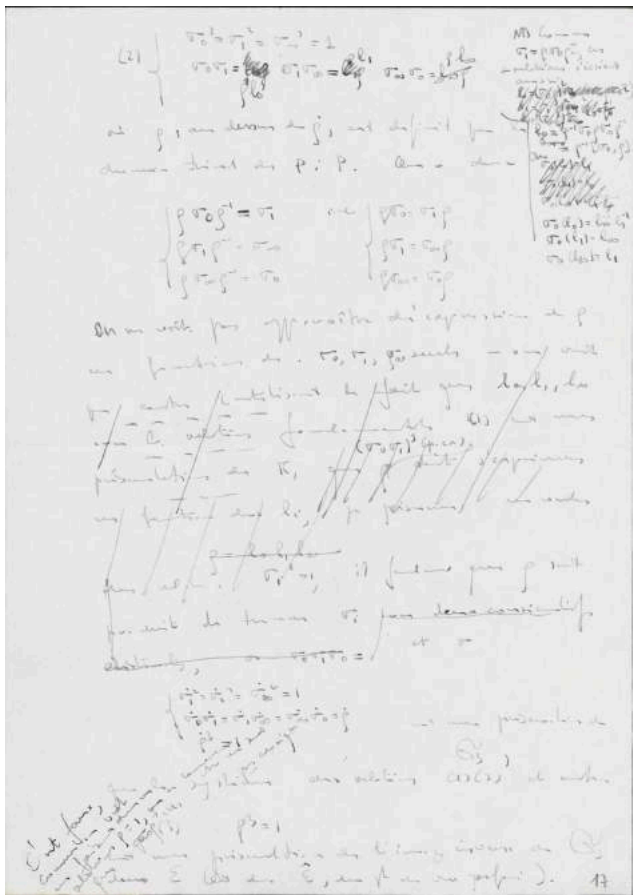


Fig. 10.1 – Manuscrito paralelo a la *Longue marche* [**IMAG**, cote 145 (1981), 17]

En otros manuscritos del *Archivo Grothendieck* referentes a la *Longue marche* [**1981**] puede observarse también la compleja y zigzagueante marcha de la creatividad. Un manuscrito denominado "Operaciones de $G(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ sobre $\pi_1(\mathcal{U}_{0,3})$" [**IMAG**, cote 142

(c. 1981), 21-63] muestra al *geómetra dibujando*[469] ciertos "ejercicios preliminares de síntesis galoisiana" [**IMAG**, cote 142 (c. 1981), 45] alrededor de acciones de grupoides fundamentales sobre la esfera. En particular, en la página 49 (ver *Figura 10.2* abajo), las tachaduras y los añadidos marginales se despliegan una vez más sobre la página, pero además, en este caso, se complementan con una poderosa *imaginación visual* (recorridos y lazos en la esfera) y con finos *estratos del lenguaje* (introducción de definiciones).

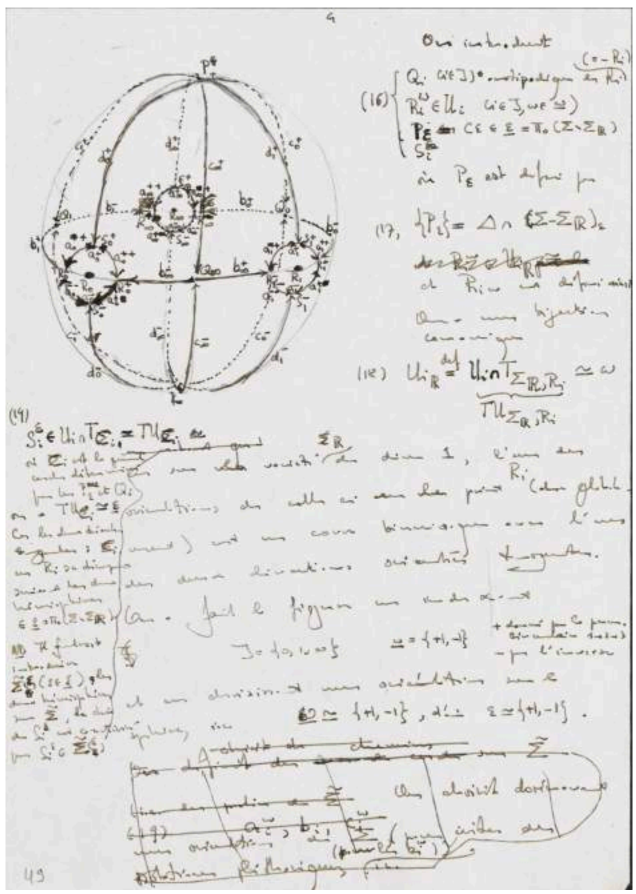


Fig. 10.2 – Manuscrito paralelo a la *Longue marche* [**IMAG**, cote 142 (c. 1981), 49]

[469] [**IMAG**, cote 142 (c. 1981), 23, 25, 27, 29, 31, 32, 37, 39, 49, 51, 60, 61].

Si regresamos a la *transcripción Malgoire* de la *Longue marche* [**1981**], los primeros parágrafos exhiben otras formas de la marcha oscilante de los procesos creativos. Ante todo, la puntuación es elocuente, con múltiples signos de *interrogación* que revelan dudas[470], así como con signos de *exclamación* que reflejan énfasis o sorpresas[471]. Por otro lado, el incesante *proceso conjetural* de la escritura es muy diciente, repleto de inflexiones condicionales y subjuntivas: "tal vez hay que suponer", "mediante hipótesis convenientes", "podría ser", "habría que corregir", "se debe poder", "sería contraindicado", "se puede suponer", "supongamos ahora (¡uf!) [*ouf!*]", "se querría deducir", "permite paradigmar lo que permitiría obtenerse", etc.[472] De esta manera, la *sintaxis* y la *gramática* mismas de la escritura reverberan el contenido complejo y profundo de las matemáticas en juego – oleajes agitados que cubren un volcán en erupción en el fondo marino.

Como resulta natural, alrededor de lo conjetural emergen *dudas* y *errores*: "es completamente estúpido y ultra-falso", "quisiéramos determinar la indeterminación de manera precisa", "¡conjetural!", "brutal", "desmedido y patológico", "hay que reexaminar de manera cuidada", "deseo conjeturar sin vergüenza", "estoy verdaderamente incómodo", "llego (¡penosamente!) a una conjetura (...) fraude [*canulé*]", "completamente dudoso (...) tengo la impresión de girar en un círculo vicioso", "parece prudente no conjeturar a la ligera", "tengo la impresión (...) de haber demostrado dos veces la misma cosa", etc.[473]

470 Signos "?" [**1981**, 8, 14, 18-19, 22, 25, 29, 32, 35, 42, 44, 55-57, 60, 87, 93], por solo indicar algunas apariciones en las primeras 100 páginas.

471 Signos "!" [**1981**, 4, 5, 31, 35, 36-38, 41, 47, 51, 56-57, 66, 74, 79, 83, 86, 94, 99]. En particular, merece subrayarse la aparición de un notable *"tout est relatif!"* (¡todo es relativo!) [**1981**, 36].

472 [**1981**, 1, 4, 31, 35, 38, 41, 43, 47, 58, 61]. La última iteración (aparentemente torpe) de la "permisión", que lleva al *paradigma*, es un signo muy ilustrativo de los *modos de invención* de Grothendieck, donde los mundos locales de posibilidades se despliegan hacia algo que posteriormente los engloba (paradigmas, arquetipos). La aparición de lo *étale* como arquetipo final (topos *étale* de un esquema – *mar*) producido por el despliegue iterativo de lo *étalé* (haces - *volcán*) cifra de manera fascinante ese signo grothendieckiano.

473 Nos restringimos a algunas apariciones en los §§26-37, refiriéndonos a la paginación de la transcripción Lochak-Schneps (www.grothendieckcircle.org): pp. 3, 5, 7, 24, 25, 33, 34, 40, 49, 50, 72, 89.

Grothendieck recorre así los *ámbitos del claroscuro*, donde se contraponen los entornos del descubrimiento y la invención, de la visión y el lenguaje, del *yin* y el *yang*. El laboratorio de *La longue marche à travers la théorie de Galois* [**1981**] le servirá entonces como insumo primordial para sus largas reflexiones sobre la creatividad en *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y en *La clef des songes* [**1987**] (ver nuestros *Capítulos 14, 15* abajo).

11

Pursuing stacks (1983)

Pursuing stacks [**1983**] continúa la *línea exploratoria* de la *Longue marche* [**1981**], tanto en el *fondo* (estructuras geométricas ligadas a temas de homología y homotopía: n-grupoides, ∞-grupoides, tipos, modelos), como en la *forma* (*work in progress* que, en este caso, adopta además la forma de un *diario*). El manuscrito (tipografiado) apunta a una amplia *teoría de la clasificación* (motivada por la estratificación no conmutativa del grupoide fundamental) donde se integran categorías algebraicas (variedades algebraicas y esquemas), categorías analíticas (variedades diferenciables y espacios topológicos) y torres de categorías abstractas (n-categorías, ∞-categorías). Por otro lado, *Pursuing stacks* [**1983**] debe entenderse también como una etapa intermedia dentro de la problemática de intentar *axiomatizar "at large"* –con perspectivas unitarias– la homología y la homotopía, tarea que se adelantará extensamente en los *Dérivateurs* [**1991**]. Su influencia en el desarrollo de las categorías de orden superior ha sido inmenso, y puede verse actualmente como uno de los fragmentos más activos de la herencia grothendieckiana (nuevas generaciones alrededor del trabajo colaborativo en red *Stacks Project*).

11.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Aún vinculado a la Universidad de Montpellier, entre 1981 y 1984 –tiempos de la *Longue marche* [**1981**], *Pursuing stacks* [**1983**] y la *Esquisse* [**1984**]– Grothendieck vive en Mormoiron, un pequeño pueblo a un par de horas en carro de Montpellier. Al parecer, Grothendieck intenta adelantar un par de seminarios en esos años, sin éxito[cxix]. Así, en un ambiente de aislamiento cada vez más acentuado, Grothendieck se lanza a la escritura de su segundo gran manuscrito-río de la década de los ochenta. El documento principal de *Pursuing stacks* [**1983**] es un extenso *diario de la invención* (593 pp.), cuidadosamente acotado en el tiempo (27 Febrero 1983 – 4 Noviembre 1983). Se trata de un manuscrito tipografiado en inglés[474], donde la *caja lineal* de la máquina de escribir[475] impide las variaciones sinusoidales de la escritura a mano, tan vívidas en la *Longue marche* [**1981**]. Grothendieck pensó en destinar el proyecto a publicación[476], y lo articuló con algunos preliminares: (I) tres cartas a Larry Breen (Villecun, 5 y 17 Febrero, 17/19 Julio 1975) (58 pp.), (II) una carta a Daniel Quillen (Les Aumettes, 19-23 Febrero 1983) (23 pp.), (III) una tabla de contenidos (25 Mayo 1983) (10 pp.). El todo ((I)-(III) + documento principal)[477] constituye el *corpus* de *Pursuing stacks*. Los textos fueron recuperados, divulgados,

474 Usualmente conocido en francés como "*À la poursuite des champs"*, no posee una traducción estándar al español. Utilizaremos aquí siempre el término "*stacks*" (= *champs*).

475 "Nada de tijeras, ni de pegamento para preparar laboriosamente un manuscrito «definitivo» (que no debe mostrar nada del trámite al que dio lugar)..." [**1983-86**, 1.141, nota 1 (añadido en Marzo 1984)].

476 "26.9. Más o menos le prometí al editor, Pierre Bérès, que un primer volumen estaría listo para imprimirse al final de este año calendario [1983], y quisiera mantener mi promesa" [**1983**, 500].

477 En *Récoltes et semailles* [**1983-86**], Grothendieck recuerda los inicios de *Pursuing stacks*: "Envié a Giraud, en febrero del año pasado [1983], una copia de la carta de una veintena de páginas [carta a

cxix En 1981/82 y 1983/84, sobre temas no definidos y sobre grupoides de Teichmüller. Véase Scharlau, óp.cit., Cap. 13, "Professor at Montpellier, 1973-1984".

transcritos y digitalizados por Ronnie Brown y su escuela de Bangor (Gales)[cxx]. Algunas de las ideas principales de *Pursuing stacks* se integrarán luego dentro de la *Esquisse d'un programme* [**1984**] (ver nuestro *Capítulo 12* abajo).

Un manuscrito inédito de los *Archivos Grothendieck* [**IMAG**, cote 109 (1983-1984), 9-10][478] resume magníficamente los entornos materiales y conceptuales de *Pursuing stacks* [**1983**]:

> Después de un silencio de doce años, el tiempo ha llegado para las *obras de madurez* del autor, con su visión y estilo renovados. Aquí se encuentra un *recuento diario del camino de un explorador*, con reflexiones ocasionales sobre el viaje mismo (así como sobre el viajero y el mundo múltiple a su alrededor), volviendo a capturar así su *naturaleza genuina*: aquella de una *aventura apasionada, enraizada en la vida*.
>
> En los próximos dos volúmenes, bajo el título común *Pursuing stacks* (cuyo primer volumen se subtitula "The Modelizing Story"), el autor esboza algunos temas de una *vasta síntesis* del álgebra homotópica, el álgebra (co)homológica y la teoría de topos – ya madurada desde hace más de quince años pero nunca aún iniciada. El hilo conductor, tenaz y omnipresente (aunque a menudo implícito) proviene de la geometría algebraica y de las intuiciones (*no precisas y provocativamente fragmentarias*) alrededor de las nociones de haces, *stacks*, 2-*stacks*, etc., en un topos.
>
> Estos dos volúmenes son los primeros en una serie planeada, considerablemente más amplia, de "Reflexiones matemáticas" en las que el autor piensa presentar, entre otras cosas, algunas "*ideas ingenuas*" sobre dos "nuevos continentes", ansiosos de ser *descubiertos* y explorados. Uno surge de una noción adecuada de espacio topológico "moderado", visto como

---

Quillen], que se convirtió en el capítulo 1 que abre la *Poursuite des Champs*. Es una reflexión para nada técnica, en el curso de la cual pude «saltar a pies juntillas» [*sauter a pieds joints*, los términos de Galois] sobre el «purgatorio» que en un momento había detenido a Giraud (y muchos otros) para manejar la noción de n-categoría «no estricta» (que llamo ahora «n-*stack*»), que seguía siendo aún heurística y sin embargo visiblemente fundamental. Fue la puesta en marcha de la *Poursuite des Champs*" [**1983-86**, 2.387].

[478] La letra a mano (muy legible) es posiblemente de Ronnie Brown, transcribiendo el texto original de Grothendieck; todos los énfasis en la cita son nuestros.

[cxx] Para una historia de los orígenes del manuscrito y de la activa labor de Brown en su recuperación, ver R. Brown. *The origins of Alexander Grothendieck's Pursuing stacks*. URL: http://groupoids.org.uk/pstacks.html.

> el entorno *natural* para expresar y estimular la intuición topológica de figura y forma (...)[479] El otro continente aparece en la confluencia de una *multitud de corrientes* de pensamiento y de percepciones provenientes de la topología, la geometría conforme, la geometría algebraica, los grupos discretos y profinitos, los grupos algebraicos sobre campos de números, los poliedros regulares, la aritmética, los "motivos"..., convocados al mismo tiempo para la exploración de la acción de grupos profinitos "absolutos" de Galois (como $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$) sobre ciertos grupos profinitos geométricos fundamentales (llamados "anabelianos", como $\pi_1(\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}} - \{0, 1, \infty\})$).
>
> Los dos primeros volúmenes, *Pursuing stacks*, iniciados bajo el ímpetu de una correspondencia en inglés [carta a Quillen], están escritos en ese idioma. Empiezan con una introducción substancial común de la cual la primera parte, de carácter más personal que técnico, está escrita en francés (*el idioma adoptado del autor*)[480].

En el pasaje anterior se ve bien cómo Grothendieck acentúa algunas formas esenciales de su proceder: búsqueda genuina, apasionada, vital de las cosas; aprecio de la naturalidad y la ingenuidad requeridas para adentrarse en nuevos continentes; conciencia del carácter exploratorio, de descubrimiento, propio de las tareas de un visionario; percepción de los entornos vagos y fragmentarios de la visión, en los momentos iniciales en los que el navegante se somete a una multitud de corrientes alternas.

Resumen mínimo.

En lo que sigue, resumimos brevemente las diversas partes de *Pursuing stacks* [**1983**], tal como las organizó Grothendieck: (I) cartas a Breen, (II) carta a Quillen, (III) tabla de contenidos, (IV) documento principal.

---

479 Para la *topología moderada*, forma esencial de *suavidad*, ver la *Esquisse d'un programme* [**1984**], nuestro *Capítulo 12* abajo.

480 Esta introducción en francés no se escribió como tal, pero dio lugar (en Junio 1983) al inicio de *Récoltes et semailles* [**1983-86**, L15] (ver más abajo nuestro *Capítulo 14*). Obsérvese cómo Grothendieck califica al francés de "idioma adoptado", y considera entonces aún al alemán como su idioma nativo (a los 55 años ¡después de hablar principalmente el francés durante casi cincuenta años!) Este es uno más de los múltiples signos de alguien que se sintió siempre *errando en los márgenes*.

(I). (*Primera carta*, 5 Febrero 1975). "Esos animales [2-categorías de Picard, n-categorías y otra fauna de ese género] son del todo indispensables para hacer matemáticas serias" (1)[481]; "la consideración de las n-categorías (...) me parece ser la llave del paso del álgebra homológica ordinaria («conmutativa») a un álgebra homológica no conmutativa, gracias a que provee una interpretación geométrica correcta de los «complejos truncados al orden n»" (3); "el contexto «natural» de los teoremas de cambio de base en cohomología *étale*, teoremas de tipo Lefschetz (...) es aquel de los n-*stacks* [n-*champs*]" (5); "*yoga: una «n-categoría módulo n-equivalencia» es esencialmente la misma cosa que un «conjunto semi-simplicial módulo homotopía»*" (5); "hay que *relativizar* todo el yoga encima de un topos arbitrario X (...) *poner en relación el álgebra homológica sobre X en términos de haces, con el álgebra categórica sobre X en términos de n-stacks en grupoides*" (8); "la teoría de «*álgebra homológica no conmutativa*» que intento sugerir podría definirse, vagamente, como el estudio paralelo de las nociones siguientes y sus múltiples relaciones: *(a)* espacios topológicos, topos, *(b)* conjuntos semi-simpliciales, haces semi-simpliciales, *(c)* n-categorías (en especial n-grupoides), n-*stacks* (en especial, n-*stacks* en grupoides), etc. *(d)* complejos de grupos abelianos, haces abelianos, etc. (...) Se trata por tanto de álgebra, con la presencia constante de motivaciones provenientes de la intuición topológica. Si una tal teoría debiese ver el día y necesitara un nombre, me pregunto si «*álgebra topológica*» no sería el más adecuado" (9).

(*Segunda carta*, 17 Febrero 1975). "Las construcciones sobre un topos X que se

[481] Las referencias numéricas entre paréntesis corresponden a las paginaciones separadas de cada carta. Seguimos aquí las numeraciones del propio Grothendieck. Los textos fueron multicopiados y distribuidos en los años ochenta, pero ahora contamos con los originales en el *Archivo Grothendieck*. La primera carta ("Villecun, 5.2.1975", 10 pp.) aparece (tipografiada en inglés) en [**IMAG**, cote 134-2 (1975), 37-47]. La segunda carta ("Villecun, 17.2.1975", 8 pp.) aparece (tipografiada en inglés) en [**IMAG**, cote 134-2 (1975), 48-55]. La tercera carta ("Villecun, 17/19 Julio 1975", 40 pp.) aparece (manuscrita en francés) en [**IMAG**, cote 134-2 (1975), 145-184]; traducciones parciales al inglés de esta tercera carta se encuentran en [**IMAG**, cote 134-2 (1975), 56-77, 128-143]. Todos los énfasis en el resumen siguiente son nuestros.

pueden hacer en términos de $(n-1)$-*stacks* localmente constantes dependen sólo de sus «n-truncados tipos de homotopía»" (1); "puede darse explícitamente la cohomología de un n-grupoide" (3); "hay esencialmente tres aproximaciones distintas para construir la *cohomología de un topos*: *(a)* punto de vista de complejos de haces, resoluciones inyectivas, categorías derivadas (álgebra homológica conmutativa), *(b)* punto de vista a la Cech o semi-simplicial (álgebra homotópica), *(c)* punto de vista de los *n-stacks* (álgebra categórica, o álgebra homológica no conmutativa). En *(a)* se «resuelven» los coeficientes, en *(b)* se resuelve el espacio base, en *(c)* no se resuelven ni el uno, ni el otro" (5).

(*Tercera carta*, 17-19 Julio 1975). "Mi gran ignorancia de la topología algebraica y la homotopía" (1); "yoga conjuntos simpliciales $\leftrightarrow$ ∞-grupoides" (2); "libro de Mme. Sính" (2); "yoga según el cual «el carácter trascendente de un grupo formal se concentra esencialmente en el grupo conmutativo formal», descubierto al parecer por Dieudonné" (3); "se podrían unir, en una categoría derivada apropiada, la dualidad de Serre, la dualidad de Pontriagin (...) y la dualidad de Cartier" (8); "el *«tipo fino de homotopía» de un espacio moderado* [dentro de la «tame topology», i.e. "donde se eliminan los fenómenos salvajes" (18)] encarna el conocimiento, no sólo de los haces o los *n-stacks*, sino (vía paso al límite inductivo) el conocimiento de todos ellos" (20); "todas las operaciones cohomológicas posibles e imaginables ya están incluidas en los datos provistos por un sistema de n-categorías" (21); "¿cuál es esa maravillosa fórmula de Bloch-Quillen a la que usted alude, que no conozco, y con la que se me hace agua a la boca?" (22).

(II). (*Carta a Quillen*, 19-23 Febrero 1983). §1. "*Síntesis de álgebra homotópica y homológica, con énfasis especial sobre topos*", retrotraída a alrededores de 1966-67 (1)[482]; necesidad de una "topología moderada" (*tame topology*) de la misma importancia ("urgent

[482] Los números entre paréntesis remiten aquí a la primera numeración idiosincrásica de Grothendieck (donde mezcla paginaciones del tipo (x) y (x')). La carta a Quillen puede encontrarse ahora en [**IMAG**, cote 134-2 (1983), 14-36]. Todos los énfasis son nuestros.

and exciting") de los esquemas para la geometría algebraica (1). §2. "Intuición básica": *el estudio de los n-tipos de homotopía equivale al de los n-grupoides* (1'), vía la asociación de grupoides fundamentales a espacios (generalizando Poincaré); la relativización de un n-grupoide sobre un topos arbitrario (= *n-stack*) abre las puertas a una *cohomología no conmutativa* (1'); "heurística pura por el momento" (1'); "me guío sobre todo por la interpretación topológica" (2); un intento de axiomatizar la noción de ∞-grupoide (2-2') lleva a una cadena infinita de estructuras (3), que requiere el "descubrimiento de un simple principio guía" (3). §3. "Presumiblemente, *la categoría de ∞-grupoides es una «categoría modelo» para la categoría homotópica usual*" (3); intento de finalización de la carta (3'), pero continuación de la misma, ya que, "después de todo, la motivación topológica sí provee el «simple principio guía» deseado". §4. Esquema de estructuración de un ∞-grupoide (4-4'). §5. Descripción vía sucesión canónica $C_0 \to \cdots \to C_n \to C_{n+1} \cdots$ de categorías y funtores ["structure species" (6), recordatorio de las "espèces de structures" de Bourbaki], determinando en cada caso construcciones categóricas requeridas (productos, productos fibrados, límites, colímites) (5-5'). §6. La intuición topológica subyacente es la de "transponer" operaciones entre células de un complejo a operaciones entre objetos homotópicos (6). §§7-8. Estructura primitiva en los complejos celulares, procesos de descomposición y amalgamación (6'-7'); categoría C_0 (8). §§9-10. Paso inductivo: construcción $C_n \to C_{n+1}$ (8-8'); "*la ambigüedad está en la naturaleza de las cosas*" (8'); descripción explícita de la inducción (9-9'). §11. Descripción dual de un ∞-grupoide vía topología (10). §12. Co-∞-grupoides en *Top* (10'); "it's getting late and time to go to bed!" (10'). §13. Observaciones terminológicas sobre n-grupoides, ∞-grupoides, "*stacks*" – referencia a "Mme. Hoàng Xuân Sính" (11); *stacks* como "basic coefficient objects in non commutative homological algebra, as well as a convenient description of homotopy types"; "may be the theory is going to take off after all, in the long last!" (12).

(III). (*Tabla de contenidos*, 25 mayo 1983)[483]. "The modelizing story (histoire de modèles)". "*I. Take-off*", §§1-13: de espacios a ∞-grupoides, modelos topológicos, amalgamación y pegamiento, reflexión sobre los términos "∞-grupoide" y "*stack*". "*II. Test categories and test functors*", §§14-44: fallo de los fundamentos de la topología para expresar la intuición topológica, "*stacks*" como concepto unificador de homotopía y cohomología, categorías como modelos de tipos de homotopía, categorías modelo y sitios, categorías "test", modeladores en *Cat*, esfericidad, categoría de símplices. "*III. Homotopy structures and contractibility structures (= Grinding my way towards canonical modelizers)*", §§45-66: nociones abstractas de homotopía, estructuras contractibles, categorías "conectadas", "un tímido comienzo de axiomatización de equivalencias débiles en *Cat*", revisiones de terminología y de orientación. "*IV. Aesphericity structures and canonical modelizers*", §§67-86: "digresión sobre seis semanas de esbozos: *derivadores*", esfericidad, exactitud, inyectividad. "*V. Homology and cohomology (abelianization of homotopy types)*", §§87-102: revisión de preguntas, programas a corto plazo, topos horizontales, verticales, proyectivos. "*VI. Homotopy properties of Cat and closed model structures*". "*VII. Derivators*". "*VIII. Back to topoi*" (estas tres últimas partes no alcanzan a entrar en el documento; las secciones sobre la axiomatización homotópica de *Cat*, los derivadores y los topos se desarrollarán en el volumen sobre los *Dérivateurs* [**1991**]). Revisión del programa inicial: "*VI. Schematization*", §§103-132: pseudo-topos, equivalencia débil, abelianización de un pseudo-topos, "soft versus hard" (468), haces, dualidad, "tratamiento perfectamente dual de cohomología y homología" (426), esquematización y linealización de tipos de homotopía, fibraciones, simetrías, cambios de base, conservatividad, teoría de la homotopía *at large*. "*VII. Linearization of homotopy types*", §§133-140: grupoides y teoría de Teichmüller, seis operaciones y formalismo homológico en *Cat*, suavidad en *Cat*, prefiguración

483 Disponible ahora en [**IMAG**, cote 134-2 (1983), 4-12].

de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] (592-593).

(IV). (Algunos pasajes iniciales del *documento principal*)[484]. §14. "Gruesa inadecuación" de la "transcripción" usual de la intuición topológica (1); topos, esquemas, topología *étale* son más apropiados para el desarrollo de una "teoría estructural de las estratificaciones" (1). §15. Explicación de las limitantes históricas de las aproximaciones lineales para el entendimiento de los espacios topológicos (2); emergencia de los *stacks* ("champs in French") para unificar y estabilizar la situación (3). §16. "*La noción de stack aparece aquí como el concepto unificador para una síntesis del álgebra homotópica y el álgebra cohomológica no conmutativa*" (6). §16bis. "*El hecho de que las categorías son objetos cómodos para definir tipos de homotopía arbitrarios es bastante notable* (...) objetos extremadamente simples y familiares (...) Lo que resulta más sofisticado es el proceso de localización hacia los tipos de homotopía, es decir, la descripción explícita de las equivalencias débiles" (8). §24. "Las reflexiones anteriores me convencen de que (1) *hay en efecto topologías en Cat, adecuadas para describir los tipos naturales de homotopía de los objetos de Cat*, es decir de las categorías, y (2) no existe definitivamente una escogencia privilegiada para una tal topología" (23-24); consecuencia: aparente imposibilidad de reconstruir la "categoría homotópica usual *Hot*" (categoría de CW-complejos) a partir de una topología "natural" en *Cat* (24). §25. Pregunta esencial ("aún bastante vaga"): "*¿cuáles especies de estructuras algebraicas son adecuadas para expresar los tipos de homotopía?*" (25). §29. "El modelador básico, en toda esta aproximación a modelos homotópicos, no es de ninguna manera la categoría (Semi-simpliciales) (por más cómoda) o la categoría (Espacios) (por más cercana de la intuición topológica), sino la categoría *Cat* de «todas» las categorías (pequeñas)" (33).

[484] El documento principal posee 593 páginas, numeradas tal cual (1-593) por el propio Grothendieck, y se encuentra disponible ahora en [**IMAG**, cotes 134-3 a 134-8 (1983)]. Las referencias entre paréntesis remiten a esa numeración. Todos los énfasis son nuestros.

La forma y el estilo: diario creativo, flujo del pensamiento, rectificaciones, manuscrito tipografiado y corregido a mano, cambios de rumbo, ampliaciones... Sigue la orientación de *La larga marcha a través de la teoría Galois* [**1981**], plástica y titubeante, en contraste con la arquitectónica rígida de *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**] (445). "Ímpetu fresco (...) mirada inocente (...)" (445), "un aire de la variada fragancia del mundo" (592). Trabajo/revelaciones en medio de la muerte (Ella, 491) y el nacimiento (Suleyman, 555) de sus nietos.

Descripción más extensa.

El resumen anterior revela la *profunda continuidad del pensamiento grothendieckiano*, tanto en su evolución personal y temporal, como en su conectividad matemática y conceptual. Un primer punto fundamental consiste en *(i)* la *estratificación* emergente de los *stacks* –vía truncaciones, primeras dos *cartas a Breen* (1975)– y el salto de un nivel (n) a otro ($n-1$) vía tipos de homotopía y sus asociados grupos o grupoides de automorfismos. Las preocupaciones de Grothendieck pueden retrotaerse aquí al menos a fines de la década de los cincuenta, como lo expresa en una carta a Serre (5 Noviembre 1959): "Cada vez que, en virtud de mis criterios, una variedad de módulos (o mejor, un esquema de módulos) para la clasificación de las variaciones (globales o infinitesimales) de ciertas estructuras (variedades completas no singulares, fibrados vectoriales, etc.) *no puede existir*, a pesar de eventuales buenas propiedades de lisura, propiedad y no singularidad, la razón se debe solo a la *existencia de automorfismos de la estructura que impide funcionar la técnica de descenso*" [**1955-87**, 94, nuestros énfasis]. Esta referencia implícita a la teoría de la ambigüedad de Galois adquiere todo su sentido en la *carta a Quillen* (1983), cuando Grothendieck señala que "la ambigüedad está en la naturaleza de las cosas" (ver resumen arriba). Un segundo punto fundamental consiste en *(ii)* la emergencia de un ámbito categórico *no conmutativo* abstracto donde puede pensarse en una síntesis de la homotopía (de la cual

Grothendieck se siente "gran ignorante") y la homología (gran experto desde el *Tôhoku* [**1955-56**]), ámbito unitario que, en la *carta a Quillen*, el mismo Grothendieck retrotrae a los alrededores de 1966-67. Los puntos *(i)* y *(ii)* serán de nuevo esbozados en la *Esquisse* [**1984**] y desarrollados a fondo en los *Dérivateurs* [**1991**]. Pero puede encontrarse aún otra conexión esencial entre todas estas labores, al observar sus investigaciones de mediados de los setenta y mediados de los ochenta sobre *(iii)* la "geometría" y la "topología de las formas"[485], donde se enlazan naturalmente jerarquías combinatorias y topológicas. En conjunto, las fechas indicadas (1955, 1959, 1966, 1975, 1977, 1983, 1986, 1991) muestran así la *constante* atención de Grothendieck por las problemáticas que abordará en la década de los ochenta.

[485] Sus cursos en Montpellier sobre la *geometría de las formas elementales*, en particular su curso sobre el *icosaedro* [**IMAG**, cote 161-6, 1977], influyeron explícitamente sobre la *Esquisse* [**1984**] (ver nuestro *Capítulo 12* abajo). Por otro lado, su manuscrito sobre la *topología de las formas* [**IMAG**, cote 156-1/9, 1986] conforma una mina aún inexplorada (700 páginas), donde Grothendieck se adentra en un *analysis situs* renovado mediante una *combinatoria categórica universal* que parece querer reflejar la *characteristica universalis* del propio Leibniz. Agradezco aquí estas informaciones a Alexander Cruz, quien indica que en estas búsquedas de Grothendieck podría encontrarse "una suerte de arquetipo combinatorio que reemplace la idea de variedad" (comunicación personal) y podría subyacer la gran figura de Poincaré, para completar la tríada esencial Galois-Riemann-Poincaré. A este respecto, Cruz subraya la importancia de un fragmento de una carta de Grothendieck a Yamashita (9 Julio 1986), que Cruz obtuvo de Winfried Scharlau: "I have been impressed, of course, by your second list of «newest events». I did'nt even know about the solution of Poincaré's conjecture [intento fallido por Rourke y Rêgo en 1986] – comes just at the right time for me, to be able to justify (within the framework of the «geometry of forms» or «analysis situs» I am developping) in terms of extant «general topology», a certain definition of «regular figure» (the combinatorial substitute for «variety») I had in mind..." (este es uno más de los signos de atención de Grothendieck por estar actualizado en las "cosas matemáticas"). Debe recordarse aquí que el primer intento de Poincaré por caracterizar la esfera $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ fue mediante la *homología*, cosa que el mismo Poincaré demostró ser imposible mediante su *esfera de Poincaré*: el grupo de homología de esta última contiene al *grupo del icosaedro*, por lo tanto no coincide con el grupo de la esfera S^3 (grupo trivial). Por otro lado, la conjetura de Poincaré postuló que la *homotopía* sí caracterizaría a la esfera S^3 (ver nuestra *Nota XVII* arriba, p. 107). El intento de *visión sintética general de la homología y la homotopía* propuesto por Grothendieck cubre entonces en el fondo las inquietudes iniciales de Poincaré. Esto también se refleja en el estudio constante de *grupoides y grupos fundamentales*, aunque en este orden las referencias explícitas a Poincaré sean pocas. Ya que en esta monografía nos hemos restringido a estudiar solo la obra *publicada o distribuida* de Grothendieck, no continuaremos sobre esta fascinante línea de compleción del amplísimo panorama grothendieckiano, que un estudio riguroso de los manuscritos inéditos tendrá que producir en las próximas décadas.

Nos concentraremos ahora sobre el *documento principal* de *Pursuing stacks* [**1983**][486]. El texto inicia con la constatación de una *obstrucción fundamental*:

> El álgebra homotópica no se adecúa directamente al estudio de espacios de homeomorfismos, espacios de inmersiones o sumersiones, fibraciones, etc. – y parece que el estudio de tales espacios no ha realmente despegado. Tal vez el obstáculo mayor yace aquí en los fenómenos salvajes, los cuales sin embargo, se siente, conforman una dificultad completamente artificial, que emerge de la forma particular en la que la intuición topológica se ha formalizado matemáticamente, en términos de la noción básica de espacios topológicos y funciones continuas entre ellos. Esa transcripción, aunque adecuada para el punto de vista homotópico, y en parte adecuada también para el uso de los analistas, resulta gruesamente inadecuada, me parece, en la mayoría de los demás contextos geométrico-topológicos, y en particular en el estudio de los espacios de homeomorfismos, inmersiones, etc. (en todas aquellas cuestiones donde la "isotopía" reemplaza la relación más bien gruesa de homotopía), así como en el estudio de las estructuras estratificadas, cuando resulta indispensable proveer un sentido intrínseco y preciso a nociones como vecindades tubulares, etc. Para una teoría estructural de las estratificaciones, el contexto algo incómodo de los topos y los pretopos se adecúa mejor que el de los espacios topológicos (por más sorprendente que parezca), y más aún se aplica directamente a contextos no convencionales como la topología *étale* de esquemas, donde la transcripción convencional de la intuición topológica en términos de espacios topológicos evidentemente se quiebra [**1983**, 1].

Esta magnífica cita ilustra bien el proceso grothendieckiano: por un lado, una intuición/sensación topológica primordial[487], "transcrita" usualmente vía espacios topológicos y funciones continuas, produce fenómenos salvajes y artificiales, y limita los intentos de ascenso a instancias superiores (espacios de funciones); por otro lado, un acceso alternativo a esa intuición primordial, mediante nuevos contextos –pretopos, topos, estratificaciones (= *stacks*)– permite estudiar con naturalidad formas topológicas generalizadas en espacios funcionales y en contextos geométrico-topológicos distintos (con las aplicaciones que ello genera en la elaboración delicada de una *geometría aritmética*). Una impresión/percepción

[486] En lo que sigue, las referencias de páginas [**1983**, x] envían por tanto a la página x del *documento principal* [**IMAG**, cotes 134-3/8, 1983].

[487] Grothendieck describe esa percepción como una "vasta y profunda y nebulosa y en incesante transformación masa de intuiciones de nuestra psiquis, que llamamos intuición «topológica»" [**1983**, 2].

original ("se siente") abre así las compuertas a una invención de nuevas técnicas, gracias a nuevos lenguajes y nuevas traducciones ("transcripción") que se adecúan mejor a la intuición primordial[488].

Una "teoría estructural de las estratificaciones" se desarrolla entonces a lo largo de *Pursuing stacks* [**1983**]. Emerge el "punto de vista de los *stacks* (*champs* en francés) (...) previamente llamados «co-grupoides»" [**1983**, 3] como una *tercera descripción* de los tipos de homotopía (además de las cohomologías y los grupos de homotopía), nueva aproximación que da lugar a una "correspondiente riqueza de intuiciones algebraico-geométricas" [**1983**, 3]. En un cierto sentido, los *stacks* resultan ser la "generalización no conmutativa más cercana posible de los complejos de cadenas" [**1983**, 4], y el ambiente natural para su desarrollo se encuentra alrededor de los topos: "teniendo en mente que los 0-*stacks* son ordinarios haces de conjuntos sobre el espacio o el topos considerado, la jerarquía creciente y más sofisticada de nociones de 0-*stacks*, 1-*stacks*, 2-*stacks*, etc.[489], que deberá ser desarrollada sobre un topos arbitrario, se sitúa paralelamente a la jerarquía de nociones correspondientes sobre un espacio con un punto, es decir, conjuntos (= 0-*stacks*), categorías (o 1-*stacks*), 2-categorías, etc." [**1983**, 4-5]. Con ello, "los n-*stacks*, relativizados sobre un topos a «n-*stacks* sobre X», se ven principalmente como los «coeficientes» naturales para hacer álgebra (co)homológica no conmutativa de dimensión $\leq n$ sobre X" [**1983**, 5].

488 En un cierto sentido, es como si, siguiendo una fascinante *autorreferencia o iteración reflexiva*, la *filosofía de Yoneda* (= filosofía de Grothendieck) se aplicara a la percepción de esos estratos profundos de la intuición: mediante un mayor número de perspectivas (morfismos), mejor se captará la intuición (se representará el "funtor" intuición). También es como si nos adentráramos de nuevo en las profundidades de *Moby-Dick*: solo la multivalente (y a veces agobiante) descriptividad de Melville –en mil aspectos de las técnicas balleneras, o en mil disquisiciones filosóficas o teológicas– es la que finalmente nos provee una imagen medianamente completa del cetáceo.

489 Grothendieck retrotrae a la Tesis de Giraud (1966, publicada 1972) un estudio "*in extenso* de la noción de *stacks*, diríamos más bien ahora 1-*stacks*" [**1983**, 3], y retrotrae a las bicategorías de Bénabou (1967) un estudio de los 2-*stacks* [**1983**, 11].

Observamos aquí una vez más la *continuidad* del pensamiento grothendieckiano: enfrentado a fenómenos de no conmutatividad en espacios superiores, ligados a formas de anabelianidad en la *Longue marche* [**1981**], Grothendieck intenta desarrollar una cohomología con coeficientes extendidos, que responda al flujo (conmutativo) de los funtores iterados[490] en el *Tôhoku* [**1955-56**]. El ambiente de los topos (*SGA* [**1960-69**]) provee el entorno para construir esa cohomología no conmutativa, con la esperanza de reunir la homología y la homotopía bajo un mismo techo[491] (*Dérivateurs* [**1991**]): "la noción de *stack* emerge aquí como el concepto unificador para una síntesis del álgebra homotópica y el álgebra homológica no conmutativa" [**1983**, 6]. De hecho, Grothendieck postula que la categoría de todas las categorías *Cat* puede servir para *representar* las categorías usuales de la homotopía (conjuntos semi-simpliciales en un topos, Verdier) vía ciertas localizaciones con respecto a isomorfismos débiles[492] [**1983**, 7-8]. *A la búsqueda incesante de arquetipos* (topos, grupoides, *stacks*)[493] *que permitan cifrar ciertos umbrales* (conmutatividad / no conmutatividad), la *coherencia* de la visión resulta del todo ejemplar.

490 Explícitamente, Grothendieck afirma que "la «integración» de tales coeficientes [*stacks*], en el mismo espíritu de tomar objetos $R\Gamma F_*$ (con $R\Gamma$ funtor derivado del funtor secciones Γ) para complejos de haces abelianos F_*, es aquí simplemente la operación trivial de tomar secciones" [**1983**, 5]. Para los funtores derivados, ver nuestro *Capítulo 3* arriba, p. 107.

491 Debe *resonar* aquí en nosotros la unión del espacio y del número encarnada en el lecho común de los topos. Nos encontramos ante uno de los muchos *acordes armónicos* de la obra grothendieckiana, donde diversas formas de lo continuo (espacio/topología/magnitud/homotopía) y de lo discreto (número/álgebra/dimensión/homología) consiguen conjugarse bajo resoluciones comunes (espacio-número/álgebra topológica/topos/*stacks*).

492 "El hecho de que las categorías son objetos adecuados para definir tipos de homotopía arbitrarios es bastante notable (...) Estos objetos son extremadamente simples y familiares para la mayoría de los matemáticos; lo que es más sofisticado es el proceso de localización hacia los tipos de homotopía, o equivalentemente, la descripción explícita de equivalencias débiles, en el marco usual de la teoría de categorías" [**1983**, 8]. Para precisiones, ver nuestro *Capítulo 13* abajo. La *localización* (o el descenso) desde lo más abstracto (*Cat*) para reentender un invariante tan fundamental como la homotopía hizo soñar a Grothendieck, y nos recuerda las localizaciones en la K-teoría y en los sitios.

493 El acceso al arquetipo abstracto *nunca es gratuito*: "Como es el caso a menudo cuando se hace un gran paso atrás para adquirir una nueva perspectiva, no se trata solo de un cambio cuantitativo (de $n \leq 2$ a n abitrario), sino de un *cambio cualitativo en el rango y la profundidad de la visión*" [**1983**, 6, nuestro énfasis]. La conexión con los grandes saltos cualitativos de Galois es aquí patente.

Los parágrafos siguientes del *documento principal* (§§19-29) se adentran en la búsqueda de adecuadas *topologías* en *Cat* para intentar reconstruir las categorías homotópicas como categorías de fracciones. El escrito aparece salpicado de vaivenes y dudas (descuidos = "étourderies" [**1983**, 10, 21], vistazos demasiados rápidos = "too quick a glance" [**1983**, 13, 14], conjeturas en el aire = "thin air conjecturing" [**1983**, 29]), antes de llegar a expresar la firme convicción de que "el modelador básico, en toda esta aproximación a modelos homotópicos, no es de ningún modo la categoría *SemSim* de conjuntos semi-simpliciales (por más cómoda que sea), ni la categoría *Esp* de espacios (por más llamativa que resulte para la intuición topológica), sino la categoría *Cat* de «todas» las categorías (pequeñas). En este contexto, la categoría *Hot* se define muy cómodamente como la categoría de fracciones de *Cat* con respecto a «equivalencias débiles»" [**1983**, 33]. Un soporte de esta convicción es la asunción de que "todo automorfismo del funtor identidad $Hot \to Hot$ es la identidad" [**1983**, 30], ya que *la no abelianidad presente en Hot trivializa su teoría de la ambigüedad*[494]. Por lo tanto, para intentar capturar *Hot* mediante herramientas puramente categóricas desde *Cat*, debe relajarse la rigidez de los funtores y deben pasarse a estudiar funtores en *Hot* provistos con clases de equivalencias débiles no triviales[495].

El 14 de Marzo, después de "una semana de haber dejado mis notas"[496], y después

494 Mientras que, en cambio, "si se abelianizara *Hot* de un modo u otro, se tendrían los funtores lazo y suspensión, y las homotecias por -1" [**1983**, 30], dando lugar a automorfismos no triviales de la identidad. De esta manera, nos encontramos ante un fascinante *péndulo* conceptual: mientras que en los *ámbitos abelianos modernos* (1830-1950) una teoría galoisiana no trivial de la identidad devela las estructuras en juego gracias a la presencia de una multiplicidad de automorfismos (grupos de Galois, homologías), en cambio, en los *ámbitos no abelianos contemporáneos* (1950-hoy) la trivialización de la teoría de la ambigüedad (inexistencia de automorfismos) requiere una ampliación n-aria, o jerarquización transidentitaria, para revelar las nuevas estructuras emergentes (*stacks*, n-grupoides).

495 Para los desarrollos de este programa, ver los *Dérivateurs* [**1991**], nuestro *Capítulo 13* abajo.

496 Los primeros días del *documento principal* están fechados *27.2.83* (§§14-17 [**1983**, 1-9]), *28.2* (§§18-19 [**1983**, 10-13]), *5.3* (§§20-23 [**1983**, 14-21]), *7.3* (§§24-27 [**1983**, 21-29]), *8.3* (§§28-29 [**1983**, 30-36]), *14.3* (§§30-31 [**1983**, 36-41]). Grothendieck parece funcionar por *grandes enviones de entusiasmo* (27-28 Febrero, visión general; 7-8 Marzo, programa de caracterización de *Hot* en *Cat*), seguidos luego de días de descanso, o de otras labores ligadas a su entorno ecológico o a la Universidad en Montpellier.

de involucrarse unos días en lo que llama "«el juego de construcción Lego-Teichmüller», para describir de una manera concreta, «visual», los grupos de Teichmüller de todo tipo posible y las relaciones principales entre ellos"[497] [**1983**, 36], Grothendieck vuelve a temas de homotopía[498]. Compara sus aproximaciones con las categorías modelo de Quillen[LVIII] [**1983**, 37], describe situaciones de equivalencia débil ("esfericidad" de funtores [**1983**, 38]), aplica la estrategia a la categoría de símplices [**1983**, 38-39], propone condiciones para caracterizar equivalencia con categorías homotópicas (condiciones T1-T3 [**1983**, 39]), y realiza un análisis de esas condiciones para establecer su coherencia [**1983**, 40-41]. Poco después postula un teorema que proveería los resultados buscados en la caracterización *at large* de la homotopía: dada una categoría A pequeña y dados funtores $i_A : \widehat{A} \to Cat$ (donde $\widehat{A}$ es la categoría de prehaces sobre A) con $i_A(F) = A/F$ y $loc : Cat \to Hot$ determinado por localización con respecto a equivalencias débiles (W), se tiene que $loc \circ i_A$ conmuta con productos y es un funtor localizador (es decir, se tiene una equivalencia entre $W_A^{-1}\widehat{A}$ y Hot) si y sólo si A satisface las condiciones (T1)-(T3)[cxxi] [**1983**, 46].

497 De hecho, en líneas generales, puede decirse que las décadas de los setenta y los ochenta constituyen para Grothendieck aperturas necesarias hacia el juego, la concreción y la visualidad, formas particulares de hacer que complementan su tendencia natural a la abstracción. Para reflexiones sobre estos temas y sobre la importancia de una *ingenuidad infantil* en la creatividad matemática, véanse *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y *La clef des songes* [**1987**], nuestros *Capítulos 14 y 15* abajo.

498 El registro indica que el Lego-Teichmüller y "otras ocupaciones no matemáticas me dejaron poco tiempo para mis reflexiones sobre la teoría homotópica, que retomé esencialmente ayer por la noche y hoy [14.3]", después de "leer las notas de la semana pasada y regresar a la máquina de escribir" [**1983**, 36]. Es sabido que Grothendieck siempre trabajó intensamente en las noches, espacios hondos de concentración –*mares profundos*– especialmente bien adaptados para su mente.

cxxi Para un estudio puesto al día de los desarrollos de *Pursuing stacks* [**1983**], ver C. Simpson. "Descent". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 83-141.

LVIII Una categoría es una *categoría modelo (o modelo cerrada)* (Quillen 1967) si es completa y cocompleta y si posee tres clases canónicas de morfismos (equivalencias débiles, fibraciones, cofibraciones) cerradas bajo adecuadas clausuras (retracciones, elevaciones, factorizaciones). Las categorías modelo de Quillen captan estructuras fundamentales de la topología algebraica e incluyen a la categoría de espacios topológicos, la categoría de complejos de cadenas, las categorías de conjuntos o prehaces simpliciales sobre un sitio, etc. Sin embargo, el concepto es demasiado vasto, y no alcanza a *circunscribir exactamente la homotopía*, objetivo parcial de *Pursuing stacks* [**1983**].

Con lo anterior, hemos registrado algunas de las estrategias iniciales en *Pursuing stacks* [**1983**] para intentar capturar la categoría homotópica usual *Hot* (*CW*-complejos con morfismos clases de homotopía) mediante estrategias *at large* desde *Cat* (localizaciones vía equivalencias débiles)[499]. Volveremos sobre esto más adelante (*Dérivateurs* [**1991**], nuestro *Capítulo 13* abajo), y señalamos brevemente ahora[500] la aparición de otras jerarquizaciones que han influenciado notablemente el panorama posterior de la teoría de categorías, es decir, la emergencia de estructuras categóricas de orden superior. Como hemos visto, dentro del programa grothendieckiano la apertura hacia estratos superiores es del todo natural, y responde al *enriquecimiento profundo de una teoría de la ambigüedad, a través de torres de conceptos*. En el caso categórico, esto corresponde a un progresivo enriquecimento de unas categorías sobre otras, con la esperanza de poder captar con ello

[499] Para una presentación precisa de estas perspectivas, siguiendo y completando cuidadosamente a Grothendieck, véase G. Maltsiniotis. *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*. Astérisque 301. Paris: Société Mathématique de France, 2005.

[500] Deben mencionarse aquí, sin embargo, dos largas digresiones que ocurren entre la estrategia *Cat - Hot* y la jerarquización n-categórica: §68 "Digresión sobre un «nuevo continente»", §69 "Digresión sobre seis semanas de trabajos desde cero" (los títulos aparecen en el índice [**IMAG**, cote 134-2, 8]). En el §68 (27 de Mayo), Grothendieck señala que "han pasado más de seis semanas sin haber escrito ninguna nota" [**1983**, 191], debido a "distracciones" alrededor del Lego-Teichmüller, a su vez motivadas en "los cinco o seis años en que mi atención se vio atraída por la fascinante mixtura [*melting pot*] de estructuras clave en geometría, topología, aritmética, grupos discretos y algebraicos, estrechamente entreveradas en una suerte de muy básica teoría de Galois-Teichmüller" [**1983**, 192]. El punto culminante resulta ser *La longue marche à travers la théorie de Galois* [**1981**], que Grothendieck califica como "el viaje más satisfactorio y excitante que he tenido en matemáticas hasta el momento" [**1983**, 192]. Tomando más distancia –en los "últimos siete años", es decir en el periodo 1976-1983 [**1983**, 193]– Grothendieck detecta "cuatro grandes periodos de reflexión alternada, un periodo de reflexión sobre temas personales alternando con uno sobre matemáticas" [**1983**, 192]. Los cuatro periodos matemáticos corresponden a *(i)* la *Longue marche*, *(ii)* estudios sobre la topología moderada y el despliegue [*déployement, unfolding*] de estructuras estratificadas, *(iii)* un "seminario anabeliano que terminó antes de tiempo la primavera pasada" y *(iv)* "una nueva reflexión matemática desde febrero" (*Pursuing stacks*) [**1983**, 192-193]. El vaivén de las reflexiones ocurre "como el incesante subir y bajar de las olas [very much like the unceasing up and down of waves]" [**1983**, 193], con todo tipo de fuertes sensaciones involucradas: respiro, sed, energía, pasión, amor, frenesí, fascinación [**1983**, 193-194] (para desarrollos sobre esta *vitalidad*, ver nuestra *Sección 11.3* abajo). Vemos entonces cómo Grothendieck combina vida (personal), creatividad (matemática) y reflexión (metodológica) a lo largo de dialécticas pendulares que se *requieren* las unas a las otras, tal como –en el *mar*– las profundidades marinas, las corrientes intermedias y las olas se convocan unas a otras.

las *torres de homotopía*. Surgen así diversos escalonamientos naturales en una jerarquía creciente de niveles y de procesos de reflexión: n-categorías, n-grupoides, ∞-categorías, ∞-grupoides[LIX].

Muchas de las ideas principales sobre los órdenes superiores se encuentran implícitamente en *Pursuing stacks* [**1983**], aunque, según Maltsiniotis, si se lee con cuidado, estas pueden también *explicitarse* en el manuscrito[cxxii]. En efecto, dentro de las estrategias generales de suavización[501] típicas de Grothendieck, podemos ver cómo van apareciendo nociones suaves *at large* en el ámbito general *Cat* –entre las cuales, los morfismos propios

[501] En el §113 (27 Agosto) "«Suave» versus «duro» [«Soft» versus «hard»]" (título en el índice [**IMAG**, cote 134-2, 10]), Grothendieck describe un proceso de ruptura de lo abeliano en la construcción de fibras de homotopía de un complejo (Postnikov), proceso que considera "brutal" y "destructor de armonía", y propone en su lugar un *dévissage suave*, cercano a lo que "Dios nos dio" [**1983**, 468]. La *suavidad* y lo *divino* van así convergiendo hacia las intuiciones de *La clef des songes* [**1987**] (nuestro *Capítulo 15* abajo). Una aparición natural de *nilpotentes* en el *dévissage* suave [**1983**, 469-470] recuerda el fundamental papel suavizador de la nilpotencia en *EGA* [**1959-64**].

[cxxii] Según Maltsiniotis, se tiene el siguiente *Programa de Grothendieck*: "El programa de Grothendieck consiste en mostrar que para todo n, $0 \leq n \leq \infty$, el estudio de los tipos de homotopía n-truncados es equivalente al de los n-grupoides (...) En particular, el estudio de los tipos de homotopía no truncados tendrá que ser equivalente al de los ∞-grupoides. Para ello, se trata de asociar, a todo espacio topológico o conjunto simplicial X, un n-grupoide fundamental $\Pi_n(X)$, generalizando el grupoide fundamental de Poincaré para $n = 1$. La idea evidente es que los objetos de $\Pi_n(X)$ deben ser los puntos de X, las 1-flechas los caminos de X, las 2-flechas las homotopías entre caminos, las 3-flechas las homotopías entre homotopías, etc. Se trata entonces de definir la especie de estructuras de n-grupoides que permitiría realizar ese programa". Véase G. Maltsiniotis. *Infini groupoïdes d'après Grothendieck*. Preprint. URL: https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/ps/infgrart.pdf, p. 2.

[LIX] La terminología ahora usada es posterior a Grothendieck. Una *1-categoría* es una categoría ordinaria (objetos y morfismos), y, por inducción, una n-categoría es una categoría con n-morfismos entre $(n-1)$-morfismos. *Cat* es una 2-categoría con transformaciones naturales (2-morfismos) entre funtores (1-morfismos). Si ciertas condiciones de igualdad en un nivel se reemplazan por condiciones de isomorfismo en el siguiente nivel (por ejemplo, en topología, la composición de caminos solo verifica ciertas igualdades módulo homotopía), emerge el ámbito de las n-categorías *débiles*. Un *grupoide* es una categoría en la que todo morfismo es invertible (un grupo usual es entonces esencialmente un grupoide con un solo objeto). Los prefijos ∞ extienden las nociones de truncación (n) para todo $n \geq 1$. Existen muy diversas definiciones y axiomatizaciones para nociones de orden superior en teoría de categorías, aún por estabilizarse completamente (ver múltiples entradas sobre estos temas en las páginas web del *n-Lab*). Las categorías de orden superior (n, ∞) constituyen actualmente uno de los campos más activos de la teoría de categorías, con toda una generación de jóvenes apasionados en el tema y con grandes matemáticos como Lurie produciendo aportes substanciales en su desarrollo.

y lisos[cxxiii]– que sirven de base a técnicas muy generales de descenso: "(...) *las fibraciones son lisas, las cofibraciones son propias.* Esto es muy notable, ya que las nociones de categorías fibradas y cofibradas se introdujeron en el ámbito de «categorías grandes», para captar algunas propiedades estándar encontradas en todas las situaciones de «cambio de base» (y luego la situación dual de cambio de co-base) – siendo la principal motivación la necesidad de formular, con un mínimo de precisión, un marco para las «técnicas de descenso» en geometría algebraica. (...) Una sorpresa aún mayor fue la dualidad entre las nociones de lo propio y lo liso..." [**1983**, 283].

En el ascenso y el descenso, aparecen los saltos entre equivalencias débiles (a nivel n) y las equivalencias usuales (a nivel $n+1$), lo que da progresivamente lugar a diversas jerarquías: "Gr-n-*stacks* en términos de Gr-∞-*stacks*" [**1983**, 13], "topologías T_N inconvenientes" y "topología T_∞ conveniente (...) para recuperar los tipos de homotopía de objetos de *Cat*" [**1983**, 22], "formalismo de invariantes básicos (como π_i, H_i o H^i) con valores en categorías" [**1983**, 207], "grupoides y n-grupoides (n finito) que generan tipos de homotopía truncados" [**1983**, 208], "soluciones 2-universales a problemas 2-universales" [**1983**, 423], "«esquematizaciones a nivel n» para un tipo de homotopía dado (...) involucrando grupos de homotopía π_i para $i \geq n$" [**1983**, 444], "tipos de homotopía n-conexos" [**1983**, 446], "categorías $Hot_n(k)$ de tipos de homotopía esquemáticos n-conexos sobre k" [**1983**, 476], "*dévissage* $X \mapsto X_n$ donde X_n se deduce de X «matando sus π_i's para $i > n$»" [**1983**, 533], etc. Las nociones categóricas de orden superior recorren así todo el texto.

[cxxiii] Un *localizador fundamental* W para una categoría es un subconjunto de flechas cerrado bajo identidades, triangulaciones, secciones, flechas finales y relevos. Los elementos de W axiomatizan las equivalencias débiles, es decir, las verdaderas equivalencias en refinamientos de orden superior. Un morfismo $u : A \to B$ en *Cat* es W-*esférico* si para todo b en B, $u/b : A/b \to B/b \in W$. Los morfismos *propios y lisos* se definen de manera canónica (codual y dual) con respecto a la esfericidad. Con todo ello, puede estudiarse una "teoría elemental homotópica de categorías", a través de las "categorías homotópicas" $Hot(A) = W_A^{-1}Hom(A, Cat)$ donde A es una categoría pequeña y W_A es un adecuado localizador fundamental para A. Véase íd., *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, pp. 19, 20, 109, 113.

11.2 Síntesis conceptual

Los *stacks* aparecen en muy diversas guisas a lo largo del documento [**1983**] –coeficientes en un álgebra homológica no conmutativa, estratificadores en torres de categorías, conceptos unificadores de la homología y la homotopía– pero Grothendieck nunca ofrece una definición precisa del concepto[LX]. Esto se debe en parte al *work in progress* de las notas, donde priman las *líneas de fuga* del edificio, en detrimento de sus fundamentos[502]. No obstante, la *visión* puede desglosarse en algunas etapas bien marcadas: *(i)* existencia de grupos de automorfismos no triviales (interés de la teoría de la ambigüedad de Galois) para *estructurar ciertas estructuras* (primera iteración jerárquica esencial), *(ii)* clasificación de esas estructuras (*e.g.* espacios *moduli*) gracias a variaciones continuas (interés de la teoría de representaciones de Riemann) para *diferenciar ciertas diferencias* (segunda iteración jerárquica esencial), *(iii)* papel ubicuo de los grupoides (algebraicos / topológicos) en las temáticas anteriores de estructuración, representación y diferenciación, *(iv)* integración, en haces superiores, de todas las informaciones de variación, pegamiento, elevación (inyección) y restricción (proyección). La *coherencia* del programa puede verse así gracias a una suerte de *haz metodológico* aplicado a la riqueza misma de la matemática.

502 La importancia del *estilo* en *Pursuing stacks* [**1983**] es esencial: "A veces hallo difícil encontrar un justo equilibrio en estas notas entre, por un lado, la necesidad de trabajar sobre un suelo razonablemente firme y trabajar sobre terminologías y notaciones sugestivas para lo que sigue, y, por otro lado, mi resolución de no quedar atrapado de nuevo por el estilo de trabajo de los *Éléments de Géométrie Algébrique*, donde se entendía que todo debía elaborarse en completo detalle y en máxima generalidad, para el beneficio de generaciones de «usuarios»" [**1983**, 445].

LX Un *stack* se considera actualmente como una *generalización de la noción de haz* al contexto de las 2-categorías (o bicategorías). De manera iterada, se entiende un *n-stack* como un $(n+1)$-haz. En ciertos casos, los *stacks* pueden ser caracterizados mediante *fibraciones* categóricas. De manera más precisa, un *stack* sobre un sitio S es un pseudofuntor (preserva identidad y composición módulo adecuados isomorfismos) $S^{op} \to Cat$ (2-categoría) que satisface un descenso efectivo para cubrimientos. Si el *stack* toma valores en la categoría de grupoides, se llama un *stack de grupoides*. En el caso de los *espacios moduli*, un *stack de moduli* tiene en cuenta no solo las clases de equivalencia en los *moduli*, sino los *grupos de automorfismos* de esas estructuras. De esta manera, en el desarrollo de los *stacks*, aparece de manera natural la *teoría de la ambigüedad* aplicada a la aritmética. Para una guía del panorama, ver diversas entradas en las páginas web del *nLab*.

Los *pasajes* entre diversos tipos de *stacks* resultan entonces enteramente *naturales*, yendo y viniendo (*back-and-forth*) entre (1) *stacks algebraicos* (variedades algebraicas, esquemas, topos), (2) *stacks topológicos y diferenciales* (variedades diferenciales, espacios topológicos, topos) y (3) n-*stacks* (0-*stacks* = haces, 1-*stacks* = *stacks*, etc., dando lugar a n-categorías y n-grupoides). Por su lado, cada uno de esos caminos abre nuevos ámbitos de exploración: (1) la teoría fina de los espacios *moduli*, orientada hacia la aritmética (programa de Langlands), (2) las teorías de clasificación en álgebra no conmutativa, orientadas hacia la geometría anabeliana (programa de Grothendieck-Teichmüller)[503], (3) las teorías homotópicas de tipos y categorías, orientadas hacia una refundamentación de las matemáticas en órdenes superiores (programa de Voevodsky, HoTT)[cxxiv]. En todo lo anterior, observamos un *pensamiento continuo*[504] expresado de múltiples formas, a través de estructuras categóricas unitarias lo suficientemente *altas y generales* para poder cubrir la multiplicidad de las diversas subregiones particulares.

503 Un ejemplo central de *stack* es el (pseudo)funtor $S^{op} \to M_{g,n}$ donde S es la categoría de esquemas afines sobre un esquema fijo con la topología *étale* y $M_{g,n}$ es el espacio *moduli* de superficies de Riemann de género g con n puntos. El caso particular $(g,n) = (1,1)$ (correspondiente a las curvas elípticas) fue tratado inicialmente por Mumford (1965, introducción del término "*stack*" en 1969), antes de que Grothendieck [**1981**] [**1983**] considerara el caso general (g,n).

504 Una comparación de Hilbert con Grothendieck, a todas luces los dos matemáticos mayores del siglo XX, resulta aquí instructiva: mientras que, en Hilbert, cada fragmento de su producción constituye un conglomerado bien separado y completo (álgebra, teoría de números, geometría, análisis funcional, lógica, física), en Grothendieck todos los fragmentos se imbrican permanentemente, desde su *Tesis Doctoral* [**1949-53**] hasta los *Dérivateurs* [**1991**]. Entre los dos yace por supuesto Bourbaki, como catalizador de lo múltiple hacia lo unitario.

cxxiv La *Homotopy Type Theory* (HoTT) procura encontrar una *cuarta fundamentación profunda* de las matemáticas (después de la teoría de conjuntos, la teoría intuicionista de especies y la teoría de categorías). El énfasis consiste en situar *de entrada* una intuición geométrica (tipos de homotopía), que *preceda* a lo combinatorio, lo constructivo o lo relacional. Una parte esencial del programa consiste en *debilitar* la noción de igualdad (muy restrictiva para las estructuras naturales de la matemática) y cambiarla por nociones de isomorfismo ("axioma de univalencia"). Para una introducción a HoTT, véase V. Voevodsky y otros. *Homotopy Type Theory. Univalent Foundations of Mathematics.* Princeton: Institute for Advanced Study, 2013.

En realidad, la *estructura categórica* de un *stack* refleja toda la riqueza del hacer grothendieckiano. Sobre un *sitio* dado (categoría con topología de Grothendieck), con propiedades geométricas, diferenciales o aritméticas adicionales –es decir, sobre un lugar de encuentro de problemáticas y técnicas muy diversas– un *stack* consiste en una *proyección* de una categoría sobre el sitio, cuyas fibras son grupoides y cuyos isomorfismos conforman un haz con buenos relevos en las fibras. Se construyen así objetos con dúctiles capacidades de *reflexión* y de *pegamiento* entre sus diversos niveles, lo que provee una fina continuidad detrás de saltos aparentes en la jerarquía (n a $n \pm 1$). Las consecuencias son entonces impactantes, tanto a nivel *local* (estudio estructural de los n-tipos de homotopía), como *global* (estudio de localizadores[505] en *Cat* y estratificación de equivalencias débiles). De esta manera, Grothendieck se enfrenta simultáneamente con algunas de sus obsesiones más complejas en el tratamiento de los objetos matemáticos: dualización (topológica/algebraica), delimitación (proyección/inyección), involución (base/jerarquía), conexión (fibración/cofibración). La *envolvente* de todos estos conceptos y técnicas produce un amplio *mar* sobre el cual algunos navíos surcan viento en popa (n-estratos) y algunas cuadrillas navegan más a la deriva (∞-compleciones).

Las *líneas de fuga* de *Pursuing stacks* [**1983**] bosquejan la idea de que un estudio axiomático de la homotopía *at large* (es decir, a través de localizaciones en la 2-categoría de todas las categorías *Cat*) debe corresponder a un estudio de las n-categorías, y, más específicamente, que un estudio de los n-tipos de homotopía debe corresponder a un estudio de ciertos n-grupoides. El descubrimiento esencial de Grothendieck consiste en darse cuenta de que una doble abstracción –*abstracción estructural* que lleva de la variable compleja y la teoría de números a los *stacks*, *abstracción estratificada* que lleva de los 1-*stacks*

505 La ductilidad de los localizadores se pone de manifiesto cuando Grothendieck señala que las "categorías test parecen jugar un papel similar al de los espectros de anillos de valuación discreta en geometría algebraica – pueden proyectarse en cualquier lugar, para hacer un «test» de lo que allí sucede" [**1983**, 90].

a los *n-stacks*– puede contener las *llaves arquetípicas* del pensamiento homotópico. Por otro lado, la analogía de que la razón conmutativa "clara" (homologías / cadenas) puede corresponder a una *razón no conmutativa "oscura"* (homotopías / *stacks*) gobierna los mejores momentos del escrito. En el péndulo de la luz y la oscuridad median la *penumbra* y el *claroscuro*, donde se sitúan algunos de los más fascinantes conceptos de la matemática. En el fondo, toda una red de "razones" *yang* y de "co-razones" *yin* (definiciones e intuiciones, ejemplos y visiones, convicciones y conjeturas, pruebas y errores, iluminaciones y arrepentimientos) permea un diario de la invención y el descubrimiento que se abre ante nuestros ojos con conmovedora pureza, limpieza, transparencia e ingenuidad.

11.3 Ejemplo detallado: la "vida abre las puertas"

Si algo puede decirse del diario es que se encuentra *lleno de dinamismo*. En esta sección revisamos algunas de las apariciones de esa dinámica en los procesos creativos de *Pursuing stacks* [**1983**]. Muchos registros demuestran la presencia de una "vida que continúa abriendo las puertas de la casa bien temperada de mis reflexiones matemáticas" [**1983**, 592], una vida que se cuela sin cesar en la cotidianeidad de Grothendieck: *(i)* conciencia de un viaje abierto[506], *(ii)* manifestación de fuertes estados de ánimo[507], *(iii)* incursión en

506 "Viaje heurístico al descubrimiento de los *stacks*" [**1983**, 11], "itinerario provisional del viaje" [**1983**, 12], "«rápido vistazo» demasiado rápido en efecto" [**1983**, 14], "digresión que sigue arrastrándose en mi mente" [**1983**, 50], "antes quiero corregir algunas inexactitudes" [**1983**, 124], "hay aún todo un ramillete de preguntas que han estado esperando" [**1983**, 138], "como siempre, no puedo resistir ser un poco más general" [**1983**, 148], "escalar, sudando tal vez, para obtener una visión a vuelo de pájaro del paisaje, y tal vez, quién sabe, al final volar" [**1983**, 168], "embarcar en un largo viaje" [**1983**, 194], "el final no está aún a la vista" [**1983**, 292], "dudo de que me sumergiré en esas preguntas y aún más de que obtendré una imagen clara" [**1983**, 307], "de nuevo, me siento conjeturando gradualmente en un aire liviano" [**1983**, 328], "mi programa provisional" [**1983**, 357], "continúo con la ilusión de pensar [*wishful thinking*] sobre la esquematización de los tipos de homotopía" [**1983**, 460].

507 "Tal vez fui excesivamente entusiasta" [**1983**, 28], "sensación creciente de que «estaba ardiendo»" [**1983**, 30], "sensación de estar en un aire liviano" [**1983**, 42], "sensación de que no debo aún bucear" [**1983**, 71], "soy prisionero de un prejuicio" [**1983**, 77], "algunas impresiones llegaron gradualmente a

labores alternas[508], *(iv)* concurrencia de situaciones materiales concretas[509], *(v)* inmersión en el corazón salvaje de la vida[510].

Las largas digresiones de *Pursuing stacks* [**1983**], donde se conectan las zigzagueantes variaciones del trabajo y las inesperadas incursiones de la vida, hacen que las cosas "tal vez surjan de manera más suave" [**1983**, 151]. En efecto, uno de los temas recurrentes en Grothendieck consiste en mostrar cómo las visiones amplias y generales tienden a eliminar las obstrucciones particulares, *suavizando*[511] así los entornos del entendimiento. En el

proa" [**1983**, 109], "me embarqué con excesivo entusiasmo" [**1983**, 156], "el resultado central ha sido al final más psicológico que técnico" [**1983**, 180], "no hacer nada más que el amor con las matemáticas, día y noche" [**1983**, 194], "me siento un poco estúpido" [**1983**, 358, 360], "siento que el viento en mis velas ha sido más bien flojo" [**1983**, 518], "empiezo a sentirme como un caballo de batalla que huele pólvora de nuevo" [**1983**, 570], "viento fresco e impetuoso" [**1983**, 592].

508 "Otras ocupaciones no matemáticas me dejaron poco tiempo" [**1983**, 36], "alternancia de periodos de meditación sobre temas personales y periodos de reflexión matemática" [**1983**, 193], "no he tenido mucho tiempo para reflexiones matemáticas" [**1983**, 259], "he pasado mucho tiempo escribiendo cartas matemáticas [Faltings, Porter]" [**1983**, 274], "recibí una impresionante pila de *reprints* y *preprints* de Tim Porter" [**1983**, 280], "no es mi intención pasar mi vida en estas tareas, ni siquiera un año" [**1983**, 320], "me interrumpieron en mis notas amigos visitantes que llegaron unos después de otros" (12 Julio) [**1983**, 354], "otro corte (visita, intento de siesta)" [**1983**, 454], "llamada telefónica de Illusie" [**1983**, 490], "carta de Baues" [**1983**, 530], "preparación del concurso de agregación" [**1983**, 556].

509 "Dormir y comer de vez en cuando" [**1983**, 194], compra de una nueva cinta para la máquina de escribir [**1983**, comparar tinturas en páginas 168 y 212-213, por ejemplo], "rutina diaria ¡no desagradable!" [**1983**, 274], "se estaba volviendo prohibitivamente tarde ayer y tuve que parar" [**1983**, 220, 374], "pequeño corte para cenar" [**1983**, 453], "sentí un gran cansancio en todo mi cuerpo" [**1983**, 490], "estuve un poco enfermo por unos días y luego estuve ocupado en tareas profesionales y de la vida familiar" [**1983**, 500], "gripa pero seguramente problemas de digestión también" [**1983**, 593], "cuidando las frutas caídas que se habían recogido ese día" [**1983**, 555].

510 "La sed de la vida de conocerse a sí misma, fuerza creativa primaria (...) haz básicamente de temores, inhibiciones y auto-engaños" [**1983**, 193], "noticia inesperada de la muerte de mi nieta Ella a los nueve años" (22 Agosto) [**1983**, 426, 491], "urgente necesidad emanando de la vida misma" [**1983**, 491], "nacimiento, hace tres días, de un niñito de mi hija, Suleyman (..) bendición de muchas maneras" (22 Octubre) [**1983**, 555] (página eliminada del *Archivo Grothendieck* [**IMAG**, cote 134-8]), "los hechos de la vida están allí" [**1983**, 577], "mundo de conflictos, que se teje alrededor de cada nacimiento y cada muerte" [**1983**, 592].

511 El deseo, no siempre logrado, consiste en realizar una "navegación suave [*smooth sailing*]" [**1983**, 351] a lo largo de los múltiples *mares y océanos* de las matemáticas. La búsqueda de diversas condiciones de suavidad ("*smoothness condition*") [**1983**, 473] es fundamental para que los navíos logren evitar las tribulaciones de oleajes furiosos.

caso concreto de la creatividad, yendo más allá de las obstrucciones particulares del "yo", Grothendieck subraya cómo "el trabajo no está siendo realmente realizado por mí, sino, lo siento, está teniendo lugar en mí"[512] [**1983**, 491]. La década de los ochenta conformará un tejido denso de ideas y técnicas matemáticas muy originales (*Longue marche* [**1981**], *Pursuing stacks* [**1983**], *Esquisse* [**1984**], *Dérivateurs* [**1991**]), tejido estrechamente conectado con un entorno material preciso que entra en contrapunto con grandes reflexiones metodológicas y filosóficas (*Récoltes et semailles* [**1983-86**], *Clef des songes* [**1987**]). En ese *melting pot* se mixturan entonces (a la Lautman) dimensiones técnicas, materiales, circunstanciales y metafísicas, dando lugar a un modo muy original de creación, inédito hasta el momento en la historia de la alta matemática.

El *estilo* mismo ayuda a abrir puertas insospechadas. Por un lado, en *Pursuing stacks* [**1983**], el *flujo del inglés*[513] es indicativo de los variados y variables mundos en los que Grothendieck actúa paralelamente[514]. Es como si en su mente los idiomas se conectasen con ciertos dominios mismos de la matemática: los *stacks*, aparecidos en la Tesis de Giraud bajo el rótulo *champs* y explorados en los trabajos de Bénabou sobre *bicategorías*, no parecen

[512] Se encuentra aquí una prefiguración de *La clef des songes* [**1987**], donde Grothendieck reflexiona detenidamente sobre las formas en que Dios estaría guiando su mano (ver nuestro *Capítulo 15* abajo). Resulta fascinante observar cómo la "localización" buscada en la axiomatización *at large* de la homotopía parece tener una suerte de *reflejo místico* en la "localización" de la obra del matemático en el ámbito *at large* de una divinización superior. Así como *Cat* se proyecta en las categorías homotópicas, se tiene una suerte de proyección de un ser supremo en la escritura de los hombres. De este modo, aún en el espacio indefinido y extenso que yace entre las construcciones más técnicas y las elucubraciones más vagas, se alcanza a sentir una *profunda continuidad –música de claroscuros contrapuntos–* en el pensamiento y en la acción de Grothendieck.

[513] Impacta allí su muy buen dominio del idioma, salpicado de coloquialismos que muestran su fina práctica del inglés, obtenida en viajes, conferencias y diálogos con la comunidad (particularmente alrededor de sus intercambios con los grupos ecologistas norteamericanos).

[514] Pierre Cartier recuerda cómo, al hablar, Grothendieck parecía estar pensando en alemán y traduciendo simultáneamente al francés. En otro registro, sus técnicas categóricas constituyen una práctica constante de *traducción* entre regiones matemáticas dispares.

ser suficientemente apreciados al inicio en francés[515], mientras que en inglés encuentran *ecos inmediatos* (Quillen, Breen, Brown, Thomason, Porter)[516]. Por otro lado, el *flujo de las mareas*, con el ir y venir de las olas (intuiciones y definiciones, errores y conjeturas, dudas y convicciones, desarrollos globales y locales), revela las pulsiones incesantes de la creación. La *forma* se acopla así con el *fondo*, y pareciera que las múltiples estratificaciones de la matemática presentes en los *stacks* se correspondieran con los múltiples niveles del lenguaje y los múltiples sondeos de la psiquis. Ahondando en las conexiones entre mente y cuerpo, entre espiritualidad y presencialidad, entre obra y vida, Grothendieck se somete así a una incisiva introspección creativa, con pocos precedentes en la historia[517], que da lugar a muchas de sus joyas de la década.

[515] Los *stacks* tuvieron poca influencia *directa* en la escuela matemática francesa, aunque fueron recuperados y desarrollados a partir del nuevo siglo por Maltsiniotis, Cisinski, Simpson, Toën, entre otros.

[516] Además, actualmente, el mayor heredero del espíritu grothendieckiano derivado de *Pursuing stacks* [**1983**] es sin duda Jacob Lurie, con su teoría de n-categorías y ∞-categorías orientada bajo directrices homológicas y homotópicas. Véase J. Lurie. *Higher Topos Theory.* Princeton: Princeton University Press, 2009.

[517] Un predecente importante es el estudio del Dr. Toulouse sobre Poincaré, donde este se sometió (1897) a muy concretas observaciones del psicólogo, con el objetivo de registrar sus métodos creativos. Ver D. Toulouse. *Henri Poincaré. Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle.* Paris: Flammarion, 1910. Sin embargo, el enfoque del Dr. Toulouse, orientado a detectar una cierta "superioridad" intelectual, habría sin duda horrorizado a Grothendieck.

12

Esquisse d'un programme (1984)

Esquisse d'un programme [**1984**] constituye un proyecto de investigación destinado al ingreso de Grothendieck al CNRS, después de su renuncia a la Universidad de Montpellier. El *Esbozo de un programa* recupera algunas ideas centrales de la *Longue marche* [**1981**] y las extiende hacia dos nuevas aperturas en el *álgebra topológica*: por un lado, el camino de los "dibujos de niños", con los cuales capturará combinatoriamente las superficies de Riemann compactas y estudiará las acciones del grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ sobre ellas, y por otro lado, el camino de la "topología moderada", con la cual querrá eliminar los fenómenos salvajes y los contraejemplos artificiales de la topología conjuntista usual. El carácter programático del texto lo hace asequible en tamaño, aunque, al ser esencialmente indicativo, lo torna exigente en su contenido. En concordancia con los trabajos de la década de los ochenta, se trata de una aproximación "alta" sobre objetos "bajos", en este caso, la armazón de lineamientos para el estudio sistemático de acciones algebraicas "altas" sobre superficies topológicas de "baja" dimensión. La influencia de la *Esquisse d'un programme* [**1984**] ha sido enorme en la matemática posterior.

12.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Esquisse d'un programme[518] está fechada en Enero 1984 [**1984**, 51], pero procede claramente de los temas avanzados en la *Longue marche* [**1981**], que aparentemente Grothendieck volvió a retomar en algunas conferencias de 1983[cxxv]. El texto corresponde a un proyecto de investigación sometido al Centro Nacional de Investigación Científica (CNRS), impulsado por un encuentro con su alumno Zoghman Mebkhout: "Nuestro corto diálogo tuvo un resultado inesperado: cuando oí que usted empezaba en el CNRS, me resultó claro que no tengo realmente nada que hacer en un Departamento universitario. He decidido seguir sus pasos y aplicar para un puesto en el CNRS"[cxxvi]. Alain Connes, miembro en ese momento del comité decisorio en el CNRS, tuvo que intervenir a favor de Grothendieck[cxxvii]. Con ello, entre 1984 y 1988, fecha de su jubilación, Grothendieck se encontró bajo los auspicios del CNRS, actuando como investigador aislado en Mormoiron, con visitas muy ocasionales a Montpellier[cxxviii].

[518] El manuscrito tipografiado original de la *Esquisse* se encuentra en los Archivos Grothendieck [**IMAG**, cote 119 (1984)]. En realidad, existen dos versiones tipografiadas, con muy pequeños cambios entre ellas (mínimas correcciones a mano): (A) [**IMAG**, cote 119 (1984), 52-59], (B) [**IMAG**, cote 119 (1984), 78-135]. Schneps y Lochak realizan una transcripción del manuscrito (A) en L. Schneps y P. Lochak, eds. *Geometric Galois Actions. I. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, pp. 5-48. En este capítulo, todos los reenvíos de página del tipo [**1984**, x] corresponderán a la *paginación original* del manuscrito tipografiado de Grothendieck, tal como aparece marcada en (A) o en la transcripción Schneps-Lochak.

[cxxv] Según Carlos Contou-Carrère, "alrededor de 1983 Grothendieck mantuvo una serie de lecciones en las que desarrolló sus ideas alrededor de la «torre de Teichmüller» y el cálculo del grupo de Galois absoluto sobre $\mathbb{Q}$". Ver Scharlau, óp.cit., Cap. 15.

[cxxvi] Se trata de un párrafo de una carta a Mebkhout, fechada 15 Junio 1983. Ver ibíd., Cap. 15.

[cxxvii] Ver ibíd., Cap. 15.

[cxxviii] Para una buena descripción de los entornos de 1984 y de las novedades matemáticas de la *Esquisse*, véase Bringuier, óp.cit., pp. 97-101.

En *Récoltes et semailles* [**1983-86**], Grothendieck recuerda la situación:

> La *Esquisse d'un programme* ofrece un esbozo de los principales temas de reflexión matemática que he perseguido en el curso de los últimos diez años [**1983-86**, P.36].
>
> La *Esquisse d'un programme* describe mis fuentes de inspiración, que fijan una *dirección*, si no un destino para ese viaje a lo desconocido, un poco a la manera de una brújula, o de un vigoroso hilo de Ariadna [**1983-86**, L.viii].

Por otra parte, la recepción le defrauda:

> Envié mi *Esquisse* a varios de mis antiguos amigos e ilustres topólogos, pero no parece que haya tenido el don de interesar a nadie... [**1983-86**, L.vii].
>
> Entre los quince o veinte amigos de otros tiempos a los que les envié la *Esquisse d'un programme* (...) solo dos (Malgrange y Demazure) se tomaron la pena de enviarme algunas líneas de agradecimiento. Algunos ecos un poco más circunstanciales (y además calurosos) me llegan de jóvenes matemáticos que conozco desde hace poco... [**1983-86**, 2.342].

En suma, una vez más, Grothendieck se adelanta a su época, y han sido sobre todo los trabajos de Schneps y Lochak, en la década de los noventa, los que han ayudado a la recuperación de un programa extraordinario.

Resumen mínimo.

Ligada a la emergencia de la *Esquisse* [**1984**], resumimos aquí primero una *Carta a Faltings*[cxxix] (los números entre paréntesis corresponden a la *paginación original* de la carta, tal como aparece marcada en la transcripción y traducción Schneps-Lochak). El "desarrollo de la potencia visionaria en matemáticas" requiere penetración [*insight*], profundidad, delicadeza, y "emerge de la niebla" a partir de una "delicada y obstinada sensación de los conceptos y entidades relevantes y sus relaciones mutuas" (1). "El «yoga de los motivos» (...) es una suerte de ciencia secreta – Deligne me parece ser aquel más fluyente en ella" (1).

[cxxix] Carta del 27 Junio 1983, pocos días después de la carta a Mebkhout. Transcripción al alemán y traducción al inglés en Schneps y Lochak, óp.cit., pp. 49-58, 285-293.

"Yoga" de la geometría anabeliana, problema general (2), caracterización de anabelianidad en el caso de curvas gracias a la negatividad de la característica de Euler (3), caracterización de anabelianidad en el caso $\mathbb{C}$ por hiperbolicidad (3). Variedad anabeliana general como fibración de curvas anabelianas (3). "Estoy bastante convencido de que los espacios moduli $M_{g,n}$ pueden ser aproximados como «anabelianos»" (3). "No me he ocupado de este conjunto de preguntas desde hace más de un año" (3) (*i.e.*, desde la *Longue marche* [**1981**]). Caracterización de las variaciones de campos mediante variaciones de los grupos fundamentales, gracias a su "rigidez" interna, o, equivalentemente, gracias a la "fuerza" de su acción aritmética externa (4-5). Emergencia del grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q})$ como objeto central [*Grundobjekt*] de la geometría algebraica anabeliana (5). Anabelianidad y topos *étales* (7). Relaciones del programa anabeliano con la conjetura de Mordell (8). Ideas estimuladas por "algunas reflexiones trascendentales sobre la acción de grupos finitos sobre curvas complejas algebraicas y sus recubrimientos universales" (9). Después de inicios "durante la primera parte de 1981 (...) retomé las reflexiones anabelianas de nuevo entre Diciembre 81 y Abril 82" (9). Registro de trabajos en anabelianidad, espacios de Teichmüller y "fundamentos de la cohomología con respecto al álgebra homotópica" (*i.e. Pursuing Stacks* [**1983**] y *Dérivateurs* [**1991**]) (9).

En lo que sigue, resumimos ahora la *Esquisse d'un programme* [**1984**] (los números entre paréntesis corresponden a la *paginación original* del manuscrito tipografiado de Grothendieck). Este *Resumen mínimo* es pormenorizado, dado el tamaño razonable del texto. En la *Descripción más extensa*, abajo, coligamos estructuralmente la información.

"1. Envío" (1-2). "Dos voluminosos cartones de notas manuscritas" (¿*Longue marche* + *Pursuing stacks*?) (1); "trabajo de descubrimiento (...) pensamiento que sondea y que descubre andando a tientas en la penumbra" (1); "el esbozo que sigue sobre algunos temas de reflexión de los últimos diez o doce años tendrá lugar a la vez de esbozo de programa de trabajo para los años venideros" (1).

"2. Un juego de «Lego-Teichmüller» y el grupo de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sobre $\mathbb{Q}$" (2-9). Estudio de la "intuición geométrica y topológica de las formas, y más particularmente de las formas bidimensionales (...) que se pueden agrupar bajo la apelación de «topología de las superficies» o «geometría de las superficies»" (2); "ha sido mi principal fuente de inspiración, así como mi hilo conductor constante" (3); "con sorpresa y maravilla a lo largo de los años descubrí (o más bien, sin duda, redescubrí) la riqueza prodigiosa, realmente inagotable, la profundidad insospechada de ese tema, de apariencia tan anodina" (3). Estudio del "sistema de todas las multiplicidades $M_{g,n}$ ligadas entre ellas por un cierto número de operaciones fundamentales" (4); estudio "reflejado por una estructura análoga sobre los grupoides fundamentales correspondientes, los «grupoides de Teichmüller» (...) de manera suficientemente intrínseca para que el grupo de Galois Γ de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ opere sobre la «torre» de los grupoides" (4); así "*el grupo de Galois* Γ *se realiza como un grupo de automorfismos de un grupo profinito muy concreto*" (4). La acción de Γ sobre la torre puede ser descrita por su acción en los primeros niveles (5-6); importancia de ir más allá del grupo fundamental con un punto de base, y pasar a grupoides fundamentales con "todo un paquete [de puntos] que sea invariante para las simetrías de la situación" (5) (tema recurrente: *back-and-forth* de lo Uno a lo Múltiple); "tierra virgen (...) verdadera joya" (6). Aparición esencial del grupo modular en la base de la torre (6); "*doce «piezas de construcción» fundamentales* (6 de género 0, 6 de género 1) en un «juego de Lego-Teichmüller»" (8); cercanía con el "juego de «cirugía geodésica hiperbólica» de Thurston" (8); aparición de un "juego de vaivén típico entre lo combinatorio y lo algebraico complejo (o mejor, lo algebraico sobre $\mathbb{Q}$)" (9).

"3. Cuerpos de números asociados a un dibujo de niños" (9-18). "Mi interés por las superficies topológicas comienza a surgir en 1974" (9); tesis doctoral de Yves Ladegaillerie (9-10); trabajo de DEA de Jean Malgoire y Christine Voisin (11); estudio de la categoría de mapas $X \setminus K$ (X superficie compacta, K complejo topológico sumergido en X) (10)

y descubrimiento de que los mapas pueden ser descritos mediante recubrimientos de la esfera de Riemann (11); "se llega a una constatación que ocho años después me parece aún siempre tan extraordinaria: ¡todo mapa orientado «finito» se realiza canónicamente sobre una curva algebraica compleja!" (11). "Naturaleza familiar, no técnica, de los objetos considerados, dibujos de niños" (12); "a un tal dibujo se le asocian sutiles invariantes aritméticos" (12). Aparición del grupo de Galois Γ (= $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$) "como agente transformador sobre formas topológico-combinatorias de la naturaleza más elemental posible" (13); "mi reflexión se encaminó muy rápido hacia una dirección más conceptual para llegar a aprehender la naturaleza de esa acción de Γ (...) y así mi atención se dirigió hacia lo que he llamado desde entonces «*geometría algebraica anabeliana*»" (14); aparición de "grupos fundamentales que están muy alejados de los grupos abelianos (y que por esta razón he llamado «anabelianos»)" (14). Teorema de Belyi (1979) ("identidad profunda entre la combinatoria de los mapas finitos, por una parte, y la geometría de las curvas algebraicas definidas sobre cuerpos de números, por otra parte") (15) y enlace con el programa de geometría anabeliana (15). Referencia a la *Longue marche* [**1981**], "esfuerzo de comprensión de las relaciones entre grupos de Galois «aritméticos» y grupos fundamentales profinitos «geométricos»" (15). Enlace entre la geometría anabeliana y la teoría de Galois-Teichmüller, a través de las "multiplicidades modulares $M_{g,n}$ que aparecen como los primeros ejemplos importantes, en dimensión > 1, de variedades (o, más bien, multiplicidades) que parecen merecer la apelación «anabeliana»" (16). "Riqueza verdaderamente inimaginable de un grupo anabeliano típico como el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ (...) «piedra de construcción» fundamental de la «torre de Teichmüller»" (16). "Yoga anabeliano (...): una curva algebraica anabeliana sobre un cuerpo de números K (extensión finita de $\mathbb{Q}$) se conoce módulo isomorfismo cuando se conoce su grupo fundamental mixto" (17). "Hay quienes, ante esto, se contentan con levantar los hombros (...) Olvidan, o ignoran, que nuestra ciencia, y cualquier ciencia, sería bien poca cosa si desde sus orígenes no hubiese estado nutrida por los sueños y las visiones de aquellos que se entregan a ella con pasión" (18).

"4. Poliedros regulares sobre campos finitos" (18-25). Problematización del caso infinito en el caso de mapas "regulares" (correspondientes a "recubrimientos galoisianos") (18); trabajos de fundamentos de Malgoire y Voisin (19). "En 1977 y 1978, paralelamente a dos cursos C4 sobre la geometría del cubo y aquella del icosaedro, comencé a interesarme por los poliedros regulares" (19); "la teoría de los polígonos regulares en característica arbitraria fue el objeto de un curso de DEA en 1977/78" (20). "La extensión de la teoría de los poliedros regulares (y, más generalmente, de toda suerte de configuraciones geométrico-combinatorias, aún los sistemas de raíces...), desde el campo de base $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ hacia un anillo de base general, me parece de un alcance comparable, en esta parte de la geometría, a la extensión análoga que ha tenido lugar desde el comienzo del siglo en geometría algebraica, o desde hace unos veinte años en topología, con la introducción del lenguaje de los esquemas y los topos" (20). "Ampliación del punto de vista (...) pequeño milagro (...) despejar un manto de brumas (...) fuerza de motivación y fascinación poco comunes, como la del sueño tal vez (...) llamado de lo informulado, de lo informe que busca forma, de algo entrevisto y elusivo (...)" (23-24).

"5. *Haro* sobre la topología dicha «general», y reflexiones heurísticas hacia una topología dicha «moderada»" (25-36). "Necesidad de fundamentos nuevos para la topología «geométrica», en una dirección muy diferente de la noción de topos, y aún independiente de las necesidades de la geometría algebraica denominada «abstracta» (sobre campos y anillos de base generales)" (25). "El problema de partida, que comenzó a intrigarme hace ya unos quince años, era el de definir una teoría de desatornillamiento [*dévissage*] de las estructuras estratificadas" (25); inspiración y motivación de las multiplicidades modulares $M_{g,n}$ en "mi reflexión sobre las estructuras estratificadas, de diciembre 1981 a enero 1982" (¿desliz de fechas?: no concuerda con las fechas de la *Longue marche* [**1981**] – ¿referencia a otro manuscrito?) Estudio de categorías isotópicas en el problema de "tornar canónico aquello que no lo es" en las cuestiones de *dévissage* (27); necesidad de solventar "fenómenos «salvajes»" en cocientes, bordes, proyecciones (28); necesidad de introducir una "«topología moderada»" (29) dirigida al "estudio de *propiedades topológicas de formas geométricas diversas*" (29), en contraste con la "«topología general» (desarrollada en los años treinta y cuarenta) *por analistas para las necesidades del análisis*" (29). Lucha en contra de la "inercia casi insuperable del espíritu" (30). "Aproximación axiomática" de la topología moderada (30); consecuente aparición "no de una «teoría moderada», sino de una vasta infinitud" (30), ligada por teoremas de comparación isotópica (31). "Lo que hace falta, otra vez, no es para nada la virtuosidad técnica de los matemáticos, a veces impresionante, sino la audacia (o simplemente la inocencia)" (32). Aparición de "una noción de grado de trascendencia (o «dimensión») de un punto en un espacio moderado, cercano de la noción familiar en geometría algebraica" (33) (prefiguración de la noción de dimensión en las teorías o-minimales posteriores de la teoría de modelos). Importancia de los "sueños" y del "trabajo de fundamentos" en la "expresión de una realidad palpable" (34). Las multiplicidades deben estudiarse sobre categorías de índices (35); la teoría del *dévissage* resulta ser una "guía preciosa" para el entendimiento de la torre de Teichmüller (35). "He podido convencerme de que un tal formalismo de *dévissage* tiene un sentido en el contexto (¡denominado «abstracto!») de los topos generales" (36). "La comprensión de la estructura topológica de los esquemas no ha progresado mucho desde el trabajo de Artin-Mazur" (36).

"6. «Teorías diferenciables» a la Nash y «teorías moderadas»" (37-42). Teoremas de *dévissage* para teorías moderadas (37); "canonicidad" asociada a descomposiciones en espacios contraíbles (38); isotopía y anabelianidad (39). "Fundamentos de la topología moderada": necesidad de un "trabajo tenaz, meticuloso, sin duda de largo aliento" (39-40). Siguiendo "las ideas de Nash, que me habían golpeado mucho (...) ¿a fines de los años 60?", estudio de “una axiomatización de «variedad lisa» y del formalismo diferenciable sobre esas variedades” (= teoría lisa) (40); axioma de “estabilidad por continuación analítica” (41); conexiones entre sistemas de gérmenes de funciones analíticas y teorías lisas (41); conexiones entre variedades para teorías lisas y espacios con topologías moderadas (42).

“7. A la búsqueda de los campos” (42-45). “Desde el mes de marzo del año pasado, es decir desde hace cerca de un año, la mayor parte de mi energía ha estado consagrada a un trabajo de reflexión sobre los *fundamentos del álgebra (co)homológica no conmutativa*, o lo que es lo mismo, finalmente, del *álgebra homotópica*” (prefiguración de los *Dérivateurs* [**1991**]) (42). Recuento de la escritura: notas destinadas a la publicación (Hermann), trabajo en curso de redacción, amplitud del manuscrito (1500 pp.), dos volúmenes esperados (“À la poursuite des champs”) (43); recuento de intentos (Verdier, Giraud, Illusie, Quillen) en esa fundamentación, “no entendidos” y que “esperan aún un lenguaje preciso y plástico para darles forma” (43-44). Referencia a las cartas a Larry Breen (1975) y cómo “en ese momento aparece la intuición que los ∞-grupoides deben constituir modelos, particularmente adecuados, para los tipos de homotopía, correspondiendo los n-grupoides a los tipos de homotopía truncados (con $\pi_i = 0$ para $i > n$)” (44); referencia a los trabajos de Ronnie Brown y al “estímulo de una correspondencia agitada” con Brown (44); emergencia del término “campo” (44). Referencia a “última conferencia pública, en el *IHES* en 1976, cuyo manuscrito, confiado no sé a quien, se ha perdido” (45), donde ya intuía una “«esquematización» de los tipos de homotopía” (45). Se trata de “un cuento de las mil y una noches, donde la atención se mantiene en suspenso a través de otros veinte cuentos antes de conocer el fin del primero” (45).

“8. Digresiones sobre geometría bidimensional” (45-49). Estudio de tres temas en “geometría topológica bidimensional” (45): *(i)* “polígonos planos” y variedades modulares asociadas (46), *(ii)* “curvas sumergidas en una superficie” y “visión dinámica de las configuraciones posibles, con el paso de una a otra por deformaciones continuas”, llevando a una propiedad de "«telescopía»" en la inmersión del círculo en una superficie (46-47), *(iii)* "clasificación topológico-combinatoria de sistemas de rectas" y aparición de un "objeto notable" en cuestiones de clasificación: "suerte de «superficie modular» asociada a un sistema de pseudo-rectas" (47-48). Constatación de soledad (46), falta de alumnos (47) y "nivel de cultura muy modesto de casi todos los alumnos que han trabajado conmigo en estos últimos diez años" (48). Búsqueda de "*métrica riemanniana canónica*" en el estudio de mapas bidimensionales (48).

"9. Balance de una actividad docente" (49-50). La enseñanza universitaria (Montpellier) aportó "una renovación de mi aproximación de las matemáticas" (49), pero "constato un fracaso claro y nítido en mi actividad docente" (49); solo dos discípulos entre el 74 y el 76: Yves Ladegaillerie y Carlos Contou-Carrère (49).

"10. Epílogo" (50-51). La solicitud de entrada al CNRS "ha sido para mí la ocasión de escribir este esbozo, que de otra manera sin duda nunca habría visto el día" (50); "diez años de trabajo no serían demasiados para llevar a cabo algunos de los mínimos temas esbozados (...) ¡y cien años serían pocos para el más rico de entre ellos!" (51); "un lector atento percibirá como yo una unidad profunda" (51); "la geometría de superficies (...) representa una renovación pero de ningún modo una ruptura. Más bien, muestra el camino de una nueva aproximación hacia esa realidad aún misteriosa, aquella de los «motivos», que me fascinaba más que cualquier otra" (51). "Ya no soy, como antes, el prisionero voluntario de tareas interminables" (51); "el tiempo de las tareas para mí ha terminado. Si la edad me ha aportado algo, es ser más ligero" (51). Una nota final (pie de página 51) remite a la *Esquisse Thématique* [**1972**] donde Grothendieck había resumido sus trabajos hasta ese momento.

"Notas" (52-57). Nota 1 (52): importancia de las conjeturas aparentemente "fuera de alcance"; nueva conjetura sobre el programa anabeliano. Nota 2 (52-53): recordatorio de Maria, en el campo de Rieucros, quien le enseña a los doce años la definición de círculo;

"en ese momento, creo, es cuando vi por vez primera la potencia creativa de una «buena» definición matemática, de una formulación que describe la esencia. Aún hoy, me parece que la fascinación que ejerció en mí esa potencia no ha perdido nada de su fuerza" (53). Nota 3 (53-54): "la geometría algebraica anabeliana (...) ignora los anillos y las ecuaciones algebraicas que sirven tradicionalmente para describir los esquemas, al trabajar directamente con sus topos *étales*, expresables en términos de grupos profinitos"; "el desarrollo de una tal traducción de un «mundo geométrico» (a saber, esquemas, multiplicidades esquemáticas, etc.) en términos de un «mundo algebraico» (grupos profinitos y sistemas de grupos profinitos, derivados de topos *étales* convenientes) puede ser considerado como el *logro último de la teoría de Galois, sin duda en el espíritu mismo de Galois*" (53) (*cfr. Récoltes et semailles* [**1983-86**, 1.16]). Nota 4 (54-55): reflexiones sobre el grupo modular y las representaciones motívicas de $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ ("comenzadas en 1981"); temas principales a desarrollar en la geometría algebraica anabeliana: *(a)* "construcción combinatoria de la torre de Teichmüller", *(b)* "descripción del grupo de automorfismos de la compactificación profinita de la torre, y reflexión sobre una caracterización de $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ como subgrupo de este", *(c)* "la «máquina de motivos» $SL(2, \mathbb{Z})$ y sus variantes", *(d)* "el diccionario anabeliano y la conjetura fundamental", *(e)* "problema de Fermat" (55). Nota 5 (55): ciclotomía y teoría combinatoria del bi-icosaedro ligadas al entendimiento de $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$. Nota 6 (55-56): "unos fundamentos más apropiados para la topología no suprimirán esos fenómenos [salvajes, con su razón de ser y su propia belleza], pero nos permitirán situarlos en su justo lugar, como «casos límite» de fenómenos de la «verdadera» topología" (56). Nota 7 (56-57): despliegues, estratificaciones, fibras, bordes, enlaces, junturas en un sistema de espacios moderados.

Descripción más extensa.

El carácter sintético de la *Esquisse* [**1984**] constituye sin duda uno de sus mayores encantos. La *capacidad visionaria* de Grothendieck se desarrolla *suavemente*, sin las trabas que conllevan necesariamente los procesos arquitectónicos asociados (definiciones, pruebas, rigor completo). Al delinear un panorama que “emerge de la niebla” (Carta a Faltings, 1), al seguir un “pensamiento que sondea y que descubre andando a tientas en la penumbra” [**1984**, 1], y al ahondar en “un trabajo de descubrimiento y no de compilación de notas piamente acumuladas” [**1984**, 1], Grothendieck se deja ir con frescura, y persigue tranquilamente su intuición, su sensación de escucha, penetración y sondeo de lo profundo, su fino *insight* de las cosas matemáticas. El resultado es fascinante, y el lector, llevado apaciblemente de la mano, se regocija en cada nuevo rincón de un *País de las maravillas* y en cada nuevo recodo de un cuento de las *Mil y una noches*. El *efecto mágico* de la *Esquisse* se apuntala además en los recuentos personales del autor, quien nos hace ir y venir entre las vivencias más concretas y las iluminaciones más abstractas. El *back-and-forth* entre lo real y lo imaginario, potencia pura de la matemática, encarna así con enorme fluidez en la *Esquisse*. En lo que sigue, describiremos con mayor precisión las *Secciones 2 y 5* de la *Esquisse* [**1984**], asociadas a la torre de (Grothendieck)-Teichmüller, el grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ y la topología moderada. La *Sección 3* de la *Esquisse* [**1984**], donde aparecen los dibujos de niños, será presentada en nuestra *Sección 12.3* abajo.

Sección 2. La Torre de Teichmüller y el grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$. Grothendieck inicia señalando que, dado el “bagaje matemático modesto” de sus alumnos [**1984**, 2], debe partirse de un “bagaje intuitivo común, independiente de todo lenguaje técnico que pueda expresarlo, y muy anterior a un tal lenguaje”[519]. Resulta ser que “la

[519] Este es uno de los lugares más contundentes donde Grothendieck indica la *anterioridad* de la geometría sobre el lenguage y la *primacía* de la intuición sobre la representación. Veremos más adelante (en *Récoltes et semailles* [**1983-86**], nuestro *Capítulo 14* abajo) cómo esta situación se encuentra estrechamente ligada con el péndulo del descubrimiento (intuición, visión, geometría) y de la invención

intuición geométrica y topológica de las formas, y en particular de las formas bidimensionales"[520], es un tal "terreno común" [**1984**, 2]. Dentro de las variedades concretas que impulsan su imaginación, las "multiplicidades modulares de Mumford-Deligne para curvas algebraicas «estables» de género g, con ν puntos marcados, que denoto $\widehat{M_{g,\nu}}$ (compactificación de la mutiplicidad «abierta» $M_{g,\nu}$ correspondiente a las curvas lisas)" son las que "desde hace dos o tres años han ejercido sobre mí una fascinación particular, más fuerte tal vez que ningún otro objeto matemático hasta hoy" [**1984**, 3-4]. Siguiendo las estrategias grothendieckianas usuales, siempre presentes desde la Tesis [**1949-53**], resultan ser en realidad la *multiplicidad de todas esas multiplicidades* y sus estratificaciones y transformaciones estructurales las que llaman poderosamente su atención:

> A decir verdad, [la fascinación se debe] más bien al sistema de *todas* las multiplicidades $M_{g,\nu}$ para g, ν variables, ligadas entre ellas por un cierto número de operaciones fundamentales (como las operaciones de "tapadura [*bouchage*] de huecos", *i.e.* de "borramiento" de puntos marcados, de "pegamiento", y las operaciones inversas), que son el reflejo en geometría algebraica absoluta de característica cero (por el momento) de operaciones geométricas familiares desde el punto de vista de la "cirugía" topológica o conforme de las superficies. La principal razón sin duda de esta fascinación es que esa estructura geométrica muy rica sobre el sistema de multiplicidades modulares "abiertas" $M_{g,\nu}$ se refleja en una estructura análoga

(lenguaje, representación, lógica). La independencia de "todo lenguaje técnico" es de enorme importancia para el entendimiento de la creatividad matemática, algo que una filosofía centrada en el lenguaje (como la filosofía analítica) nunca ha podido captar.

520 Es clave aquí el *descenso* a objetos concretos de gran sencillez: "Mientras que, en mis investigaciones anteriores a 1970, mi atención se dirigía sistemáticamente a objetos de generalidad maximal, para despejar un lenguaje de conjunto adecuado para el mundo de la geometría algebraica (...) me veo aquí llevado de vuelta, mediante objetos tan simples que un niño puede conocerlos al jugar con ellos, a los inicios y orígenes de la geometría algebraica, familiares a Riemann y sus émulos. Desde los alrededores de 1975, fueron así la geometría de superficies (reales) y, a partir de 1977, las conexiones entre preguntas de la geometría de superficies y la geometría de curvas algebraicas definidas sobre cuerpos como $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, o de extensiones de tipo finito sobre $\mathbb{Q}$, las que fueron mi principal fuente de inspiración y mi constante hilo conductor. Es con sorpresa y maravilla cómo, a lo largo de los años, descubrí (o más bien, sin duda, redescubrí) la riqueza prodigiosa, realmente inagotable, la profundidad insospechada de ese tema, de apariencia tan anodina" [**1984**, 2-3]. Grothendieck expresa con fuerza la complementación *natural* de lo abstracto y lo concreto en matemáticas, la riqueza dual del ascenso y el descenso, muy lejos de los ignaros y burdos calificativos de "sin sentido abstracto" aplicados a menudo a su obra.

> sobre los grupoides fundamentales correspondientes, los "grupoides de Teichmüller" $\widehat{T_{g,\nu}}$, y que esas operaciones al nivel de los $\widehat{T_{g,\nu}}$ poseen un carácter lo suficientemente intrínseco para que el grupo de Galois Γ de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ opere sobre esa "torre" de grupoides de Teichmüller, respetando todas las estructuras. Cosa más extraordinaria aún, esa operación es *fiel* – a decir verdad, ya es fiel en el primer "piso" no trivial de la torre, a saber $\widehat{T_{0,4}}$– lo que significa también, esencialmente, que la acción exterior de Γ sobre el grupo fundamental $\widehat{\pi_{0,3}}$ de la recta proyectiva estándar $\mathbb{P}^1$ sobre $\mathbb{Q}$, privada de tres puntos 0, 1, ∞, es ya fiel. Así, *el grupo de Galois* Γ *se realiza como un grupo de automorfismos de un grupo profinito muy concreto*, respetando además ciertas estructuras esenciales del grupo [**1984**, 4, énfasis de Grothendieck].

Grothendieck continúa con un largo párrafo especulativo acerca de una eventual caracterización de Γ como subgrupo de $AutExt(\widehat{\pi_{0,3}})$ y acerca de las diversas acciones de Γ sobre la torre de Teichmüller [**1984**, 5]. Una de sus esperanzas consiste en describir la situación combinatoriamente por medio de generadores y relaciones[cxxx], pero observa que diversas obstrucciones ocurren por trabajar con grupos fundamentales, ligados a un solo punto base, y que habría que trabajar en cambio con *grupoides* fundamentales, ligados a un paquete de puntos base[521] [**1984**, 5]. Volviendo a las estructuras más sencillas, indica que "la geometría misma del primer piso de la torre de Teichmüller (...) no ha sido nunca bien explicitada, por ejemplo la relación entre el caso de género 0 y la geometría del octaedro y del tetraedro. (...) He comenzado a mirar $M_{0,5}$ en algunos momentos perdidos, es una

521 De esta manera, paralelamente a los desarrollos en los *stacks*, la noción de grupoide va adquiriendo mayor *naturalidad* en el pensamiento grothendieckiano. Los grupoides, que aparecen asociados a tipos de homotopía y, ahora, a acciones sobre la torre de Teichmüller, muestran la emergencia de una nueva geometría de lo *múltiple*, subyacente a situaciones de *suavidad* en la topología y en la variable compleja. Todo esto refuerza, una vez más, la conexión esencial *multiplicidad* - *naturalidad* - *suavidad*, central en la obra de Grothendieck.

cxxx Es algo que realizará posteriormente Drinfeld, con su construcción del grupo de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$. Se sabe que $Gal(\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{GT}$ y se postula su isomorfismo (ver nuestra *Nota cxviii* arriba, p. 301). Para un balance de lo conseguido, véase L. Schneps. "The Grothendieck-Teichmüller group $\widehat{GT}$: a survey". En: *Geometric Galois Actions. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London: Cambridge University Press, 1997, págs. 183-203.

verdadera joya, con una geometría muy rica ligada a aquella del icosaedro"[522] [**1984**, 5-6].

Grothendieck se adentra luego en la exploración estructural de la torre y conjetura[523] que "*la torre entera se reconstituye a partir de los dos primeros pisos*" (casos en los que $3g - 3 + \nu \leq 2$), pues en el primer piso se tendría un sistema completo de generadores y en el segundo piso un sistema completo de relaciones [**1984**, 6]. En los dos primeros pisos de la torre se encuentran entonces "*doce «piezas de construcción» fundamentales* (6 de género 0, 6 de género 1) en un «juego de Lego-Teichmüller» (gran caja)[524] (...) donde las piezas de construcción pueden juntarse por frotamiento suave como en el juego de Lego ordinario querido por nuestros niños (o nietos...)" [**1984**, 8]. La *Sección 2* termina con una discusión de las descomposiciones celulares asociadas a las cajas grande y pequeña de Lego, y postula la obtención de descomposiciones similares en el caso general $\widehat{M_{g,\nu}}$ [**1984**, 8-9]. De esta manera, se trenzan lo complejo[cxxxi], lo algebraico, lo combinatorio, lo topológico y lo geométrico de baja dimensión, en un tejido de incalculable riqueza matemática, donde se complementan suavemente lo alto y lo bajo, lo general y lo particular, lo categórico y lo estructural. El entrelazamiento de la intuición "común" de las formas bidimensionales con la intuición grothendieckiana abstracta de las formas universales produce así un fascinante terreno medio, pocas veces visto en la historia de las matemáticas.

---

522 Grothendieck ofreció en la Universidad de Montpellier un curso sobre el icosaedro [**IMAG**, cote 161-6, 1977], ver nuestra *Nota 485* arriba, p. 317.

523 "El principio de construcción de la torre de Teichmüller no está demostrado en el momento actual – pero no tengo ninguna duda de que sea válido" [**1984**, 6].

524 Para (re)construir la torre, "la caja más pequeña se reduce a piezas idénticas, todas del tipo (0,3) –los «pantalones» de Thurston– y el juego de Lego-Teichmüller que intento describir, motivado por reflexiones de geometría algebraica absoluta sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$, está muy cercano al juego de «cirugía geodésica hiperbólica» de Thurston, de cuya existencia supe el año pasado por Yves Ladegaillerie. En un microseminario con Carlos Contou-Carrère e Yves Ladegaillerie, iniciamos una reflexión para confrontar los dos puntos de vista, que se completan mutualmente" [**1984**, 8].

cxxxi Para una excelente introducción a los espacios de Teichmüller, exclusivamente desde el aspecto de la variable compleja, antes de la aparición de Grothendieck y de su lectura algebraica, véase Imagoshi y Taniguchi, óp.cit.

Sección 5. Topología moderada. Grothendieck inicia la sección señalando la "necesidad de fundamentos nuevos para la topología «geométrica», en una dirección del todo distinta de la noción de topos, e independiente aún de las necesidades de la geometría algebraica «abstracta» (sobre cuerpos y anillos de base generales). El problema de partida, que comenzó a intrigarme hace ya una quincena de años, era el de definir una teoría de «desatornillamiento» [*«dévissage»*] de las estructuras estratificadas, para reconstituirlas, por un procedimiento canónico, a partir de ciertas «piezas de construcción» deducidas canónicamente de la estructura dada"[525] [**1984**, 25]. La riqueza de las estructuras estratificadas se despliega en diversos niveles, donde se entrelazan las variaciones continuas, las degeneraciones singulares, los acoples de estratos aritméticos en multiplicidades dadas:

> Debía sin duda presentir ya la ubicuidad de las estructuras estratificadas en prácticamente todos los dominios de la geometría (...) He visto aparecer tales estructuras, sobre todo, en todas las situaciones de "módulos" para objetos geométricos susceptibles no solo de variación continua, sino al mismo tiempo de fenómenos de "degeneración" (o de "especialización") – los estratos correspondiendo entonces a los diversos "niveles de singularidad" (o a los tipos combinatorios asociados) para los objetos considerados. Las multiplicidades modulares compactificadas $\widehat{M_{g,\nu}}$ de Mumford-Deligne para las curvas algebraicas estables de tipo (g,ν) proveen un ejemplo típico y particularmente inspirador, que jugó un papel de motivación importante en la reanudación de mi reflexión sobre las estructuras estratificadas, entre diciembre 1981 y enero 1982. La geometría bidimensional provee otros numerosos ejemplos de tales estructuras estratificadas modulares (...) [**1984**, 25-26].

La *canonicidad* buscada fuerza entonces un trabajo en "«categorías isotópicas» asociadas a categorías de naturaleza topológica" [**1984**, 25], lo que lleva finalmente a una delimitación de entornos *suaves* para el acoplamiento *múltiple-natural-universal* de las diversas estratificaciones en juego. En efecto, para conseguir una descomposición canónica

[525] Este resulta ser en realidad un *procedimiento ubicuo* en todo Grothendieck: búsqueda de descomposiciones *doblemente canónicas* (piezas y atornillamiento) de ciertas estructuras matemáticas construidas por estratos. La *doble atención al objeto y al proceso* supera ya las *ontologías* usuales de la matemática. Pero yendo aún más allá, se trata de un estudio sistemático de *movimientos de vaivén universales entre arquetipos altos y jerarquías de tipos bajos*: toda una *metafísica* precisa en acción.

de las torres, Grothendieck propone un teorema de equivalencia entre parejas admisibles (X, Y) ligadas a una noción de subespacio y triplas admisibles (U, Y, f) ligadas a una noción de fibración[526] [**1984**, 28], pero se da rápidamente cuenta de que "no había posibilidad de obtener un enunciado tan ambicioso en el contexto de los espacios topológicos, debido a los sempiternos fenómenos de «salvajismo»" [**1984**, 28].

Emerge así la *topología moderada*[527], un entorno donde pueden desaparecer los contraejemplos artificiales de la topología conjuntista, y donde una teoría general de las estratificaciones puede llegar a tener éxito. Un tal ambiente ocurre en la teoría de los espacios sub-analíticos[LXI] de Hironaka: "Algunos años más tarde se me informó de la teoría de Hironaka de los conjuntos que llama, creo, «semi-analíticos» (reales), que satisfacen ciertas condiciones esenciales de estabilidad necesarias para el desarrollo de un contexto utilizable de «topología moderada»" [**1984**, 28-29]. Grothendieck observa entonces cómo divergen el camino usual de la topología conjuntista, "general", y el camino nuevo de una topología geométrica, "moderada"[528]: "Con la retrospectiva de una decena de años,

---

526 Específicamente, una pareja (X, Y) es admisible si Y es un subespacio cerrado del espacio topológico X, los estratos X y $X \setminus Y$ son variedades topológicas, y se admite una adecuada hipótesis de equisingularidad de X sobre Y. Una tripla (U, Y, f) es admisible si Y es una variedad topológica, U es una variedad con borde ∂U y $f : \partial U \to Y$ es una fibración propia y lisa (morfismo de "pegamiento"). A partir de allí se espera que el par se reconstituya a partir de la tripla, gracias a una suma amalgamada de la forma $X \approx U \amalg_{\partial U} Y$ [**1984**, 26-27].

527 Para los primeros esbozos de una moderación topológica, véanse algunos manuscritos de los años setenta, en Montpellier, donde Grothendieck esboza fragmentos de una teoría de "espacios moderados" [**IMAG**, cote 120 (c. 1973-78)], [**IMAG**, cote 121 (1974)].

528 La cercanía con el *Camino de Swann* y el *Camino de Guermantes* de Proust no es casual. Veremos abajo (nuestro *Capítulo 18*) cómo la lucha entre lo natural ("moderación", Swann) y lo artificial ("puntillismo", Guermantes) une profundamente al matemático y al escritor.

LXI Los conjuntos *semi-analíticos* reales (Lojasiewicz 1965) son conjuntos definidos localmente (en cada punto de $\mathbb{R}^n$) por un número finito de igualdades y desigualdades analíticas reales. Poseen buenas propiedades de estratificación, pero también ocurren obstrucciones importantes (la imagen propia de un semi-analítico no tiene por qué ser semi-analítico). Su extensión a los conjuntos *sub-analíticos* (caracterizables localmente como uniones finitas de imágenes de esferas por aplicaciones analíticas reales, Hironaka 1973) elimina las obstrucciones principales y asegura que el complemento de un sub-analítico es sub-analítico. Es probable que, en la *Esquisse* [**1984**], Grothendieck se refiera a los conjuntos sub-analíticos.

diría hoy que la *«topología general» se desarrolló* (en los años treinta y cuarenta) *por los analistas y para las necesidades del análisis*, y no para las necesidades de la topología propiamente dicha, es decir, el estudio de las *propiedades topológicas de formas geométricas* diversas" [**1984**, 29]. Una atractiva expresión visual de esta situación, donde Grothendieck literalmente *dibuja* acoples de formas, puede encontrarse en algunos manuscritos de los años setenta, preliminares a la *Esquisse*, por ejemplo en la siguiente *Figura 12.1*:

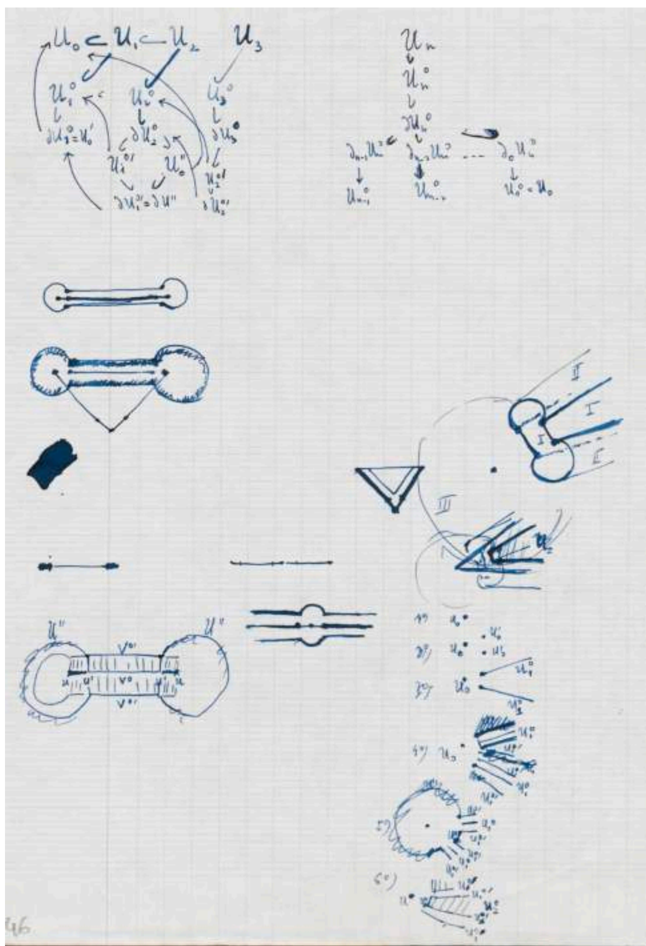


Fig. 12.1 – Vecindades tubulares y acoples moderados [**IMAG**, cote 121 (c. 1974), 44]

Hay que adentrarse por tanto en unos nuevos fundamentos que consigan eliminar "falsos problemas" y "fenómenos salvajes", y que permitan obviar también ciertos "regresos a contextos vecinos al contexto topológico menos marcados de salvajismo" (variedades diferenciables, espacios lineales) que eluden la cuestión (*tournent autour du pot*)[529] [**1984**, 29-30]. Aquí, como recurrentemente sucede en su obra, Grothendieck plantea una perspectiva axiomática: "Mi aproximación hacia los fundamentos posibles de una topología moderada ha sido axiomática" [**1984**, 30]. La técnica es conocida, y, a partir de un *ejemplo arquetípico*, se despejan ciertas *propiedades de permanencia* para una clase dada: "Me fijé en despejar lo que, entre las propiedades geométricas de la noción de conjunto semi-analítico en un espacio $\mathbb{R}^n$, permite utilizarlos como «modelos» locales de una noción de *«espacio moderado»* (en este caso semi-analítico), y lo que (¡se espera!) flexibiliza suficientemente esa noción de espacio moderado, para poder en verdad servir de noción de base para una «topología moderada», que ayude a expresar con comodidad la intuición topológica de las formas" [**1984**, 30]. Como consecuencia de la axiomatización, se procede de *una* teoría moderada a una "vasta infinitud" de ellas, desplegadas entre semi-algebraicidad y semi-analiticidad [**1984**, 30-31]. Dentro de la multiplicidad así obtenida,

529 Grothendieck lucha contra la *inercia* típica de una situación que debe ser cambiada: "Esta situación, como tantas veces ya en la historia de nuestra ciencia, pone simplemente en evidencia esa inercia casi insuperable del espíritu, agravado por condicionamientos de un peso considerable, para dirigir una mirada sobre un problema de fundamentos, es decir sobre el contexto mismo en el que se vive, respira, trabaja – en vez de aceptarlo como un dato inamovible. Es sin duda a causa de esa inercia que se necesitaron milenios para que una idea o una realidad tan infantil como el cero, un grupo o una forma topológica adquirieran derecho de ciudadanía en matemáticas. Es sin duda por esa inercia también que el yugo de la topología general continúa a ser arrastrado pacientemente por generaciones de topólogos, el «salvajismo» siendo aceptado como una fatalidad ineludible que estaría enraizada en la naturaleza misma de las cosas" [**1984**, 30]. En muchos sentidos, la lucha permamente de Grothendieck por promover nuevas miradas y aperturas del espíritu, en contra de ciertos estados de cosas y sus inercias asociadas, coincide con el espíritu revolucionario de sus padres Sascha y Hanka, y le aleja de cualquier tipo de conservadurismo (matemático, fundamentalista, vivencial, político). De hecho, la *unidad del hombre y de la obra* siempre es patente en su recorrido.

afianzándose sobre "un sistema de axiomas lo suficientemente rico", un "*teorema de comparación*" postula que las categorías isotópicas (reemplazo de morfismos por sus clases de isotopía) asociadas a las diversas teorías moderadas sean todas equivalentes entre sí [**1984**, 31], y, por tanto, que "la teoría de desatornillamiento [*dévissage*] sea esencialmente independiente de la teoría moderada escogida para expresarla"[530] [**1984**, 31-32]. Grothendieck subraya luego "las ventajas de una aproximación axiomática hacia los fundamentos de la topología moderada" [**1984**, 32]: *(i)* "sistema de axiomas plausible provisorio", basado en un axioma central de *triangulabilidad*, orientado hacia teoremas de comparación [**1984**, 32], *(ii)* "audacia (o simplemente inocencia...) para liberarse de un contexto familiar aceptado por un consenso sin grietas..." [**1984**, 32], *(iii)* entendimiento de variedades complejas o reales mediante teorías algebraicas por *fragmentos* (en $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$) y *grados de trascendencia* asociados, "ausentes en la topología moderada «semi-analítica»" [**1984**, 32-33], *(iv)* control (existencia y unicidad) de construcciones bajas (vecindades tubulares, bordes, fibraciones) vía equivalencias altas en las categorías isotópicas[cxxxii] [**1984**, 33]. Los ítems *(i)*-*(iv)* exhiben una sensibilidad fina que enlaza lo alto, lo medio y lo bajo.

La *Sección 5* concluye con tres contrastaciones esenciales[531] para el programa de

530 Este es un enunciado especialmente contundente de la *matemática relativa y arquetípica* de Grothendieck: detrás de la variación (multiplicidad sintáctica y semántica) de las teorías moderadas, se espera encontrar un proceso universal (unidad pragmática), independiente de las expresiones moderadas, que explique canónicamente ciertos modos de estratificación de la geometría de las formas. Muy en desacuerdo con una supuesta "muerte" de la metafísica promulgada por la filosofía analítica, una *metafísica matemática* se encuentra aquí en plena agitación volcánica.

531 Ocurre también una contrastación sicológica, que inquieta a Grothendieck: "Se dirá sin duda, no sin algo de razón, que todo esto tal vez no son más que sueños, que se harán humo cuando se intente un trabajo pormenorizado (...) La única cosa en todo esto que no me genera ninguna duda es la necesidad de un tal trabajo de fundamentos, en otros términos, la naturaleza artificial de los fundamentos actuales

cxxxii Para una presentación posterior de los axiomas, siguiendo desarrollos de van den Dries, Wilkie y Shiota, y para un acercamiento a las teorías o-minimales en lógica, estrechamente ligadas a la topología moderada, véase B. Teissier. "Tame and Stratified Objects". En: *Geometric Galois Actions. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme.* London: Cambridge University Press, 1997, págs. 231-242.

la topología moderada: (1) su coherencia interna para capturar las problemáticas de lo estratificado, (2) su utilización en el caso de las multiplicidades modulares $\widehat{M_{g,\nu}}$ y en la torre de grupoides de Teichmüller, (3) su ayuda para refinar una teoría de *dévissage* en los topos. Ante todo, (1) Grothendieck afirma que su teoría de los *dévissages*, "aunque parcialmente heurística, expresa en verdad una realidad totalmente palpable"[532] [**1984**, 34], y que la aproximación axiomática permite capturar los sistemas dados de estructuras, retracciones y órdenes, mediante categorías abstractas que indexen los estratos [**1984**, 34]. En particular, (2) en el caso del sistema estratificado de las multiplicidades modulares, los índices deben ser grafos que parametricen las estructuras de tipo Teichmüller, lo que permite orientar, con una "coherencia sin grietas", la construcción combinatoria de la torre [**1984**, 35]. Finalmente, (3) Grothendieck se pregunta cómo "traducir en el contexto de los topos (en particular los topos *étales*) la teoría de *dévissage* a la cual había llegado en un contexto muy diferente" [**1984**, 35-36]; la clave está en definir una noción de "*vecindad tubular canónica de un sub-topos*" y, con ella, observar que "la descripción del *«dévissage»* de un topos estratificado es considerablemente más simple en ese marco, que en el marco topológico (moderado)" [**1984**, 36]. Así, un enlace natural entre la torre de Teichmüller, los sistemas estratificados, la topología moderada y los topos, apuntala un programa guiado por "argumentos geométricos directos (...) con pruebas de utilidad y coherencia", y atento a "los fundamentos más adecuados que permiten darle todo su sentido" [**1984**, 36].

---

de la topología (...)" [**1984**, 34]. En unos pocos años, en *La clef des songes* [**1987**], Grothendieck estudiará –con su rigor y detenimiento habituales– el fundamental papel de los *sueños* para una vida sana y creativa. Ver nuestro *Capítulo 15* abajo.

532 Creencia metafísica si la hay...

12.2 Síntesis conceptual

La *Esquisse d'un programme* [**1984**] cubre tres temas principales –la torre de Teichmüller y el grupo de Galois absoluto (*Sección 2*), los dibujos de niños (*Sección 3*), la topología moderada (*Secciones 5, 6*)–, dos temas secundarios –poliedros regulares y geometría bidimensional (*Secciones 4, 8*), *stacks* (*Sección 7*)–, y algunas consideraciones sobre las circunstancias personales del autor –balance de actividades investigativas y docentes (*Secciones 1, 9, 10*)–. Para una descripción breve de todo el contenido, ver arriba nuestra *Sección 12.1, Resumen mínimo*; para una descripción de las *Secciones 2 y 5*, ver arriba nuestra *Sección 12.1, Descripción más extensa*; para una descripción de la *Sección 3*, ver abajo nuestra *Sección 12.3*; para una descripción de los contenidos detallados asociados a la *Sección 7*, ver arriba nuestro *Capítulo 11.*

La *Esquisse* [**1984**] procede de dos aproximaciones complementarias (*alta* y *baja*) que se unen de manera fascinante en los terrenos *medios* de la teoría de Teichmüller y la geometría anabeliana. Desde lo alto, Grothendieck busca una teoría general del *dévissage* para entender la arquitectónica de las estructuras estratificadas, lo que le conduce naturalmente a los *stacks* y a la topología moderada, con sus orientaciones hacia una suave combinatoria de las formas. Desde lo bajo, la geometría de superficies, las curvas algebraicas complejas sobre cuerpos de números, las curvas elípticas, el grupo modular y los poliedros regulares, proporcionan toda una panoplia de ejemplos que iluminan, y sirven para ajustar, la mampostería y los entramados de la arquitectónica. En los terrenos medios, las multiplicidades modulares y sus grupoides asociados, las variedades generales sobre cuerpos de números y sus grupos fundamentales, las superficies de Riemann y sus dibujos de niños, las acciones estratificadas del grupo de Galois absoluto, conectan las variaciones continuas y las variaciones algebraicas, y se cifran en la conjetura fundamental del carácter anabeliano de las multiplicidades (*stacks* y no variedades) $M_{g,\nu}$.

La *Esquisse* [**1984**] proporciona así una *visión* típicamente grothendieckiana, donde se *conjugan* abstracción y concreción, unidad y multiplicidad, universalidad y contingencia, continuidad y discreción, globalización y localización. A su vez, un impulso *yin* hacia formas particulares de suavidad se complementa finamente con un impulso *yang* hacia formas generales de *dévissage*. Uno de los milagros de la *Esquisse* [**1984**] consiste precisamente en el entrelazamiento de los opuestos, la *coincidentia oppositorum* de Llull y Cusa, a través de dialécticas estratificadas en niveles matemáticos cuidadosamente acotados. Podemos entonces ver a Grothendieck con *todos sus hierros en el fuego*: suerte de herrero de Vulcano, abre un enorme espectro de campos de investigación, sorprendentemente conectados los unos con los otros. Una vez más, el *volcán* (pirotecnia inventiva de la década 1974-1984) y el *mar* (suavización programática para las décadas venideras) se unen simbólicamente en la obra y en la figura del ermitaño matemático de Mormoiron.

La *Esquisse* [**1984**] recoge las dos grandes aperturas previas de la década de los ochenta: la *Longue marche* [**1981**] (nuestro *Capítulo 10* arriba) y los *Stacks* [**1983**] (nuestro *Capítulo 11* arriba). Por otro lado, las dos nuevas invenciones mayores del texto consisten en los *dibujos de niños* y la *topología moderada*. Es interesante recalcar aquí el carácter totalmente original de la *suavización combinatoria* buscada por Grothendieck. No se trata solo de una *suavización topológica* conjuntista o categórica, como la que exploró en los primeros veinte años de su trayectoria, desde la *Tesis* [**1949-53**] hasta el *SGA* [**1960-69**], sino de un novedoso *descenso a una geometría primordial de las formas*, donde lo primigenio, lo infantil y lo elemental se expresan tanto en la sencillez de los dibujos de niños, como en la eliminación de artificios en la topología moderada. El sondeo de lo arquetípico, la búsqueda permanente de *Moby-Dick*, adquieren aquí un carácter a la vez heroico e ingenuo: el heroismo de explorar tierras y mares vírgenes, la ingenuidad de hacerlo con los ojos maravillados de un niño, con un corazón (= co-razón) enteramente dispuesto a ser moldeado por la sorpresa.

El *corazón aritmético* de las investigaciones recogidas en la *Esquisse* [**1984**] une las *variaciones continuas* presentes en los espacios moduli $M_{g,\nu}$ y las *variaciones algebraicas* del grupo $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ actuando sobre la torre de Teichmüller. En particular, la aparición del espacio de curvas elípticas $M_{1,1}$ en el primer piso de la torre, y de su grupo modular asociado $SL(2, \mathbb{Z})$, exhibe la riqueza aritmética del entorno. Por otro lado, la emergencia de las curvas algebraicas sobre cuerpos de números en el ámbito de las superficies de Riemann compactas (Belyi, ver nuestra *Sección 12.3* abajo), iluminación sorprendente que induce a Grothendieck a descubrir y "despejar" los dibujos de niños, refuerza la *naturalidad aritmética* de la situación. Yendo aún más allá, gracias a la equivalencia que encuentra Grothendieck entre superficies de Riemann compactas y superficies topológicas orientadas con dibujos de niños inscritos en ellas, la acción conocida de $Gal(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ sobre las superficies de Riemann compactas se transfiere en una nueva acción combinatoria sobre los dibujos de niños, y se puede esperar obtener una descripción *combinatoria suave* del grupo de Galois absoluto[533]. Una teoría general de *dévissage* para las estructuras estratificadas espera poder aplicarse a la torre, y, así, una topología moderada suaviza adicionalmente los eventuales tránsitos entre las estructuras. Finalmente, la esperanza central de la geometría anabeliana, a saber, el control de las curvas sobre cuerpos de números mediante sus grupos fundamentales algebraicos (extendiendo la homotopía a las nuevas configuraciones del álgebra topológica), acordona magníficamente toda la arquitectónica de la *Esquisse* [**1984**]. De esta manera, una vez más, Galois, Riemann y Poincaré se unen en lo más profundo del pensamiento grothendieckiano, pero ahora bajo un entrelazamiento aritmético-algebraico-complejo-geométrico al que se le suman una combinatoria elemental y nuevas perspectivas para un entendimiento general de las formas topológicas.

533 Esto lleva de hecho a la definición (Drinfeld) del grupo de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$, ver *Nota cxxx* arriba, p. 346.

12.3 Ejemplo detallado: dibujos de niños

La *Sección 3* de la *Esquisse* [**1984**] introduce los *dibujos de niños.* La originalidad de la visión se conjuga con un entusiasmo contagioso. Grothendieck empieza desglosando sus motivaciones: "Mi interés por las superficies topológicas empieza a despuntar en 1974, cuando le propongo a Yves Ladegaillerie el tema del estudio isotópico de las inmersiones de un 1-complejo topológico (K) en una superficie compacta (X) (...) El caso en el que (X, K) es un «mapa» 2-dimensional, *i.e.* donde las componentes conexas de $X \setminus K$ son 2-células abiertas (..) atrae progresivamente mi atención en los años siguientes" [**1984**, 9-10]. La situación es capturada por un grupo de operadores finitamente generado ("grupo cartográfico C_2") y "el trabajo de fundamentos se hace con el cuidado que merece, en un excelente trabajo de DEA hecho en común por Jean Malgoire y Christine Voisin en 1976" [**1984**, 11].

"Esa reflexión toma súbitamente una dimensión nueva", al observar que un subgrupo adecuado C_2^+, de índice 2 en C_2, "puede interpretarse como un cociente del grupo fundamental de una esfera orientada privada de tres puntos, numerados 0, 1, 2 (...), grupo que clasifica los recubrimientos de la esfera, ramificados a lo sumo en 0, 1, 2, con una ramificación igual a 1 o 2 en los puntos por encima de 1" [**1984**, 11]. De esta manera, "los mapas orientados compactos forman una categoría isotópica equivalente a la de los recubrimientos (finitos)" [**1984**, 11], y, representando la esfera como la esfera de Riemann compleja, Grothendieck y sus alumnos llegan a la "constatación, que ocho años después me parece aún tan extraordinaria: *¡todo mapa orientado «finito» se realiza canónicamente sobre una curva algebraica compleja!* Mejor aún (...) sobre la clausura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$" [**1984**, 11]. El enlace *canónico* que va de (A: mapas finitos orientados) *hacia* (B: curvas algebraicas complejas sobre cuerpos de números) se completará luego, en un ciclo de equivalencias, gracias al teorema de Belyi[cxxxiii], que conecta (B) con (C: superficies de Riemann dotadas de una función meromorfa ramificada en tres puntos). Como veremos más abajo, la *Esquisse* [**1984**] hace un admirado elogio de Belyi.

Para Grothendieck, el "descubrimiento" del enlace entre (A) y (B), "que técnicamente se reduce a tan poca cosa, ejerció en mí una impresión muy fuerte, y representó un giro decisivo en mis reflexiones, un desplazamiento de mi centro de intereses en matemáticas, que de pronto se encontró fuertemente localizado. No creo que un hecho matemático me haya golpeado tanto, ni haya tenido un impacto psicológico comparable"[534] [**1984**, 12]. La razón "se debe seguramente a la naturaleza tan familiar, no técnica, de los objetos considerados, de los cuales cualquier dibujo de niño [*dessin d'enfant*] garabateado sobre un pedazo de papel (con tal de que el grafismo sea de un solo trazo)[535] da un ejemplo perfectamente explícito" [**1984**, 12]. Se revela aquí el valor incomparable otorgado a la sencillez, a lo puro, a lo ingenuo, a la mirada del niño (es impresionante imaginarle con Maria en

---

534 En la nota (2) al final del texto [**1984**, 52-53], Grothendieck señala que otro impacto comparable fue el de haber podido apreciar, a los doce años, la definición de círculo que le ofreció Maria en el campo de concentración de Rieucros (ver nuestro *Resumen mínimo* arriba, p. 342).

535 Entre la finitud, el "solo trazo" (conexidad) y la propiedad de que el complemento del trazo debe ser una unión de abiertos (ver arriba), se tienen ya tres de los cuatro requerimientos (falta solo una propiedad bicolor) que se impondrán en la definición formal posterior de un *dibujo de niños*: grafo D finito, conexo, bicolor, sumergido en una superficie topológica compacta y orientada X, tal que $X \setminus D$ es unión finita de discos (ver Girondo & González-Diez, ibíd., p. 207). Los ejemplos (posteriores) son impactantes: la esfera S^2, con un dibujo inscrito formado por un vértice negro, uno blanco y uno negro, corresponde a la superficie de Riemann asociada a z^2; la esfera con un dibujo formado por vértices negro-blanco-negro-blanco-negro corresponde a la superficie de Riemann asociada a $z^2(z-1)^2$, etc.

cxxxiii El teorema de Belyi (1979) caracteriza las superficies de Riemann compactas asociadas a curvas algebraicas complejas definidas sobre cuerpos de números. Más precisamente, si S es una superficie de Riemann compacta, los siguientes enunciados son equivalentes: *(i)* S está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, *(ii)* existe una función meromorfa $f : S \to \mathbb{P}^1$ con a lo sumo tres puntos de ramificación. Para una excelente introducción al ambiente de la variable compleja (superficies de Riemann, grupos discretos, teorema de Belyi) en el que surgen los dibujos de niños, véase E. Girondo y G. González-Diez. *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. El teorema de Belyi aparece en pp. 169-170. Véase también nuestra *Nota LVII* arriba, p. 302.

Rieucros). En realidad, para entender a Grothendieck –en esa mezcla tan idiosincrásica de ultra-tecnicismo matemático y de parquedad conceptual, de entrega comunitaria y de frugalidad personal– resulta muy instructivo el *shock* de constatar cómo, para él, las definiciones de un círculo o de un dibujo de niños pudieron ser más impactantes que, digamos, la construcción del topos *étale* de un esquema, llave sofisticada de las conjeturas de Weil.

Después de observar que, de manera general, el grupo de Galois absoluto, "el misterioso grupo Γ, interviene como agente transformador sobre formas topológico-combinatorias de la naturaleza más elemental posible" (los mapas finitos orientados) [**1984**, 13], Grothendieck señala cómo, junto con Malgoire, trató algunos casos concretos[536], y, a partir de allí, descubrió que la acción de Γ "puede ser expresada por una cierta acción «exterior» de Γ sobre el compactificado profinito del grupo cartográfico orientado C_2^+, y esta acción se deduce a su vez por paso al cociente de la acción exterior canónica de Γ sobre el grupo fundamental profinito $\widehat{\pi_{0,3}}$"[537] [**1984**, 14].

536 Los casos concretos responden a estrategias diversas, para las cuales Grothendieck "duda que exista un método uniforme que permita responder a golpe de computadores" [**1984**, 13]. Esta es una de las pocas referencias (negativa, por lo demás) a la calculabilidad y a la teoría de la computación en la obra de Grothendieck. Es bastante claro que el talante conceptual y geométrico de su obra parece haberle impedido calibrar la importancia creciente de la computación para el desarrollo de las matemáticas. Por otro lado, no hemos encontrado en sus escritos ninguna referencia directa a Gödel o a Turing, lo que confirma su probable desconocimiento en lo que respecta a la teoría de la computabilidad y las funciones recursivas. Como siempre, las matemáticas poseen sus vueltas e inversiones insospechadas, y es interesante observar cómo, en el periodo pirineico de reclusión grothendieckiana (1991-2014), la teoría de la computación adquirió progresivamente un carácter categórico y geométrico, que le hubiese sorprendido y fascinado a Grothendieck.

537 A mediados de los años setenta, emergen entonces las primeras ideas sobre la geometría anabeliana, como el mismo Grothendieck lo reconoce: "Es así que mi atención se dirigió hacia lo que he llamado después la *«geometría algebraica anabeliana»*, cuyo punto de partida es justamente un estudio (por el momento limitado a característica cero) de la acción de los grupos de Galois «absolutos» (especialmente los grupos $Gal(\overline{K}, K)$ donde K es una extensión de tipo finito del cuerpo primo) sobre algunos grupos fundamentales geométricos (profinitos) de variedades algebraicas (definidas sobre K), y, más particularmente (rompiendo con una tradición bien firme), sobre algunos grupos fundamentales muy alejados de los grupos abelianos (y que por esta razón llamo *«anabelianos»*)" [**1984**, 14]. La conexión de los trabajos de mediados de los setenta con la *Longue marche* [**1981**] es inmediata, resaltando una vez más la permanente *continuidad* del pensamiento grothendieckiano.

El problema esencial consiste en ver si puede ahora pasarse inversamente de (B: curvas algebraicas complejas sobre cuerpos de números) *hacia* (A: mapas finitos orientados). La pregunta y la solución son socarronamente presentadas en la *Esquisse* [**1984**]: "¿Cuáles son las curvas algebraicas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ obtenidas así [por mapas finitos orientados] – se obtienen todas? (...) Una tal hipótesis parecía tan ridícula [*dingue*] que estaba casi avergonzado de someterla a los competentes en la materia. Deligne, consultado, la encontró loca [*dingue*] en efecto, pero sin producir un contraejemplo. Menos de un año después, en el Congreso Internacional de Helsinki, el matemático soviético Bielyi [*sic*] anuncia justamente ese resultado[538], con una demostración de una sencillez asombrosa (...) – ¡sin duda jamás un resultado tan profundo y desconcertante fue demostrado en tan pocas líneas!" [**1984**, 14-15]. Con ello, Grothendieck subraya que "*existe una identidad profunda entre la combinatoria de los mapas finitos, por un lado, y la geometría de las curvas algebraicas definidas sobre cuerpos de números, por otro lado*"[539] [**1984**, 15]. Es el inicio de la teoría de los *dibujos de niños*, que no llega a desarrollarse más en el texto[cxxxiv].

El párrafo final de la *Sección 3* expresa todo su triste desencanto ante la recepción de sus ideas "infantiles", supuestamente locas y ridículas: "Hay quienes, ante ello, se

[538] En palabras de Grothendieck, "*toda curva algebraica definida sobre un cuerpo de números puede obtenerse como recubrimiento de la recta proyectiva ramificada solo en los puntos 0, 1,* ∞" [**1984**, 15]. Las cursivas del autor refuerzan su entusiasmo.

[539] De nuevo, las cursivas de Grothendieck son muy indicativas. En toda la *Esquisse* [**1984**], el párrafo dedicado a Belyi y a su "mensaje esencial", es uno de los dos únicos párrafos que contienen seis líneas enfatizadas en cursivas (en la máquina de escribir, las cursivas se marcan con subrayados). El otro párrafo así enfatizado concluye la *Sección 3* y también se refiere a otra interpretación de los resultados de Belyi, ligada a la torre de Teichmüller [**1984**, 16-17]. Para Grothendieck, "ese resultado profundo [el teorema de Belyi], unido a la interpretación algebraico-geométrica de los mapas finitos, abre las puertas sobre un mundo nuevo, inexplorado – y a la mano de todos, que pasan sin verlo" [**1984**, 15].

[cxxxiv] Para presentaciones conceptuales y formales de los amplios desarrollos posteriores de la teoría, véanse L. Schneps, ed. *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants.* Cambridge: Cambridge University Press, 1994, Girondo y González-Diez, óp.cit., G. Jones y J. Wolfart. *Dessins d'Enfants on Riemann Surfaces.* New York: Springer, 2016.

contentan con levantar los hombros y apostar a que no hay nada que sacar de ello, aparte de algunos sueños. Olvidan, o ignoran, que nuestra ciencia, y toda ciencia, sería muy poca cosa, si desde sus orígenes no hubiese sido nutrida con los sueños y las visiones de aquellos que se entregan a ella con pasión"[540] [**1984**, 18]. No hay altura que nos conmueva más que aquella del gran Maestro, recluido en Mormoiron, sabedor de la belleza y el porvenir de ideas tan simples como profundas, pero agudamente consciente de su falta de recepción, dentro de una coyuntura vital y matemática radicalmente adversa. Un doble y doloroso distanciamiento –de él con sus alumnos y colegas del *IHES*, y de ellos con él– le llevará inevitablemente a las páginas amargas de *Récoltes et semailles* [**1983-86**]. Por otro lado, su libertad, su ingenuidad y su felicidad serán las simientes de páginas luminosas y brillantes, posiblemente las más incisivas, profundas y extensas jamás escritas alrededor de la creatividad matemática.

540 Las pasiones y los sueños se convertirán en temas esenciales de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y *La clef des songes* [**1987**], las dos grandes arquitectónicas reflexivas que emergerán poco después de la *Esquisse* [**1984**] (ver nuestros *Capítulos 14, 15* abajo).

13

Les dérivateurs (1991)

Presentamos en este capítulo el último texto distribuido de Grothendieck, *Les dérivateurs* [**1991**]. Se debe indicar que entre la *Esquisse d'un programme* [**1984**] y los *Dérivateurs* [**1991**] se sitúan los dos grandes volúmenes reflexivos del autor, *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y *La clef des songes* [**1987**]. Para no romper la línea técnica de nuestros *Capítulos 1-12* hasta el momento, dejaremos la descripción de las *Récoltes* y la *Clef* para nuestros *Capítulos 14, 15* abajo. El enorme manuscrito de los *Dérivateurs* [**1991**] (cerca de 2000 páginas) intenta axiomatizar *at large* –es decir, a nivel universal global, vía la categoría de todas las categorías– algunas *nociones canónicas en el álgebra topológica.* A través de una axiomática general que engloba adjunciones, localizaciones y acciones (orientadas por la categoría *Hot*), Grothendieck intenta recuperar el *álgebra homológica* (coeficientes, vía categorías abelianas y categorías derivadas) y el *álgebra homotópica* (límites, vía topos), como *vertientes* complementarias de un mismo todo unitario ("prederivación", suerte de localización del Lema de Yoneda, independiente de cambios de base). A pesar de esfuerzos aislados (Maltsiniotis, Cisinski, Groth), muchas de las ideas y técnicas de los *Dérivateurs* [**1991**] quedan aún por ser asimiladas y comprendidas por la comunidad matemática.

13.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Después de los grandes textos imaginativos de inicios de la década de los ochenta (*Longue marche* [**1981**], *Pursuing stacks* [**1983**], *Esquisse* [**1984**]), vendrán tres años de reflexiones de Grothendieck sobre la creatividad matemática, con un hondo auto/psico/análisis sobre su propia trayectoria (*Récoltes et semailles* [**1983-86**] y *La clef des songes* [**1987**], nuestros *Capítulos 14, 15* abajo), y finalmente, a inicios de la década de los noventa, ocurrirá la escritura de los *Dérivateurs* [**1991**][541], su última obra distribuida, su nocturnal canto de cisne, antes de su seclusión definitiva en los Pirineos (1991-2014)[cxxxv].

541 El manuscrito original (a mano, sin máquina de escribir) se encuentra en los *Archivos Grothendieck* [**IMAG**, cotes 157-1/5 (1990-1991)]. Una transcripción de los primeros quince capítulos, por Matthias Künzer, editada y revisada por Georges Maltsiniotis y Jean Malgoire, se encuentra disponible en www.grothendieckcircle.com. En lo que sigue, utilizaremos básicamente esa transcripción (que suma 1976 páginas), refiriéndonos solo ocasionalmente al manuscrito original.

cxxxv Se sabe aún muy poco sobre los escritos dejados a su muerte en Lasserre. Una foto de los materiales muestra una meticulosa organización, realizada por el mismo Grothendieck, en cajas de cartón mandadas a hacer a la medida. En una visita a Lasserre, Maltsiniotis pudo elaborar una lista inicial de algunos materiales póstumos: "Geometría elemental esquemática" (1992), "Estructuras de la psiquis" (1992-1993), "Psiquis y estructura" (1993), "Ecuaciones de Maxwell" (s.f.), "El problema del mal" (1993-1998) – esto cubre cerca de 40.000 páginas (!). El registro fue presentado por Maltsiniotis en la *Grothendieck Conference 2015. Mathematics of the 21st century: the vision of Alexander Grothendieck*, Université de Montpellier, Junio 15-19 2015. La lista parece deber completarse con materiales que podrían sumar al menos otras 10.000 páginas. Para una descripción detallada de la situación de los manuscritos póstumos (con una foto de los cartones, cajas y baúles), véase el recuento de Lieven le Bruyn, en http://www.neverendingbooks.org/grothendiecks-gribouillis-2. Aparentemente, Grothendieck habría dejado un testamento, "pidiendo que sus decenas de miles de páginas manuscritas sean entregadas a la Biblioteca Nacional de Francia", Douroux, óp.cit., p. 258. Los herederos no han hecho caso de esa solicitud, y los manuscritos están tasándose en una librería especializada en París (2015-2018), para una eventual venta posterior al mejor postor (ver el artículo de Philippe Douroux, http://www.liberation.fr/futurs/2016/01/14/grothendieck-des-gribouillis-de-genie-en-heritage1426478). Es evidente que un conocimiento completo de la obra de Grothendieck, y un entendimiento comprensivo de su personalidad multifacética, requerirán todavía muchos años, aún después de que su *Nachlass* se haya vuelto público y se haya podido estudiar con atención.

Se tienen pocas indicaciones sobre el final de la estadía de Grothendieck en Les Aumettes (barrio de Mormoiron). Los años 1987-1991 parecen haber estado dedicados en su mayoría a aprendizajes y vivencias, religiosas y espirituales[cxxxvi]. Según el mismo Grothendieck (en carta fechada 26 de Enero 1990), "Dios se me manifestó por vez primera el 27 de Diciembre de 1986. Ese día empezó un periodo muy intenso de «sueños metafísicos», que marcó el inicio de mi «instrucción religiosa» (hasta Marzo 1987). Más aún, entre el 8 de Enero 1987 y el 30 de Abril 1989, me ocurrieron cerca de cincuenta sueños proféticos (...)"[cxxxvii]. Dentro de un ambiente altamente espiritual[cxxxviii], Grothendieck se abre así, complementariamente, a la nueva *dimensionalidad alta* de los *Dérivateurs* [**1991**][542]. El

542 Sin escindir la personalidad grothendieckiana, la búsqueda de Dios y la búsqueda de los más "altos" axiomas para el álgebra topológica, corresponden de hecho a ideales estructurales comunes. Recuérdense, en direcciones similares, la construcción transfinita de los ordinales de Cantor (1883) como aproximación a un Absoluto trascendente (Dios como "multiplicidad inconsistente"), y la prueba ontológica de la existencia de Dios según Gödel (1970) (a partir de una definición de Dios como aquello que captura todas las propiedades positivas, y a partir del sistema modal $S5$, la posibilidad de la existencia de Dios fuerza demostrativamente su necesidad (!)). En todos estos casos, la búsqueda de *arquetipos altos* en matemáticas lleva a una *natural consonancia armónica* con argumentos místicos.

cxxxvi Ver Scharlau, óp.cit., cap. 29 ("*Le bon Dieu*, 1988-1991").

cxxxvii Fragmento de la *Lettre de la Bonne Nouvelle*, ibíd., cap. 29.1. Se trata de una carta mimeografiada de 11 páginas, traducida por el mismo Grothendieck al inglés y al alemán, destinada a 250 amigos, acerca de recomendaciones éticas, morales y ecológicas para una "Nueva Era" ("New Age"). No hemos podido acceder directamente a esa carta, pero véase Scharlau, ibíd., cap. 29.3. Posteriormente, entre el 18 de Febrero y el 10 de Marzo 1990, Grothendieck añadió otro texto de 82 páginas, *Développements sur la Lettre de la Bonne Nouvelle*, donde desarrolla su visión espiritual, ibíd., cap. 29.3. Es interesante observar el comentario de Scharlau, según el cual "es aún un acertijo no resuelto cómo una persona que inventó la cohomología *étale* pudo escribir algo del estilo [la *Lettre de la Bonne Nouvelle*] – y cómo luego pudo retornar a las matemáticas con *Les Dérivateurs* [**1991**]", ibíd. La *multidimensionalidad* de la personalidad grothendieckiana –tan atenta a lo espiritual, como a lo matemático, como a lo más cotidiano, *no reducible* a solo asomos de "racionalidad estándar" – parece seguir superando a todos sus biógrafos y estudiosos. Observaremos en cambio cómo un novelista (Carlos Fonseca) captura magníficamente esa *variedad irreducible*, ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

cxxxviii La exigencia fue también draconiana sobre su propio físico, por ejemplo, al realizar 45 días de ayuno total, aparentemente entre Mayo y Junio de 1990, ibíd., cap. 29.4. A punto de morir, Grothendieck resurgirá sin embargo con una energía envidiable ¡que le llevará a vivir en buenas condiciones físicas otro cuarto de siglo más!

manuscrito parece haber sido escrito entre Octubre 1990 y mediados de 1991[543], en lo que tiene que haber sido un *rapto creativo monumental*, digno del proceder febril de la *Longue marche* [**1981**]. Una vez concluido el manuscrito, Grothendieck parece empezar a preparar su retiro. El día de su partida, en una carta a su amiga Yole (24 Julio 1991), ofrece cuidadosas instrucciones prácticas sobre cómo alquilar la casa, el jardín, hacer reparaciones de las instalaciones, distribuir muebles, libros y objetos. Por supuesto, no es el acto de un "loco". Sus "manuscritos, notas, fotografías, cartas, y aún su máquina de escribir, en la cual había escrito tantos miles de páginas, quedan atrás"[cxxxix].

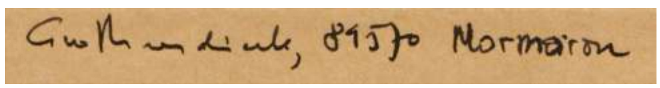


Fig. 13.1 – Remite postal en una carta a Illusie [**IMAG**, cote 158 (c. 1991), 85]

Resumen mínimo.

En este *Resumen mínimo*, presentamos la *Tabla de contenidos* de *Les dérivateurs* [**1991**], elaborada por el propio autor, así como lineamientos breves de algunos capítulos escogidos (I, III, V, XI). En la *Descripción más extensa*, abajo, estudiaremos las problemáticas básicas de localización (prederivación) y axiomatización *at large* (categorificación). En la *Sección 13.2*, aprovecharemos una carta a Thomason (Les Aumettes, 2 Abril 1991), donde Grothendieck sintetiza las fuerzas principales de su manuscrito. En la *Sección 13.3*, nos concentraremos alrededor de los enlaces entre las categorías *Hot* y *Cat*, y sus consecuencias para un entendimiento abstracto universal de la homotopía y la homología.

---

543 Véase el descriptivo del documento en www.grothendieckcircle.com. Por lo demás, la fecha 14/11/1990 aparece escrita por el mismo Grothendieck [**IMAG**, cote 157-2 (1990)]. Grothendieck se refiere en ese momento (14 Noviembre 1990) a las "primeras hojas, de hace dos semanas" [**IMAG**, cote 157-2 (1990), 56], lo que sitúa el inicio del manuscrito a fines de Octubre o inicios de Noviembre.

cxxxix Ver Scharlau, ibíd., cap. 30.

Tabla de contenidos [**IMAG**, cote 157-1 (c. 1990), 1][544]. *I.* Generalidades sobre los (pre)derivadores (126 pp.) *II.* Cofinalidad (a derecha e izquierda) (preliminar a la cofinalidad cohomológica) (99 pp.) *III. Hom* externos en los derivadores (12 pp.) *IV.* Diagramas substanciales (83 pp., 1-72 ausentes). *V.* Categorías de caminos y localización (52 pp.) *VI.* HOT (204 pp.) *VII.* Categorías de caminos (2) (171 pp.) *VIII.* 1-tipos de homotopía relativos: su integración... (9 pp.) *IX.* Regreso sobre las MW^{-1}, comparación con Quillen (25 pp.) *X.* Comparación de *Cat* con $\hat{\Delta}$ (5 pp.) *XI.* Fibraciones *Hot,* funtores propios y funtores lisos, etc. (en *Cat*) (136 pp., 1-126 ausentes). *XII.* Caracterización de W_∞. Funtores W-propios, W-lisos, etc. Sumas amalgamadas y cuadrados W-cocartesianos en *Cat* (275 pp.) *XIII.* Categorías de Modelos (1) (98 pp.) *XIV.* Cuadrados h-cartesianos y h-cocartesianos (8 pp.) *XV.* Teoremas de factorización (Modelos (2)) (137 pp.) *XVI.* Localizadores fundamentales en *Cat* (124 pp.) *XVII.* Categorías con fibraciones y cofibraciones (Modelos (3)) (118 pp.) *XVIII.* Categorías y conjuntos accesibles (492 pp., 1-49 ausentes). *XIX.* Modelos (4) (50 pp.)[545].

Algunos capítulos escogidos[546]. *I.* Cuadro intuitivo (I.1): "categoría de coeficientes" A, "categoría de índices" I, topos de prehaces $A(I) = A^{I^{op}}$, cambio de base $f : I \to J$, problemática de existencia de adjuntos (izquierda, derecha) para $f^* : A(J) \to A(I)$. Cuadro general: definición de *derivador* como 2-funtor $D : Dia^{op} \to Cat$ (Dia = "diagramas", subcategoría plena de *Cat*) que "satisface ciertas condiciones" (I.4) [un tal funtor se denominará luego "prederivador" (I.22) y los axiomas para los derivadores irán apareciendo a medida que el texto se desarrolla naturalmente (I.5, I.9, I.22, I.23-25)]. "La filosofía de los

[544] Seguimos aquí la transcripción Künzer-Maltsiniotis-Malgoire, que indica la cantidad de páginas originales del manuscrito. En la tabla a mano realizada por Grothendieck, aparecen flechas para invertir I y XI, así como III y V, V y VII [**IMAG**, cote 157-1 (c. 1990), 1]. Se trata de los capítulos centrales de *Les dérivateurs* [**1991**], que resumimos a continuación de la *Tabla de contenidos*.

[545] Los capítulos *XVI-XIX* están aún por transcribirse, a fecha Agosto 2018.

[546] Las referencias numéricas entre paréntesis (X.y) remiten a la paginación de la transcripción, señalando capítulos (X) y páginas (y).

derivadores consiste en gran medida" en responder cómo ciertos diagramas en "categorías de coeficientes" $D(I)$ provienen *inversa y canónicamente* de otros diagramas (I.7). "Intuitivamente, se mira un derivador D como una categoría [de base] fundamental con una «estructura» suplementaria, a saber las «extensiones» [de la base]", de manera funtorial; emerge entonces un *vaivén global-local* entre coeficientes (I.10). Aparición "estándar" de los derivadores vía localizaciones (I.10). Ejemplo esencial: derivador HOT elevado sobre la "categoría homotópica estándar" *Hot*, categoría base de "coeficientes fundamentales" (I.11). "Filosofía": los funtores entre categorías fundamentales, subyacentes a derivadores, deben provenir *de manera canónica* de morfismos entre derivadores (I.14). Las notas a pie de página (agregadas después de avances y retrocesos en el texto principal) indican "errores" (I.22), "inutilidades" (I.24), "falsedades" (I.25-27, I.52), "mejoras" (I.31), "contraejemplos" (I.53), "dudas" (I.65): reflejos de la *labor creativa en acción* de Grothendieck. Enlace entre condiciones de *suavidad* –morfismos propios y lisos (I.30)– y propiedades de *estabilidad* en cambios de base (I.32). Descomposición globular de la esfera a través de conjuntos ordenados y categorías (I.57-58). Desarrollo parcial del documento, fechado 11 Noviembre 1990, exhibe la alta velocidad de la escritura (I.66).

III. Acciones eventuales de *Hot* sobre la categoría fundamental de un derivador (III.1). Correlaciones entre *Cat* y *Hot*; localización módulo cuasi-isomorfismos (III.2). Carácter especulativo del capítulo, ondulando entre conjeturas, intuiciones, dudas, errores, muestras de confianza: "¿nuevo axioma?" (III.3), "heurística" (III.6), "no hay duda, debe funcionar" (III.6), "no es sin duda lo correcto" (III.7), "¿validez?" (III.8), "O.K." (III.8). Ejemplo: funtores asociados al "tipo de homotopía del círculo estándar" (III.3).

V. Categorías abstractas y sistemas proyectivos de caminos (V.1-4). Enlaces con categorías de fracciones (V.5, V.17, V.20). *Cat hot*, categoría de categorías *módulo homotopía* (V.8), morfismos canónicos entre caminos (V.8). Intento de presentación vía "demostración conceptual, sin «cálculos» fastidiosos" (V.9) [recordar la frase de Galois:

"hay que saltar a pies juntillas sobre los cálculos"]. Categorías conexas asociadas a los sistemas proyectivos de caminos (V.11). Enlaces entre caminos y diagramas alrededor de la categoría *Cat hot* (V.18-22). "Canonificación" de caminos vía *Cat hot* y *Hot* (V. 31).

XI. Fibraciones de tipo *Hot* en *Cat*: utilizando técnicas de *haces*, correspondencias entre preservación de *Hot*-equivalencias y preservación de fibras bajo cambios de base (XI.1-3). "Para poner resultados «topológicos» sobre una base sólida, hay que desarrollar las nociones pertinentes de funtor propio, funtor liso, etc., sin referencia a una teoría HOT. Es lo que por otro lado había intentado hacer ya en 1983, por los tiempos de *Pursuing Stacks* [**1983**], pero sin una redacción en forma" (XI.6).

Descripción más extensa.

Recorreremos ahora fragmentos de los capítulos I y XI[547] de *Les dérivateurs* [**1991**], alrededor de problemas de canonicidad[cxl] en la búsqueda de un marco común para el álgebra homotópica y el álgebra homológica[548] (axiomatización *at large* de los prederivadores), así como fragmentos de los capítulos V y VII, alrededor de las categorías de caminos propuestas por Grothendieck para generalizar (axiomatización *at large* de la homotopía) las construcciones básicas de la topología algebraica.

547 Con estos capítulos entrelazados debía iniciarse el manuscrito, ver nuestra *Nota 544* arriba.

548 La conjugación de estrategias deberá acercar técnicas de categorías abelianas (ligadas a la homología) y de topos y n-categorías (ligadas a la homotopía). De esta manera, en los derivadores, se planteará una *gran unión arquetípica* del pensamiento grothendieckiano.

cxl La problemática inicia con ciertas fallas de canonicidad en la construcción de la categoría derivada de una categoría abeliana. Si A es una categoría abeliana, $C(A)$ es la categoría de los complejos en A y W es el conjunto de los cuasi-isomorfismos de $C(A)$ (morfismos $f : X \to Y$ tales que $H_n(X) \approx H_n(Y)$ para todo n), la categoría derivada se define por la localización (formal) $Der(A) = C(A)[W^{-1}]$. Emergen entonces problemas de funtorialidad y de existencia de adjuntos, para capturar la información original de A. Para una introducción a estos temas, véase G. Maltsiniotis. *Introduction à la théorie des dérivateurs, d'après Grothendieck*. Preprint. URL: https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/groth/Derivateurs.html.

El capítulo I inicia con un recordatorio sobre problemas de adjuntos. Dadas categorías de “índices” I y categorías de “coeficientes” A, se consideran los prehaces $A(I) = A^{I^{op}}$ y sus movimientos relativos $f : I \to J$, $f^* : A(J) \to A(I)$; la cuestión consiste entonces en estudiar los diversos funtores adjuntos de f^* (izquierdos y derechos) y describir condiciones necesarias y suficientes para su existencia [**1991**, I.1-3]. El ambiente sirve para poder situar luego, en un marco general, subpreguntas para ciertos funtores específicos. Estos funtores aparecen como “derivadores” en un inicio [**1991**, I.4], aunque serán llamados “pre-derivadores” más adelante [**1991**, I.22]. Un *(pre)derivador* $\mathbb{D}$ es un 2-funtor $\mathbb{D} : Dia \to Cat$ entre una subcategoría plena de Cat (Dia, “diagramas”) y Cat, que satisface ciertas condiciones que se imponen poco a poco en el manuscrito[cxli]. La 1-funtorialidad asegura que se tengan, para cada $f : I \to J$ (I, J diagramas), funtores $f^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$, para los que se supone transitividad ($(gf)^* = f^*g^*$); la 2-funtorialidad asegura, similarmente, que se tengan, para cada u morfismo entre $f, g : I \rightrightarrows J$, transformaciones naturales u^* entre $f^*, g^* : \mathbb{D}(J) \rightrightarrows \mathbb{D}(I)$, para las cuales vale transitividad [**1991**, I.4-5].

Las primeras páginas de los *Dérivateurs* [**1991**, I.5-22] muestran cómo Grothendieck produce una lista parcial de *axiomas*, para *estabilizar (o suavizar en lo abstracto)* ciertas construcciones que remeden *propiedades de permanencia* en homología y homotopía[549].

---

549 Vuélvase ahora, con nuevos ojos, a la *Tesis Doctoral* [**1949-53**]: se trata de un *mismo* proceso ubicuo en el pensamiento grothendieckiano, en el cual los axiomas sirven para capturar parcialmente los arquetipos y las propiedades de permanencia que se proyectan sobre ciertas regiones matemáticas dadas (análisis funcional, homología, homotopía, teoría de números, topos, motivos, etc.)

cxli Veremos esas condiciones en los párrafos siguientes. Sin embargo, para definiciones rigurosas, y decantadas con el tiempo, sobre diagramas, prederivadores y sus condiciones de coherencia, ver D.-C. Cisinski. “Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles”. En: *Annales mathématiques Blaise Pascal* 10.2 (2003), págs. 195-244. Los *ejemplos* fundamentales de prederivadores son *(i)* los funtores de prehaces $A \to Hom(A^{op}, M)$ (A, M categorías), *(ii)* los funtores localizados $A \to W_A^{-1}Hom(A^{op}, M)$ (W_A subconjunto de flechas –“equivalencias débiles”– en la imagen de Yoneda de $A \subseteq M^{A^{op}}$) (ver ibíd., p. 203), y *(iii)* el funtor HOT asociado a la teoría de homotopía de los conjuntos simpliciales (ver nuestra *Sección 13.3* abajo).

Un *primer axioma* sobre los derivadores supone que f^* posea adjuntos a derecha (f_*) e izquierda ($f_!$) [**1991**, I.5]; un *segundo axioma* solicita la existencia de biadjuntos $f^!$ (generalizaciones de adjuntos al marco de 2-categorías) para f^* [**1991**, I.5-6]; un *tercer axioma* pide que los funtores $\mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(1)^{I^{op}}$ (1 objeto terminal) sean conservativos (es decir, caractericen isos en $\mathbb{D}(I)$ vía isos a nivel de coordenadas en las imágenes) [**1991**, I.9-10]; un *cuarto axioma* exige que el morfismo de cambio de base para imágenes directas f_* (asociado a ciertos tipos de diagramas de índices) sea un isomorfismo [**1991**, I.20]; un *quinto axioma*, considerado totalmente erróneo ("*totalement cannulé*") [**1991**, I.22], concluye el primer asalto a los derivadores. Con esto, Grothendieck intenta, en primera instancia, capturar el comportamiento funtorial *at large* (nivel Cat, arquetipos, funtores representables) de ciertas construcciones similares a aquellas que ocurren en categorías de modelos homotópicos con equivalencias débiles (nivel Hot, tipos, funtores de lazos).

Una perspectiva estructural más decantada presenta luego la nueva terminología de *prederivador* [**1991**, I.22] y sus nuevos axiomas asociados[550]: (Der 1) $\mathbb{D}(I \amalg J) \simeq \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J)$ es una equivalencia de categorías, y $\mathbb{D}(0)$ es la categoría final [**1991**, I.23]; (Der 2) los funtores $\mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(1)^{I^{op}}$ son conservativos [**1991**, I.24]; (Der 3) los funtores $f^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ admiten adjuntos a derecha (f_*) ("objetos de cohomología relativa"), así como adjuntos a izquierda ($f_!$) ("objetos de homología relativa") [**1991**, I.24]; (Der 4) diversas condiciones de amalgamación y fibración [**1991**, I.24-25]; (Der 5) condición de cofinalidad cohomológica [**1991**, I.25]. Un largo estudio (muy al modo aún de la *Tesis*

[550] Desde el punto de vista de la creatividad matemática, resulta fascinante observar la *variación* y el *ajuste* progresivo de los axiomas, en un proceso vívidamente dinámico, muy alejado de la búsqueda de unos fundamentos supuestamente definitivos –analíticos, rígidos, absolutos– del saber. El *péndulo* entre una guía de ejemplos topológicos y una guía de métodos categóricos ilustra la importancia de los *caminos medios*, forma paradigmática de los *mixtos* lautmanianos. Los objetos, las técnicas y la *maniera* misma de Grothendieck se ajustan con extraordinaria *naturalidad*.

[**1949-53**] y de la mayoría de sus trabajos guiados por axiomas) presenta diversas equivalencias y consecuencias intermedias de los axiomas[cxlii] [**1991**, I.24-30], hasta desembocar en definiciones de *suavidad funtorial* en el ámbito axiomático general: funtores homotópicamente *propios* y homotópicamente *lisos* [**1991**, I.30]. Con esas definiciones, con teoremas de estabilidad [**1991**, I.31], con equivalencias en la categoría *Hot* [**1991**, I.30-32], con caracterizaciones de funtores propios a nivel *Cat* [**1991**, I.33], con teoremas de cambio de base [**1991**, I.35-38], y con una nueva reescritura de los axiomas en términos de estas variaciones [**1991**, I.39-40], Grothendieck logra así expresar (axiomáticamente) y explorar (correlativamente) un sofisticado tejido de correspondencias y reflejos entre Hot y Cat.

El capítulo XI[551] proporciona una interesante contraparte al capítulo I. Dejando de lado la axiomática general "alta", Grothendieck procede ahora desde lo "bajo" (Hot). El Teorema 1 caracteriza las *fibraciones homotópicas en categorías*: un morfismo $f : X \to Y$ en Cat es una Hot-fibración si cumple alguna de las tres condiciones equivalentes, *(a)* transfiere Hot-equivalencias en Hot-equivalencias vía adecuados pullbacks, *(b)* determina Hot-equivalencias en adecuadas localizaciones/fibraciones y las transfiere por cambios de base, *(c)* calcula fibra por fibra la constancia local de los haces $f_*(F)$ si F es haz de conjuntos, de $R^1f_*(F)$ si F es haz de grupos, y de $R^if_*(F)$[552] si F es haz de grupos abelianos [**1991**, XI.1-3]. La noción de Hot-fibración resulta ser estable por cambios de base y composición [**1991**, XI.4], y provee una caracterización de las Hot-equivalencias por medio de sus localizaciones [**1991**, XI.4-6, Teorema 2]. De esta manera, Grothendieck desarrolla

551 En realidad, hacemos aquí referencia a lo poco que ha *subsistido* del capítulo XI, pues las páginas 1-126 se encuentran ausentes [**1991**, XI.1].

552 Los R^i remiten a los funtores derivados (ver el *Tôhoku* [**1955-56**], nuestro *Capítulo 3* arriba, p. 107), expresados ahora en un ámbito categórico general.

cxlii Para una presentación rigurosa posterior de los axiomas, ver Maltsiniotis, óp.cit., pp. 12-17.

una teoría de propiedades homotópicas en Cat vía adecuados comportamientos funtoriales (Hot-equivalencias, funtores derivados). El contraste entre el tratamiento axiomático (arquetipos), que lleva a los *(pre)derivadores*, y el tratamiento homotópico directo (tipos), ligado a los funtores *derivados*, muestra cómo una *noción universal*, que pretenderá recubrir la homología y la homotopía, va ajustándose progresivamente desde lo "alto" (Cat) y desde lo "bajo" (Hot).

Una tercera vía de aproximación a la problemática de cómo entender la *homotopía at large* aparece en los capítulos V y VII, donde se estudian nociones abstractas de caminos y de categorías de caminos. Grothendieck parte de una categoría de "índices" Φ, formada por una suma amalgamada infinita (a izquierda y derecha) de copias de la sucesión básica $\Phi_1 = \{-1 \leftarrow 0 \rightarrow 1\}$[553], que lee luego inversamente como sistema proyectivo (vía retracciones naturales $\varphi_{n,m} : \Phi_m \to \Phi_n$) [**1991**, V.1-2]. A partir del sistema *proyectivo* Φ, define entonces ciertas categorías de caminos: si X es una categoría arbitraria, $Ch_n(X) = Hom(\Phi_n, X)$[554] resulta ser una categoría de diagramas formada por $2n$ sumas amalgamadas de copias $A_{-1} \leftarrow A_0 \rightarrow A_1$, con flechas consecutivas siempre en sentido opuesto, y $Ch_\infty(X) = Hom(\Phi, X) = Hom(\varprojlim_n \Phi_n, X) = \varinjlim_n Ch_n(X)$ se define como la *categoría de caminos* de X[555] [**1991**, V.3]. Antes de seguir con las construcciones básicas en la categoría de caminos (composición, etc.), Grothendieck se pregunta acerca del eventual comportamiento de las *localizaciones* en esas categorías[556]

553 Si Φ_n es la subcategoría plena de Φ con objetos $\{\alpha : -n \leq \alpha \leq n\}$ (donde n se obtiene por la n-ésima suma amalgamada a derecha), se tiene el límite inductivo $\Phi = \varinjlim_n \Phi_n$. Por otra parte, Φ puede también representarse como límite proyectivo, $\Phi = \varprojlim_n \Phi_n$, tal como se indica a continuación.

554 Ch por "chemin" = camino.

555 Intuitivamente, las flechas a derecha $\rightarrow$ en Φ determinan los orígenes ("*sources*") de los morfismos, y las flechas a izquierda ($\leftarrow$) sus destinos ("*buts*"), de tal manera que los morfismos se compongan bien entre ellos, y den lugar a caminos (de cualquier tamaño deseado), con diversos relés intermedios.

556 En cierto sentido, Grothendieck intenta entonces corroborar aquí, en lo "bajo" (localizaciones de caminos), las propiedades que despeja axiomáticamente en lo "alto" (localizadores en Cat).

[**1991**, V.5]. Si Σ es un subconjunto arbitrario de flechas en X (incluyendo siempre identidades), y $Ch_\Sigma(X)$ es la subcategoría plena de $Ch_\infty(X)$ con retracciones pares en Σ, Grothendieck define la categoría localizada $X\Sigma^{-1}$ con los mismos objetos de X y con morfismos $Hom_{X\Sigma^{-1}}(x,y) = \pi_0 Ch_\Sigma(X;x,y)$ (grupo de homotopía abstracto de caminos entre $x, y \in X$) [**1991**, V.6]. La construcción permite visualizar así una *etapa intermedia* entre Hot (con sus grupos de homotopía usuales) y Cat (con sus localizadores abstractos). De esta manera, se va acordonando finamente la *estructuración arquitectónica* de los *Dérivateurs* [**1991**].

Las categorías de caminos presentadas en el capítulo V resultan ser, sin embargo, "pesadas" y "casi inutilizables", por lo que Grothendieck propone "despejar un nuevo formalismo plástico [*souple*], que se ajuste a la intuición" [**1991**, VII.1]. En vez de empezar con las sucesiones alternadas de tipo $(\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot)$, se inicia con sucesiones conexas, cuyos vértices son números naturales y cuyas flechas apuntan *arbitrariamente* a izquierda o a derecha; una tal sucesión constituye una categoría I y se denomina un *intervalo* (estándar) [**1991**, VII.1-8]. Si X es una categoría cualquiera, la *categoría de caminos* $Ch_I(X)$ de tipo I en X se define entonces como la categoría de funtores $Ch_I(X) = Hom(I, X)$ [**1991**, VII.9]. Los tipos de caminos se pueden representar con sucesiones de signos $+$ (flecha a derecha, "directa") y $-$ (flecha a izquierda, "retrógrada"), los caminos corresponden a sucesiones de objetos conectados gracias a morfismos a derecha (encarnación del $+$) o a izquierda (encarnación del $-$), y los morfismos entre caminos corresponden a conmutaciones naturales de los cuadrados asociados [**1991**, VII.9-10]. Con muy sencillos ejemplos ("que se ajustan a la intuición"), se reconstruyen así las identidades, las flechas, las composiciones y las ramificaciones (abiertas o cerradas) en una categoría[557]. Utilizando luego los *funtores representables*, las reconstrucciones anteriores permiten expresar el entorno

557 Para una categoría X, $Ch_{(\cdot)}(X) \approx X$, $Ch_{(\cdot\rightarrow\cdot)}(X) \approx Mor(X)$, etc. [**1991**, VII.10-11].

de los caminos y sus composiciones con flechas *únicamente a nivel Cat* [**1991**, VII.13-14]. Grothendieck resume las ventajas de esa aproximación: "es ese un principio general para elevar todas las «operaciones» más o menos canónicas sobre caminos en categorías arbitrarias X, y los enunciados que les correspondan, a cuestiones donde X desaparece y donde se trabaja en las categorías intervalo en sí mismas – una de las ventajas técnicas es que se trata de categorías bastante pequeñas que dan lugar a una intuición topológica segura" [**1991**, VII.14].

Para proceder, se tiene entonces una escogencia entre "(a) un estudio más o menos sistemático de funtores entre intervalos (...), (b) una descripción de la composición de caminos, (c) un formalismo sobre las categorías de caminos de *tipo no precisado*" [**1991**, VII.15]. Resulta fascinante observar aquí la multiplicidad de niveles de abstracción que maneja Grothendieck. Como hemos visto, una estrategia siempre presente en su obra consiste en *elevarse sistemáticamente allende ciertos tipos determinados, desprendiéndose progresivamente de lo particular y despejando los marcos generales donde se suavizan todas las perspectivas.* Y es lo que, una vez más, se aboca a realizar en el capítulo VII: "como mi objetivo es sobre todo el de describir tales categorías $Ch(X)$ (¡sin índice!), con buenas propiedades, empezaré por (c)" [**1991**, VII.15]. Volando *at large*[558], Grothendieck presenta las categorías de caminos arbitrarios como categorías fibradas sobre una adecuada categoría monoidal de sabor combinatorio [**1991**, VII.16-19], y pasa a chequear, gracias a diversos tests (localizadores, composición), si "la noción es buena" [**1991**, VII.20]. Para ello, concurren las "propiedades de morfismos de intervalos" [**1991**, VII.21-31], la "composición en Ty" (categoría monoidal subyacente) [**1991**, VII.32-39], la "explicitación de las categorías de fracciones $X\Sigma^{-1}$ en términos de $Ch(X)$" [**1991**, VII.40-53]. Al final, Grothendieck exclama: "¡los sudores fríos han terminado! (...) el formalismo desarrollado

[558] "Quiero «incluir» todas las categorías $Ch_\tau(X)$ de caminos, de todos los tipos que se desee, en una misma categoría $Ch(X)$" [**1991**, VII.16].

hasta el momento otorga una satisfacción completa” sobre composición, fracciones y homotopía [**1991**, VII.53]. De esta manera, mediante un progresivo zigzag en el ajuste de las definiciones y los conceptos, se provee un *ambiente universal* donde caben al tiempo construcciones centrales de la *homología* (localizadores asociados a categorías derivadas) y de la *homotopía* (localizadores asociados a caminos y equivalencias débiles).

El capítulo XVI (“Localizadores fundamentales”) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 267-399][559] provee otra perspectiva más en el acordonamiento *estructural intermedio* entre los fondos homotópicos clásicos (nivel Hot) y los axiomas altos de los derivadores (nivel Cat). Grothendieck propone axiomas para las categorías localizadas $M[W^{-1}]$ (M categoría, W subcategoría de flechas de M), o, equivalentemente, para sus copias a lo largo de la inmersión de Yoneda $M \to C^{M^{op}}[W_M^{-1}]$ (C categoría, W_M imagen de W en la categoría de prehaces $C^{M^{op}}$). Una tal construcción, variando funtorialmente sobre M, se denomina un “localizador fundamental”: *cubre*, por un lado, las equivalencias débiles de la teoría homotópica clásica, y se *abre*, por otro lado, a los derivadores en abstracto. Los primeros axiomas se refieren a propiedades de *clausura*[560] para el conjunto de flechas W (que representará, en abstracto, un conjunto de equivalencias débiles en homotopía) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 268-277]. Otro axioma introduce una propiedad de *conexidad* acerca de la no trivialidad del grupo fundamental para flechas de W (Loc 5) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 281]; equivalentemente, (Loc 5) asegura una factorización de $\pi_0 : Cat \to Con$ a través de Hot_W [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 281], y su corolario principal es la reconstrucción

559 A fecha 7 Septiembre 2018, los capítulos finales de los *Dérivateurs* (entre los cuales el XVI) no alcanzan a aparecer transcritos en la tarea emprendida por Maltsiniotis-Malgoire-Künzer (www.grothendieckcircle.org).

560 Se trata de “saturaciones” (Loc 1) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 268], “objetos finales” (Loc 2) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 268], “localizaciones” (Loc 3) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 269], y “sumas directas” (Loc 4) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 277]. Una lista de *todos* los axiomas introducidos para captar el ambiente de los localizadores fundamentales fue convenientemente registrada por el propio Grothendieck al inicio del manuscrito [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 267].

local del grupo de homotopía para una categoría dada X: $\pi_0(X) \approx Hom_W(e_W, X)$ (e_W objeto final en W) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 286]. Un tercer tipo de axiomas trata propiedades de *cofibración y fibración* con respecto a W (Loc 6, 7) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 289-314], y explora detenidamente sus equivalencias estructurales con respecto a subfamilias de morfismos[561] [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 315-345]. Finalmente, un cuarto tipo de axiomas se refiere a propiedades de *estabilidad infinitaria*: clausura de W por colímites dirigidos (Loc 8) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 346] y accesibilidad[LXII] de W vista como subcategoría de Cat (Loc 9) [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 350].

En todo este *deslinde de axiomas*, vemos cómo Grothendieck busca al tiempo un control *local* sobre las familias W (Loc 1-4), un control *intermedio* (mixto a la Lautman) sobre los grupos de homotopía (Loc 5), y un control *global* sobre la forma (Loc 6-7) y el tamaño (Loc 8-9) de las categorías $M[W^{-1}]$. El tejido resulta ser típicamente grothendieckiano: vaivén entre lo particular y lo general, *back-and-forth* entre tipos y arquetipos, dialéctica entre lo local y lo global, exploración exhaustiva de equivalencias lógicas intermedias, desglose estructural/fibrado de la arquitectónica, (re)presentación de lo limítrofe/infinitario a partir de aproximaciones parciales/finitarias. El trabajo exhibe una vez más la *profunda continuidad* de su pensamiento, donde lo *bajo* (Hot) y lo *alto* (Cat) se iluminan sin cesar entre sí, hasta el punto de que el *tránsito mismo* entre lo concreto y lo abstracto se convierte en el tema por excelencia –la *razón abismal*– del entendimiento matemático.

---

561 El detalle de las implicaciones lógicas es aquí extremo (ver diagramas de correspondencias lógicas [**IMAG**, cote 157-4 (c. 1991), 323, 334, 338, 345]), y recuerda sus mejores momentos de análisis lógico en la *Tesis Doctoral* [**1949-53**].

LXII La *accesibilidad* de una categoría responde a la problemática de cómo *generar* sus objetos, a partir de un conjunto de operaciones de tamaño acotado (un cardinal infinito regular κ, por ejemplo). Una categoría C se dice κ-accesible si la categoría posee colímites dirigidos de tamaño κ, existe un subconjunto P de objetos cuyos funtores representables preservan los κ-colímites, y todo otro objeto de C es colímite adecuado de objetos en P. Una categoría es *accesible* si es κ-accesible para algún κ. Las categorías de conjuntos, de conjuntos simpliciales, de módulos, son $\aleph_0$-accesibles; la categoría de modelos de una teoría enumerable de primer orden es $\aleph_1$-accesible. La categoría dual de los ordinales Ord^{op} no es accesible.

13.2 Síntesis conceptual

Los *Dérivateurs* [**1991**] proveen un ejemplo muy fino de búsquedas de “quintaesencia”, arquetipos y unidad en el *álgebra topológica.* El álgebra se ve imbuida de técnicas y perspectivas topológicas en múltiples niveles, todas *cobijadas o recubiertas* con suma suavidad en la abstracción más alta: *(i)* Hot cobijada en Cat, *(ii)* los tipos del álgebra homológica (coeficientes) y los tipos del álgebra homotópica (límites) cobijados dentro de tránsitos categóricos generales, *(iii)* las acciones del formalismo homotópico y las adjunciones derechas/izquierdas de la cohomología/homología cobijadas bajo la axiomática de los derivadores, *(iv)* los tránsitos (funtorialización de los procesos de derivación) y los invariantes (estabilidad intrínseca, independencia de cambios de base) cobijados bajo el “techo” canónico y universal de todas las categorías, *(v)* las resoluciones de las obstrucciones a no canonicidad en categorías abelianas y derivadas, gracias al uso del Lema de Yoneda en topos de prehaces, cobijadas bajo el ambiente de los localizadores fundamentales, ejemplos centrales de derivadores.

Las amarras del *Pequod* se sueltan al buscar capturar esos “trascendentes” que gobiernan simultáneamente la homología y la homotopía. Grothendieck navega en las “aguas altas” de la abstracción –*lejos mar adentro*– y es en ese entorno rarificado, alejado de las particularidades, donde consigue vislumbrar una unidad invisible desde el mundo fragmentado de las apariencias concretas. En un cierto sentido, es como si la “realidad” misma de las cosas no permitiera verlas, y se necesitara una *elevación ideal* de la mirada para percibir su verdadera riqueza. No es otro el sentido de una “metafísica” allende la física, de unos “arquetipos” allende los tipos, de lo “universal” allende lo particular: su profundo interés consiste en *revelar o despejar* lo unitario detrás de lo múltiple, lo canónico detrás de lo contingente, lo invariante detrás de la variación, lo integral detrás de lo diferencial. *Toda la obra de Grothendieck desbroza, con meticulosidad extrema, esos caminos.*

Una carta de Grothendieck a Thomason (Les Aumettes, 2.4.1991)[562] resume algunos de los puntos esenciales conseguidos en los *Dérivateurs* [**1991**]. Grothendieck empieza resaltando la necesidad de una fundamentación categórica abstracta: "tengo la convicción de que un álgebra homotópica (o, en una visión más vasta, un «álgebra topológica») tal como la considero, no podrá ser desarrollada en toda la amplitud que merece, sin los fundamentos categóricos apropiados (...) es decir, una teoría de categorías (grandes) que llamo por el momento «*accesibles*» (...)" (2). Así, el amplio marco general de Cat y de sus regiones accesibles se refuerza en primera instancia. Luego, Grothendieck ofrece una visión retrospectiva: "Las ideas-fuerza nacieron en su mayoría hace veinticinco años y más, y veo su germen vivaz en mis reflexiones solitarias de los años 56, 57, cuando se despejó en mí la necesidad de categorías de «coeficientes» menos prohibitivamente gruesos que los sempiternos complejos de cadenas o cocadenas, y la idea (después de largas perplejidades) de construir tales categorías pasando a categorías de fracciones (inventadas en el momento) al «invertir» los cuasi-isomorfismos" (2). El estudio de la *estructura intrínseca* de tales categorías se convierte entonces en una tarea principal (2). El hecho de que esa tarea haya sido apenas desarrollada por la comunidad (solo fragmentos del programa llevados a cabo por Verdier, hacia 1960, alrededor de categorías derivadas abelianas), y haya sido considerada bajo un "viento de desprecio", lleva a Grothendieck a "compartir un dolor" con Thomason (3). El trabajo de fundamentos resulta ser entonces "algo sin esperanza, pues todo el mundo escapa del dolor, es decir, escapa del conocimiento" (3).

Las partes centrales de la carta se dividen en tres secciones "1. La única estructura esencial de una categoría de modelos es el dato de un «localizador» $W \subseteq Fl(M)$" (3-4), "2. Prederivadores, derivadores" (5-9), y "3. Prederivador definido por una categoría de

[562] Una transcripción de la carta (por Mathias Künzer) se encuentra disponible en la carpeta sobre derivadores reunida en www.grothendieckcircle.org. Los números (x) entre paréntesis corresponden a la paginación de la carta, tal como aparece en la transcripción.

modelos, y problema de existencia de $f_!$, f_*" (9-12). Con ello, Grothendieck despeja el *esqueleto básico* de las técnicas avanzadas en los *Dérivateurs* [**1991**]: (1) manejo de localizadores *at large* (en Cat) y de sus cercanías con las categorías de modelos de Quillen, (2) entendimiento de la *estructura adicional* que aparece en un derivador, con respecto a una categoría derivada subyacente[563], (3) estudio correlativo del tejido de adjunciones asociado a un derivador[564]. Uno de los *tonos* finos, ocultos, submarinos, de la carta consiste en buscar "un entendimiento en profundidad" que no "pierda de vista los objetos geométricos esenciales (espacio vectorial, grupo, variedad, derivador) y su carácter intrínseco" (11). De esta manera, la búsqueda incesante de *estructuras geométricas intrínsecas*, o, dicho de otra manera, de *arquetipos geométricos*, se revela una vez más en las labores grothendieckianas, siguiendo los descensos a lo más hondo de *Moby-Dick*.

Cisinski, uno de los jóvenes matemáticos que han ido poniendo en orden la teoría de los *Dérivateurs* [**1991**], resalta algunos de los puntos esenciales de la situación: la construcción de un formalismo inspirado en la teoría (co)homológica de (pre)haces, la descripción de las estructuras emergentes en categorías homotópicas generalizando las categorías triangulares, la exploración de propiedades de lisura abstracta entre categorías pequeñas, la axiomatización *at large* de las tentativas anteriores[cxliii]. En esos procesos, el estudio de los límites homotópicos consigue un acercamiento con las categorías de modelos de

563 Se trata de algo similar a la estructura adicional que emerge en un topos, con respecto a los haces subyacentes. A ese respecto, comenta Grothendieck: "Es muy claro ahora que la noción de derivador (...) es una entre las cuatro o cinco nociones fundamentales del álgebra topológica, que desde hace unos treinta años espera ser desarrollada. Como nociones de un alcance comparable, no veo sino aquellas de *topos* y de *n-categorías* y *n-stacks* sobre un topos" (6).

564 "Hablando técnicamente, esa es visiblemente una de las cuestiones más cruciales que se plantean en el desarrollo del álgebra topológica. No obstante, para esa cuestión fundamental, no tengo elementos de respuesta sino muy fragmentarios y manifiestamente insuficientes" (11).

cxliii Ver Cisinski, óp.cit. En particular, Cisinski provee un *tratamiento axiomático completo*, enteramente riguroso, de la teoría de los derivadores, siguiendo a Grothendieck: ibíd., pp. 200-210.

Quillen[LXIII], obteniendo teoremas de estructura, por un lado, y equivalencias con categorías de coeficientes asociados a una cohomología categórica general, por otro lado. Las dos vertientes finalmente convergen en la axiomática universal de los derivadores. Así, de múltiples maneras, ya sea estructurando Hot en Cat, ya sea resolviendo obstrucciones en lo general, ya sea suavizando los tránsitos categóricos, ya sea entrelazando límites y coeficientes, Grothendieck *despeja el ambiente unitario* buscado para la convergencia abstracta de la homología y la homotopía.

La década de los ochenta estudia con cuidado la *inversión* fundamental grothendieckiana, el estudio del *álgebra topológica* en vez de la topología algebraica. Las primeras intuiciones, sin embargo, proceden explícitamente al menos desde el *Tôhoku* [**1955-56**] (categorías *suaves* de coeficientes y fracciones en el álgebra cohomológica), e, implícitamente, desde el *Résumé* [**1953c**] (factorizaciones ligadas al comportamiento *topológico* de las normas). La consideración de la *variabilidad algebraica* (herramientas topológicas para el estudio de la variación de coeficientes algebraicos, línea Riemann) se contrapone con la *variabilidad analítica* (herramientas algebraicas para el estudio de la variación de espacios topológicos, línea Poincaré). La geometría anabeliana, los *stacks*, los derivadores constituyen diferentes perspectivas para capturar esa variabilidad algebraica. Los *Dérivateurs* [**1991**] proponen su fundamentación en el ámbito general de ciertas subcategorías homotópicas dentro de categorías accesibles. Por otra parte, una suerte de *filosofía del no*[565] parece gobernar el entorno: en vez de estructuras abelianas, surge la geometría anabeliana, en vez de grupos, la noción de grupoide, en vez de ramificaciones, la topología

565 Ver Bachelard, óp.cit.

LXIII Una *categoría de modelos* (*model category*, Quillen 1967) es una categoría con adecuadas clases de equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones, con el objetivo de abstraer propiedades de las categorías de espacios topológicos (con homotopías entre ellos), de conjuntos simpliciales y de cadenas de complejos. Los axiomas de Quillen tienen que ver con clausuras bajo retracciones, composiciones, elevaciones y factorizaciones. Además de las categorías que motivan la definición, toda categoría de prehaces simpliciales sobre un sitio de Grothendieck es una categoría de modelos.

étale, en vez de singularidades, la moderación suave. En el ámbito de la negación, *al otro lado del espejo*, emergen entonces las *superestructuras* (motivos, n-categorías, *stacks*, localizadores fundamentales, etc.) *allende* las estructuras clásicas usuales (homología, homotopía, haces, etc.) De esta manera, los *arquetipos fundamentales van despejándose de forma natural* en el pensamiento de Grothendieck.

Las incesantes búsquedas *axiomáticas* de los *Dérivateurs* [**1991**] son fieles testigos del profundo deseo grothendieckiano de *despejar* los diversos entornos de la matemática. Categorizar, abstraer, axiomatizar son todos modos correlacionados para escapar de la diferencia, la particularidad, la obstrucción[566]. Como consecuencia, se obtiene una suerte de *metodología general de suavización de las singularidades*[567], donde se consigue *transitar en lo alto*, mientras en lo bajo todo tiende a ser obstructivo. La *moderación* de la topología, la *n-elevación* de los *stacks*, la *unificación* de los derivadores responden a formas de esa suavización amplia. En particular, los axiomas (Der) de los derivadores y los axiomas (Loc) de los localizadores fundamentales expresan técnicamente esas estrategias generales: condiciones de continuidad (Der 3, Der 4), de amalgamación (Der 5), de conexidad (Loc 5), de estabilidad (Loc 8, Loc 9). La *coherencia* de toda la obra de Grothendieck se refuerza así con las investigaciones meticulosas y exacerbadas de los *Dérivateurs* [**1991**].

---

566 La cercanía con Deleuze es aquí manifiesta. Si *Différence et répétition* (1968) ha sido sobre todo leído por el lado de la *diferencia* (Capítulos 1: "La diferencia en sí misma" y 2: "La repetición por sí misma"), llevando a los dogmas extremos de un fácil postmodernismo (todo vale en la diferencia), en realidad el tratado de Deleuze se cierra con dos fascinantes *integraciones* (Capítulos 4: "Síntesis ideal de la diferencia" y 5: "Síntesis asimétrica de lo sensible"). El paso del "en sí" al "en otro" es imprescindible para ampliar el entendimiento del mundo. El carácter *sintético* e integrador –escapando de la diferencia, la particularidad, la obstrucción– de *Différence et répétition* se ha entendido mucho menos que su contraparte diferencial, tal vez porque Deleuze utiliza al final herramientas explícitas de la matemática moderna (Abel, Galois, Riemann), que los mal llamados "post"modernistas han dejado de lado. Debe destacarse la influencia directa de Albert Lautman (matemática efectiva, ideas, mixtos) en la obra de Deleuze: ver G. Deleuze. *Différence et répétition.* París: PUF, 1968, pp. 213, 230-232, 237. La conexión Galois-Riemann-Lautman-Deleuze-Grothendieck es muy estrecha.

567 La fascinación de Grothendieck por Hironaka y las conexiones técnicas con el teorema de Hironaka sobre "resolución de singularidades" no son casuales (ver nuestra *Nota XXXVIII* arriba, p. 163).

13.3 Ejemplo detallado: HOT *at large*

El paradigma de derivador, situado entre la categoría Hot de CW-complejos con homotopías y la categoría Cat de todas las categorías, es el funtor HOT. Este se construye vía el localizador fundamental asociado a prehaces de conjuntos simpliciales[cxliv]. Específicamente, la categoría Δ de símplices posee como objetos los naturales $\underline{n} = \{0, \cdots, n\}$ $(n \geq 0)$ y como morfismos las aplicaciones crecientes $\underline{n} \to \underline{m}$, y la categoría de conjuntos simpliciales es la categoría de prehaces $\widehat{\Delta} = Con^{\Delta^{op}}$. La localización $W_{\widehat{\Delta}}$ se define como el conjunto de flechas de $\widehat{\Delta}$ que se factorizan por medio de retracciones e inyecciones canónicas, asociadas a los bordes de los símplices[cxlv]. Finalmente, HOT es el (pre)derivador $HOT : Cat \to Cat : C \to \widehat{\Delta}^{C^{op}}[W_{\widehat{\Delta}}(C)^{-1}]$.

Un estudio detallado del funtor HOT *generalizado* (para cualquier subcategoría de flechas W en Cat) aparece en el capítulo VI de los *Dérivateurs* [**1991**]. Grothendieck empieza recordando[568] sus incursiones previas en *Pursuing stacks* [**1983**], alrededor de axiomas para equivalencias débiles y localizaciones en Cat[569] [**1991**, VI.1-2]. Siguen 40 páginas manuscritas[570] ¡escritas en el mismo día, 14 de Noviembre 1990! donde propone

568 Con fecha explícita "14.11.90" – "Las primeras hojas, de hace dos semanas, han sido abandonadas, ampliamente superadas por VII" [**1991**, VI.1] (es decir, el capítulo VII, "Categorías de caminos (2)", que hemos revisado arriba).

569 Ver nuestro *Capítulo 11* arriba, pp. 321-322. A pesar de siete u ocho años de diferencia, se nota inmediatamente la continuidad del hacer grothendieckiano.

570 Correspondientes a 23 páginas en la transcripción [**1991**, VI.1-23]. Al final del día, sin duda agotado después de semejante trabajo encarnizado, Grothendieck se sumerge en una sensación oscura: "No veo nada en el horizonte" [**1991**, VI.23]. Impacta aquí la tarea hercúlea de Grothendieck, aislado en Mormoiron, en duras condiciones ascéticas de vida, y sumergiéndose en algunas de las profundidades más abstrusas del pensamiento matemático. La cercanía de Grothendieck con el Ahab de *Moby-Dick* resulta muy impresionante – buscando ambos sin cesar en el horizonte su *ballena blanca*.

cxliv Ver, por ejemplo, Cisinski, óp.cit., pp. 220-221.

cxlv ibíd.

una definición general de HOT_W para una categoría *arbitraria* de modelos (Cat, W), y estudia las diversas categorías asociadas a $\mathrm{HOT}_W(S)$, vía fibraciones y cofibraciones sobre Cat/S (S categoría arbitraria)[571]. El 15 de Noviembre afirma que "creo haber al fin entendido, esta noche, la situación exacta" [**1991**, VI.24]: propone cuatro tipos de W-equivalencias [**1991**, VI.24], estudia cuidadosamente sus implicaciones [**1991**, VI.24-27], establece a partir de ellas algunos axiomas para W[572] [**1991**, VI.27-28], y retoma/unifica las múltiples categorías sobre Cat/S a la luz de la tipología obtenida de W-equivalencias [**1991**, VI.43-51]. El capítulo VI desarrolla luego una extensa inspección de las propiedades funtoriales de la construcción HOT_W: cambios de base, comportamiento cartesiano, correlaciones y teoremas de estabilidad con adjuntos, satisfacción de axiomas generales (Der) [**1991**, VI.72-127].

El tejido de enlaces de HOT con diversas adjunciones es especialmente fascinante. Grothendieck abre el espacio de la *matemática relativa*: "La descripción de las categorías de tipo $\mathrm{HOT}(S)$, para S fijo, me parece en el momento perfectamente bien entendida. Es tiempo de hacer variar S, y de entender el carácter contravariante en S" [**1991**, VI.72]. A partir de una variación $f : S' \to S$, emergen entonces los funtores imagen inversa $f^* : \mathrm{HOT}_W(S) \to \mathrm{HOT}_W(S')$ [**1991**, VI.72] e imagen directa[573] (adjunto a izquierda de f^*) $f_! : \mathrm{HOT}_W(S') \to \mathrm{HOT}_W(S)$ [**1991**, VI.82]. Grothendieck desarrolla el estudio funtorial de la situación mediante diversas técnicas: *(i)* comportamiento de los funtores sobre fibraciones y localizaciones en Cat/S [**1991**, VI.73-78], *(ii)* hipótesis adicionales

571 La profusión de formas de *matemática relativa* es aquí fascinante. Véanse los diagramas de "13 categorías de «categorías sobre S»" [**1991**, VI.4, VI.6].

572 Los axiomas se refinan y retoman luego en el capítulo XVI, tal como los presentamos arriba, al final de nuestra *Sección 13.1*. No continuamos por lo tanto con estas exploraciones iniciales de Grothendieck, y nos restringimos en lo que sigue a las apariciones de HOT.

573 Más adelante, Grothendieck llama a $f_!$ "funtor imagen directa homológica, o funtor de integración (para los tipos de homotopía relativos)" [**1991**, VI.83]. Toda la "filosofía" de los derivadores se encuentra en esa terminología, donde se integran los tipos de homotopía a través de funtores homológicos, dando lugar a una *unidad funtorial por estratos* de la homotopía y la homología.

de suavidad (funtores lisos y propios) para asegurar conmutaciones [**1991**, VI.79-83], así como un buen manejo de la unidad [**1991**, VI.84] y la counidad [**1991**, VI.85] en la adjunción, *(iii)* isomorfismos canónicos para condiciones de cartesianidad [**1991**, VI.94-97], *(iv)* compatibilidad con localizadores [**1991**, VI.102-103].

El capítulo VI concluye con un "resumen de la teoría de HOT_W" [**1991**, VI.105]. Los siguientes puntos son resaltados: (1) "localizadores principales sobre Cat/S" [**1991**, VI.105-107], (2) "principales categorías de categorías sobre S" [**1991**, VI.107-108], (3) "cuatro tipos de categorías HOT_W" [**1991**, VI.108-111], (4) "caso en el que el axioma W(4b)[574] se satisface"[575] [**1991**, VI.111-113], (5) "perplejidades sobre variantes débiles del axioma W(4b)" [**1991**, VI.113-122], (6) "ley contravariante de HOT_W" [**1991**, VI.122-123], (7) "producto en $\mathrm{HOT}_W(S)$" [**1991**, VI.123-125], (8) "los funtores $f_!$: teorema de adjunción, propiedades del derivador HOT_W" [**1991**, VI.125], (9) "teorema de cambio de base para $f_!$ en HOT_W" [**1991**, VI.126-127] (el capítulo se encuentra inconcluso).

De esta manera, Grothendieck pone todos sus "hierros en el fuego"[576], alrededor del derivador HOT_W. La conjugación de las técnicas de matemática relativa (sobre S variable), de los refinamientos axiomáticos (sobre W arbitrario), de las dialécticas funtoriales (sobre los funtores HOT_W, sus adjuntos y los cambios de base), de las propiedades de estructura (sobre las categorías $\mathrm{HOT}_W(S)$), constituyen precisos insumos para describir al final las propiedades generales y universales del derivador HOT_W. Es fácil imaginar la acción de múltiples *mareas iteradas*, que recubren, una y otra vez, complejas tramas de obstrucciones, y que, poco a poco, consiguen desatar los nudos mediante el flujo suave

[574] El axioma W(4b) sobre una colección de flechas W afirma la equivalencia entre pertenencia y pertenencia por fibras: dados X, Y W-fibrados sobre S y un S-morfismo $f : X \to Y$, se tiene $f \in W$ si y sólo si $\forall s \in Ob(S) f_s : X_s \to Y_s \in W$ [**1991**, VI.104].

[575] Este axioma da lugar a diversas identificaciones de localizadores.

[576] Ver cita de Grothendieck sobre "tener muchos hierros en el fuego al mismo tiempo", nuestro *Capítulo 3* arriba, p. 88.

de las aguas. Se combinan entonces aquí los rasgos de Vulcano (con todos sus hierros en el fuego) con los rasgos de Neptuno (con todos sus suaves deslices acuáticos). Los dioses romanos del fuego y el agua –*el volcán y el mar*– acompañan siempre la obra de Grothendieck.

14

Récoltes et semailles (1983-1986)

Récoltes et semailles (*Cosechas y siembras*) [**1983-86**] constituye probablemente el mayor análisis jamás escrito sobre la creatividad matemática. El calificativo "mayor" no es gratuito y puede ser medido tanto en extensión (cerca de 1500 páginas), como en profundidad (recuento del pensamiento de uno de los dos mayores matemáticos del siglo XX). El producto final conforma una *verdadera mina* para el entendimiento de la matemática contemporánea, su historia, su sociología y su filosofía. El subtítulo de la obra –"Reflexiones y testimonios sobre un pasado de matemático"– indica sus dos grandes vertientes: por un lado, *reflexiones* sobre la práctica matemática, adentrándose con sumo cuidado en el hacer del mismo Grothendieck, y, por otro lado, *testimonios* sobre su vida personal y su escuela, constatando el doloroso desencanto de cómo las "semillas" de sus trabajos no se habían "cosechado" adecuadamente en el periodo 1970-1983. El *estilo* de la retrospectiva es típicamente grothendieckiano: apasionado, meticuloso al extremo, exhaustivo en su autoanálisis y en su rendimiento de cuentas. El volumen golpeó hondamente a la comunidad matemática, retratada sin contemplaciones, y terminó de romper las pocas amarras que Grothendieck tenía con su entorno.

14.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

Récoltes et semailles [**1983-86**] emerge de una honda desviación reflexiva de Grothendieck, al escribir *Pursuing stacks* [**1983**][577]. El manuscrito[cxlvi] está dividido en siete secciones principales[578], que listamos a continuación, con sus fechas de elaboración:

– (P). *Paseo a través de una obra, o el Niño y la Madre* (65 pp.): Enero-Febrero 1986.

– (L). *Carta e Introducción* (56 + xxii pp.): Marzo 1984, Mayo-Junio 1985, Febrero 1986.

– (1). *Primera parte. Fatuidad y renovación* (171 pp.): Junio 1983, Febrero-Marzo 1984.

– (2). *Segunda parte. El entierro I, o el vestido del emperador de China* (249 pp.): Abril-Junio 1984.

– (3). *Tercera parte. El entierro II, o la llave del yin y el yang* (354 pp.): Septiembre 1984 - Enero 1985.

– (4). *Cuarta parte. El entierro III, o las cuatro operaciones* (478 pp.): Febrero-Junio 1985.

– (PU). *Las puertas sobre el universo. Apéndice a la llave del yin y el yang* (127 pp.): Marzo-Abril 1986.

---

577 Ver nuestro *Capítulo 11* arriba, *Nota 480*, p. 310.

578 Para referencias, a lo largo de esta monografía hemos ido denotando esas siete secciones con los símbolos P (*Promenade*), L (*Lettre*), 1, 2, 3, 4, PU (*Portes sur l'univers*).

cxlvi El manuscrito, aún no publicado en francés, se encuentra accesible en varios lugares de la red. Una útil transcripción aparece en www.grothendieckcircle.org. El manuscrito ha sido traducido al japonés (Tsuji 1989-1993), al ruso (Fridman y Filkenberg 2002), al inglés (Lisker 2002) y al español (Navarro). El trabajo más extenso y fino sobre *Récoltes et semailles* [**1983-86**] es A. Herreman. *Découvrir et transmettre. Une analyse de la dimension collective des mathématiques dans Récoltes et semailles.* http://decouvrir-transmettre.alainherreman.fr, Prépublications IHES, 1999. Por otro lado, el colectivo teatral *Les Rémouleurs*, dirigido por Anne Britan, ha retomado temas de *Cosechas y siembras* para construir la obra *Rêves et motifs* (2017), en homenaje al "humanismo visceral" de Grothendieck, su "infatigable introspectiva" y su "deseo de descifrar el mundo recreándolo en su interior" (www.remouleurs.com).

Como se ve, el arco temporal de producción de *Récoltes et semailles* recorre todo el periodo 1983-1986[579], como *en sordina*, contrapuesto con los grandes programas del álgebra topológica esbozados en *Pursuing stacks* [**1983**] y en la *Esquisse* [**1984**], y apuntalados hacia los *Dérivateurs* [**1991**].

Los *muchos registros* del pensamiento grothendieckiano son evidentes en la década de los ochenta[cxlvii]. Se trata de una *multiplicidad plena que no puede ser reducida* a solo fragmentos: ideas, técnicas, disquisiciones, psicoanálisis, misticismos, protestas, diatribas, etc. La complejidad de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] refleja de hecho la enorme riqueza de la figura de Grothendieck en esos años, a menudo subvalorada y despreciada por la comunidad matemática, en particular por sus grandes coetáneos, un Serre o un Dieudonné, quienes simplemente no comprendieron al Grothendieck "eremita". En realidad, la "reclusión" en Mormoiron constituye un entorno fundamental para su producción *alternativa* de la década: por un lado, programas enteramente nuevos en matemáticas (geometría anabeliana, topología moderada, teoría de Grothendieck-Teichmüller, dibujos de niños, *stacks*, derivadores), y, por otro, inmersiones en lo más profundo de la creatividad y de la psiquis (pasado, imaginarios, sueños, mística). Desde una *nada en la provincia*, gracias precisamente a *vivir en el margen*, es cómo Grothendieck adquiere un esencial *distanciamiento* del mundo y un hondo *desprendimiento* espiritual, que le permiten explorar dimensiones alternativas de la inteligencia y de la sensibilidad.

579 Al final del periodo, Grothendieck piensa en su eventual publicación (con Christian Bourgois [**1983-86**, *avant-propos*, p. 5]), pero las dificultades debidas a la excesiva extensión y al contenido excesivamente combativo impedirán que el manuscrito pase por una casa de edición.

cxlvii Un detallado estudio de las circunstancias alrededor de la escritura de *Récoltes et semailles* se encuentra en Scharlau, óp.cit., cap. 23. Véase también Bringuier, óp.cit., pp. 108-116, en particular el sabroso recuento de la última visita de Deligne a Grothendieck (20-22 Octubre 1984), y de sus discusiones (Deligne tranquilo, acuático; Grothendieck incandescente, volcánico) alrededor de las muchas páginas del manuscrito en curso, recriminatorias sobre Deligne.

Resumen mínimo.

A lo largo de toda esta monografía, hemos hecho múltiples referencias a *Cosechas y siembras*, aprovechando comentarios de Grothendieck sobre diversos aspectos de la obra realizada hasta 1983 (seguir abajo, en nuestra *Bibliografía – Obras de Grothendieck*, las referencias de páginas asociadas a la entrada [**1983-86**]). En lo que sigue de este resumen mínimo, haremos referencia únicamente a tres temas centrales de *Récoltes et semailles* [**1983-86**]: (A) reflexiones en el *Prefacio* alrededor de los *esquemas* y los *topos*, dos de las construcciones fundamentales de la obra grothendieckiana, (B) reflexiones en el *Prefacio* alrededor de la *creatividad* matemática, (C) nuestras consideraciones alrededor de la *multiplicidad polisémica* del texto, reflejada en la *forma* misma de la obra (no lineal, estratificada, multitemporal). Por otro lado, en nuestra *Descripción más extensa*, abajo, seguiremos un recuento ordenado de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], y en nuestra *Sección 14.3* estudiaremos en detalle el extraordinario apéndice *Les portes sur l'univers*, donde Grothendieck pone su arsenal matemático (formas geométricas, topológicas y homológicas) al servicio del entendimiento de diversos entrelazamientos *yin-yang* en la creatividad humana, en general, y en la creatividad matemática, en particular.

(A). La clave de bóveda de la obra de Grothendieck se encuentra en la noción de *haz*: "la noción de haz ha sido uno de los instrumentos esenciales a través de toda mi obra de geómetra (...) y me ha otorgado la llave para la ampliación de la noción de espacio, hacia los topos" [**1983-86**, P.13]. Con los haces, se abre también el mundo de los esquemas y se obtienen las herramientas cohomológicas esenciales para estudiar el *espacio-número*: "una gran parte de mi obra de geómetra consistió en despejar, y desarrollar más o menos lejos, las teorías cohomológicas que faltaban para los espacios y las variedades de todo tipo" [**1983-86**, P.35]. En efecto, a partir de los haces se desarrollan *(i)* una "*geometría esquemática*" muy amplia, que cubre un "abanico infinito de variedades", y cuya "sencillez" es "simple (...) humilde (...) idiota" [**1983-86**, P.32], y *(ii)* una "*geometría aritmética*" ligada al espacio, revelada por medio de una “superestructura de metros cohomológicos”, que sirve de “cama amplia para el matrimonio del número y la magnitud” [**1983-86**, P.39].

Con ello, se obtiene una profunda “(...) *armonía* (...) una misma sinfonía (...) una misma y vasta visión” [**1983-86**, P.23], que engloba el álgebra y la geometría, el número y la magnitud, lo discreto y lo continuo, los esquemas y los topos. *La musicalidad es plena.* “La cosa crucial aquí, en la óptica de las conjeturas de Weil, es que la nueva noción era lo suficientemente vasta para permitirnos asociar a todo esquema un espacio generalizado, o topos (llamado el topos *étale* del esquema). Algunos invariantes cohomológicos de ese topos (los más sencillos) parecían ofrecer los medios” para ayudar a entender y resolver las conjeturas [**1983-86**, P.41]. El camino de la *invención general* es aquí muy fructífero: asociación de un espacio canónico de magnitudes (topos *étale*) a *todo* entorno de construcciones numéricas (esquema), con la consiguiente *elasticidad suave* que esa asociación otorga al entendimiento de la aritmética (conjeturas de Weil).

(B). *Récoltes et semailles* [**1983-86**] plantea una *dualidad pendular dinámica* en los procesos de la creatividad matemática, donde se contraponen y reintegran *(i)* el *descubrimiento* y *(ii)* la *invención.* En vez de adoptar una filosofía fundamentalista donde se tienda a privilegiar el descubrimiento (suerte de realismo) o la invención (suerte de idealismo), Grothendieck subraya la importancia pragmática de *ambos* procesos: una invención más ligada al *lenguaje* y a la *razón*, y un descubrimiento más ligado a la *visión* y al *corazón* (o, en español, de manera plenamente dual, “co/razón”). Un *haz pendular arquetípico* –en palabras de Grothendieck, “un haz de puntos de vista convergentes sobre un mismo y vasto paisaje” [**1983-86**, P.16], un “ojo que nos hace descubrir y reconocer la unidad en la multiplicidad” [**1983-86**, P.16]– se proyecta así sobre momentos de descubrimiento y momentos de invención.

El descubrimiento se describe mediante una “aprehensión” [**1983-86**, P.27] de lo “desconocido” [**1983-86**, P.30], en momentos de “soledad” [**1983-86**, P.5, P.65]. Se ofrece "ternura (...) amor (...) contacto (...) *yin*" [**1983-86**, P.49-51], para poder estar a la "escucha de la voz de las cosas" [**1983-86**, P.27], y acceder al "alma, soplo" [**1983-86**, P.16], al "aire libre" [**1983-86**, P.13], necesarios para sumergirse en las hondas estructuras de la matemática (descenso a las profundidades tipo *Moby-Dick*). Por otro lado, la invención requiere un "lenguaje capaz de expresión" [**1983-86**, P.27] para captar lo "conocido" [**1983-86**, P.30], y aprovecha la elaboración de una "casa" con "muebles" [**1983-86**, P.13, P.27], con un "ordenamiento (...) *yang*" [**1983-86**, P.49-51], para que el "traductor" [**1983-86**, P.39] y el "obrero" [**1983-86**, *avant-propos*, p. 3] realicen su "trabajo"[580] [**1983-86**, P.27]. El vidente/oyente (*yin*) y el arquitecto/obrero (*yang*) se complementan así a lo largo y ancho del complejo mundo de la creatividad matemática, espacio estratificado repleto de oposiciones y mediaciones, donde se consigue unificar la multiplicidad gracias a un verdadero *haz superior*, arquetípico[581], en el cual se reintegran perspectivas dispares.

(C). *Récoltes et semailles* [**1983-86**] ofrece una correspondencia muy interesante entre el *fondo* y la *forma* del escrito. La *multiplicidad polisémica* del fondo (estudio de las estratificaciones de la creatividad matemática, comprensión de las fuerzas mayores del pensamiento matemático, descripción de las ideas profundas de una obra, psicoanálisis de los desgarros de una vida, contemplación de remolinos sociológicos en la superficie, recuento de prácticas no muy éticas de la comunidad matemática) *reverbera* en la forma misma de *Cosechas y siembras*. Su *estratificación* (capas de introducciones, cartas, texto principal, apéndices), sus *iteraciones multinivel* (secciones sobre secciones, parágrafos sobre parágrafos, notas sobre notas), su *multitemporalidad* (recuerdos sobre recuerdos, vaivenes

[580] En ese trabajo encarnizado, debe subrayarse la autoevaluación del mismo Grothendieck: "en la historia de las matemáticas creo ser aquel que ha introducido la mayor cantidad [cientos, si no miles] de nociones nuevas" [**1983-86**, P.19].

[581] En *La clef des songes* [**1987**], ese haz superior adquirirá un carácter místico, gracias a una Mano superior que estaría guiando la mano de Grothendieck.

incesantes en un discurrir zigzagueante del tiempo), su *no linealidad*, en general, viven en el ámbito de lo *múltiple*, de lo incesantemente *ramificado*. La *digresión* es parte esencial del *estilo* adoptado[582]. Por otro lado, como veremos en nuestra *Sección 14.3*, el fondo *técnico* de algunas perspectivas grothendieckianas (conexiones, homologías, árboles, hojas, poliedros) se reflejará exactamente en la forma de *Les portes sur l'univers* [**1983-86**, PU].

Descripción más extensa.

En lo que sigue, sintetizaremos algunos de los aspectos principales de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], y recorreremos rápidamente cada una de sus partes (P, L, 1, 2, 3, 4). El apéndice (PU) será tratado abajo, en nuestra *Sección 14.3*. Las grandes temáticas del escrito pueden condensarse en los ítems siguientes: *(i)* recorrido de las *ideas* principales de la *obra* de Grothendieck, en particular a lo largo de su tarea de geómetra, *(ii)* desglose detallado de algunas circunstancias de su *vida*, en particular cercanías y distanciamientos con sus alumnos, *(iii)* reflexión sobre las diversas formas del *trabajo* matemático, en particular sobre la emergencia de la *creatividad* matemática, *(iv)* análisis descarnado de las *pulsiones* ocultas del conocimiento, en particular de los miedos, vanidades y obstrucciones que ocurren en el tejido subliminal de la conciencia.

[582] La longitud de esas digresiones es sin duda una de las razones por las cuales el texto no fue finalmente publicado en francés (aunque sí en japonés). Resulta curioso encontrar aquí el mismo tipo de obstrucción que ocurrió con el *Tôhoku* [**1955-56**], rechazado en Estados Unidos y Francia por su extensión excesiva, pero publicado en el Japón. Grothendieck no aceptó recortar el *Tôhoku*, como solicitaba Eilenberg, ni quería recortar los "excesos" de *Récoltes et semailles*. En buena parte, esos "excesos" (tan típicos también de *EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**]) *caracterizan* a Grothendieck, siempre dispuesto a desarrollar una idea, o una acción, hasta sus últimas consecuencias (burlándose un poco de sí mismo, y de la irrazonable longitud de *Récoltes et semilles*, Grothendieck exclama: "No es realmente mi estilo agarrar al lector [en unas pocas páginas]" [**1983-86**, *avant-propos*, p. 1]). En este orden de ideas, el *desencuentro* con Serre en *Récoltes et semailles* es *doble*: rechazo de Serre al fondo vital de la experiencia psicoanalítica y sociológica de Grothendieck, rechazo a las formas interminables del escrito. El carácter medido de Serre y la elegante concisión de su estilo estaban de hecho a las antípodas del efusivo e incontrolable Grothendieck. Es fascinante observar cómo esos polos opuestos fueron los mejores amigos matemáticos durante casi veinte años.

(P). El *Paseo*, o *Prefacio* [**1983-86**, P.1-65], se abre con una frase típicamente grothendieckiana: "Cuando era niño [*gosse*], me gustaba mucho ir al colegio" [**1983-86**, P.1]. El encanto de la niñez y el deseo de conocimiento, vivos en el más íntimo Grothendieck, golpean de inmediato al lector. Vemos al niño fascinado por la "magia de los números, las palabras, los signos y los sonidos" [**1983-86**, P.1], y constatamos fácilmente la *continuidad* de esa magia a lo largo de toda su vida y obra. Grothendieck nos hace recorrer luego fragmentos de su adolescencia y rememora sus inicios en la vida adulta, cuando, en Mairargues, un pequeño caserío a una decena de kilómetros de Montpellier, sobrevive modestamente con su madre gracias a una beca de la Universidad, cultivos en el jardín y vendimias en los campos [**1983-86**, P.3-4] (otra *continuidad natural* con el ascetismo de los últimos cuarenta años de su vida). La *suavidad* de los recuerdos de esos primeros años [**1983-86**, Sección 2.1, "La magia de las cosas", P.1-5] *acaricia* en un sierto sentido al lector, sabedor por otra parte de las muchas circunstancias difíciles que debió superar el joven. En particular, Grothendieck ofrece una muy positiva evaluación de la circunstancia de *haber estado solo* (años de Montpellier, donde reconstruyó aislado la teoría de Lebesgue) [**1983-86**, Sección 2.2, "La importancia de estar solo", P.5-7], periodo de soledad en el cual se asentaron su fuerza, su convicción y su pasión por las matemáticas.

La *verdad* pasa a ser el tema central de la reflexión[583] [**1983-86**, Sección 2.3, "La aventura interior - o mito y testimonio", P.7-10]. La verdad está ligada a una densa introspección, a un descenso profundo al interior del *alma* misma –a la manera de *Moby-Dick*– para poder registrar "los movimientos superficiales y profundos, groseros o sutiles, que animan la psiquis, esa «alma» que justamente vive la experiencia y que reacciona, que

[583] Una fuerte defensa de esa centralidad aparece en la conferencia de Laurent Lafforgue en el *Séminaire de Lectures Grothendieckiennes* (9 Enero 2018, http://savoirs.ens.fr/expose.php?id=3259), donde habla de una "cualidad de verdad" que se superpone a los axiomas matemáticos mismos. En un cierto sentido, esto corresponde a imaginar una serie de *arquetipos* (verdades) que gobiernan los *tipos* (axiomas), y que, *gracias a su misma abstracción*, permiten construir tránsitos suaves, correlaciones naturales y reticulados universales.

se fija o que se expande, que se pliega o que aprende..." [**1983-86**, P.9]. Los pliegues y despliegues del entendimiento –a la manera de un haz– gobiernan los múltiples estratos de la psiquis, y es allí donde un recuento *sincero y verdadero* de la experiencia vital *particular* de Grothendieck adquiere un valor *general* para la comprensión del mundo matemático. Así como *La invención matemática*[584] de Poincaré se acerca a un valor universal en el instante acotado en que el matemático recuerda la aparición de la geometría no euclideana en el corazón de las funciones automorfas, *Récoltes et semailles* alcanza también ese registro *universal* gracias a las recapitulaciones *concretas* de la obra particular de Grothendieck.

Un listado de los momentos más sobresalientes de esa obra resulta entonces muy instructivo [**1983-86**, Sección 2.8, "La visión – o doce temas para una armonía", P.20-21]:

> He aquí, para el lector matemático curioso, la lista de las doce ideas maestras, o de los "temas maestros" de mi obra (en orden cronológico de aparición):
>
> 1. Productos tensoriales topológicos y espacios nucleares.
> 2. Dualidad "continua" y "discreta" (categorías derivadas, "seis operaciones").
> 3. Yoga Riemann-Roch-Grothendieck (K-teoría, relación con la teoría de intersecciones).
> 4. Esquemas.
> 5. Topos.
> 6. Cohomología *étale* y l-ádica.
> 7. Motivos y grupo de Galois motívico ($\otimes$-categorías de Grothendieck).
> 8. Cristales y cohomología cristalina, yoga "coeficientes de De Rham", "coeficiente de Hodge"...
> 9. "Álgebra topológica": ∞-campos, derivadores; formalismo cohomológico de los topos, como inspiración para una nueva álgebra homotópica.
> 10. Topología moderada.
> 11. Yoga de geometría algebraica anabeliana, teoría de Galois-Teichmüller.
> 12. Punto de vista "esquemático" o "aritmético" para los poliedros regulares y las configuraciones regulares en todos los géneros.

[584] H. Poincaré. *L'invention mathématique*. Paris: Institut Général Psychologique, 1908. Momento de invención al subir al ómnibus, p. 8.

La riqueza de la lista es a todas luces extraordinaria, y exhibe la claridad de Grothendieck en la autoevaluación de sus trabajos. Lejos de mostrar a un matemático "desquiciado", "loco" o que hubiese "perdido las luces"[585], la visión general de la obra *despeja* con nitidez los diversos contrapuntos de una profunda *armonía*: "esos doce grandes temas de mi obra no se encuentran para nada aislados los unos de los otros, hacen parte a mis ojos de una *unidad* de espíritu y de propósito (...) ligados entre ellos por innumerables lazos, a la vez delicados y evidentes, como se entrelazan entre ellos los diversos temas, claramente reconocibles, que se despliegan y se pliegan en un mismo y vasto contrapunto – en una armonía que los conjuga (...) armonía aún no vislumbrada pero que seguramente «existía» ya en alguna parte del regazo obscuro de las cosas que debían nacer" [**1983-86**, P.23].

Grothendieck describe las *dos vertientes fundamentales*, la del arquitecto y la del explorador, que le han permitido elaborar su obra [**1983-86**, P.50-51]:

> Estas dos pulsiones, que me parecían como "de naturaleza diferente", están finalmente más cerca de lo que hubiese pensado (...) La diferencia es de tonalidad, de dosificación, no de naturaleza. Cuando "construyo casas", lo "conocido" es lo que domina, y cuando "exploro", es lo desconocido. Estos dos "modos" de descubrimiento, o, mejor dicho, estos dos aspectos de un mismo proceso o de un mismo trabajo, están indisolublemente ligados. Son esenciales ambos, y complementarios. En mi trabajo, discierno un movimiento constante de vaivén entre estos dos modos de aproximación, o, más bien, entre los momentos (o los periodos) donde uno predomina, y aquellos donde predomina el otro. Pero es claro también que, en cada momento, cada modo está presente. Cuando construyo, arreglo, o desbloqueo, limpio, ordeno, es el "modo" o la "vertiente" *yang*, o masculina del trabajo, la que da el tono. Cuando exploro a tientas lo esquivo, lo informe, lo que no tiene nombre, soy la vertiente *yin*, o "femenina", de mi ser.
>
> No se trata para mí de querer minimizar o renegar ninguna vertiente de mi naturaleza, esenciales ambas – lo "masculino" que construya y que genera, y lo "femenino" que concibe

[585] La comunidad trató muy mal a Grothendieck en el momento de la distribución de *Récoltes et semailles* [**1983-86**]. No obstante, el autor que se irá lanza en ristre contra algunos de sus alumnos y colegas es el *mismo autor* de una perfectamente ajustada ponderación de su obra. La *verdad hasta sus últimas consecuencias* hiere sin duda, pero no deja de ser verdadera. Quien la profesa no deja tampoco de estar perfectamente cuerdo.

> y que acoge las lentas y obscuras gestaciones. "Soy" lo uno y lo otro – *yang* y *yin*, "hombre" y "mujer"[586]. Pero sé también que la esencia más delicada, la más suelta [*déliée*, libre, suave] en los procesos creadores, se encuentra del lado de la vertiente *yin*, "femenina" – la vertiente humilde, obscura, y a menudo de pobre apariencia.

(L). Una vez terminadas las partes 1-4 de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], Grothendieck escribe una larga "carta"[587] de introducción [**1983-86**, L.1-56], donde explica el surgimiento, las razones de ser y los grandes lineamientos del escrito. Un excelente resumen de *Récoltes et semailles* aparece al inicio de la carta [**1983-86**, L.2]:

> Hay muchas cosas en *Récoltes et semailles* y todos verán sin duda muchas cosas diferentes: un *viaje* al descubrimiento de un pasado; una *meditación* sobre la existencia; un *tablero de costumbres* de un medio y una época (o el tablero del desliz insidioso e implacable de una época a otra...); una *investigación* (casi policial en algunos momentos, y en otros bordeando la novela de capa y espada en los bajos fondos de la megalópolis matemática...); una vasta *divagación matemática* (que despistará a más de uno...); un tratado práctico de psicoanálisis aplicado (o, también, un libro de "*psicoanálisis-ficción*"); un panegírico del *conocimiento de sí*; "*Mis confesiones*"; un *diario* íntimo; una psicología del *descubrimiento* y de la *creación*; una *requisitoria* (despiadada, como se debe...), incluso un *ajuste de cuentas* con el "bello mundo matemático" (y sin hacer regalos...)

La multiplicidad de las eventuales lecturas confirma la riqueza del escrito. Por un lado, análisis, meditación, investigación, divagación, descubrimiento –explorados al *estilo Grothendieck*, es decir, con tenacidad y extremo detalle– son sus aportes invaluables para el entendimiento del pensamiento matemático. Por otro lado, viaje, diario, tablero de costumbres, requisitoria –exacerbados con el mismo detalle– resultan de sumo interés para el entendimiento de su personalidad y de los entornos históricos y sociológicos donde esta

586 Para algunos desarrollos conceptuales profundos de esta dualidad, orientados por técnicas matemáticas precisas, ver nuestra *Sección 14.3* abajo.

587 El destinatario no aparece explícitamente nombrado, pero se trata de Pierre Deligne: "me dirijo a tí más a que a los demás (...) Es un don que te hago, y al escribir tuve sumo cuidado de dar (en cada momento) lo mejor que tenía por ofrecer" [**1983-86**, L.1].

se inscribe[588]. Se trata así, por un lado, del mayor documento nunca escrito sobre la creatividad matemática, y, por otro lado, del registro fascinante de las pasiones y dolores de uno de los matemáticos mayores de la historia[589].

Desde el punto de vista matemático, Grothendieck vuelve sobre su "vasta *visión unificadora*, encarnada en algunas *ideas-fuerza* muy simples": la visión de una "«geometría aritmética», síntesis de la topología, de la geometría (algebraica y analítica) y de la aritmética, de la cual encontré un primer embrión en las conjeturas de Weil" [**1983-86**, L.6]. Grothendieck observa con sorpresa que lo que para él es tan "simple" y "evidente", no lo ha sido para la comunidad, y "veinte años después"[590] ha sido "ignorado por todos" [**1983-86**, L.6]. El *desencanto* se acentúa cuando señala que "los talleres han sido desertados" y los "«obreros» han partido, llevándose bajo el brazo los pequeños trastos que podían servirles" [**1983-86**, L.7]. Así, la visión y las fuerzas simples se olvidan, el gran edificio colectivo se deja caer, y se aprovechan sus ruinas para el beneficio desenfadado de cada quien. Hay que decir que la percepción de Grothendieck no parece equivocada, ni puede reducirse a la supuesta amargura de un "loco", sino que manifiesta más bien la tristeza de un padre abandonado, cosa que sí sucedió[591]. De hecho, *Récoltes et semailles* refleja con incisividad tanto la pasión del descubrimiento, como la melancolía del olvido.

---

588 En la carta, no faltan el *humor* y la distancia. Una vez Grothendieck se ha adentrado en el "psicoanálisis-ficción" más hondo, resurge luego de las profundidades y se burla un poco de sí mismo, de los "bajos fondos", del "ajuste de cuentas" y de las "despiadadas" estocadas esgrimidas en su "novela de capa y espada". Las *tajantes y dramáticas* exclamaciones proferidas en la recepción de *Récoltes et semailles* se caen por tanto de por sí solas.

589 *Récoltes et semailles* [**1983-86**] merece entonces, ojalá en un próximo futuro, un gran estudio (Tesis Doctoral) dedicado al manuscrito. Como mencionamos, el artículo Herreman, óp.cit., es un buen comienzo, pero falta aún muchísimo por aprovechar –analizar, tipificar, plegar, sintetizar, arquetipificar, desplegar– en una labor que estudie, con el mismo detalle, los detalles de Grothendieck.

590 La referencia implícita a *Veinte años después* de Alexandre Dumas, "novela de capa y espada" por excelencia, no es sin duda casual.

591 Un cierto extremismo vital en Grothendieck es, por supuesto, uno de los ingredientes complejos de la situación. Pero la "bella" comunidad matemática hizo realmente muy poco por acercarse al Grothendieck del periodo 1973-1991 ¡dieciocho largos años!, cuando aún era posible hacerlo.

Las imágenes centrales que van emergiendo en la carta tienen que ver con el *abandono* que Grothendieck siente: "desmembramiento de un cuerpo" [**1983-86**, L.7], "canteras desiertas" [**1983-86**, L.7], "desaparición de lo esencial" [**1983-86**, L.8], "silencio" [**1983-86**, L.8], "desprecio" [**1983-86**, L.10], "viento de escarnio" [**1983-86**, L.10], "golpe en plena cara [*pleine gueule*]", "pillaje, masacre" [**1983-86**, L.24], y, sobre todo, un prematuro y doloroso "*entierro*"[592] [**1983-86**, L.8-*passim*]. Pasando así a una "*vertiente de sombra*" [**1983-86**, L.16], Grothendieck se encuentra propenso a percibir con mayor finura el aspecto *yin* de su trabajo: "esa parte «creadora entre todas» de la cual vengo de hablar en el trabajo de descubrimiento" y que "*no aparece prácticamente nunca* en los textos o discursos asociados a un tal trabajo" [**1983-86**, L.18]. El acceso a lo que es "*inspiración, sueño, visión*" [**1983-86**, L.20] se convierte entonces en parte fundamental de la tarea de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], acceso a lo imaginario, lo oculto y lo onírico luego expandido en *La clef des songes* [**1987**].

La carta provee una mirada sobre los puntos "culminantes" y "sensibles" en la escritura de *Récoltes et semailles* [**1983-86**, L.23]:

> (...) existieron cuatro grandes etapas nítidamente marcadas o cuatro "soplos" – como los soplos de una respiración, o como las olas sucesivas de un tren de olas, surgido, no sabría decir cómo, de esas vastas masas mudas, inmóviles y movientes, sin límites y sin nombre, de un mar desconocido y sin fondo que soy "yo", o, más bien, de un mar infinitamente más vasto y más profundo que ese "yo" que cobija y que nutre. Esos "soplos" o esas "olas" se materializaron en las cuatro partes de *Récoltes et semailles* escritas hasta el momento. Cada ola llegó sin que yo la llamara, ni la previera en lo más mínimo, y en ningún momento habría sabido decir dónde me llevaría, ni cuándo terminaría.

La metodología de la "marea subiente" se apropia aquí de la reflexión filosófica, así como lo había hecho con la invención técnica (categorías cubrientes de una estructura, topos

[592] Como puede leerse en los subtítulos de las partes 2-4 (ver arriba, p. 388), el "entierro" es la principal metáfora recurrente de *Récoltes et semailles* [**1983-86**]. Un diálogo natural se establece así con *La amortajada* (1938) de María Luisa Bombal y con *Pedro Páramo* (1955) de Juan Rulfo. Para estos y otros enlaces con la literatura latinoamericana, ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

cubrientes de un espacio). La imagen de las *olas sin rumbo y sin fin* es imprescindible para entender una "*estructura*" que resulta ser a la vez "acto y movimiento" [**1983-86**, L.24], y que *necesita* ese explayarse ilimitado que tanto se le ha criticado a Grothendieck. De nuevo, como sucede a menudo con su matemática, un desconocimiento y una falta de lectura precisa de sus reflexiones hacen que estas sean caricaturizadas y subvaloradas. Por el contrario, para acercarse naturalmente a Grothendieck, hay que *dejarse llevar por las mareas* de su inventividad.

En medio de sus reflexiones sobre la emergencia de *Récoltes et semailles*, Grothendieck apunta a una "*voluntad colectiva*, de una coherencia sin fallas", que habría dado lugar a su *entierro*; los actores no son menores, y Grothendieck nombra a Serre como la "*encarnación*" de esa voluntad colectiva y a Deligne como el "*instrumento* designado" en esa tarea de ocultamiento de su obra[593] [**1983-86**, L.26]. Los desarrollos de las acusaciones, a lo largo de *Récoltes et semailles*, son meticulosos, interminables y, sin duda, agotadores. El *exceso* grothendieckiano en ese "ajuste de cuentas" ha sido calificado de innecesario y paranoico. Existen repeticiones innecesarias, es cierto, pero no obstante, más que formas de paranoia[594], encontramos formas de expresión perfectamente estables mentalmente[595], eso así, en un autor fuertemente decepcionado y desencantado con su época. La *crítica* de ese entorno histórico y sociológico es fundamental para Grothendieck, y concuerda tanto con su labor ecologista, como con el radical ascetismo de su vida cotidiana y con el lugar imprescindible que ha adquirido la meditación en su equilibrio espiritual.

593 Grothendieck reconoce en Serre "una fuente de inspiración en mi obra a lo largo de un periodo crucial de gestación de una visión" y en Deligne al "más dotado de mis alumnos" [**1983-86**, L.28]. El dolor del "entierro" (convertido en "defunción en buena forma") es entonces más penetrante, puesto que este "no pudo hacerse sino con el concurso conjugado de ambos, del ex-hermano mayor y del ex-discípulo" [**1983-86**, L.28].

594 Según el DRAE, "paranoia" significa "perturbación mental fijada en una idea o en un orden de ideas".

595 Los recuerdos acotados son *precisos*, las visiones sobre su obra son *profundas*, los comentarios sobre la creatividad son *iluminadores*, las reflexiones sobre la existencia son *conmovedoras*: no hay ninguna traza de "perturbación mental" en el escrito.

Un equilibrio general entre el *yin* y el *yang* da lugar a un vaivén constitutivo entre la espontaneidad y el rigor: "espontaneidad y rigor son las dos vertientes «sombra» y «luz» de una misma cualidad indivisa (...) que puede intentar evocarse por una expresión como «cualidad de verdad»" [**1983-86**, L.41]. La *verdad* invoca entonces los ámbitos de *penumbra* donde se conjugan la sombra y la luz, lo negativo y lo positivo. En el borde, en lo intermedio, en los márgenes, dialogan el "rigor" (vía niveles sucesivos en la precisión del lenguaje) y la "espontaneidad" (vía una percepción de las "capas profundas del ser") [**1983-86**, L.42]. En la escritura formal de ese proceso, las secciones, las notas, los reenvíos, las iteraciones, los "regresos hacia atrás" [**1983-86**, L.42], son los instrumentos que consiguen ofrecer una sensación correcta de la "cualidad de verdad" presente en los zigzags no lineales del pensamiento.

(1). La *Primera parte* de *Récoltes et semailles* [**1983-86**, 1.1-171] se divide en nueve secciones: I. *Trabajo y descubrimiento*, II. *El sueño y el Soñador*, III. *Nacimiento del temor*, IV. *El doble rostro*, V. *Maestro y alumnos*, VI. *Cosechas*, VII. *El niño se divierte*, VIII. *La aventura solitaria*, (IX). *Notas* [**1983-86**, 1.*iii-iv*]. Los títulos son indicativos de los temas centrales del manuscrito: el entorno creativo (mirada infantil, descubrimiento, juego, sueño), el entorno sociológico (trabajo, temor, doblez, alumnos), el etorno místico (Soñador, soledad). Grothendieck enfatiza la importancia del *sueño*: "Miseria de un mundo en el cual el sueño es despreciado (...) ¿Existe una obra de envergadura en la vida de una persona o de un pueblo, que no haya nacido de un sueño y no haya sido alimentada por el sueño antes de florecer en plena luz?" [**1983-86**, 1.10], y, para ello, convoca al *Soñador*[596]: "Escuchar al Soñador en nosotros, es comunicarnos con nosotros mismos, en contra de las obstrucciones potentes que quisieran impedírnoslo a todo precio"[597] [**1983-86**, 1.12].

[596] El estudio minucioso, a la Grothendieck, de esta perspectiva se realiza en *La clef des songes* [**1987**], ver nuestro *Capítulo 15* abajo.

[597] El acceso a un "en sí" (tipo particular), bloqueado por diversas obstrucciones psicológicas, sociológicas y culturales, a través de un ente más alto, "en otro" (Soñador, arquetipo general), reproduce parte de

Dentro de las matemáticas, Grothendieck subraya la potencia del "sueño despierto" de Galois[598] [**1983-86**, 1.15] y declara su "simpatía fraternal" con el joven genio, simpatía llena de "pasión" y "alegría" [**1983-86**, 1.15-16].

Un momento particularmente bello en *Récoltes et semailles* ocurre cuando Grothendieck habla del error y el descubrimiento [**1983-86**, 1.3-4]:

> Cuando alguna cosa me produce curiosidad, matemática u otra, la *interrogo*. La interrogo sin preocuparme si mi pregunta es tal vez estúpida o si va a parecerlo, sin que esté a toda costa detenidamente sopesada. A menudo la pregunta toma la forma de una afirmación – una afirmación que, en verdad, es un lanzamiento de sonda. (...) Puede suceder que los golpes de sonda repetidos converjan hacia una cierta imagen de la situación, saliendo de las brumas con trazos lo suficientemente marcados para generar un comienzo de convicción – pero no es así para nada (...) *El descubrimiento del error es uno de los momentos cruciales, un momento creador entre todos, en todo trabajo de descubrimiento*, ya sea que se trate de un trabajo matemático, o de un trabajo de descubrimiento de sí. Es un momento en el que nuestro conocimiento de la cosa sondeada de repente se renueva. *Temer el error y temer la*

las *técnicas matemáticas mismas* de Grothendieck (estructuras particulares sumergidas en categorías generales), tal como lo hemos explicitado constantemente a lo largo de esta monografía.

598 Más adelante en *Récoltes et semailles*, Grothendieck se sitúa explícitamente en la descendencia de Galois, Riemann y Hilbert [**1983-86**, P.13, P.61, 4.1049], a quienes habría que añadir a Poincaré. De manera precisa,

- *(i)* las referencias centrales a Galois ocurren en [**1983-86**, P.13, P.21, P.29, P.63-64, 1.15-16, 1.72, 1.138-139, 2.206-207, 2.212, 4.790-791, 4.825, 4.921, 4.1211-1213] y se refieren sobre todo a los grupos de Galois, el yoga Galois-Teichmüller, la visión geométrica de Galois, el grupo de Galois motívico;
- *(ii)* las referencias centrales a Riemann ocurren en [**1983-86**, P.13, P.23, P.58, 1.32-33, 2.175-176, 2.186, 2.227, 2.275, 2.362-367, 3.447-448, 3.600, 4.855, 4.959-963, 4.1132] y se refieren sobre todo al yoga Riemann-Roch-Grothendieck, la dualidad discreto/continuo, la correspondencia Riemann-Hilbert, la obra general de Riemann, la hipótesis de Riemann;
- *(iii)* las referencias centrales a Hilbert ocurren en [**1983-86**, P.13, P.63, 2.175-176, 4.959-963] y se refieren sobre todo al estilo Hilbert-Bourbaki y la correspondencia Riemann-Hilbert;
- *(iv)* las referencias centrales a Poincaré ocurren en [**1983-86**, *Introduction* p. XVII, 2.187, 2.191, 2.242, 2.275, 2.324, 2.356, 4.791, 4.912-915, 4.935, 4.1160-1166] y se refieren sobre todo a la dualidad de Poincaré, la característica de Euler-Poincaré, la conjetura de Poincaré, los grupoides y las categorías de Galois-Poincaré-Grothendieck.

La presencia de los *cuatro grandes Maestros* del siglo XIX e inicios del XX es permanente en la obra de Grothendieck, lo que constituye *otro elemento de continuidad más*, histórico y conceptual, en sus trabajos.

verdad es lo mismo. Aquel que teme equivocarse es impotente para descubrir.

La acción de la sonda (*yin*), ligada a errores y panoramas vagos, revelatorios de la existencia de estructuras profundas, se ajusta posteriormente mediante un persistente trabajo (*yang*) de refinamiento de los ejemplos, hipótesis, definiciones y teoremas. La *suave* y *plástica* posibilidad del error se conjuga así con la rígida y precisa necesidad de la prueba. De hecho, en los tránsitos de lo posible, lo actual y lo necesario yace una de las fortalezas específicas del pensamiento matemático.

Las primeras reflexiones sobre la *comunidad matemática* giran alrededor de sus antiguos maestros y compañeros en Bourbaki: *(i)* un recuerdo emotivo de Claude Chevalley, del conocimiento seguro de sí mismo y de sus convicciones, de su capacidad de "*ver* una cosa, de manera simple y real" [**1983-86**, 1.23-26]; *(ii)* un recuerdo más frío de André Weil, quien le sugiere ir a Nancy para su doctorado [**1983-86**, 1.27], con quien tuvo "una o dos veces riñas pasajeras" [**1983-86**, 1.31] y cuyo ascendiente sobre Bourbaki le impresiona [**1983-86**, 1.31]; *(iii)* comentarios sobre la energía de Dieudonné, la ideología del mérito y el síndrome de superioridad que se sentía en todo el grupo [**1983-86**, 1.31]. Grothendieck critica y se autocritica por haber fomentado esa meritocracia, que genera temor en los menos dotados [**1983-86**, 1.26-33]. En realidad, afirma que "no he sido extranjero a ese viento, por mi connivencia con el desprecio y el temor (...) tanto en mi vida profesional, como en mi vida familiar. En una y otra coseché lo que había sembrado (...) Y no hay ni amargura, ni resignación, ni sentimiento de lástima, al hablar de las semillas y la cosecha. Pues he aprendido que aún en la cosecha amarga, hay una carne substancial que aún nos nutre" [**1983-86**, 1.36].

Sus semillas como maestro quedan explícitamente registradas en el listado de los alumnos que hicieron con él una tesis de doctorado de estado: "Los alumnos del primer periodo, P. Berthelot, M. Demazure, J. Giraud, Mme. M. Hakim, Mme. Hoàng Xuân Sính,

L. Illusie, P. Jouanolou, M. Raynaud, Mme. M. Raynaud, N. Saavedra, J.L. Verdier" y "desde 1970 otro alumno más, Yves Ladegaillerie"[599] [**1983-86**, 1.149]. Es alto su aprecio por los esposos Raynaud y por "Mme. Sính", laborando independientemente en condiciones difíciles. Por otro lado, considera a Pierre Deligne y Carlos Contou-Carrère como sus alumnos, aunque solo siguiera de lejos sus trabajos (ambos aparecerán al final también como tesistas de Grothendieck, en 1972 y 1983)[600] [**1983-86**, 1.150-151]. Sostiene que "las relaciones con mis alumnos, así como la relación con mi propio trabajo, era una fuente de satisfacción y de alegría, uno de los fundamentos tangibles e irrecusables de un sentimiento de armonía en mi vida, y que continuaba a darle un sentido, mientras que una insidiosa destrucción asolaba mi vida familiar" [**1983-86**, 1.63]. El giro de 1970 empieza entonces a producir toda una serie de antagonismos [**1983-86**, 1.66-71], debidos a una dolorosa falta de ética en la comunidad matemática [**1983-86**, 1.77-79].

Adentrándose en la búsqueda de un conocimiento de sí, Grothendieck expresa, de manera sorprendente en una reflexión matemática, lo que han sido sus "tres grandes pasiones (...) tres vías que tomó la pulsión del conocimiento en mí, entre una infinidad de vías que se ofrecen en nuestro mundo infinito" [**1983-86**, 1.87]: *(i)* "mi pasión por las matemáticas" [**1983-86**, 1.87], *(ii)* "la búsqueda de la mujer" y "la pulsión del sexo" [**1983-86**, 1.87-88], *(iii)* la pasión del conocimiento de sí y de la meditación [**1983-86**, 1.89-90]. Al sumergirse en esa tercera vía, Grothendieck siente que "el fuego ya se quemó a saciedad" y que "un hambre que parecía inextinguible se encontró satisfecha" [**1983-86**, 1.90]. Emerge entonces un "campo libre para el canto y el contra-canto" de las pasiones de la juventud y de la madurez [**1983-86**, 1.90], abierto a la "maravilla" [**1983-86**, 1.95], la "renovación" [**1983-86**, 1.98] y la mirada fresca de la "niñez" [**1983-86**, 1.110].

---

599 El humor y la ironía están siempre presentes, y Grothendieck denomina su nota a pie de página "Jesús y los doce apóstoles" [**1983-86**, 1.149].

600 El *Mathematics Genealogy Project* lista por su parte a 18 alumnos de doctorado: 7 en el periodo "de gloria" 1961-1969, 9 en el periodo "oscuro" 1971-1976 (!), 2 en el periodo 1980-1983.

(2). La *Segunda parte* de *Récoltes et semailles* [**1983-86**, 2.172-420] se divide en diez secciones: I. *El alumno póstumo*, II. *Mis huérfanos*, III. *La moda – o la vida de los hombres ilustres*, IV. *Los motivos (entierro de un nacimiento)*, V. *Mi amigo Pierre*, VI. *El acuerdo unánime – o el regreso de las cosas*, VII. *El coloquio – o haces de Mebkhout y perversidad*, VIII. *El alumno – alias el Patrón*, IX. *Mis alumnos*, X. *El furgón fúnebre* [**1983-86**, 2.*iii-iv*]. La requisitoria y el carácter sombrío se adueñan de la pluma del autor. En realidad, el término "pluma" no resulta inconveniente aquí: en el "ajuste de cuentas" es donde Grothendieck –en una mezcla juguetona de novela gótica y de humor negro– moldea mejor el lenguaje y produce sus metáforas más fuertes, alrededor de los "huérfanos", las "modas", la "masacre", el "entierro", las "obsequias", la "tumba", la "ultra-tumba", la "iniquidad", la "perversidad", el "despojo", el "furgón fúnebre"[601] [**1983-86**, 2.*iii-iv*]. De hecho, las tres partes siguientes (2-4) de *Récoltes et semailles* se acomunan bajo el título *El entierro I, II, III*, y se siente a un *Grothendieck literariamente liberado*, explayándose sin límites y desmenuzando a ultranza las "vertientes obscuras" de sí mismo y de la comunidad matemática.

La dedicatoria de la *Segunda parte* empieza siendo bastante graciosa, con tinturas agridulces muy grothendieckianas: "A aquellos que fueron mis amigos / tanto a los pocos que lo siguieron siendo / como a aquellos numerosos que hicieron coro en mis Obsequias. A la memoria de un memorable Coloquio... / y a la Congregación entera..." [**1983-86**, 2.*ii*]. La visión de una mayoría de matemáticos congregándose en sus exequias convoca de hecho una multitud de imágenes satíricas, que se desarrollarán a saciedad en el muy extenso *Entierro* (249 + 354 + 478 pp.). Grothendieck describe algunas de las ideas que quedaron "huérfanas" en el momento de su "defunción" [**1983-86**, 2.177]. "Se trata ante

[601] Los temas son propios del Romanticismo y convocan tanto las novelas "de capa y espada", como las novelas dramáticas de la época. La cercanía con Víctor Hugo (*Los miserables*, 1862) emerge así en un nuevo ámbito, más allá de las contemplaciones del mar y de la comunión encontrada alrededor del "mar *étale*". Ver arriba, pp. 175, 239.

todo de cinco nociones clave estrechamente ligadas" [**1983-86**, 2.177]: *(i)* las *categorías derivadas* en el álgebra homológica y su uso para *(ii)* el *formalismo de las seis operaciones* ($\overset{L}{\otimes}, Lf^*, Rf_!, RHom, Rf_*, Lf^!$) –que engloba tanto coeficientes discretos, como coeficientes continuos– en la cohomología de los espacios más diversos: algebraicos, analíticos, topológicos, homotópicos [**1983-86**, 2.177]; *(iii)* los *esquemas* y *(iv)* los *topos* [**1983-86**, 2.180], parte de una "riqueza ignorada" y una "síntesis rechazada" [**1983-86**, 2.181]; las *estructuras aritméticas* insospechadas en grupos de Galois profinitos asociados a invariantes homotópicos [**1983-86**, 2.182], y, emergiendo de esa geometría aritmética, *(v)* los *motivos*, la "noción que me llega al corazón, más que cualquier otra"[602] [**1983-86**, 2.182].

A partir de lo anterior, Grothendieck subraya que "una motivación principal y un Leitmotiv constante en mis trabajos, a lo largo de los quince años de 1955 a 1970, fue la cohomología de las variedades algebraicas" [**1983-86**, 2.192]. Se trata de un tema que retoma Deligne y cuya apropiación produce un "cierto asombro" en su maestro [**1983-86**, 2.192]. En realidad, la razón matemática profunda del distanciamiento entre Grothendieck y Deligne se debe a que la prueba de (la tercera parte de) las conjeturas de Weil, por parte de Deligne[603], resulta ser *independiente del programa de Grothendieck para demostrar las conjeturas estándar* [**1983-86**, 2.192]. Ocurre en efecto un *artificio técnico* alejado del *camino natural* de las conjeturas estándar (de donde se deducen automáticamente las conjeturas de Weil), que, sumado a una desatención en el reconocimiento de su lugar, altera y "frustra" a Grothendieck [**1983-86**, 2.268-269]. La larga sección "Mi amigo

[602] Un comentario iluminador pone en consonancia los motivos con los *infinitesimales*: "La situación se parece a aquella de los «infinitamente pequeños» en la época heroica del cálculo diferencial e integral (...) Es tan claro ahora para los motivos, como lo era antes para los «infinitamente pequeños», que esas bestias existen, y que se manifiestan en cada paso de la geometría algebraica, por poco que uno se interese en la cohomología de las variedades algebraicas y las familias de tales variedades" [**1983-86**, 2.183].

[603] Grothendieck expresa su admiración: "¡No esperaba menos de él!" [**1983-86**, 2.192].

Pierre" [**1983-86**, 2.223-270] muestra sin embargo toda la riqueza polivalente de sensaciones entre ellos, donde (1) cercanía, amistad, maravilla, se combinan con (2) tristeza y desencanto. En efecto, por un lado, (1) los registros de aprecio son múltiples: "placer cada vez renovado al hablar con quien rápido se convirtió en el confidente de todo lo que me intrigaba, se iluminaba o me encantaba en mis amores con la matemática" [**1983-86**, 2.223], "escucha compartida (...) con una naturalidad perfecta y con la misma fluidez que me había encantado en algunos de mis mayores, como Schwartz y Serre (y, también, con Cartier)" [**1983-86**, 2.223], "fuerza de la infancia, inocencia de los ojos del niño" [**1983-86**, 2.223], "*autonomía interior* y libertad con respecto a los saberes recibidos" [**1983-86**, 2.224], "relación de interlocutores privilegiados (...) continuada por un periodo de cinco años, de 1965 (si mi recuerdo es correcto) a 1969 incluido" [**1983-86**, 2.224]. Pero, por otro lado, (2) las recriminaciones de las acciones de Deligne son severas: "*repudiando*" al maestro [**1983-86**, 2.228], actuando con "un propósito deliberado de desdén" [**1983-86**, 2.229, 2.246], construyendo "seis años de silencio sobre el yoga de los pesos y doce años de silencio (por no decir prohibición) sobre los motivos" [**1983-86**, 2.234], esforzándose en "borrar toda traza de mi influencia" [**1983-86**, 2.236], rechazando ser jurado de tesis y estableciendo un "antagonismo con mis alumnos posteriores a 1970" [**1983-86**, 2.248], publicando el "volumen del pre-entierro $SGA\ \frac{1}{2}$" [**1983-86**, 2.249], rehaciendo "el trabajo de un predecesor, yo mismo, y de un antiguo alumno (Saavedra) (...) algo que en total podía exponerse en veinte o treinta páginas" [**1983-86**, 2.252], reaccionando a un "fenómeno de *saturación* con respecto a la marea de «grothendieckerías», que caía sobre ellos como una suerte de maremoto [*raz de marée*] sin réplica" [**1983-86**, 2.257]. El péndulo de lo positivo y lo negativo se decanta luego hacia una larga requisitoria negativa, en protesta contra el ocultamiento de su obra y el desconocimiento ejercido por la comunidad ("Congregación", "Coloquio Perverso") sobre los trabajos (correspondencia Riemann-Hilbert, "teorema del Buen Dios") de su alumno Mebkhout [**1983-86**, 2.285-*passim*].

Con fuegos pirotécnicos, el *Furgón fúnebre* [**1983-86**, 2.395-420] concluye la *Segunda parte* de *Récoltes et semailles* [**1983-86**]. El *volcán* –frustración, decepción, traición, rabia– da lugar a una docena de imágenes memorables. Cinco subapartados juegan sobre cuatro tipos de *sarcófagos* ("los $\mathcal{D}$-módulos agradecidos", sarcófago ligado a Mebkhout; "los cortes con sierra", ligado a Ladegaillerie; "las jacobianas demasiado relativas", ligado a Contou-Carrère; "los topos sin flores ni coronas", ligado a Leroy) y un *sepulturero* ("la Congregación entera") [**1983-86**, 2.*iv*]. La novela de capa y espada, el folletín decimonónico y la novela gótica se convierten ahora en una historia de horror, donde se convocan imágenes clásicas sobre tumba y ultratumba, comunes desde Poe (*The Black Cat*) hasta Kubrick (*The Shining*). Grothendieck ramifica[604] su diatriba y se expande hacia un verdadero *florecimiento del lenguaje*: "enterrados", "serie negra de cuatro sarcófagos", "co-defuntos", "fatalidad", "reducción al hueso", "motosierra", "humor negro", "torpedeo", "sepulturero", "represalias", "cortejo fúnebre", "ceremonia fúnebre" [**1983-86**, 2.395, 2.396, 2.396, 2.397, 2.400, 2.403, 2.406, 2.406, 2.413, 2.416, 2.419, 2.419]. Una insólita combinación de requisitoria, ironía, melancolía y memoria produce una mezcla única entre autobiografía, síntesis de las ideas matemáticas, crítica metodológica, conceptualización filosófica, pugna sociológica, folletín y panfleto. Sin duda, la *mixtura contaminada y contaminante* de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] horroriza entonces a las miradas analíticas, pero acerca pensamiento y vida de una manera fascinante para las generaciones futuras.

604 Grothendieck se encuentra plenamente consciente de la *forma complicada* del texto: "Esta Procesión adquiere dimensiones inquietantes ¡nunca nadie querrá leer todo esto! Pero si así se alarga, no es, a decir verdad, para el dudoso beneficio de un lector hipotético, sino en primer lugar para mi propio beneficio – de la misma manera como hacía matemáticas. Nunca he lamentado el haberme lanzado en los «últimos complementos», en los cuales me embarco cada vez sin querer. Gracias a los complementos, descubrí muchas cosas que no habría podido aprender de otro modo, si hubiese economizado mi reflexión" [**1983-86**, 2.395]. Las notas sobre notas, las iteraciones, las jerarquías de niveles pueden complicar la lectura, pero enriquecen la multiplicidad de la mirada. El paralelo entre *hacer matemáticas sin parar y hacer reflexiones sin parar* subraya las características del *estilo* grothendieckiano: apasionado, entregado, inagotable. Tanto su acción ecologista (1970-1990), como su retiro definitivo (1991-2014), demuestran también sus convicciones terminantes.

(3). La *Tercera parte* de *Récoltes et semailles* [**1983-86**, 3.421-774] se divide en dos secciones: XI. *El defunto (aún no fallecido...)*, XII. *La Ceremonia Fúnebre*, dividida esta a su vez en dos subsecciones, *El elogio fúnebre* y *La llave del yin y el yang* (sub-subsecciones: 1. "El músculo y la tripa", 2. "Historia de una vida: un ciclo en tres movimientos", 3. "La pareja", 4. "Nuestra Madre, la Muerte", 5. "Rechazo y aceptación", 6. "La matemática *yin* y *yang*", 7. "La inversión del *yin* y el *yang*", 8. "Maestros y Servidor", 9. "La garra en el terciopelo", 10. "La violencia – o los juegos y el aguijón", 11. "El otro Sí-mismo", 12. "Conflicto y descubrimiento – o el enigma del Mal") [**1983-86**, 3.*iii*-*iv*]. En *El defunto (aún no fallecido...)* [**1983-86**, 3.421-446], Grothendieck realiza una serie de comentarios esclarecedores sobre sus *modos de trabajo*. Después de señalar, de nuevo, la complejidad iterativa del escrito[605], afloran reflexiones diversas sobre su camino: *(i)* la dificultad (1945-1955) y la facilidad ("volar" a partir de 1955) de su inventividad matemática – más que un "don", es una unión de pasión y familiaridad [**1983-86**, 3.428-429], *(ii)* el valor de "lanzarse a lo desconocido, en la dirección que un instinto obscuro nos dice que es fecunda" [**1983-86**, 3.431], *(iii)* las exigencias de *intensidad* y *duración* requeridas en el trabajo intelectual [**1983-86**, 3.431], *(iv)* la dualidad entre *superficie* y *profundidad* – que "una *mirada despierta*, una mirada nueva" permite explorar, y "sondear

605 "(...) faltan aún dos o tres notas últimas, más una (...) que ha estallado en tres notas distintas (...)" – "el 10 de junio, un nuevo imprevisto irrumpió en la escritura de *Récoltes et semailles*, rica ya en imprevistos: ¡me enfermé!" [**1983-86**, 3.421]. Dada su "capacidad ilimitada de recuperación" [**1983-86**, 3.422], Grothendieck registra una evidencia que le sorprende: "mi cuerpo estaba agotado y exigía con insistencia, sin que yo le oyera, un descanso completo" [**1983-86**, 3.421-422]. Entre el 10 de junio y el 22 de septiembre (1984), renuncia entonces a "toda actividad intelectual", posiblemente uno de los periodos más extensos de su vida en los que se vio forzado a reposar. Son meses en los que "retoma el conocimiento" con su cuerpo, camina, vuelve a dormir mejor, acentúa el uso de legumbres, reintroduce moderadamente algo de carne en su dieta, realiza actividades corporales, cuida con esmero su jardín, persigue "la danza de una mosca en un rayo de sol", retoma un contacto "humilde" con las "cosas vivas" (plantas, tierra, alimentos, gato) [**1983-86**, 3.423-428]. Este largo episodio demuestra, una vez más, el *sentido común* de Grothendieck, atento al *equilibrio* práctico y concreto de su mente y de su cuerpo, y muy lejano del "loco", "desquiciado" o "desequilibrado" con que le se ha calificado sin conocimiento de causa.

la profundidad detrás de la superficie" [**1983-86**, 3.436], *(v)* las aperturas de sentido que ofrece la escritura [**1983-86**, 3.441-442], *(vi)* el valor imprescindible de una práctica que integra el *amor*, la *fe*, la ingenuidad de la *infancia* [**1983-86**, 3.443-445]:

> Está aquel que se encuentra situado ante lo desconocido, como un niño desnudo ante el mar. Cuando el niño desea conocerlo, entra y lo conoce – ya esté tibio o frío, calmado o agitado. Aquel que se encuentra atraído por una cosa desconocida, y que parte a conocerla, seguramente la conocerá, antes o después. Con o sin redes, encontrará lo verdadero, o, en todo caso, *algo* verdadero. Sus errores, como sus hallazgos, son etapas en su camino, o, por decirlo mejor, en *sus amores* con lo que desea conocer. Sé bien de lo que hablo, pues en mi vida he sido abundantemente (...) ese niño desnudo. (...) Es muy simple (...) basta con abrir los ojos. [**1983-86**, 3.444]

En *El elogio fúnebre* [**1983-86**, 3.447-461], Grothendieck vuelve al tono de la novela negra, y despliega toda suerte de puntadas irónicas mediante imágenes y metáforas condenatorias. El objetivo de la sección es la requisitoria burlesca de un folleto ("elogio fúnebre") publicado por el *IHES* en 1983, a los 25 años de su fundación, en el que las referencias a Grothendieck dejan de lado sus teorías y resultados centrales en (co)homología, K-teoría, Riemann-Roch, esquemas, etc., aunque se aprecie su "gran generalidad natural"[606] [**1983-86**, 3.447-448]. El *lenguaje gótico* explota: "lapidación", "evicción", "masacre" [**1983-86**, 3.450]; "reniego", "bloqueo" [**1983-86**, 3.451]; "defunción", "entierro" [**1983-86**, 3.452]; "vacío"[607] [**1983-86**, 3.453].

---

606 Este es un ejemplo de la *recepción oblicua y sesgada* de su obra, donde se reconoce el interés de lo general, pero no se observa la riqueza de las múltiples regiones concretas de la matemática desbrozadas en detalle por Grothendieck, desde el análisis funcional hasta las encarnaciones en ciernes del álgebra topológica (geometría anabeliana, espacios *moduli*, dibujos de niños), pasando por todas las técnicas tipo GAGA (geometría analítica y geometría algebraica) utilizadas en el álgebra abstracta y la variable compleja, así como por las develaciones del lugar ubicuo de los haces en la práctica matemática.

607 En el folleto en cuestión, que retraza una breve historia del *IHES*, Grothendieck lamenta la ausencia de referencias a Dieudonné, como si no hubiese sido profesor del *IHES* entre 1958 y 1964, y encuentra otro sesgo más en la comunidad matemática, ahora en contra del redactor de los *EGA* [**1959-64**] y de los *Elementos* de Bourbaki [**1983-86**, 3.454-455]. Desde un punto de vista más personal, recuerda en Dieudonné a un "fino músico y fino cocinero" [**1983-86**, 3.455], características que, dice, podrían haber sido incluidas con una "sonrisa" humana en el folleto.

La larga sección *La llave del yin y el yang* [**1983-86**, 3.461-774] constituye uno de los aportes más incisivos[608] de *Récoltes et semailles.* La reflexión empieza calibrando los valores que la comunidad matemática adjudica a la resolución de problemas profundos (por ejemplo, las conjeturas de Weil), donde se aprecia lo “muscular”, lo difícil, lo masculino –*yang*– por encima de lo espiritual, lo bello, lo femenino –*yin*– [**1983-86**, 3.461-465]. A partir de allí, Grothendieck describe un “ciclo en tres movimientos” en su vida: (1) “la inocencia (la unión del *yin* y el *yang*)”, donde recuerda una plenitud indivisa en sus años de infancia [**1983-86**, 3.468-472], (2) “el Superpadre (*yang* entierra *yin*)”, donde reprime sus trazos femeninos en su época de gloria matemática hasta la salida del *IHES* [**1983-86**, 3.472-477], (3) “el reencuentro (el despertar del *yin* 1)” y “la aceptación (el despertar del *yin* 2)”, donde a partir de una revelación[609] renace su “identidad femenina, superpuesta a la identidad viril”, con potentes “pulsiones arquetípicas” en el amor y en el conocimiento [**1983-86**, 3.478-489]. Una atención hacia “el corazón de las cosas, hacia lo más esencial” [**1983-86**, 3.487] gobierna desde entonces sus pesquisas. El corazón, lo esencial, lo profundo, lo invisible, lo oculto, pasan a ser primordiales. Acorde con ello, no sorprende que sus grandes investigaciones matemáticas de los ochenta (conjeturas anabelianas, n-categorías, *stacks* y tipos de homotopía, derivadores *at large*) busquen también formas arquetípicas primordiales (*yin*) que se proyecten sobre la práctica matemática (*yang*).

608 Por otro lado, el apéndice a esa sección –*Les portes sur l'univers*– va aún mucho más allá en el estudio de la dialéctica *yin-yang*. Ver nuestra *Sección 14.3* abajo.

609 “(9 octubre) Me sentí muy contento, al terminar la nota anterior [el Superpadre], hace cuatro días. Me encontré reanudando con una intuición que me había llegado el domingo 17 de octubre de 1976 (hace ocho años, pocos días más o menos) – la intuición del efecto devastador, en mi vida como en la de mi madre, de una «cierta fuerza» en mí. (...) Había descubierto el poder de la meditación (...) y, en la madrugada siguiente a esa noche de meditación, tuve un sueño de una fuerza abrumadora (...) Era como una ola profunda nacida en mí y que de repente caía y en sus vastas aguas me ofrecía el sentido de lo que se me había escapado hasta entonces: encontrar en ese momento un ser muy querido y muy precioso, que había perdido desde mi infancia” [**1983-86**, 3.478-479]. El regreso a una plenitud *yin-yang*, ligada a la infancia, al sueño y a las aguas profundas (comunión con *Moby-Dick*) acompañará a Grothendieck el resto de su vida, es decir ¡durante casi cuarenta años que la “bella” comunidad matemática ha preferido cómodamente borrar!

Grothendieck enfatiza la *complementariedad*, y no el antagonismo, del *yin* y el *yang*[610] [**1983-86**, 3.499]. Más allá de "guerras", "mutilaciones", "conflictos", "divisiones", "fracturas" [**1983-86**, 3.500-502], deben buscarse mediaciones, pegamientos, enlaces creativos entre las polaridades: "*forma-fondo, exterior-interior, periferia-centro*" [**1983-86**, 3.504], "sensibilidad-razón, instinto-reflexión, intuición-lógica, inspiración-método, visión-coherencia, concreto-abstracto, complejo-simple, vago-preciso, sueño-real, indefinido-definido, inexpresado-expresado, informe-formado, infinito-finito, ilimitado-limitado, todo-parte (...) global-local (...) *cuerpo-espíritu*" [**1983-86**, 3.541-542]. Surge entonces la famosa metáfora de la marea subiente [*la mer qui monte*] [**1983-86**, 3.552-554]:

> Tomemos por ejemplo la tarea de probar un teorema hipotético (...) Veo dos aproximaciones extremas para hacerlo. La primera es la del *martillo y el cincel*, cuando el problema planteado se ve como una gran nuez, dura y lisa, de la cual se quiere acceder al interior, a la carne nutriente protegida por la cáscara. El principio es simple: se pone el lado cortante del cincel contra la cáscara, y se golpea fuerte. (...) La segunda aproximación (...) sumerge la nuez en un líquido (...) y se deja correr el tiempo. La cáscara se reblandece a lo largo de las semanas y los meses – y, cuando el tiempo ha pasado, basta una presión de la mano ¡la cáscara se abre como la de un aguacate maduro! (...) El *mar* avanza insensiblemente y sin ruido (...) y rodea la substancia reacia, que se convierte poco a poco en una península, luego una isla, luego un islote, y termina por sumergirse a su vez, como si se hubiese finalmente disuelto en el océano... (...)
>
> El lector que sea tan solo un poco familiar con mis trabajos no tendrá ninguna dificultad en reconocer cuál de los modos de aproximación es "el mío" (...) Es la "aproximación del mar", por inmersión, absorción, disolución (...) evidente (...) natural... Es la aproximación que practico por instinto desde mi juventud, sin haber tenido nunca que aprenderla. (...)
>
> Mi camino natural me llevaba entonces a plantearme mis propias preguntas, más que a querer resolver aquellas que otros se habían planteado. Y es realmente por el descubrimiento sobre todo de preguntas nuevas, de *nociones* nuevas, o aún de *puntos de vista* nuevos, o de nuevos «*mundos*», que mi obra matemática ha resultado ser fecunda.

[610] "Mis primeras reflexiones sobre el doble aspecto «femenino» y «masculino» surgieron de una reflexión sobre mí mismo. Fue a inicios de 1979, en un momento donde ignoraba aún las palabras chinas «yin» y «yang», así como la existencia de una suerte de «filosofía» sutil del juego incesante del *yin* y el *yang*, en la tradición cultural china. Supe de ello hacia fines del mismo año, creo, gracias a mi hija y sobre todo a mi yerno Ahmed, quien empezaba a interesarse por la medicina china" [**1983-86**, 3.498].

El entorno liso de las aguas que disuelven el problema –entorno *yin* grothendieckiano por excelencia, entorno del pensamiento categórico– emerge aquí con toda la fuerza de las alegorías simples. Una vez más, el *mar* produce imágenes memorables y orienta muchas formas *suaves* de la imaginación y de la acción[611]. El *péndulo del yin y el yang* sirve también para caracterizar sintéticamente su relación con Serre[612]: "si en mi aproximación de la matemática no me falta «virilidad» (mientas que la nota de fondo es «femenina»), de la misma manera Serre no falta de «feminidad» en la suya, con la que equilibra su nota de fondo «viril»" [**1983-86**, 3.559]. Los tonos, las gradaciones, las modulaciones, típicas del hacer grothendieckiano, se repiten en su búsqueda de las *aguas medias entre yin y yang*. La unidad detrás de la multiplicidad es esencial [**1983-86**, 3.560]:

> Si hay una "búsqueda" que ha atravesado toda mi vida de matemático, desde los diecisiete años (recién salido del liceo) hasta hoy, una búsqueda incesante que ha marcado toda mi obra (publicada o no publicada) desde sus inicios, es aquella de la *unidad*, a través de la multiplicidad infinita de las cosas matemáticas y de las aproximaciones posibles a esas cosas. Develar, descubrir esa unidad más allá de la diversidad, de una riqueza a menudo desconcertante (sin amputar nada de esa riqueza), reconocer los trazos comunes más allá de las diferencias y las desemejanzas, e ir hasta la raíz de las analogías y las similitudes para descubrir su parentesco profundo – tal ha sido mi pasión, toda mi vida. Las diferencias, expresión de una diversidad ilimitada que nos elude, terminaron por aparecer como las

611 Grothendieck menciona que, si intentase hacer una lista de casos resueltos por las técnicas de la *marea subiente*, esta "sería bastante larga". Luego detalla cuatro situaciones particularmente relevantes: "1. Validez de la fórmula Riemann-Roch-Hirzebruch en característica arbitraria. 2. Estructura del grupo fundamental «primo con la característica» para una curva algebraica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. 3. Racionalidad de las funciones L para esquemas de tipo finito sobre un cuerpo finito (parte de las «conjeturas de Weil», y un paso importante hacia la demostración de esas conjeturas, concluida por Deligne). 4. Reducción semiestable de las variedades abelianas definidas sobre el cuerpo de fracciones de un anillo de valuación discreta" [**1983-86**, 3.555]. Vemos así que la *marea subiente* es especialmente efectiva en problemas de *geometría aritmética*, donde formas continuas en el espacio ayudan a disolver nudos discretos en la aritmética. Este es el caso también de Taniyama-Shimura para disolver Fermat, o de la teoría inter-universal de Mochizuki para intentar disolver la conjetura *a-b-c*. Desde un punto de vista más general, esto corresponde al método de Hilbert de sumergir lo "real" (naturales/enteros) dentro de lo "ideal" (complejos), para enriquecer las perspectivas de la aritmética (*Sobre el infinito*, 1925). Ver Hilbert, óp.cit., pp. 372-373.

612 El elogio de Serre –"detonador", "encantador", "interlocutor privilegiado"– que ya hemos mencionado varias veces en esta monografía, es muy vívido en [**1983-86**, 3.555-558].

> ramas y los ramos, ramificándose al infinito, de un mismo árbol con un vasto ramaje, donde cada rama y cada ramo me muestran el camino hacia un tronco común. Por instinto y por naturaleza, mi camino ha sido el del *agua*, que tiende siempre a *descender*, a lo largo del tronco, hacia las raíces.

De esta manera, la tendencia *yin* a unificar y a encontrar parentescos[613] se superpone sobre una tendencia *yang* a diversificar, multiplicar y distribuir las diferencias. Es aquí donde la teoría de categorías, entendida como el gran *cálculo abstracto diferencial e integral* de nuestra época, adquiere todo su sentido[614]. El Grothendieck unificador, integrador, universalista, metafísico, provee extraordinarias pistas técnicas, matemáticas, filosóficas, místicas, para poder recorrer y *pegar* el espectro inagotable[615] de la invención.

(4). La *Cuarta parte* de *Récoltes et semailles* [**1983-86**, 4.775-1252] continúa la sección XII (*La ceremonia fúnebre*) de la *Tercera parte*. Sus subsecciones se denominan: 3. "Los últimos deberes (o la visita)", 4. "La danza macabra", 5. "Las cuatro operaciones (sobre un cadáver)", 6. "Las canteras desoladas", 7. "Los frutos de la noche", 8. "Descubrimiento de un pasado", 9. "*De Profundis*" [**1983-86**, 4.*iii-v*]. El tono musical sombrío –a la Novalis o a la Liszt ("danza macabra", "frutos de la noche", "*de profundis*")– gobierna el largo ditirambo final del manuscrito. Grothendieck sigue explayándose sin control, ahora bajo una suerte de *aguacero* que se desliza sin límites por el tronco del árbol, descendiendo hacia las raíces profundas de su "entierro". El registro de los días es cada

613 "En mi trabajo, soy tan «yin», tan «mar y movimiento», como se lo puede ser" [**1983-86**, 3.631].

614 Remitimos a nuestra *Parte IV* abajo para diversos desarrollos de esta concepción.

615 Por cuestiones de espacio, renunciamos a seguir describiendo con cuidado lo faltante [**1983-86**, 3.561-774] de la *Tercera parte* de *Récoltes et semailles*. Los temas regresan sobre el Superpadre y las Obsequias, el conocimiento de sí y de sus padres, el misterio y la fe, los ímpetus y los rechazos, las tareas y el trabajo, las afinidades y los choques, la juventud y la madurez, la libertad y la avidez, el conflicto y la comunión, el poder y el miedo. En general, las dialécticas y las inversiones del *yin* y el *yang* se estudian a través de la vida y obra de Grothendieck, conectándolas con los entornos emocionales y profesionales donde se sumerge su trayectoria. Por otro lado, un estudio cuasi-formal, más fino, de las polaridades y las mediaciones *yin-yang* en el conocimiento en general, y en la creatividad matemática en particular, se realiza en *Les portes sur l'univers*. Ver nuestra *Sección 14.3* abajo.

vez más preciso, y observamos paso a paso un diario polimórfico inagotable, repleto de notas, niveles y voces[616] que lamentan el mal manejo ético de la comunidad (y de Deligne, en particular) alrededor de algunos de los temas centrales en "el corazón del corazón" grothendieckiano (la cohomología *étale* y los motivos, en particular). Emerge así una pormenorizada "investigación"[617] [**1983-86**, 4.830], donde parecen acumularse, sin ton ni son, los folios de un infame e interminable caso judicial[618].

Grothendieck explica cómo su "reflexión sobre el tema cohomológico se materializó en cuatro grandes *corrientes*, o «*hijos*», que se entrelazan estrechamente para formar una misma y vasta trama": *(Fil 1)* el formalismo de la *cohomología l-ádica*, completamente controlado en el marco general de la cohomología *étale* bajo el formalismo de dualidad de las "seis operaciones" [**1983-86**, 4.841], *(Fil 2)* el yoga de los *motivos*, "*la* filosofía que permite entrelazar las diferentes cohomologías l-ádicas" [**1983-86**, 4.842], *(Fil 3)* la *cohomología cristalina*[619], que, para variedades lisas, generaliza la cohomología de De Rham [**1983-86**, 4.842-843], *(Fil 4)* los *sitios* y los *topos*, nociones geométricas unificadoras [**1983-86**, 4.844]. Luego de establecer esas *filiaciones*, Grothendieck describe cómo han sido "encubiertas" y "enterradas", siguiendo "cuatro maniobras" [**1983-86**, 4.846] ligadas

616 Esto recuerda las construcciones dialógicas de Dostoievski, en particular *Los demonios* (1872). Véase M. Bajtín. *Problemas de la poética de Dostoievski (1929)*. México: Fondo de Cultura Económica, 1986. Además de la multiplicidad de voces, los fondos anárquicos, los tonos sombríos, los apuntes irónicos acercan naturalmente a *Cosechas y siembras* con *Los demonios*.

617 Las aproximaciones "de capa y espada", "romántica", "gótica", "de terror", se convierten ahora en una novela policial, exploración del "género negro". La *multiformidad* de las requisitorias acentúa su carácter irónico, burlón e irreverente. Por supuesto, la burla es reflexiva y autoincriminatoria, con lo que las exclamaciones melodramáticas de disgusto ante Grothendieck se quedan directamente sin piso.

618 Resulta natural una comparación con el caso del agrimensor K en *El castillo* (1926) de Kafka. El agobio de la requisitoria sin fin en *Cosechas y siembras* no es menor al agobio de las búsquedas sin fin en los círculos elusivos de *El castillo*. Una línea Dostoievski-Kafka-Grothendieck es fácilmente rastreable, como veremos en nuestro *Capítulo 18* abajo.

619 "La terminología se ha consagrado (ahora y desde hace tiempo) por su uso (...) Las dos ideas nuevas (...) que me llevaron a esa teoría son las de *cristal* (de módulos, etc.), ligada a una idea de «crecimiento» vía «espesamientos» (infinitesimales sobre todo) de un esquema de partida, y, por otra parte, la introducción de una estructura de *potencias divididas* en los ideales (...)" [**1983-86**, 4.842-843].

a desprestigiar sistemáticamente el *SGA* [**1960-69**]: *(Man 1) desacreditar* el seminario-madre *SGA4, SGA5* [**1983-86**, 4.847], *(Man 2) sabotear* una redacción de conjunto de las exposiciones orales de Grothendieck en el *SGA5* [**1983-86**, 4.847], *(Man 3) desmantelar* el seminario original *SGA5* – "*masacre* de un espléndido seminario confiado a las manos de mis alumnos" [**1983-86**, 4.848], *(Man 4)* "*hacer estallar la unidad de mi obra*", cortándola por medio de la "inserción violenta" del *SGA4*$\frac{1}{2}$ (Deligne) – "inverosímil impostura de una supuesta *dependencia lógica*", que torna a *SGA5* en un "*cadáver* saqueado y copiosamente pillado" [**1983-86**, 4.848-849].

Grothendieck percibe una larga escalada de once años (1966-1977) donde se produce el ocultamiento de su obra mediante el "aliento tácito" [**1983-86**, 4.855] de su escuela, y subraya tres episodios dicientes en el proceso: *(Epi 1)* apropiación indebida de una conjetura del tipo *Riemann-Roch discreto*, introducida en 1965 en el seminario oral *SGA5*, que aparece luego en la literatura (MacPherson) bajo el "nombre insólito de «conjetura de Deligne-Gothendieck»" [**1983-86**, 4.855], *(Epi 2)* escamoteo de las ideas principales sobre *monodromía en cohomología étale*, desarrolladas en *SGA7* y reescritas bajo la "pluma común Deligne-Katz" en *SGA7.2* [**1983-86**, 4.856-857], *(Epi 3)* publicación del artículo "Clase de homología asociada a un ciclo" (*Astérisque* 36 (1976)), donde Verdier retoma formalismos y *teoremas de dualidad* de las exposiciones orales de *SGA5*, sin que "mi nombre sea pronunciado" [**1983-86**, 4.858-859]. Si, en la comunidad matemática, con cierta sana sabiduría, muchos de estos detalles se pasan por alto, no puede decirse en ningún caso que Grothendieck los fabrique, o que se trate de una mente "loca" o "desquiciada". Por el contrario, la precisión de su requisición es potente, y, aún hoy en día (2018), duele ver cómo su presencia y su talla matemática tienden a ser evadidas con frecuencia por la comunidad. Reduciendo los excesos del tono negro y sarcástico de *Cosechas y siembras*, y recortando su interminable extensión, el acento triste de Grothendieck, desalentado y desencantado, sigue siendo muy revelador treinta y cinco años después.

Después de esto, faltan aún 400 páginas [**1983-86**, 4.859-1252] para concluir la *Cuarta parte* de *Récoltes et semailles*, que resumimos muy brevemente a continuación. La *crítica* de múltiples *procesos degenerativos* recorre todo el texto: los mecanismos de posesión de la información científica y los bloqueos de circulación de esa información [**1983-86**, 4.862]; la "*gran desgracia* del mundo matemático de los años 70, 80" [**1983-86**, 4.866]; la falta de aprecio por un "*verdadero trabajo*" [**1983-86**, 4.883, 4.906-907]; el pobre entendimiento de una creatividad ingenua, ligada a una mirada infantil [**1983-86**, 4.894]; el escamoteo y la apropiación indebida de las ideas de los demás [**1983-86**, 4.912, 4.925, 4.1175]; las prácticas de engaño a los lectores [**1983-86**, 4.919]; la desacreditación de visiones unitarias [**1983-86**, 4.934]; el resecamiento y el endurecimiento instrumental del pensamiento [**1983-86**, 4.970-971, 4.1117]; la muerte de "el fuego y la chispa" [**1983-86**, 4.973]; la degradación de ambientes de respeto [**1983-86**, 4.981, 4.1094]; la desatención de preguntas cruciales [**1983-86**, 4.1045]; la indiferencia general y el pánico de las responsabilidades personales [**1983-86**, 4.1090]; el estrechamiento de una visión amplia del mundo [**1983-86**, 4.1128]; la indecencia de la estafa intelectual [**1983-86**, 4.1139]; la mistificación de la terminología [**1983-86**, 4.1165]; "*la apropiación de la letra de una cosa de la cual se han olvidado el alma y el espíritu*" [**1983-86**, 4.1183]. Como se puede observar, la larga lista de las críticas de Grothendieck a sus alumnos se torna en un verdadero enjuiciamiento de su época, acorde también con su conciencia creciente de la degeneración de la civilización occidental. El *De Profundis* cala hondamente en nuestros huesos. No podemos menos que conmovernos ante la frágil situación de uno de los matemáticos mayores de la historia, cuando le imaginamos en el pequeño caserío de Mormoiron, a luz de una lumbre vacilante, en circunstancias cotidianas de extrema austeridad, mientras lanza un vibrante llamado apocalíptico, cuyo coraje y originalidad pocos han sabido valorar.

14.2 Síntesis conceptual

La *complejidad* de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] refleja en buena medida la complejidad del mundo grothendieckiano en su conjunto: (1) desgloses del pensamiento matemático, en sus luchas eternas entre fondo (*e.g.* espacios, números, estructuras) y forma (*e.g.* cohomologías, motivos, derivadores), (2) reflexiones sobre los modos de acceso a ese pensamiento y, en particular, sobre una entrada primigenia e ingenua a la invención (frescura, suavidad, mirada infantil), (3) consideraciones sobre el método matemático y, en particular, sobre las exigencias de un trabajo constante y perseverante (labores del arquitecto y del obrero), (4) estudio sistemático de las vertientes *yin-yang* en la creatividad, en general, y en la creatividad matemática, en particular, (5) recorrido de la biografía intelectual del autor, de sus pasiones centrales y de sus tareas en pro de movimientos de vida alternativos (ecologismo, austeridad, filosofía oriental), (6) análisis de los entornos históricos y sociológicos en los que se inserta esa biografía, (7) crítica de los procesos degenerativos en los años setenta y ochenta en el mundo occidental, (8) construcciones estilísticas multiespaciales y multitemporales, que reflejan un pensamiento inquisitivo y abierto, atento a las derivas de la contemporaneidad.

La exigencia cotidiana de la práctica matemática se transmuta en el registro incesante de reflexiones sobre esa práctica. El *diario* es imperioso, y vemos cómo Grothendieck escribe páginas y páginas sin parar, a lo largo de las semanas y los meses[620]. Resulta extraordinaria la oportunidad de seguirle en la cotidianeidad (estados del alma y del cuerpo, comidas, enfermedades, trajín del día a día), mientras piensa –*más allá*– sobre toda

620 Cuando observamos que, en el periodo de escritura de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], emergen también *Pursuing stacks* [**1983**] y *Esquisse d'un programme* [**1984**], nos maravilla la indomable energía de Grothendieck, atento a la vez, *pendularmente*, a la invención técnica y a la consideración detenida del método. Estos son actos indicativos de un pensador *en pleno control de sus capacidades*, y con la suficiente claridad para distribuir ordenadamente sus múltiples formas de expresión.

una vida y sobre la sociedad que le ha rodeado. Lo particular y lo general se acomunan, siguiendo la certera expresión de Ortega y Gasset: "yo soy yo y mi circunstancia, y si no la salvo a ella no me salvo yo" (*Meditaciones del Quijote*, 1914). En su *idealismo salvaje*, Grothendieck pretende realmente *salvar* espacios que siente destinados a la destrucción (planeta, comunidad, individuo). Su *compromiso* con el entorno es parte crucial de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], y la extensión del manuscrito no se puede comprender sin tener en cuenta ese factor de *entrega total* del escritor, humanista a ultranza, dispuesto a adentrarse –*como el agua*[621]– en las raíces más profundas de la psiquis.

La re/visión de su obra constituye un aporte invaluable para el conocimiento matemático. No existe otro análisis, tan detallado y exhaustivo, sobre una trayectoria matemática de primera magnitud. Solo el ejercicio de Poincaré en *La invención matemática* (1908)[622] puede asemejarse en parte, en lo que respecta a la altura del matemático y de la obra, aunque resulta notable la diferencia, a favor de *Cosechas y siembras*, en extensión y profundidad. Las explicaciones de Grothendieck sobre sus principales aportes (ver arriba, los "doce temas para una armonía", p. 395) se han convertido en insumos imprescindibles para una *comprensión global* de sus trabajos. Las diversas formas de geometría –funcional, analítica, algebraica, aritmética– en las que incursiona, aunadas a su inversión en los ochenta –álgebra topológica–, proveen una compleja y multivalente red de contrastaciones entre lo continuo y lo discreto, con la cual se ahonda, como nunca antes, en la problemática del *espacio-número*. La detección de *arquetipos* estructurales y formales (desde el grupo de la K-teoría hasta los derivadores, pasando por topos, motivos, n-categorías, etc.) y su distribución a lo largo de los más diversos *tipos* (conjeturas de Weil, conjeturas estándar, conjeturas anabelianas, etc.) iluminan el hacer matemático.

[621] El cuento de Felisberto Hernández, *La casa inundada* (1960), posee fascinantes conexiones con el subconsciente grothendieckiano. Para este y otros contrapuntos con la tradición literaria latinoamericana, ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

[622] Poincaré, óp.cit.

La metáfora de la *marea subiente*, "por inmersión, absorción, disolución" [**1983-86**, 3.553], adquiere un valor técnico fundamental a través de la teoría de categorías, cuando un objeto ("nuez") es sumergido en una adecuada categoría que lo absorbe ("mar"). Este es el caso del teorema inicial central en categorías, el Lema de Yoneda[623], donde ocurre una *doble iteración* de la marea: *(i)* los objetos son sumergidos primero en sus "auras" (funtores representables), *(ii)* las categorías de objetos son sumergidas luego en categorías de prehaces. El resultado provee, para toda categoría pequeña, una extensión *completa* (es decir, con todos los límites) mediante prehaces no representables; estos últimos pueden verse como *phantasmas*[624] que nos acercan a lo invisible. Por otro lado, la marea ocurre también en los topos, construcción esencial de Grothendieck, cuando un espacio topológico (o un sitio) es sumergido en la categoría de *todos* los haces sobre él. Esa categoría resulta ser un topos, donde emerge una "superestructura" potente (completez, exponenciación, clasificador de subobjetos), invisible desde el espacio, o sitio, inicial. En todos los casos, la *marea* devela una suma riqueza matemática *general*, previamente invisible, que puede dar lugar a la resolución de problemas *particulares* muy difíciles[625].

623 Paralelamente a Yoneda (c. 1958), el lema aparece también en *EGA* [**1959-64**, III.1.7].

624 La etimología de *phantasma*, del griego antiguo, convoca la emergencia de "imágenes", "apariciones", "espectros" – es decir, "fantasmas". En ese sentido, la búsqueda de lo *fantasmático* es primordial en Grothendieck, tanto en el *espectro* de un anillo, base de su teoría de esquemas, como en las *apariciones* de los haces sobre un sitio, base de su teoría de topos. En este ámbito, es útil recordar los ingentes esfuerzos de Gödel, al final de su vida, por demostrar una cierta *existencia de los fantasmas* entre nosotros (ver P. Cassou-Noguès. *Les démons de Gödel. Logique et folie.* Paris: Seuil, 2007). Se ha dicho sobre esto que Gödel "enloqueció", de manera similar a como Grothendieck lo habría hecho. Es una fácil escapatoria ante la coherencia de grandes mentes matemáticas que no se reducen únicamente a un conocimiento positivista. Por el contrario, los *umbrales*, las *fronteras*, las *penumbras* –en matemáticas, suerte de *mixturas a la Lautman*, transitando entre el más y el menos– son el *vago* caldo de cultivo de algunos de los momentos mayores de la creatividad.

625 Este fue el caso de las conjeturas de Weil, resueltas gracias a su inmersión en el *topos étale* de un esquema, y podría ser el caso de la hipótesis de Riemann, si el programa de Connes sobre el *topos aritmético* consiguiera ser llevado a cabo completamente. De manera similar, la inmersión de las conjeturas de Weil en las conjeturas estándar, según Grothendieck, o la inmersión de la conjetura *a-b-c* en la teoría inter-universal, según Mochizuki, son ejemplos donde grandes mareas pueden dar lugar a disoluciones (aún abiertas en 2018) de muy delicados problemas aritméticos.

La aparición de un *movimiento pendular sistemático entre yin y yang*, que torna a Grothendieck en un ser andrógino ("«Soy» lo uno y lo otro – *yang* y *yin*, «hombre» y «mujer»" [**1983-86**, P.51]), conforma otro de los momentos centrales de *Récoltes et semailles*. Las formas del *yin* –creatividad, suavidad, ingenuidad– se contraponen con acciones *yang* –arquitectónica, singularidad, trabajo–, y, en las mediaciones entre tránsitos (*yin*) y obstrucciones (*yang*), es donde surgen a menudo algunas de las construcciones más profundas de la matemática. El fino análisis que realiza Grothendieck sobre sus momentos de inspiración y sus largas semanas de labores complementa el registro de Poincaré sobre la inventividad[626]. De hecho, su *sensibilidad* a los tonos y a las distinciones más sutiles, razón de ser de sus "centenares, si no miles, de nociones nuevas" [**1983-86**, P.19], se complementa con su *sensibilidad* por lo unitario y lo universal detrás de las apariencias. De esta manera, "un múltiple a la búsqueda de la unidad" [**1983-86**, PU.23], como Grothendieck se definirá a sí mismo, conecta una trama compleja de pulsiones opuestas. Yendo aún más allá, un estudio muy preciso de las fuerzas *yin-yang* se realiza en *Les portes sur l'univers*, como veremos a continuación.

14.3 Ejemplo detallado: homología creativa en *Les portes sur l'univers*

Les portes sur l'univers [**1983-86**, PU.1-127] constituye el apéndice a la sección *La llave del ying y el yang* en la tercera parte de *Cosechas y siembras*. Dada la total originalidad

[626] El *péndulo pascaliano imaginación-razón* (que aquí llamaríamos "co/razón-razón") adquiere en Poincaré la forma de un *espacio libre* (donde viven el "yo inconsciente", un "sentimiento delicado" y una "intuición especial") contrastado con un *espacio regulado* (donde viven el "trabajo consciente", una "puesta en obra" y una "demostración ordenada"). Ver Poincaré, óp.cit., pp. 8, 3, 4, 7, 2, para el orden de las menciones. La liberación *yin* versus la regulación *yang* coincide perfectamente con el péndulo grothendieckiano: una línea Pascal-Poincaré-Grothendieck es aquí patente.

del trabajo, resumimos en detalle sus veinticinco secciones.

- Sección 1 (1-7)[627]. *Le roc et les sables.* Inicios 1979, visión 1984, realización final Marzo/Abril 1986. Pares *yin-yang*, grafos de pares ("combinatoria o topología") (1-2). Universalidad, realidad (3-4). Cortes y pegamientos, tipografía y topografía, enlaces medios y estructura global ("árbol de navidad" y variantes) (5-6).
- Sección 2 (7-9). *Choses polyandres et choses polygames.* Pares arquetípicos ligados a nombres (7). Poligamia (un *yang* enlazado con dos *yin*, hijo con madre y viejo – sol con luna y tierra) y poliandria (un *yin* enlazado con dos *yang*, madre con padre e hijo – tierra con sol y cielo) (7-8). Diagrama en zigzag: potencia/energía/materia/espíritu/cuerpo (8).
- Sección 3 (9-12). *L'ambiguité créatrice (1): paires, rimbambelles et rondes.* Ambigüedad del *yin* y el *yang*: superposisiciones, cambios de perspectiva (9-10). Colas (11) y rondas (12): enlaces variables de *yin/yang*. Una ronda poética en el Elogio del Incesto: aprendiz-tripulación-barco-río-mar-aprendiz ("en cuyos ojos se refleja el mar y penetra en su alma") (12).
- Sección 4 (13-15). *L'ambiguité créatrice (2): le renversement des rôles.* Parejas *yin/yang*: "cósmicas" o "universales" (esenciales) versus "ocasionales" (ambigüedades no esenciales) (13). Cartografía metódica (13). Inversiones en el *yin/yang*: momentos de creatividad (14). Dominancias y tonalidades (14). "La imagen de la Madre (...) encarnación más completa y profunda del *yin*" (15).
- Sección 5 (15-16). *L'ambiguité créatrice (3): la partie contient le Tout.* Par: parte (*yang*) / Todo (*yin*) (16). Proceso de reflexión: "muy a menudo, la parte refleja fielmente el Todo, y por tanto lo contiene, tal como está contenida en él" (16). Ejemplos de reflexión: hombre, cuerpo, cara, voz, mano – sostén de técnicas divinatorias (16).
- Sección 6 (16-18). *L'ambiguité créatrice (4): les extrêmes se touchent.* Par: caliente (*yang*) / frío (*yin*) (16). Variaciones, grados, intensidades, inversión: lo caliente extremo

[627] Los números entre paréntesis corresponden a la paginación del manuscrito [**1983-86**, PU.1-127].

se convierte en *yin*, lo frío extremo se convierte en *yang*, "los extremos se tocan" (17). "Imagen simplista" del círculo para representar los movimientos e inversiones *yin/yang* (18).

– Sección 7 (18-21). *Mes perplexités "contenant – contenu" et "le lourd – le léger".* Pares delicados, no bien definidos, paradójicos, etc. (19-20). Inversiones, asociaciones por subgrupos (19-20). Vaivenes entre continente y contenido (19), entre lo abstracto y lo concreto (20). "El juego de analogías, guía precioso e indispensable (...) no es infalible, requiere cautela y prudencia" (20).

– Sección 8 (21-23). *La quête de l'unité.* Correlaciones (no equivalentes) entre los pares: particular/general, concreto/abstracto (21). Importancia de los grados de abstracción en matemáticas, enlace permanente de particularidad y generalidad (22). Par básico: multiplicidad/unidad (23), "me siento yo mismo como un múltiple a la búsqueda de la unidad" (23).

– Sección 9 (23-27). *Généralité et abstraction – ou le prix à payer.* Niveles y umbrales de abstracción (24). Búsqueda de generalidad y unidad ("inmersión profunda", 25), para lo cual hay que pagar el precio de la abstracción (unidad - *yin* versus abstracción - *yang*) (25-26). Limitantes de la investigación científica: recorte, estallido, divergencia (27).

– Sección 10 (27-31). *Histoires d'icosaèdres et d'arbres de Noël.* Recuento de búsquedas para llegar a "una aprehensión formal o matemática global del conjunto de pares *yang/yin*" (27). Deseo de construcciones "canónicas" y "naturales" (28). "Es una lástima que Kepler no esté aquí para leerme" (30). Grafos, hexágonos, icosaedros (28-29) y árbol de navidad (30).

– Sección 11 (31-34). *Désir et nécessité – ou la voie, et la fin.* Reflexiones nocturnas (23, 27, 31, 37, 41, etc.). Grupos de pares que impulsan el pensamiento: polos, atractores, dinámica, tonalidades *yin/yang* (31-32). Vaivén esencial entre síntesis y análisis, diferenciación y unidad (33). Después de comprehensiones en el orden del Todo, "nuestros ojos ya no son los mismos" (34).

- Sección 12 (34-37). *Précision et généralité – ou la surface des choses.* Movimientos del pensamiento: diagrama en zigzag entre términos *yang* (pureza, lo particular, lo preciso, lo claro, lo sabido, saber) y términos *yin* (fecundidad, lo general, lo vago, lo obscuro, lo misterioso, conocimiento) (35-36). Dinámicas e inversiones (36), idealidad y realidad (sueño, profundidad) (37).
- Sección 13 (37-41). *L'harmonie – ou les épousailles de l'ordre et du mystère.* Iteración del zigzag (¡homologías escondidas!) a lo largo de siete cualidades *yang* y ocho *yin*, enlazadas en vaivén progresivo, entre imaginación y misterio (37). Enlace entre unidad y misterio (*yin*) / orden y sencillez (*yang*), bajo una armonía profunda de sombra y luz, allende el mismo espíritu humano (40).
- Sección 14 (41-46). *Le caractériel et le caractéristique – ou l'Accordéon cosmique.* El Soñador regala la imagen (= "realidad tangible", 42) del "acordeón" (o "armónica") para representar el interminable zigzag *yin/yang* (41). Más sueños (42). "Nuevas notas imprevistas en el pensamiento explorador" (43). Extensión del zigzag y enlace circular (45): dibujo del acordeón cósmico (46).
- Sección 15 (47-51). *Découverte ou "invention"? – ou le scribe et "l'Autre".* ¿Invención o descubrimiento de las figuras? (47). Descubrimiento matemático (47). Estudio matemático de las figuras: base de términos, grafos orientados (que llevan al icosaedro) (49), estructuras afines (que llevan al acordeón/flor) (50). Nacimiento creativo desde el limbo, la mano del escriba está guiada por Otro (51).
- Sección 16 (51-57). *La Fleur et son mouvement – ou: plus je m'éloigne, plus je m'approche.* Análisis del acordeón/flor cósmico(a): pétalos, montes, valles, pendientes (51-52). Interior de la flor (*yin*): parte fecunda, granular (55). Exterior de la flor (*yang*): espíritu (55). Dinámica: del exterior (superficie, luz) al interior (profundidad, sombra) (55). Expansión de caminos: de flor planar a flor esférica (56).
- Sección 17 (57-61). *Chaos et liberté – ou les soeurs terribles.* Desaparición del caos en la flor cósmica (59): caos y libertad pueden considerarse "anti-atractores" dentro del sistema

dinámico general (59). Sospechas sobre la libertad: carácter “necesario” de la investigación científica (59-60). “Horror” del caos: es una “simple apariencia” detrás de la cual emerge un orden (61).

- Sección 18 (62-64). *Le vague et le précis – ou l’épuisette et la Mer.* Atractores *yang* subordinados a sencillez y orden: abstracción, precisión, estructura (62). Vaivén entre precisión y vaguedad, desconocimiento y conocimiento, misterio y orden (63). “Cosa loca (...) nada aparece de ese movimiento” (63). Censura “implacable” del “mar de brumas sin fondo y sin límites” (63-64).
- Sección 19 (64-65). *Ordre et structure – ou l’esprit de précision.* Entendimiento de una substancia a través de “las mallas cada vez más apretadas, de estructuras más y más finas, que se pegan a la substancia” (64). Búsqueda de estructuras: modo privilegiado del espíritu de precisión (= “espíritu de geometría” de Pascal) (64-65).
- Sección 20 (66-68). *L’abstrait et le concret (1): naissance de la pensée.* “El espíritu, lanzado en la persecución de la elusiva carne de las cosas, va como un Ahab detrás de la Ballena blanca” (66). Versus un miedo a la abstracción (repugnancia a “cambiar de piso”, 66), el lenguaje y el acto de “nombrar”, paradigmas de la abstracción, constituyen el “acto arquetípico del espíritu” (67).
- Sección 21 (68-71). *L’abstrait et le concret (2): le miracle de la simplicité.* En contra de prejuicios comunes, la abstracción es el medio para aprehender y despejar lo simple dentro de lo complejo (69). Esencial riqueza abstractiva de la elipse sobre el círculo (71). Correlación inversa entre fondo (entendimiento, niveles de profundidad) y forma (expresión abstracta, niveles de elevación) (69).
- Sección 22 (71-78). *L’abstrait et le concret (3): les strates du langage – ou la peau et l’étreinte.* “La embriaguez del descubrimiento no es privilegio del gigante (...) sino del niño” (71). “Olvidar (...) escuchar”: clave de la invención (72). “La grandeza de Riemann” se debe a un pensamiento vasto: matemático y filósofo, abstractor e ingenuo (74-75). Relatividad y estratificación de la noción de abstracción (76-77).

– Sección 23 (78-82). *Abstraction et sens – ou le miracle de la communication.* El revés de la abstracción: esterilidad de un juego por placer (78). Peligro de "perder contacto con lo concreto" (79). Sentido: transformación y resonancia de "nubes" entre emisores y receptores (80-82). "Mi responsabilidad (...) es estar realmente presente y ser verdadero en lo que hago" (82).

– Sección 24 (83-92). *La langue des images – ou le chemin de retour.* Allende las palabras y lenguajes usuales, existe una "lengua madre" de emociones y dolores (83-84), una "lengua-imágenes" de sueños e imaginación (85-86), de cuerpo y percepción (87), de danza y vida (88), íntima y personal (86), que se abre a una "libertad creativa infinita" (89) – guiada por el Soñador (92).

– Sección 25 A (93-108). *Les portes sur l'univers. (A) Portes et trous de serrure (répertoire).* Veintinueve grupos afines (o "puertas") de pares *yin/yang*. Dibujo de flores (a tres y cuatro pétalos) ligadas al grupo "Fe" (98). Dibujo de flor (a cuatro pétalos) ligada al grupo "Responsabilidad (o Karma)" (105).

– Sección 25 B (108-111). *Les portes sur l'univers. (B) L'arbre.* Lado derecho (a los ojos del árbol, izquierda en el papel): *yang* - pensamiento (nuestra "razón") (109). Lado izquierdo (a los ojos del árbol, derecha en el papel): *yin* - emoción (nuestro "co/razón") (109). Dibujo del árbol (110).

– Sección 25 C (111-114). *Les portes sur l'univers. (C) La fenêtre.* Derivación de nueve umbrales dentro del árbol: expresión, pensamiento, responsabilidad (111), cuatro direcciones (111), cuatro polaridades (112), ciclo (113), acción, conocimiento, fuerza (113), englobados todos dentro de un dibujo de ventana (homología) sobre el universo (114).

– Sección 25 D (114-127). *Les portes sur l'univers. (D) Le bi-icosaèdre.* "Par de dos estructuras de icosaedro sobre el hexagrama pensamiento": canonicidad y complementariedad *yin/yang* (114). Dibujo de estructura bi-icoasedra para el pensamiento-*yin* y el pensamiento-*yang* (126).

Les portes sur l'univers, 127 páginas escritas en un rapto de un mes, entre el 17 de marzo y el 14 de abril 1986, constituye un fabuloso documento sobre las tensiones complejas del pensamiento, en general, y matemático, en particular. Grothendieck, cercano a la filosofía oriental, yogui practicante desde su renuncia al *IHES* (1970) y desde sus años de ecologista radical en el movimiento *Survivre et vivre* (1970-75), adopta en el escrito un sofisticado sistema de ramificaciones de parejas *yin/yang* para adentrarse en el estudio de la acción humana y, en especial, de la matemática. Por el lado *yin*, se encuentran los procesos de descubrimiento, la suavidad, el lenguaje madre de la intuición. Por el lado *yang*, aparecen los cauces de la invención, la arquitectónica, los lenguajes superficiales de la descripción. En el *yin* yace el corazón, en el *yang* reside la razón (en nuestra lectura aparece la dualidad co/razón – razón, aprovechando el castellano, único idioma donde se expresa la tensión sensible – inteligible mediante el *exacto prefijo dual* "co"). Grothendieck procede a construir una *combinatoria estratificada de pegamientos parciales de parejas yin/yang*, donde aparecen, en un primer nivel, "poligamias" (un *yang* coligado con dos *yin*, por ejemplo, sol con luna y tierra) y "poliandrias" (un *yin* enlazado con dos *yang*, por ejemplo, tierra con sol y cielo) [**1983-86**, PU.7-8]. En un segundo nivel, se realizan diagramas en zigzag, donde se superponen y cambian de perspectiva los aparentes opuestos [**1983-86**, PU.8-10]. Los enlaces variables *yin/yang* pueden dan lugar entonces a "rondas", donde un ciclo *yin/yang* nos ofrece nuevas perspectivas sobre una situación dada [**1983-86**, PU.12]:

> El río se echa en el mar que lo acoge. El barco se sumerge en el río que lo rodea y lo envuelve. La tripulación es llevada por el barco que la engloba y la abriga. El joven grumete es miembro y parte de la tripulación que le incluye. Y en sus ojos se refleja el mar, y por sus ojos el mar penetra en su alma, que lo acoje en ella. Así lo masculino y lo femenino –Eros y la Madre– se entrelazan constantemente en una ronda sin fin donde toda cosa, al tiempo o sucesivamente, vive su impulso viril y su pulsión materna.

El mar y el grumete nos envían a la caída de Pip en los abismos del océano, en *Moby-Dick*, fragmento de la problemática típicamente romántica/matemática sobre los reflejos del todo en la parte. De hecho, la *iteración* y la *reflexión* (codificadas en la ronda anterior) son típicas de los procedimientos inventivos en matemáticas.

Uno de los intereses mayores de *Les portes sur l'univers* reside en cómo Grothendieck aplica implícitamente a sus análisis muchas de las *grandes metodologías de su obra matemática*: haces, esquemas, homologías, geometrías, combinatorias. En efecto, muchas de las tareas emprendidas en su texto se refieren a pegamientos, inversiones, estratos, quiebres, umbrales: *(i)* variaciones, grados, intensidades, entre lo cálido (*yin*) y lo frío (*yang*) [**1983-86**, PU.16-17]; *(ii)* inversiones, asociadas por subgrupos, entre continente y contenido, abstracción (*yang*) y concreción (*yin*) [**1983-86**, PU.19-20]; *(iii)* dialéctica multiplicidad/unidad ("me siento yo mismo como un múltiple a la búsqueda de la unidad") [**1983-86**, PU.23]; *(iv)* diagramas (hexágonos, icosaedros, árboles) para capturar las tonalidades *yin*/*yang* [**1983-86**, PU.28-32]; *(v)* dinámicas entre lo ideal (*yang*) y lo real (*yin*) [**1983-86**, PU.36-37]; *(vi)* iteraciones de zigzags y homologías entre unidad/misterio (*yin*) y orden/sencillez (*yang*) [**1983-86**, PU.37-40]; *(vii)* tensión entre descubrimiento (*yin*) e invención (*yang*) [**1983-86**, PU.47-51]; *(viii)* acordeón entre exterior (superficie, luz, *yang*) e interior (profundidad, sombra, *yin*) [**1983-86**, PU.51-55], etc. Aunque lo esencial, en esta construcción de "mallas cada vez más apretadas, de estructuras más y más finas" [**1983-86**, PU.64] para ayudar a aprehender el mundo, surge en el proceso mismo de las mediaciones, es notable que los aspectos *yin* resulten ser los más interesantes desde el punto de vista creativo.

Grothendieck, de hecho, consideró su vertiente *yin*, ingenua, infantil, femenina, como la constituyente esencial de la riqueza de su obra. "El espíritu, lanzado en la persecución de la elusiva carne de las cosas, va como un Ahab detrás de la Ballena blanca" [**1983-86**, PU.66]: por ello, hay que saber olvidar y escuchar como niños [**1983-86**, PU.71-72], hay que acercarse a una lengua-madre de emociones y dolores, a una lengua-imágenes de ensoñación e imaginación, que se abra a una "libertad creativa infinita" [**1983-86**, PU.83-89].

La incesante búsqueda de arquetipos matemáticos (desigualdad de Grothendieck, grupo de la K-teoría, topos clasificadores, grupo de Galois absoluto, homotopía universal, etc.) se refleja en esa alusión a *Moby-Dick*, expresión literaria por excelencia de la inagotable búsqueda de aquellos estratos metafísicos que nos superan. Consciente de que una de las tareas esenciales de la matemática consiste en tornar visible lo invisible –coincidiendo una vez más con la filosofía romántica, piénsese en el *Borrador general* (1799) de Novalis–, Grothendieck traza en *Les portes sur l'univers* un delicado reticulado de mediaciones entre el corazón hondo de la invención matemática y los diversos sostenes racionales del edificio.

La *imaginación visual* del matemático nos regala un hermoso anillo de enlaces *yin/yang* [**1983-86**, PU.46], y se desata sobre todo en la sección final del texto. Grothendieck propone allí veintinueve grupos afines (o "puertas") de pares *yin/yang*, sintetizados en armazones diversas: *flores* [**1983-86**, PU.98, 105], *árbol* [**1983-86**, PU.110], *ventana* [**1983-86**, PU.114], *bi-icosaedro* [**1983-86**, PU.126][628]. La emoción (*yin*) y el pensamiento (*yang*) se repelen y se anudan a la vez, tanto en las distintas vertientes del árbol, como en los umbrales y aperturas que dan lugar a una ventana "sobre el universo". A lo largo de todo el documento, Grothendieck busca explicitar inversiones y simetrías (conexiones tipo Galois), así como despliegues y multiplicaciones (ramificaciones tipo Riemann). Ya que una aproximación razonable para entender a Grothendieck es verle como unificador profundo de Galois y Riemann[629], resulta de sumo interés que *Les portes sur l'univers* adelante también ese programa de unificación, a nivel de aportes metodológicos. La reflexión de Grothendieck coincide así con las fuerzas mayores de su obra matemática, a la búsqueda ("como un Ahab detrás de la Ballena blanca") de una elusiva armonía universal.

628 Ver *Figura 14.1* abajo.

629 Cifra conseguida, como hemos visto, en sus tres líneas visionarias de la conferencia de Edimburgo: "La cohomología de Weil debe ser definida por medio de (...) conexiones entre cohomología de haces y cohomología de grupos de Galois, por un lado, y clasificación de cubrimientos no ramificados de una variedad, por otro lado" [**1958**, 104].

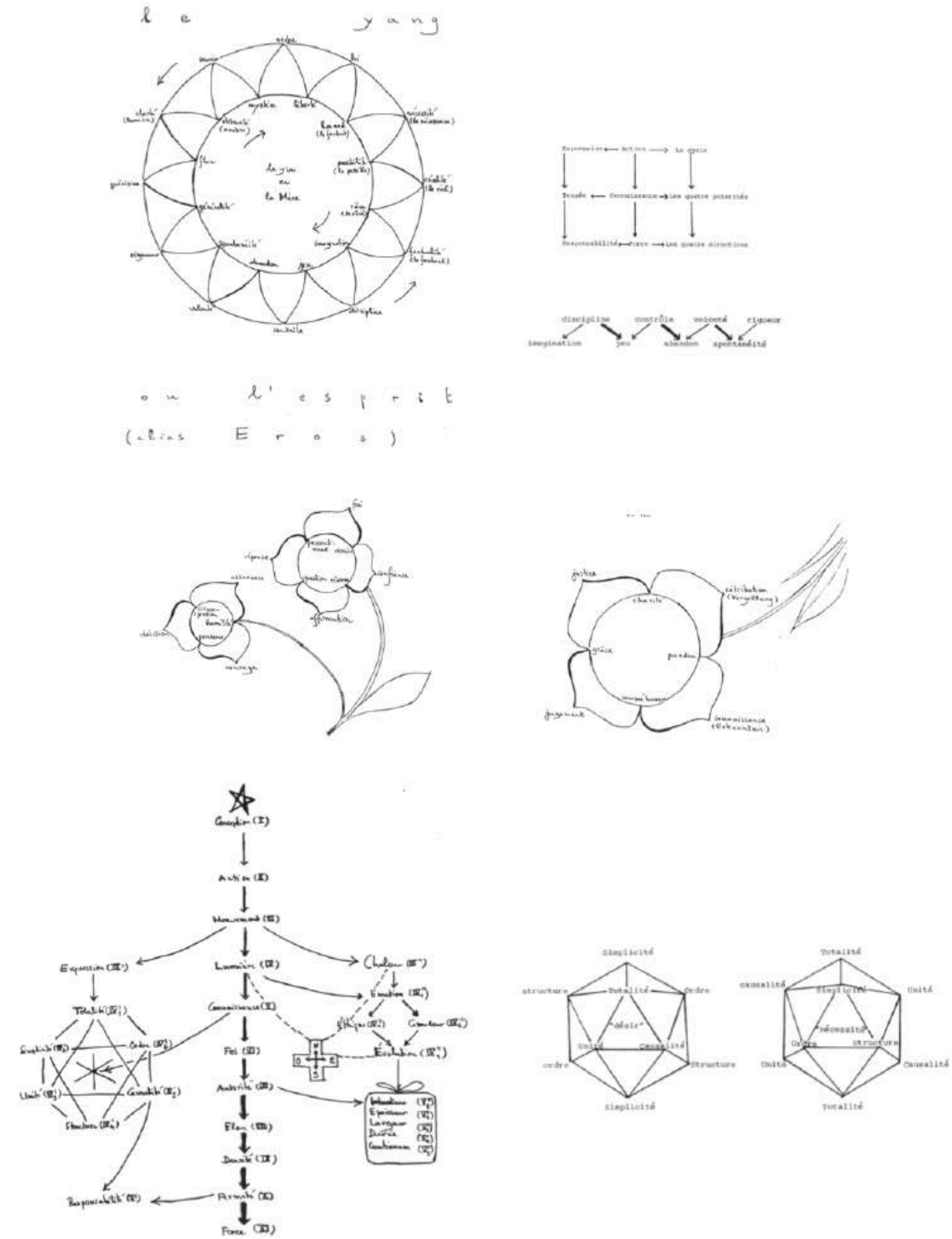


Fig. 14.1 – Figuras principales de *Les portes sur l'univers*: [**1983-86**, PU.46, 114, 100; 98, 105; 110, 126], imágenes en páginas citadas de izquierda a derecha, de arriba a abajo

15

La clef des songes (1987-1988)

La clef des songes ou dialogue avec le Bon Dieu [**1987**] ahonda detalladamente en las vivencias espirituales de Grothendieck. A partir de un registro meticuloso de sus sueños (cerca de un “millar”, los números a la Grothendieck siempre asombran), el autor desglosa, en diversas capas, estratos y umbrales, múltiples tipos de lo espiritual (soplos, fe, co/razón), lo intelectual (ojos, lenguaje, razón) y lo sensible (manos, pasión, eros). Esto le conduce hacia la revelación de un Arquetipo, un Soñador, una Mano, un Ojo –formas del *Buen Dios*– que se proyectan sobre sus propios sueños, escrituras y visiones. Una escucha, casi musical, de contrapuntos de vida, aunada a un intento de remontar hacia lo más profundo, va despejando los ritmos de la creación. Mediante ese ejercicio de autoreflexión, iterado y reiterado, emerge naturalmente una llave (o una clave, *clef* = llave, clave) para el entendimiento de sí mismo y del mundo. El texto central de *La clef des songes* se complementa con abundantes notas, entre las cuales aparece un extenso trabajo final, *Los mutantes*, donde Grothendieck propone una suerte de genealogía de sus maestros espirituales, particularmente en lo que se refiere a las influencias de la tradición oriental en su quehacer y en su pensar libertarios.

15.1 Análisis descriptivo del texto

Entorno cronológico.

La clef des songes [**1987**] es un manuscrito tipografiado de cerca de mil páginas, donde se sigue aprovechando el estilo narrativo del *diario*, usado en la década de los ochenta. En particular, la primera entrada del texto principal[cxlviii] se registra el 30 de abril 1987 [**1987**, 1] y la última el 14 de septiembre 1987 [**1987**, 308]. Por otro lado, las fechas de las notas se distribuyen inicialmente entre esas fechas, pero proceden bastante más allá, hasta el 2 de abril 1988 [**1987**, N679]. *La clef des songes* se sumerge de lleno en el sondeo espiritual de algunos fragmentos de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y se convierte en su *continuación natural*, en lo que respecta a las exploraciones grothendieckianas sobre lo "superior" y lo "invisible". Los tonos místicos del escrito han sido dejados de lado por la comunidad matemática, poco proclive a la especulación metafísica, y la traducción/edición Navarro-Carmona ha sido una de las pocas recepciones apropiadas del texto.

Resumen mínimo.

En lo que sigue, presentamos listados temáticos muy breves de las *Partes I-VI* de *La clef des songes* [**1987**], así como de las *Notas* y de la sección final *Los mutantes*. Después de esos cortos incisos, recorreremos en detalle algunos núcleos de la *Parte I*.

I. Todos los sueños son creación del Soñador (§§1-16) [**1987**, 1-46]. El sueño y el conocimiento de sí mismo, descubrimiento del Soñador, la niñez, los sueños proceden del

[cxlviii] *La clef des songes* se divide en seis partes principales (ver nuestro *Resumen mínimo* abajo) [**1987**, 1-315] y en las muy prolijas notas añadidas [**1987**, N1-N691], entre las cuales aparece el largo desarrollo *Los mutantes*. Utilizaremos aquí la versión mecanografiada en francés, disponible en la página de Juan Navarro (http://matematicas.unex.es/∼navarro/res/). Navarro ha producido una traducción completa al español, editada con sumo cuidado por Mateo Carmona (https://carmonamateo.github.io/grothendieck.html).

Soñador, instantes de verdad, la llave del gran sueño, la voz de la razón y la otra voz, actos de conocimiento y actos de fe, la voluntad de conocimiento, la chispa y la llama, trabajo y concepción, el ritmo de la creación, cuatro tiempos para un ritmo, ciclos de Eros, emoción y pensamiento.

II. Dios es el Soñador (§§17-26) [**1987**, 47-79]. Dios es el Soñador, el conocimiento perdido, la increíble Buena Nueva, hermanos en el hambre, encuentro con el Soñador, preguntas prohibidas, reencuentro con Dios, solo existe un Soñador, el Creador y la Tela, Dios no se define ni se prueba, una nueva tabla de multiplicación.

III. El viaje a Memphis (1): el errar (§§27-36) [**1987**, 80-136]. Mis padres, esplendor de Dios, Rudi, cascada de maravillas, Dios por sana razón, reencuentros perdidos, el llamado, el giro, fe y misión, muerte, Dios habla en voz baja.

IV. Aspectos de una misión (1): un canto de libertad (§§37-46) [**1987**, 137-182]. Impensable convergencia, el testimonio como llamado al descubrimiento de sí mismo, Eros o la potencia, el Ojo o el sentido, la visión, visión novadora como testimonio, alma y labor, el hombre como creador, creación y represión, libertad creadora y obra interior.

V. Aspectos de una misión (2): el conocimiento espiritual (§§47-56) [**1987**, 183-268]. Conocimiento inclusivo, belleza y contemplación, dolor y sombras, el alma de las cosas y el hombre sin alma, la mentalidad del rebaño, el uso de los Tiempos, creación y voz interior, creación y escucha, el árbol del bien y del mal, espritualidad arcaica, ley, ignorancia, verdad y creación, resistencia y sufrimiento.

VI. El viaje a Memphis (2): siembras para una misión (§§57-66) [**1987**, 269-315]. El acto, separación, comienzo sin fin, esperanza, Tempestad, el hombre nuevo, superficie y profundidad, el llamado del silencio, el mensajero, travesía del desierto y revelación, siembras y cosechas, tareas y gestación.

Notas (notas numeradas 1-57) [**1987**, N1-N176]. Eros, lo uno y lo infinito, sabiduría del cuerpo y acción de Dios, el papel del sueño, arquetipos y manifestaciones de Dios, sueño y libre arbitrio, experiencia mística y conocimiento de sí, milagros y razón, verdad y conocimiento, matemática e imponderables, creencia y fe, el niño y lo místico, mi amigo "el Buen Dios", misión y creación, infierno y Providencia, eros y espíritu, los grandes novadores, el niño creador, "impensable Mayo 68", creación y madurez, error e ignorancia, duda y seguridad, trabajo y deseo.

Los mutantes (notas numeradas 58-145) [**1987**, N177-N691]. Registro y estudio de guías espirituales y pensadores libertarios: Fujii Guruji, Gandhi, Walt Whitman, los mutantes (1: espíritu, justicia, libertad), lugar de Riemann, A. S. Neill, Edward Carpenter, Félix Carrasquer, los mutantes (2: potencia, diversidad, sexo), Solvic (*sic*), Steiner, Krishnamurti, los mutantes (3: conocimiento de sí, reconciliación, crisis de la civilización, esperanza), Darwin, Freud.

Señalamos ahora algunos temas escogidos de la *Parte I* (sueños/Soñador, intelecto/espíritu, escucha/visión, sombras, erótica, creatividad). En lo que sigue, las referencias entre paréntesis remiten a páginas en el texto principal [**1987**, 1-46].

Los Sueños y el Soñador. Primer sueño profundamente transformador: "reencuentro con mi «alma»", "diez años atrás"[630] (1). "La historia de mi madurez hacia un conocimiento de mí mismo (...) se confunde con la historia de mi experiencia del sueño" (2). Sueño como "testigo directo, fiel y de finura incomparable" de la "vida profunda de la psiquis", "cuadro trazado por la mano de un maestro" (2-3). "Viaje al descubrimiento del Soñador (...) del Pintor (...) del Ojo (...) de la Mano" (4). "Entendí poco a poco que es Él quien crea cada uno de nuestros sueños (...) aparecemos como «soñadores», en realidad «soñados»" (4). "Fue en agosto 1982, seis años después de mi primer trabajo sobre el

[630] Escrito el 30 de abril 1987, esto remite a las secuelas de octubre 1976, momento de "fundición de los hielos" en su psiquis y "entrada de la meditación en mi vida" [**1987**, 114-115, 118].

sueño, que tuvo lugar un segundo gran giro en mi relación con los sueños y el Soñador (...) comprendí que todos salen de la misma Mano" (6). "He anotado cerca de un millar de sueños, de los cuales he sabido agarrar el mensaje en trescientos o cuatrocientos" (6). "En todos sin excepción, a través de su prodigiosa diversidad, siento un mismo «toque», percibo un mismo soplo, que no tiene nada mecánico y que no viene de mí" (7). "Especie de durmiente, ¡despiértate!" (7). "Como un seno materno, el «gran sueño» nos presenta una leche tupida y sabrosa, buena para nutrir y vivificar el alma" (9). "Me obstinaba, cada vez, a volver a escribir, sentado en mi cama (...) hasta dos horas seguidas" (10). "El Soñador era un poco como un hermano mayor, travieso y benévolo, sin la menor complacencia pero al mismo tiempo de una inagotable paciencia" (18). Las "dos llaves" del gran sueño (hambre espiritual / acto de fe) son "indistinguibles" y conforman un "acto completo" – enlace creador de *yin* y *yang* (19). "Para todos los sueños mensajeros que me llegaron y que he sondado, necesité horas, y a veces días de trabajo, para agarrar el mensaje" (24). "La emoción (...) es el alma misma y el soplo del sueño" (43). Descripción de la primera gran revelación (mediados de octubre 1976) (44-46).

El Intelecto y el Espíritu / la Razón y la Fe. "El alma estaba hambrienta" (5). "La realidad espiritual es otra cosa (...) mis ojos solo comienzan ahora a abrirse a esa realidad" (5). "Con un retroceso de diez años, veo ahora claramente que esa «otra voz» es la que me aguijonea siempre hacia lo esencial, mientras que la voz «de la razón», del gran sentido común, intenta desviarme en todas las formas" (11). "Solo un acto de fe torna «eficaz» y actuante el acto de conocimiento", como la mano torna eficaz al escalpelo (14). "La fe en mis sueños, o por decirlo mejor, la fe en el Soñador, se ha decantado como la quintaesencia misma de la fe en lo que hay de mejor en mí – lo que me hace capaz de conocer, de amar, de crear con la mano, el espíritu y el corazón" (19). "En el par fe/conocimiento, la fe juega el papel *yang*, y «fecunda» el conocimiento, que juega el papel *yin*" (20). La llave (espíritu/fe) se introduce en la cerradura, pero la mano y el trabajo (intelecto/razón) abren la puerta – la "chispa" y el "fuego" desarrollan la obra (23). Lugar del trabajo ("organización", "orden", "dinamización", "profundización", "penetración" – "de la periferia hacia las profundidades"): buscar "la metamorfosis de una imagen amorfa en una viva realidad interior", donde se revela su "«evidencia», su viva sencillez" (25). Aspectos *yang* (más intelectual) y *yin* (más espiritual) del trabajo (26-28).

La Escucha y la Visión. Años (1977-1987) de "superación de «umbrales» (...) de escucha intensa" (1). Dificultad de acceder a manifestaciones "ocultas" en las "capas profundas de la psiquis" (2). "Somos ciegos (...) pero hay en nosotros un Ojo que ve y una Mano que pinta" (3). Al entrar a una realidad espiritual, "los ojos terminarán por abrirse y podrán ver" (5). "La «otra voz» es la misma que te habla en el sueño, es la del Soñador, la de la Madre, te murmura muy bajo dónde se encuentra la leche verdadera, a la que aspira no tu superficie, sino tu profundidad" (12). "Cuando, bajo la impresión aún del sueño recién realizado, sabes escuchar la voz humilde del hambre, entonces, sin saberlo, estás girando una llave delicada y segura" (13). El habla (de alguien, de los sueños) como "conocimiento" (13). "Un estado de apertura, de rigor o de verdad" sirve de preludio a "un acto de percepción esencialmente espiritual, en cuyo instante el ojo espiritual en nosotros, que percibe y distingue lo verdadero y lo falso, se abre o se entreabre, y ve" (14). "El estado de verdad parcial sería el estado de silencio interior y de escucha, que nos permite distinguir claramente la Palabra del ruido circundante" (15). "Por poco que tendamos la oreja, nosotros, músicos-cantantes, podemos captar al vuelo los fragmentos desperdigados de un esplendor que nos supera" (32). "El trabajo tiene como efecto «cambiar nuestro ojo»" (39).

Las Sombras. Reencuentro con el "Otro", el "niño en mí" (1). "La inercia del alma se dobla con un miedo incoercible, profundamente escondido (...) miedo de conocer (...) gran miedo de cambiar" (8). "Las cosas esenciales son también las más delicadas y las menos «seguras» de todas – como vapores impalpables" (11). "Estabas ante una puerta cerrada y ¡hela milagrosamente abierta! Estabas en la negrura o la penumbra y ¡he ahí una irrupción de luz!" (12). "De un magma informe nace de repente un orden" (13). "Prácticamente todos los procesos y actos creativos tienen lugar (salvo raras excepciones) en el Inconsciente, al abrigo de la mirada" (17). "El «más allá» del que nadie habla nunca (...) de cosas delicadas y elusivas, cosas de la sombra y de la penumbra (...) escapa a las manos burdas de la razón, y a su red, el lenguaje" (23). "Es el momento más obscuro, más ignorado (...) el que es también el más decisivo, el momento creador entre todos" (35). "Los procesos creativos se realizan en la sombra" (40) – "desde las alturas hacia las profundidades, de la superficie al corazón" (42).

La Erótica. La "otra voz" (Soñador, Madre, hambre, alma) es también "el hambre de Eros, de Eros-que-quiere-conocer" (12). "En 1977 (...) descubrí con sorpresa (...) que la pulsión de conocimiento en mi trabajo matemático era de la misma naturaleza que la pulsión amorosa. Las palabras y las imágenes que me llegaban espontáneamente, queriendo evocar la pulsión del descubrimiento en su esencia, eran las palabras e imágenes del amor carnal que me soplaba Eros" (29-30). "Distingo tres niveles o planos del conocimiento: «sensual» o «carnal» («erótico») (...) «intelectual» o «artístico» (...) «espiritual» de esencia superior (...) con correspondencias íntimas y misteriosas entre ellos" – "el sueño se me manifestó poco a poco, a lo largo de los años, como el «Intérprete» por excelencia, que nos señalaba cómo «remontar» de las palabras de la carne y de la inteligencia humana, hacia la realidad original" (30). "Dos ciclos de Eros: el juego y la labor" – "ciclos arquetípicos que cabalgan entre sí" (35-38)

La Creatividad (1): Ritmos y Tiempos. "Parecería que hay un arquetipo común a todos los procesos creativos, a todos los procesos de descubrimiento (...) «modelo» eterno (...) Dios, Creador" (31). "Discierno, en los procesos de descubrimiento (...) «cuatro tiempos» que marcan el ritmo de la creación, como flujos y reflujos de una respiración infinita, suerte de medidas en un contrapunto sin comienzo ni final: tiempo largo (preparación), tiempo corto (concepción – o activación), tiempo largo (trabajo), tiempo corto (consecución)" (31). Cuatro tiempos para un ritmo: "sueño", "despertar", "trabajo", "brecha" (32-34).

La Creatividad (2): Libertad y Voz Interior. "Mientras se obedece a una falsa «razón», no hay ni acto creador, ni obra novadora" (12). "Pregunta delicada: en qué medida los procesos y actos creadores (y sobre todo los «actos de conocimiento») que se realizan en la psiquis, y particularmente en sus estratos profundos, son obra de la psiquis misma, o de Dios actuando en nosotros" – "dos de mis sueños me dicen claramente que hay una parte de creatividad proveniente de la psiquis misma" (16). "El espíritu entra y penetra" a través de "capas o estratos sucesivos (...) sonda laboriosamente (...) atraviesa (...) persigue sin descanso su tenaz progresión hasta al fin tocar el fondo (...) y en ese momento adquiere nacimiento la cosa nueva – la imagen viva, encarnación de un conocimiento nuevo y verdadero" (26).

Descripción más extensa.

A continuación, recorreremos algunos de los aportes más relevantes de las *Partes I-VI*, las *Notas* y *Los mutantes*. Enfatizaremos algunas temáticas ligadas a *dualidades y adjunciones*, ubicuas en el pensamiento de Grothendieck: razón/corazón, tipos/arquetipos, invención/descubrimiento, inteligibilidad/mística.

Parte I [**1987**, 1-46]. *La clef des songes* comienza con un recuerdo entusiasta, muy a la Grothendieck, de la época (1976-1977) en la que "el primer sueño en mi vida, cuyo mensaje supe sondar y entender, transformó de inmediato el curso de mi vida, profundamente" [**1987**, 1]. El sueño, el acceso a estados penumbrosos de la conciencia, la exploración de las sombras, las sondas hacia lo profundo –nuevos contrapuntos con *Moby-Dick*– alteran y reorientan toda una vida[631]. Es el momento en el que Grothendieck reencuentra su "alma" y el "*niño en mí*", y desarrolla "una sucesión de periodos de aprendizaje, que se concretan con los cruces de «*umbrales*» sucesivos en mi itinerario espiritual" [**1987**, 1]. "Aprender", "renovarse", "renacer", se convierten entonces en tareas vitales imprescindibles [**1987**, 1]. "La historia de mi madurez hacia un conocimiento de mí mismo y hacia una comprensión del alma humana se confunde, casi del todo, con la historia de mi experiencia de los sueños" [**1987**, 2]: por una suerte de *inversión* típicamente grothendieckiana, gracias al sondeo particular de lo onírico, de las capas sumergidas de la conciencia, es cómo se alcanza un conocimiento de la "psiquis en general" [**1987**, 2]. Hay que sumergirse en lo oscuro para acceder luego a la luz, y el sueño se revela como un "testigo *directo*, perfectamente *fiel* y de una finura incomparable, de la vida profunda de la psiquis" [**1987**, 2-3]. La riqueza del testimonio es perfectamente representativa[632], y se ve cómo el sueño capta todo un mundo de enlaces entre lo inteligible y lo sensible: "detrás de apariencias a menudo desconcertantes y siempre enigmáticas, cada sueño constituye en sí mismo un verdadero *lienzo*, trazado con la mano de un maestro, con su iluminación y perspectiva propias, una intención (siempre benévola), un mensaje (a menudo impactante)" [**1987**, 3].

Ahora bien, después de registrar una inmensa variedad de sueños ("no lejos de un millar, de los cuales he sabido captar el mensaje en trescientos o cuatrocientos" [**1987**, 6]) –*ámbito inyectivo de la multiplicidad*–, Grothendieck devuelve el péndulo, describe ciertos patrones comunes en la ensoñación y postula la presencia de un ente superior,

---

631 En 1976, Grothendieck tiene 48 años, y le quedarán aún otros 38 años de vida, antes de morir en 2014. Los *tiempos largos* de su existencia nos muestran a un dinámico ser pensante y viviente que no puede seccionarse o reducirse fácilmente. La *multiplicidad* de sus entornos vivenciales merece más cuidado y respeto que aquellos que la comunidad matemática le ha otorgado, queriéndolo cómodamente restringir a su periodo de "ciencia normal" en el *IHES*.

632 El mismo *lenguaje* grothendieckiano es muy diciente: el acceso *directo* y *fiel* recuerda por supuesto las *técnicas matemáticas* usadas en el Lema de Yoneda, gozne metodológico y filosófico esencial de la teoría de categorías (ver, por ejemplo, [**1959-64**, III.1.7]).

del cual emanarían los diversos sueños –*ámbito proyectivo de la unidad*–. Emergen así "un *Ojo* que ve, y una *Mano* que pinta lo que se ve" [**1987**, 3], un "*Soñador*", "Pintor - Director, benévolo y malicioso, de mirada penetrante y con prodigiosos medios", "*Maestro del Sueño*", "*Uno, Único*" [**1987**, 4]. El *rapto místico* proporciona un *nuevo espacio* para sugerir la existencia del Soñador supremo, existencia que no puede ser probada[633] y que irrita sin duda a la comunidad matemática. No obstante, metodológicamente se trata del mismo proceso llevado a cabo con inmenso éxito en la praxis técnica: inmersión de una variedad de objetos en una categoría que los trasciende, y donde emerge una *estructura proyectiva unitaria*[634] que da cuenta de la diversidad de los entes en juego.

Grothendieck revela su proceso de acceso a los sueños, "como un niño pequeño: con el espíritu vacío y las manos desnudas" [**1987**, 4]. La ingenuidad y un "*alma hambrienta*" impulsan la búsqueda de "algo profundo" [**1987**, 5]. Un "instinto espiritual en el hombre" hace que "sus ojos terminen por abrirse y ver"[635] [**1987**, 3], y gracias a ello, en el caso del autor, permite que este pueda "percibir un mismo *soplo*, que no tiene nada de mecánico y no viene de mí" [**1987**, 7]. La *mirada infantil* es crucial, pues al sumergirse ingenuamente en los sueños es como se accede al Soñador, el cual "ama entregarse a quien se le acerca

[633] Grothendieck subraya claramente la imposibilidad de una "prueba" estándar. En el §25, "Dios no se define ni se demuestra", escribe que "las supuestas «pruebas» de la existencia de Dios, que más de una pluma ilustre nos ha regalado, no son más que niñerías" [**1987**, 75-76] y que la interpretación de los sueños "escapa enteramente a toda veleidad de «prueba»" [**1987**, 78]. Por otro lado, recuérdese el extraordinario argumento ontológico de Gödel sobre la existencia de Dios, K. Gödel. "Ontological Proof (1970)". En: *Collected Works*. Ed. por S. Feferman. Vol. III. Oxford: Oxford University Press, 1995, págs. 403-404, donde, si se asume una razonable definición de "Dios" y se asume el sistema modal $S5$, Gödel demuestra la *necesidad* de la existencia de Dios a partir de la mera *posibilidad* de su existencia. Los argumentos dogmáticos a favor, o en contra, de la existencia del Soñador no son tan fáciles de resolver.

[634] Por ejemplo, la norma proyectiva en espacios de Banach [**1953c**], los objetos libres en categorías abelianas [**1955-56**], el grupo de la K-teoría [**1955-57**], los topos clasificadores [**1960-69**], los motivos [**1967**], etc. En todos estos casos, el manejo del cuantificador $\exists!$ resuena con el arquetipo "*Único*".

[635] Acercaremos ese instinto espiritual y místico con la obra de Tarkovski, y con su esfuerzo por hacer despertar "nuestros ojos ciegos". La *teología negativa* de Florenski y de Tarkovski se enlaza naturalmente con la filosofía vitalista de Grothendieck. Ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

como un niño" [**1987**, 5-6]. En realidad, yendo aún más allá, es fácil observar cómo *toda la obra* de Grothendieck se encuentra imbuida de ese carácter desprejuiciado, abierto, elástico, moldeable –propio de los niños–, con el que va aproximándose sucesivamente a sus objetos de estudio. La desnudez, el hambre, la ingenuidad, la entrega, la limpieza, le acompañan en cada momento de un *desarrollo matemático no estándar*, camino que, a mediados de su vida, extiende a un *desarrollo espiritual no estándar.* La *integración* de las múltiples facetas diferenciales de su vida y obra es fundamental para captar la *continuidad profunda* de su ser.

Al entrar en los sueños, surge "otra voz" [**1987**, 11], distinta a la voz de la razón, la "voz del hambre" [**1987**, 12], abierta al cambio y al conocimiento nuevo, "como un parte íntima y viva, y como la carne misma de tu ser" [**1987**, 13]. Se accede así a una "verdad" que supera los simples entronques de la inteligibilidad racional y que "no es del orden de la razón, o de una intuición de naturaleza intelectual", sino que es "un acto de percepción de esencia espiritual" [**1987**, 13-14]. Emergen allí –en un "*acto de fe*" [**1987**, 14]– las imágenes de un "*Manantial*", del "*Soñador*" o de la "*Madre*" [**1987**, 15], imágenes a las cuales debemos "*entregarnos*" y, por consiguiente, en un acto comunitario pleno, debemos adoptar las prácticas de dar y recibir sin cesar[636] [**1987**, 15-16]. En esa connivencia, "la fe en los sueños, o por decir mejor, en el Soñador, se decantó como la quintaesencia misma de la fe en lo que hay de mejor en mí – en lo que me torna capaz de conocer, de amar,

[636] El recuento de cómo Grothendieck se *entrega* a la descripción de los sueños resulta conmovedor: "No habría sabido yo mismo decir por qué me obstinaba tanto, sin parar, a escribir de nuevo, sentado en mi cama: ante todo, el recuento del sueño (con un cuidado infinito ¡me tomaba dos horas seguidas!), luego (encendiendo la luz de nuevo) el recuento del siguiente sueño sobresaltado y de sus asociaciones inmediatas, bajo el golpe aún de la emoción; y luego aún, dos o tres veces seguidas (aunque cada vez había apagado la luz y me había acostado, con la idea de dormirme rápido), por qué me obstinaba de nuevo a encender la luz y a retomar con qué escribir, para anotar algunas (¡últimas!) reflexiones sobre la etapa anterior (que no obstante había creído ser la última) (...)" [**1987**, 10]. La *entrega* y el *tesón* del personaje nunca cesarán, hasta dejar, perfectamente clasificados y arreglados a su muerte, los numerosos cartones de manuscritos que deseó legar a la Biblioteca Nacional de Francia.

de crear con la mano, el espíritu y el corazón" [**1987**, 19]. Sin embargo, más alla de la "*llave*" y de la "*mano*" [**1987**, 23], en el rango de lo espiritual, que ayudan a abrir la puerta del conocimiento, hay que saber ajustar la llave, girarla y empujar la puerta, labor primordial del "*trabajo*" racional [**1987**, 23]. Gracias a la *organización* y al *orden*, se consigue entonces un "trabajo de *profundización*, una *penetración* de la periferia hacia las profundidades" [**1987**, 25]. Con metáforas memorables, Grothendieck se sumerge en la descripción de ese trabajo penetrante, tenaz y sostenido en el tiempo, gobernado por un *doble rostro de Jano*[637], un doble aspecto *yang* y *yin*:

> He aquí el primero. El espíritu entra y penetra en la cosa que debe conocerse, como si esta estuviese formada por capas o estratos; sonda laboriosamente una capa después de otra, atravesándola y dejándola de lado para penetrar en la que sigue, y continuando sin descanso su tenaz progresión hasta finalmente tocar *fondo*. (...) Es ese el aspecto en cierto sentido "externo" del trabajo de profundización, donde el espíritu que penetra juega un papel activo, "masculino" [**1987**, 26].
>
> Y he aquí el segundo aspecto del trabajo de profundización, el aspecto "interno". Es la psiquis ahora la que es penetrada, la que juega el papel receptivo o pasivo, "femenino". (...) La *psiquis misma* se percibe como una formación de capas superpuestas, desde la superficie (la pantalla donde se proyectan las impresiones y las tomas de conocimiento plenamente conscientes) hasta las partes más y más profundas y alejadas del Inconsciente. (...) A medida que se avanza, el camino se refleja, como en un espejo, de manera más o menos clara, más o menos completa, sobre la pantalla del conocimiento consciente [**1987**, 27].

Mediante el vaivén *yin-yang* se "integra plenamente un conocimiento que es ante todo de naturaleza espiritual" [**1987**, 28]. Podemos ver así en juego, al nivel del conocimiento en general y del conocimiento de sí mismo en particular, las estrategias de *profundización, arquetipación, dualización, inversión, integración*, características de la obra matemática de Grothendieck. Los contrapuntos armónicos, los "tiempos rítmicos" [**1987**, 32], la concertación de las voces [**1987**, 29], se unen en una honda ampliación del saber.

637 En la mitología romana, Jano es el dios de los *portales* y las *transiciones*, adecuado contrapunto clásico de las concepciones grothendieckianas sobre la matemática relativa. Sus representaciones mediante un *rostro bifronte* simbolizan el doble acto de entrada y salida, inicio y final, propio de un portal.

Parte II [**1987**, 47-79]. El 28 de mayo, un mes después del inicio de sus reflexiones, Grothendieck abre la segunda parte con el deseo de precisar el "corazón del mensaje de este libro que estoy escribiendo"[638] [**1987**, 47]. El *hecho*[639] central consiste en asegurar que "*el Soñador no es más que Dios*" [**1987**, 48]. El enunciado parece ser un galimatías –del "latín" o del "chino", de "matemática lapidaria" o de "especulación metafísica"–, pero, según Grothendieck, se trata de una "*realidad* perfectamente tangible", accesible a todos[640] [**1987**, 48]. Dios aparece descrito de diversas maneras [**1987**, 49]:

> (...) centro viviente y sentido omnipresente, a la vez simple e inagotable, evidente e insondable, próximo como una madre o como el amado, e infinitamente más vasto que el vasto Universo (...)
>
> (...) alma del Universo, soplo creador que sonda y conoce y anima todas las cosas, que crea y recrea el mundo en todo momento. (...) infinitamente, inefablemente cercano de cada uno de nosotros en particular, a la vez que es lo menos "personal", lo más "universal".
>
> (...) *puente* que enlaza todos los seres, o más bien, *agua viva* de un *Mar* inmutable común que enlaza todas las orillas.

Vemos así cómo el acceso al Soñador, o a Dios, utiliza las *mismas herramientas de la matemática grothendieckiana*, donde, a la búsqueda de vastas infinitudes y de fondos insondables, se elaboran sofisticadas técnicas de enlace y puentes conectores, así como se producen muy finos vaivenes entre lo particular y lo universal e inmersiones en las aguas vivas de mares categóricos.

Un "desprecio generalizado por el sueño" explica que se haya perdido su "sentido profundo, como Palabra viva de Dios" [**1987**, 50]. La lectura dinámica, animista y vitalista

[638] Obsérvense tanto el término "corazón", imagen muy grothendieckiana para acercarse al núcleo profundo de las cosas, como el término "libro", donde se indica una eventual consideración de publicación, que finalmente nunca se dará. Más adelante, Grothendieck vuelve sobre el "texto destinado a publicación" [**1987**, 66].

[639] Grothendieck subraya que no se trata de una *idea* descubierta, concebida o inventada, sino de un "hecho absolutamente loco [*dingue*], increíble – ¡y sin embargo verdadero!" [**1987**, 47].

[640] Grothendieck registra su acceso personal a ese "hecho", "un día de mitad de noviembre del año pasado [1986], hace poco más de seis meses (...) durante tal vez un cuarto de hora" [**1987**, 48].

de Grothendieck resulta esencial: a través de un "grito de *alegría*, de *exultación* – de la alegría de una «Buena Nueva»" [**1987**, 52], es cómo la revelación general de "*DIOS*, Maestro, Creador, Soplo de los Mundos" [**1987**, 52] adquiere su camino natural de entrada en una psiquis particular. El sol, la luz y el calor, formas de una realidad viva, se adentran en el alma [**1987**, 51-53], y, con ello, después de haber sabido recibir, resulta que "la gracia, abierta a todos, de seguir a Dios, es ante todo la gracia de *servir*" [**1987**, 54]. La "experiencia viva de Dios" [**1987**, 55] infunde una "energía nueva" [**1987**, 59] y un "impulso de confianza total" [**1987**, 60], que le llevan a Grothendieck a "arder" [**1987**, 62] y a sentir, en lo más profundo de sí mismo, ese "*Soplo* creador que atraviesa toda cosa" y que anima al Mundo [**1987**, 71-72]. De esta manera, "el Pensamiento creativo de Dios se concierta y actúa, y florece y se ramifica, y crece y se despliega en cada lugar y en cada instante" [**1987**, 72]. Extendiendo las metáforas grothendieckianas, no es difícil imaginar aquí los pliegues y despliegues de un *Haz Universal* que se proyecta y se refleja en cada uno de nuestros haces particulares de la existencia[641].

Parte III [**1987**, 80-136]. El 13 de junio, la tercera parte de *La clef des songes* anuncia un "recuento histórico de mi relación con Dios" [**1987**, 80]. Grothendieck empieza recordando su infancia, con padres "ateos" para los cuales "Religiones e Iglesias estaban destinadas a ser barridas sin vuelta atrás por la Revolución mundial", pero, de igual modo, gracias a sus orígenes judíos y protestantes, "tolerantes con respecto a las creencias y prácticas religiosas de los demás" [**1987**, 80-81]. La posibilidad de creencias diversas se ancla en efecto en el entorno de la "familia judía pía" de su padre, "en un pequeño

[641] Los encuentros entre la matemática y la mística, que hemos venido manifestando, aparecen también indicados por el propio Grothendieck: "(...) el trabajo matemático sirve de parábola graciosa [*cocasse*] para la investigación (a nivel de conocimiento espiritual) en la que estoy comprometido ahora, y que, por sus dimensiones, su espíritu de «fundamentos» y su caracter visionario, se asemeja a mi trabajo matemático de otros tiempos" [**1987**, 79].

pueblo judío de Ucrania, Nobozybkov"[642] [**1987**, 81], así como en el entorno de la "familia protestante" de su madre en Berlín [**1987**, 83]. La filosofía libertaria de sus padres y la fe en ayudar a los más desposeídos calan hondamente en el joven Alexander, como forma inicial de acceso a la bondad elusiva de Dios. Una sección muy íntima (§28, "Esplendor de Dios – o el pan y el ropaje" [**1987**, 86-88]) se basa luego en un texto escrito por Sascha y Hanka en 1927 [**1987**, 87], donde se narra un episodio de la vida del padre, ocurrido en el último (1914) de sus ocho años de estadía en prisión bajo el régimen zarista. A punto de desfallecer, "sin comer ni beber (...) con el alma ulcerada, roída por una imposible revuelta y por la humillación de la impotencia", el padre siente

> una cosa inaudita – que fue el secreto más precioso y mejor guardado en los diez años siguientes de su vida. Es una ola súbita de luz, de indescriptible intensidad, en dos momentos sucesivos, que llena su célula y lo penetra y lo llena, como un agua profunda que alivia y borra todo dolor, y como un fuego ardiente que se consume de amor – un amor sin límites para todos los vivos, barriendo y borrando toda distinción de "amigo" y "enemigo" [**1987**, 87].

Resulta muy atractivo observar cómo, en la escritura de sus padres, desde el inicio, en el periodo mismo de gestación de su hijo, emergen las visiones del *volcán* ("fuego ardiente") y del *mar* ("agua profunda") –dos de las imágenes centrales que hemos tomado en esta monografía para intentar entender a Alexander Grothendieck–, y cómo, en la mediación del fuego y el agua, se eleva el "amor", motor imprescindible de su obra.

[642] Según el recuento de Grothendieck, el padre escapa del pueblo a los 14 años para unirse a grupos anarquistas, y, a partir de allí, "la fe en la «Revolución mundial», de la cual se sentía un apostol designado, toma el lugar de fe en Dios" [**1987**, 81]. En una nota al pie, indica que "debo a mi padre el haberse esforzado por suscitar en mí la misma solidaridad con los más desheredados, que fue tan fuerte en él y permaneció siempre viva" [**1987**, 81]. De igual manera, subraya la "personalidad excepcionalmente fuerte" de su madre, y su energía al "liberarse de la autoridad moral de sus padres desde los 14 años" [**1987**, 83] (a los 14 años, Alexander, por su parte, estará saliendo del campo de concentración de Rieucros – presenciamos así tres caracteres muy fuertes, marcados desde temprana edad). Grothendieck resalta los "dones literarios notables" de ambos [**1987**, 83], y dedica varias páginas a seguir en detalle la vida fascinante de sus padres [**1987**, 80-85]. Es fácil sentir su entera devoción por ellos: sus figuras éticas le acompañarán íntimamente el resto de su vida.

Después del homenaje a sus padres, Grothendieck rastrea sus varios encuentros y desencuentros con Dios: *(i)* "primer vestigio concreto" a los tres años, cuando, en un margen de un libro para niños, dibuja a su padre derramando una cacerola de agua sobre la cabeza del Buen Dios [**1987**, 89]; *(ii)* segundo encuentro cuando, "en la familia muy como se debe de un anciano pastor" a la que ha sido enviado por sus padres [**1987**, 89], se topa con Rudi Bendt, "hombre de gran sencillez, condición humilde y poca instrucción", del cual "el amor irradiaba tan simplemente, tan naturalmente como respiraba, como una flor exhala su perfume" [**1987**, 90], cuya "*ausencia de toda vanidad*" Grothendieck detecta solo en figuras ejemplares como Cristo, Buda o Lao-Tse [**1987**, 91], y en quien se realiza "humildemente y en toda su perfección, el acuerdo completo y la unidad con Dios que vive en él" [**1987**, 92]; *(iii)* serie de desencuentros en la adolescencia, "hasta mi decimosexto año", cuando Grothendieck considera que "Dios es pura invención del espíritu humano", parte de una "moral convencional que me parecía muy estrecha, y destinada más bien a perpetuar las desigualdades y las injusticias" [**1987**, 94], situación que le lleva a un "escepticismo perentorio de Dios y sobre todo a mi desconfianza visceral con respecto a las Iglesias de toda confesión y obediencia" [**1987**, 96]; *(iv)* "primera brecha" sentida "en marzo 1944, cuando iba a cumplir dieciseis años" [**1987**, 96], donde, en un conversatorio de biología, descubre que en la "más mínima celula viva" se encuentran una "*Inteligencia*", una "*Intención*" y un "*Propósito*", "misteriosos para la inteligencia humana, pero cuya presencia es irrecusable" [**1987**, 98], lo que le lleva a "cambiar de categoría", de "ateo" a "deísta" [**1987**, 100]; *(v)* "crisis de abril 1974" [**1987**, 113], cuando se enfrenta a un "momento de verdad" y a un trabajo de reflexión subsiguiente (junio a agosto 1974), hasta llegar a las "grandes conmociones interiores de 1976, año de un verdadera «fundición de los hielos» en la psiquis", bajo la influencia de Krishnamurti [**1987**, 115]. De esta manera, el "*esbozo de mi evolución espiritual*" [**1987**, 120] muestra un largo, complejo, multifacético y zigzagueante camino en la apreciación de Dios.

Parte IV [**1987**, 137-182]. El 9 de julio[643] se inicia la cuarta parte de *La clef des songes*. Después de sus variadas experiencias alrededor de Dios, Grothendieck siente la necesidad de "hacer «converger» la escritura de un haz[644] de notas que parecía querer divergir más y más" [**1987**, 137]. La lectura del pensamiento religioso de Marcel Légaut[645] le ayuda en esa tarea, y encuentra una "*convergencia general de las misiones humanas*, que Légaut percibe con profundidad visionaria" [**1987**, 140]. La convergencia *general* es aquí esencial, al unir en una *visión común* lo espiritual y lo material, y poder escapar así de una "*cacofonía* de incomprensión mutual"[646] [**1987**, 141]. Grothendieck reconoce entonces que su "misión" [**1987**, 143] consiste en profundizar en sí mismo, y contar una "*meditación perseguida «en público»*" [**1987**, 144], para poder "*liberar*" [**1987**, 145] el conocimiento, y desatar los prejuicios que han encadenado a la psiquis. En ese proceso de ampliación, apertura y liberación, la presencia del Soñador actúa como un *multiplicador de dimensión*, que enriquece la razonabilidad (= razón + sensibilidad).

---

643 Con esto, puede calcularse que, hasta el momento, Grothendieck escribe a un ritmo de 2 o 3 páginas diarias: Parte I, 30 abril - 27 mayo, 46 páginas en 28 días; Parte II, 28 mayo - 12 junio, 33 páginas en 16 días; Parte III, 13 junio - 28 junio, 57 páginas en 16 días; Parte IV, 9 julio - 27 julio, 46 páginas en 19 días. El ritmo se acentúa en las partes siguientes: Parte V, 27 julio - 15 agosto, 85 páginas en 20 días; Parte VI, 4 septiembre - 13 septiembre, 47 páginas en 10 días. Por otro lado, las *Notas* y los *Mutantes* poseen un ritmo más atenuado, diferenciándose y reintegrándose alrededor del texto principal, ritmo que al final adquiere una cadencia sincopada en *Los mutantes* (18 septiembre 1987 - 2 abril 1988, 515 páginas en 6 meses). Si se siguen las fechas del calendario 1987 registradas en el diario, puede constatarse que Grothendieck escribe casi todos los días, incluidos los fines de semana: la *continuidad* de su empeño cotidiano refleja la continuidad de su inquisición general. Una vez más, el *orden* y el *control* de su escritura reflejan un estado mental *sano*, alejado de cualquier tipo de "demencia".

644 La aparición del "haz" no es casual: hemos indicado arriba (p. 444) la presencia de una *hacificación densa* en *La clef des songes*, entre lo local y lo global, entre una multiplicidad de apariencias divergentes y una unidad convergente superior, entre tipos y arquetipos, entre los sueños y el Soñador.

645 Marcel Légaut (1900-1990), matemático y profesor en Rennes (1927-1939), se retiró pronto como agricultor y pastor. Su alejamiento prematuro de la comunidad debió impactar mucho al Grothendieck de los ochenta, quien, sin saberlo, había seguido los pasos de Légaut. Por otro lado, sus numerosos textos religiosos (1933-1988) propugnan la búsqueda de un camino interior y utópico, alrededor de una figura renovada de Jesús, cuidada por una comunidad reflexiva y solidaria.

646 Debe resultar clara la cercanía con el proceder técnico del mismo Grothendieck, quien suaviza en lo "general" (objetos en-múltiple) la "cacofonía" de las obstrucciones particulares (objetos en-sí).

Otro multiplicador de las potencias humanas se sitúa en el "Eros". En contra de las tradiciones religiosas, que "manifiestan una actitud de desconfianza visceral con respecto a la pulsión erótica" [**1987**, 146], Grothendieck observa en esa pulsión "*la* gran fuerza creadora en obra en el Universo" [**1987**, 147]. El "asumir nuestra animalidad, sin reservas y sin vergüenza, sino con reconocimiento por esa riqueza maravillosa"[647] [**1987**, 147], es parte imprescindible de nuestra *humanidad*, y "no es ni un azar ni una aberración que, en todas las lenguas del mundo (si no me equivoco), la *misma* palabra «amor» designa tanto la fuerza que atrae el hombre y la mujer, y los torna en «una misma carne», como el amor en un plano espiritual, que trasciende carne e inteligencia" [**1987**, 147]. La *integración de lo visible y lo invisible*, de lo terreno y lo ultraterreno, de Eros y Dios, debe orientar un conocimiento plástico y flexible: "Eros es una emanación de Dios, la fuerza de Eros es una manifestación de la fuerza creadora de Dios" [**1987**, 148].

Por otro lado, Dios provee un "Sentido – u Ojo" [**1987**, 149], donde se subsanan nuestros impulsos "*ciegos*" [**1987**, 149], y donde, en vez de imaginar el Universo como una sofisticada "mecánica encajada", "más allá del azar, de los mecanismos, de las pulsiones, el Universo es *Espíritu* (...) es *Sentido* (...), como una voz que murmura en la sombra, como un soplo imperceptible que pasa, como un tímido fulgor que surge del espesor de la noche"[648] [**1987**, 152]. Una "*visión del «Todo»*" [**1987**, 153], "una visión de conjunto del Mundo" [**1987**, 155], un acceso al "*Tao* o *Propósito de Dios*" [**1987**, 154], se convierte entonces en objetivo *sine qua non* del proyecto grothendieckiano, el cual solo puede ser aproximado mediante un incesante "trabajo de *profundización interior*" [**1987**, 158] y un contundente "*testimonio*" personal [**1987**, 162].

---

647 Una nueva imagen arbórea resalta esa riqueza: "Lo alto sumerge sus raíces en lo bajo, y un árbol estaría muy enfermo si repudiara la tierra que lo acoge y que lo nutre" [**1987**, 147].

648 Este tipo de imágenes han hecho que, con cierta justicia, Pierre Cartier, Alain Connes o Laurent Lafforgue hayan situado la pluma de Grothendieck al nivel de otras grandes plumas de la lengua francesa.

La *visión global* se torna apocalíptica, y Grothendieck se siente profeta de una gran revelación: "anunciar la Tempestad y la Onda que sigue a la Tempestad, premisas de la gran Mutación" [**1987**, 164]. Las *mareas furiosas*, "escritas sudando sangre y agua"[649] [**1987**, 165], inundan la narración con tonos sombríos: "corrupción sin vergüenza" [**1987**, 163], "gran Cambio de los Tiempos" [**1987**, 164], "Edad de la Matanza" [**1987**, 165], "hora grave" [**1987**, 166]. *El volcán y el mar estallan.* Las alegorías oscuras nos acercan al Arca de Noé, a Jonás y la ballena, e inevitablemente, siempre, a *Moby-Dick*. Solo el hecho de que el hombre es "creador por esencia" [**1987**, 168] consigue abrir un atisbo de esperanza, para imaginar una "impensable Mutación" que permita escapar a la aniquilación de los tiempos: "el paso de una humanidad-rebaño, formada por seres que ignoran y reniegan una naturaleza íntima de la cual tienen miedo, a una *humanidad «humana»* – una comunidad de seres de la misma esencia, que adquieren conciencia de ser creadores" [**1987**, 169]. Solo los *mutantes*, siguiendo la "vía solitaria" de la creatividad [**1987**, 170], nutren la posibilidad de abrir la senda hacia un "*umbral* decisivo, donde la humanidad en conjunto podrá acceder a un estado de creatividad efectivo y no solo potencial" [**1987**, 174].

Parte V [**1987**, 183-268]. La quinta parte de *La clef des songes* está dedicada en su gran mayoría al "conocimiento espiritual". El 27 de julio, Grothendieck se siente "en medida de examinar la relación entre los tres planos de la creación: carnal, mental, espiritual" [**1987**, 183]. Las jerarquizaciones gnoseológicas se imbrican con aquellas matemáticas, sabiendo que, una vez establecidos los "planos", la *clave* [*clef*] pasa a ser el estudio de sus *correlaciones* (proyectivas e inyectivas en lo esencial). Entre esos planos, "el conocimiento

649 El registro de los días es aquí impactante (ver nuestra *Nota 643* arriba): "Para mi sorpresa, el trabajo sobre *La Clef des Songes* resulta ser mucho más laborioso que aquel de *Récoltes et Semailles*. Estoy obligado a realizar dos copias a máquina, primero un bosquejo, a menudo burdo y mal armado, que debo retomar enteramente para escribir un texto «presentable», antes de pasarlo a limpio (a menudo al día siguiente). Nunca literalmente por lo demás, sino puliendo aún el texto tachado, a medida que lo mecanografío de nuevo. Esto conforma un ritmo de crucero de unas cuatro páginas al día, a razón de dos o tres horas de trabajo apretado por página, sin domingos ni sabbats (...)" [**1987**, 165].

espiritual es el conocimiento por esencia más elevado" [**1987**, 183], pero este no aparece recortado[650] del conocimiento carnal o mental [**1987**, 183], sino más bien "abraza e incluye, trascendiéndolos por su luz propia, tanto el conocimiento carnal, como el conocimiento mental" [**1987**, 184]. *Los tránsitos son imprescindibles y solo gracias a ellos se eleva el entendimiento.* En los solapamientos[651] del conocimiento, Grothendieck acepta la aparición de "contradicciones (...) entre parcelas de conocimiento de una misma realidad", que le sirven de señal para un "renacimiento súbito de interés, de suspenso inesperado ante una situación que, por la contradicción misma, se percibe como intensamente creativa"[652] [**1987**, 185].

La idea de que una *totalidad* englobe el conocimiento es fuente misma de su nutrición. El que "*el Universo cognoscible es coherente*" allende su diversidad, el que emerja "la totalidad de mi ser", el que "un campo *más vasto*" se abra a la intelección [**1987**, 186], son contextos en los que una *amplitud de sentido* sumerge[653] nuestras instancias particulares. En el caso de la experiencia amorosa, el conocimiento carnal, "de una riqueza que desafía toda expresión y toda traducción" [**1987**, 187], y el conocimiento intelectual, ligado a "*una experiencia artística*, medio privilegiado de aprehensión de lo carnal en el nivel de lo mental" [**1987**, 187], son integrados dentro de un conocimiento espiritual superior, donde

---

650 La *no separación* de los planos es fundamental, pues los unos dialogan con los otros de múltiples modos (proyectivo, inyectivo, especular, pendular, bifronte, etc.). Esto refleja las técnicas de *no separación* usadas en la conceptualización *general* de los haces. Por otro lado, una tendencia "separatista" contraria resulta ser más característica de las "grandes religiones" [**1987**, 183].

651 No es difícil imaginar aquí un nuevo *haz* en acción, donde distintas *secciones locales*, en distintos planos, buscan pegarse en *secciones globales*, que integren coherentemente diversas perspectivas materiales, mentales y espirituales.

652 Para un extenso estudio de las contradicciones como *manantial* de creatividad, ver mi F. Zalamea. *Antinomias de la creación. Las fuentes contradictorias de la invención en Valéry, Warburg, Florenski.* Santiago de Chile: Fondo de Cultura Económica, 2013.

653 De la misma manera, un *mar* categórico inunda un objeto y devela su sentido más amplio, como en los *topos de prehaces* del Lema de Yoneda, o como en la estructura superior emergente en un *topos de haces* sobre un sitio o sobre un espacio topológico particular.

aparecen el "*soplo*", la "*belleza*", la "*comunión*" [**1987**, 191]. De una manera más extensa y general, por un lado, la belleza y la contemplación constituyen dos de las *llaves* [*clef*] centrales de acceso al conocimiento espiritual [**1987**, 192], y, por otro lado, el "dolor – o la vertiente de sombra", desde el *verso*[654], ofrece un atisbo de aquello que se nos escapa [**1987**, 195]. En la *vertiente de sombra*, con su "mordida de frío o quemadura de fuego, con largas privaciones" [**1987**, 196], yace una "relación fuerte y profunda" [**1987**, 197] con el saber. "Todo se encuentra ligado" [**1987**, 198], y en la interconexión de los distintos modos de vivencia y de aprehensión de las cosas es donde radica la riqueza inagotable del conocimiento espiritual.

El "perfume" y el "soplo de vida", que nos acercan al espíritu, yacen en el gusto de las cosas más concretas: "el pan o el agua", "las tierras húmedas o el pasto hollado", "la sonrisa de un rayo de sol o de la amada o la frescura súbita de una onda", "el olor de la madera quemada o de la brasa adormecida" – "entender estas cosas y sentir su perfume es también nutrirse de ellas, en su cuerpo y en su inteligencia, pero también en su alma" [**1987**, 200]. La sensibilidad de las "cosas muy simples que cada quien puede entender en su totalidad" [**1987**, 200] abre las compuertas hacia lo espiritual[655]. Sin embargo, el sentido de la belleza, el contacto *humano*, la sencillez de enlaces entre lo terreno y lo ultraterreno, para Grothendieck, "han desaparecido casi sin dejar traza, en el espacio de las últimas dos o tres generaciones" [**1987**, 201]. La "*conciencia* de la angustia y de la miseria"

---

654 Parecen surgir aquí muchas conexiones naturales con la *via negativa* de la filosofía y de la teología ortodoxas en la tradición rusa, particularmente en un Florenski o en un Tarkovski. No obstante, no nos consta un tal registro *explícito* en los textos de Grothendieck. Para un estudio *implícito*, derivado en cambio del *ambiente* austero de la familia y de la exigente herencia de su padre, ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

655 Se trata del mismo proceder en el cine de Tarkovski, quien, en los *particulares concretos* y en las imágenes sensibles más elementales (viento en los abedules, leche derramada, aguas residuales, caballos y perros entre la neblina, lodos, lluvias, etc.), busca siempre signos de acceso a algo superior (*universales generales*). Ver *Capítulo 18* abajo.

espiritual de nuestra época[656] debe dar lugar entonces a una gran Mutación [**1987**, 202]. La "*mentalidad del rebaño*", la "*inmadurez espiritual*", la "*ausencia más o menos total de autonomía*", la "*muerte espiritual*" [**1987**, 205] son causas de la "incapacidad de ver las cosas aún más evidentes" [**1987**, 204], y obstruyen las estrategias para "salir del engranaje que nos ha llevado al umbral de la destrucción física y psíquica de nuestra especie"[657] [**1987**, 204].

La *clave* o *llave* [*clef*] para escapar a esta degradación de los valores[658] consiste en multiplicar la "*potencialidad creativa*" [**1987**, 205] de la especie. Allende lo singular, Grothendieck siente que "*no somos nosotros quienes creamos*, sino que *Otro* crea por nuestras manos" [**1987**, 213]. En la *combinación* de la "revelación" y el "trabajo personal" –"con la ayuda de la mano discreta de Dios, de manera visible o invisible"– emerge el entendimiento [**1987**, 215]. Los *vaivenes del péndulo, las oscilaciones entre niveles, los tránsitos entre lo concreto y lo abstracto, las correspondencias entre lo particular y lo general*, siguen siendo fundamentales en el pensamiento grothendieckiano. "Parte de Dios, parte del hombre" [**1987**, 214], un soplo exterior se conjuga con una voz interior.

656 El mismo Grothendieck se autocritica en ese sentido, y señala que "por actitudes posesivas y reflejos de vanidad, contribuí también a la extraordinaria degradación ética del trabajo científico que ahora constato" [**1987**, 202]. Su crítica al ambiente matemático no es menos firme, tildándolo de cínico, despreocupado, inmoral [**1987**, 203]. En las reflexiones de los años ochenta, Grothendieck toma conciencia de ese estado de cosas, situación que sin duda le desgarró profundamente a su salida del *IHES* (1970), pero que aún se ocultaba en niveles intermedios de su inconsciente. Las *pulsiones contradictorias* de su psiquis, en contra de él mismo y de sus colegas, debieron ser sin duda las razones profundas para su partida, más allá del incidente mismo de los fondos militares destinados al Instituto.

657 Treinta años después, el tono apocalíptico de Grothendieck resulta estremecedor. Si bien es cierto que una gran parte de los seres humanos *individuales* vivimos en mejores condiciones materiales (aunque piénsese, no obstante, en África), la *especie* humana y el Globo, en su conjunto, no dejan de degradarse a una velocidad inaceptable, año tras año. Por otro lado, la emergencia de las redes sociales ha *encerrado* a cada individuo al frente de una pantalla: el soplo, el contacto, el perfume, son allí inexistentes. La *libertad horizontal* del Internet (*superficie*, multiplicidad de mundos posibles) va en detrimento de su *profundización vertical* (*fondo*, pensamiento crítico). Treinta años después de *La clef des songes*, los premonitorios llamados de conciencia de Grothendieck deberían convertirse en *alarmas* para la juventud actual.

658 Piénsese en *Los sonámbulos* (1931-1932) de Hermann Broch.

La "*escucha*", la "*percepción*", la "*traducción*" [**1987**, 218] se convierten en tareas imprescindibles para la supervivencia de la especie. Una "cualidad de verdad y de autenticidad" [**1987**, 232] debe orientarnos: "*el acto que por su naturaleza es espiritualmente fértil, tanto para quien lo cumple como para el Universo entero, es el acto auténtico, el acto realizado por un ser en estado de verdad*" [**1987**, 238]. De esta manera, la "verdad", lejos de reducirse a sintagmas deductivos en una arquitectónica lógica, se entrelaza con la belleza y con una armonía universal, en un sentido pleno matemático-filosófico-místico que supera cualquier reduccionismo[659]. El estado de verdad solicita una "*escucha de la voz interior*", "*eficaz*" y "*acogedora*", escucha que, allende nuestros sentidos y nuestra inteligencia, nos deja percibir la "realidad espiritual" [**1987**, 243-244]. El "*descubrimiento de la meditación*" constituye la *clave de bóveda* [*clef*], el "*salto*", la "*penetración* decisiva" en los procesos de acercamiento a lo espiritual [**1987**, 247]. Con la meditación, desaparecen el "*miedo de conocer*" [**1987**, 250], la "*división en mí mismo*" [**1987**, 250], las "*fuerzas de interferencia*" que perturban el silencio interior [**1987**, 253], las "*orejeras*" [**1987**, 258], las "malas compañías" [**1987**, 262], y pueden refinarse la "sabiduría", la "libertad" y la "responsabilidad" humanas, fuerzas positivas sumergidas en las "aguas vastas y profundas del río Tiempo"[660] [**1987**, 268].

Parte VI [**1987**, 269-315]. El 4 de septiembre, después del "flujo inesperado de una reflexión religiosa y metafísica enteramente fuera de programa"[661], Grothendieck se dice

---

659 Para conexiones con el *summum bonum* de la estética según Peirce (= "crecimiento continuo de la razonabilidad"), donde la *estructura armónica* de la belleza adquiere un profundo papel *orientador* para el conocimiento, ver nuestro *Capítulo 16* abajo.

660 A partir de esta imagen, y de la manera como los funtores representables se sumergen en categorías de prehaces, realizaremos abajo (*Capítulo 17*) una inmersión de la *obra completa* de Grothendieck en un *topos de haces sobre modelos de Kripke*, donde estos últimos sirven de adecuada representación para un *tiempo ramificado*. Historia, fenomenología y metafísica se conjugarán en esa aproximación unitaria –*hacificada*– a la trayectoria de Grothendieck.

661 Grothendieck sitúa ese "desvío" entre el 26 de junio y el 3 de septiembre [**1987**, 269], es decir, cuando escribe las *Partes IV, V*.

"al fin listo para retomar el hilo de la narración: la historia de mi relación con Dios" [**1987**, 269]. La salida del *IHES* le convierte en un "infatigable apóstol de la Vida, amenazada por la demencia de los hombres (...) tarea ardiente de dimensiones inmensas" [**1987**, 270]. Con su partida, escapa de su "*prisión*" en el Instituto, cruza una "*puerta*" [**1987**, 272] y accede a una verdadera "*liberación*": "por primera vez en mi vida[662], creo, pude conocer la alegría maravillada y la plenitud de quien se siente aliviado de potentes obstáculos" [**1987**, 273]. Después de un "periodo de fermentación intensa" con la gente[663] [**1987**, 274], Grothendieck se adentra en un recogimiento interno más profundo, gracias a la "cosecha inaudita de mis sueños desde el año pasado [1986], sobre todo los sueños metafísicos y los sueños proféticos" [**1987**, 275].

Las compuertas de lo onírico conforman el mejor acceso a Dios. Con "todo acto creador, por más ínfimo que parezca" [**1987**, 276], se inicia una fecunda generación de la "esperanza" [**1987**, 277], de la "*fe* inmensa en el hombre" [**1987**, 278], de la conciencia de cómo "*sopla el Espíritu de Dios*" [**1987**, 286]. Una "*vida nueva*, bosquejo a tientas de una sociedad nueva" [**1987**, 287], surge al aceptar la multiplicidad de capas de la realidad y de la psiquis [**1987**, 290]. Desde el silencio y la soledad[664], Grothendieck logra escapar de una "marea invasora de *ruido* (...) que llena y sumerge este Mundo demente, cuyo sentido

---

[662] No obstante, en 1957, en una corta crisis vocacional, Grothendieck le deja entender a su madre que "me disponía a dejar el trabajo matemático para hacerme escritor" [**1987**, 269]. Los pesos de la técnica son muy exigentes, pero Grothendieck consigue obviarlos: de hecho, el año 1958 se convierte en uno de los periodos mayores de su creatividad. El matemático, el músico, el escritor y el pensador conviven en diferentes estratos de la conciencia y de la acción.

[663] "Años intensos y fecundos de los comienzos de *Survivre et Vivre* en 1970-72" [**1987**, 275], en los que adopta el "papel designado (...) de «papa de la ecología», mitad Gurú mitad «sabio distinguido», mitad «cabellos largos» mitad eminencia impecable" [**1987**, 277]. La ironía y el humor nunca le faltaron a Grothendieck.

[664] "A partir de julio 1979, me retiré por vez primera en una soledad casi del todo completa. Esta se prolongó durante más de un año. Fue el año en el que, veintidos años después de la muerte de mi madre y treintisiete después de aquella de mi padre, por vez primera «hice conocimiento con mis padres» y con lo que habían sido sus vidas. Es entonces que descubrí las fuentes del conflicto en mi ser, remontando a los días lejanos de una infancia rota y olvidada..." [**1987**, 295].

y substancia se arruina y se desagrega en el caos del ruido”[665] [**1987**, 299]. Contra una “sobre-saturación del mundo y de mí mismo por el *ruido*” [**1987**, 300], una “*nostalgia del silencio*” [**1987**, 299] le acerca al campo y a una comunión con la naturaleza, lejos de la “ciudad de hoy, tentacular, devoradora, ajetreada, árido y ruidoso símbolo de la demencia de nuestros tiempos” [**1987**, 303]. La soledad le aleja también de la vida familiar[666], pero le acerca a todo aquello que trasciende las particularidades acotadas del yo. Entre 1973 y 1978, alejado de las grandes “*tareas*”, Grothendieck se abre entonces a “*vivir en el presente*”, “*hacer*”, “*jugar*” [*muser*] [**1987**, 313], de manera “excepcionalmente fecunda” [**1987**, 314], hasta lograr “*aceptar* plenamente, en todo lo que somos, a Aquel que obra en nosotros” [**1987**, 315].

Notas [**1987**, N1-N176]. Entre las 57 notas (medianas y extensas) referidas al cuerpo principal de *La clef des songes*, escogemos mencionar a continuación solo aquellas ligadas estrechamente con el pensamiento matemático, desde su emergencia creativa hasta su estabilización arquitectónica. *Nota 3*: “El uno y el infinito” (4 junio) [**1987**, N10-N11]. Grothendieck protesta contra algunas sutilezas teológicas, que no distinguen entre un Dios general, como “Observador perpetuo” y “Fuerza activa”, y el espíritu de Dios en la psiquis de una persona particular. La falta de reconocimiento de un Dios superior le parece similar a no saber distinguir entre “el número 1 y el número ∞” y no saber constatar, “en las tripas”, “la simple evidencia” de distinción entre el “yo” y un “Otro”. *Nota 7*: “Arquetipos y manifestaciones de Dios” (22 mayo) [**1987**, N15-N16]. Algunos arquetipos (Madre, Padre, Hijo, Niño, Nieto, Viejo) son para Grothendieck “aspectos diferentes de la

665 La premonición es una vez más impactante, sumergidos como ahora realmente lo estamos en la cacofonía de la desinformación a ultranza, a partir del ruido descontrolado de las redes sociales.

666 Uno de los escasos recuentos de esa trayectoria familiar registra rápidamente los nacimientos de sus cinco hijos (1953, 1959, 1961, 1965, 1973), señalando que “todo ello pesó en mi vida de una manera no menos pesada que en cualquier otra vida” [**1987**, 310]. Las pocas referencias a sus hijos reflejan el desapego y la ausencia, parte de una compleja liberación de amarras, pero también un cuidado de la intimidad de los demás y un impulso protector no contemplados en sus duros psicoanálisis internos.

naturaleza de Dios”, quien encarna en todos ellos a lo largo de la existencia. De manera más amplia, la infinitud de las manifestaciones vivas procede de un manantial unitario original. *Nota 13*: “Verdad y conocimiento” (12 junio) [**1987**, N38-N40]. Una distinción entre “conocer” (espectro inquisitivo) y “creer” (religión dogmática) permite hablar de verdades “en el plano de la realidad espiritual”, allende lo estrictamente científico, técnico o práctico. Por un lado, se encuentran las “verdades de naturaleza general”, que “no pueden ser probadas”, y, por otro lado, “la verdad de una situación particular, única”, donde la concreción y el *rigor* sintonizan un diálogo con el “Huésped” en nosotros. La “medida”, el “patrón” o el “criterio” de verdad “residen finalmente en Dios”. *Nota 14*: “Matemáticas e «imponderables»” (12 junio) [**1987**, N40-N41]. Grothendieck observa cómo ha llevado en sí “cosas vivas y fecundas, en contra de la indiferencia y el escepticismo de mis congéneres”, que “veinte o treinta años después, se asimilan, adoptan y entran en el patrimonio común”. Allende los cálculos y las demostraciones, donde se aseguran el “acuerdo” y el “confort” de la comunidad matemática, los “imponderables”, “que no entran en ninguna caja terminada”, conforman “la vida y el alma de la matemática”. “Una sola *pregunta* que toque el fondo puede ser más fecunda que mil «resultados» (o «teorías») que cubran de espuma la superficie”. *Nota 39*: “El niño creador (1) – o el descubrimiento del mundo” (22 julio) [**1987**, N106-N109]. El descubrimiento en los muy jóvenes funciona como acto de creación, aunque no dé lugar aún ni a trabajos, ni a productos tangibles. La inocencia del niño le dispone a sentir “relámpagos instantáneos de creatividad”, que le permiten activamente *asimilar e integrar, “a partir de la nada”*. “Creo que no es exagerado decir que el niño consigue, en calidad y cantidad, una actividad creadora (o una «obra» en el sentido pleno del término) más considerable (y de lejos) en los dos primeros años de su vida, de lo que desplegará en todo el resto (excepción hecha de algunas existencias excepcionalmente creativas)”. *Nota 45*: “El niño creador (2) – o el campo de fuerzas” (1 agosto) [**1987**, N125-N126]. La “calidad de inocencia” en el niño le permite acceder a las “capas más profundas del ser”, dentro de un campo de fuerzas donde actúan la “sensibilidad verdadera”, la “frescura de percepción”, la “delicada desnudez” de un recién nacido. A la “clausura” del adulto se contrapone la apertura del niño, cuya “acción benéfica sobre el medio” genera un desarrollo natural de la creatividad. *Nota 51*: “Los clichés de lo espiritual (1): *haro*[667] sobre el «error» y la «ignorancia»” (23 y 30 agosto) [**1987**, N148-N157]. “El estado de verdad no excluye ni el error, ni la ignorancia”: los científicos reconocen, en su experiencia cotidiana, “el papel crucial, no solo inevitable sino sobre todo indispensable y fecundo, del error en el camino mismo del descubrimiento” [**1987**, N148]. “La reflexión seguida desde hace cuatro meses con la escritura de *La Clef des Songes*, y las lecturas que la han acompañado, me han convencido completamente de que tanto en el plano espiritual (y particularmente en el conocimiento de sí), como en el plano del conocimiento intelectual, el error y la ignorancia son inseparables de la condición humana” [**1987**, N149] . La verdadera medida de la “estatura del hombre” se encuentra en su confrontación de los supuestos límites entre una verdad restrictiva y un error creativo, y en la superación de los “abusos” y los “contrasentidos” de la “sempiterna oposición verdad – error, verdadero – falso” [**1987**, N155].

Los mutantes [**1987**, N177-N691]. El desarrollo más amplio de *La clef des songes* se encuentra en las 87 notas (de nuevo, medianas y extensas) dedicadas a quienes Grothendieck considera sus Maestros espirituales: los *mutantes* que abren el camino hacia la Gran Mutación[668]. La extensión del material imposibilita una descripción precisa, y nos concentraremos aquí solo en cinco de las figuras más relevantes para la visión científica y cultural grothendieckiana: *(i)* Walt Whitman, *(ii)* Bernhard Riemann, *(iii)* Rudolf Steiner, *(iv)*

[667] *Haro* (= *Hear me*, Oídme) convoca un clamor de protesta ante una situación de equivocación, oprobio o injusticia.

[668] Sobre la Gran Mutación, ver pp. 449, 452 arriba [**1987**, 164, 169, 202]. Para una lista parcial de los *mutantes*, ver p. 434 arriba [**1987**, *Les mutants*, *iii-v*]. Una lista cronológica completa de 18 mutantes aparece en [**1987**, N480-N482].

Charles Darwin, *(v)* Sigmund Freud[669]. *(i). Walt Whitman - Notas 76, 77, 80* (13-19 noviembre) [**1987**, N265-N274, N281-N282]. Alrededor de *Hojas de hierba*[670], "torrente poético y épico", "escrito en la onda subiente que siguió a la «iluminación»", Grothendieck reconoce "un momento que marca un giro en la existencia" [**1987**, N266]. La recepción de las "cosas simples y verdaderas, como las hojas de hierba", la apertura delicada de la "epidermia, con mil pequeñas manos abiertas que recogen alegremente los soplos y los efluvios que pasan, caricias del Bienamado", la "exultación visionaria a la medida de una gran Nación y el Universo entero", el canto del poeta absorbido por el amor [**1987**, N267], son ejemplos de esa *apertura cordial que se manifiesta en la presencia universal de una conciencia cósmica*[671]. Las dificultades que sufrió Whitman con la recepción de su obra, los "sarcasmos", una "semi-miseria endémica y tenaz", lo "escasos amigos" [**1987**, N269] poseen sus contrapuntos en la vida del mismo Grothendieck. Más allá de lo "*accesorio*", del "peso de la materia sobre el espíritu", la labor del poeta ofrece un acceso a lo "*esencial*", a lo "*común*" entre todos los seres, a aquello que "los abraza y los enlaza" [**1987**, N270]. El "amor carnal" o "erótico" entre el poeta y su alma le "*transfigura*", en medio de una "intensidad radiante, deslumbrante (sin ser cegadora), «solar»[672], como solo

669 En cuanto a influencias sobre su visión espiritual y mística, los nombres más relevantes son Nichidatsu Fujii Guruji (1885-1985), Mahatma Gandhi (1869-1948), Jiddu Krishnamurti (1895-1986) y Marcel Légaut (1900-1990). Por otro lado, Alexander Neill (1883-1973), Edward Carpenter (1844-1929) y Félix Carrasquer (1905-1993), pedagogos y activistas, son los *mutantes* que guían su visión libertaria y social. Sorprende el lugar de Carrasquer ¿única referencia al ámbito hispanoamericano?

670 Contrariamente con sus costumbres, Grothendieck ofrece a pie de página una nota *erudita* sobre los "Whitman scholars" y las distintas versiones norteamericanas de *Leaves of Grass*. Se lamenta de la escasez de traducciones al francés, en el "siglo de la bomba y de Walt Disney..." [**1987**, N265].

671 En otra larga nota "erudita" a pie de página, Grothendieck rastrea los trabajos de Emerson y Thoreau, en sintonía con una Naturaleza superior, y señala que "para mí, Thoreau forma parte, con Whitman y Melville, de la «gran Trinidad» de las letras americanas del siglo pasado" [**1987**, N268].

672 Las metáforas poéticas se explayan: "Whitman es como un hombre que, con sus ojos de carne, hubiese contemplado la luz del día en pleno sol, y hablase de ello a aquellos que nunca en su vida pudieron ver más que la luz de las bujías y de las antorchas, o, peor aún, las linternas o los faros de los autos perforando las brumas con sus haces filosos y crudos de luz fría y difusa" [**1987**, N272-N273]. Impacta la cercanía de este pasaje con los "ojos ciegos" de Tarkovski (ver *Capítulo 18* abajo).

la experiencia carnal y el amor humano, en toda su dulzura y potencia, pueden evocar" [**1987**, N272]. Grothendieck observa una "afinidad de temperamento" con las pulsiones de la "Madre", de "Eros" y del "Mundo" en Whitman [**1987**, N279] y con su "audacia (...) de dejar vibrar libremente" las resonancias eróticas en su poesía [**1987**, N280]. Se trata de espíritus libertarios y *bien temperados*, acordados y afinados casi musicalmente con la multiplicidad viva de las cosas, que llegan a conectarse aún más, en lo profundo, cuando una *fidelidad* hacia un experiencia interior (*Canto a mí mismo*) se enlaza con una aceptación de las posibilidades de lo divino [**1987**, N282].

(ii). Bernhard Riemann - Nota 85 (23 noviembre) [**1987**, N299-N301]. Riemann es descrito como "matemático alemán, físico teórico y «filósofo de la naturaleza», y, estrictamente en lo privado, pensador-filósofo-metafísico, de una penetración y originalidad asombrosas"[673] [**1987**, N299-N300]. La cualidad esencial que hace de Riemann un *mutante* es su *libertad* [**1987**, N301]:

> Su genio particular, tanto en matemáticas como en cualquier otra cosa hacia la que su espíritu se dirigiera, consistía en un sentido asombroso por las cuestiones neurálgicas o fundamentales y por la estructuras que ellas sugieren, y en una *libertad* que me ha parecido total (y que seguramente pocos hombres han alcanzado a lo largo de nuestra historia) con respecto a ideas preconcebidas, sobre todo aquellas propias de la ley y del aire del tiempo en la época en la que vivía. En un grado raramente alcanzado, representa para mí un espíritu liberado de los atavismos del rebaño.
>
> Uno de los signos de esa libertad es que, lejos de permanecer encerrado en los límites estrechos de la razón racional (donde sobresalía como pocos hombres de su siglo lo hicieron), percibía claramente sus limitantes. (...) Guardaba viva una intuición suelta que le permitía

[673] En una nota al pie, Grothendieck enfatiza varios de los trabajos *no estándar* de Riemann: propagación ondulatoria común del electromagnetismo y la luz, "observación penetrante" sobre una eventual estructura discreta del espacio físico, mecánica del oído y estudio fisiológico de los órganos del sentido, ideas generales sobre psicología, metafísica, teoría del conocimiento y filosofía de la naturaleza, que "considero como las más notables tal vez (¡y sin duda las menos leídas!) del volumen de sus *Obras* [edición alemana de Weber y Dedekind, ver [**1987**, N300]], ricas no obstante en contribuciones fundamentales para el arte del matemático" [**1987**, N299]. Dada la influencia cardinal de la obra *matemática* de Riemann, sobresale la altísima evaluación *adicional* que hace Grothendieck de su pensamiento *no matemático*.

> aprehender una realidad "sutil" o "espiritual" allende la realidad material que los aparatos miden y que la razón analiza, realidad más esencial que esta, pero sin que ninguna contradiga nunca a la otra.
>
> No es a causa de su potencia cerebral, ni a causa de su profundidad como matemático o como sabio, sino por esa libertad, y por esa apertura excepcional sobre dos planos diferentes de la realidad, que veo en Riemann (...) un auténtico "mutante".

Mirando más allá, Grothendieck considera que se requiere un "trabajo considerable" para llegar a entender los fragmentos filosóficos de Riemann, pero no duda de que "en una o dos generaciones, las sugerencias tan intrigantes de Riemann, y sobre todo aquellas sobre la naturaleza misma del pensamiento y sus procesos de creación, serán sondadas con todo el ardor perseverante que requieren, y perseguidas hasta su fructificación completa"[674] [**1987**, N647-N648].

(iii). Rudolf Steiner - Notas 86, 124 (24 y 25 noviembre 1987, 9 y 10 febrero 1988) [**1987**, N301-N304, N549-N552]. Dentro de los mutantes, Steiner aparece como "filósofo y pedagogo alemán, espíritu enciclopédico y visionario a la vez", promotor de una "«ciencia espiritual» (*Geisteswissenschaft*) que abrazaría el conjunto de las ciencias tradicionales pero en un espíritu renovado, otorgando un lugar primero a la realidad espiritual, o más precisamente extrasensorial, que deberá esclarecerlas y orientarlas"[675] [**1987**, N301-N302]. Con "dones de vidente extraordinarios" y "una prodigiosa creatividad" [**1987**, N302], Steiner recorre los campos más variados, desde el "método Steiner que alienta la creatividad del niño", hasta la "agricultura biodinámica", pasando por las ciencias

---

674 En buena medida, el trabajo solicitado para esas generaciones venideras se ha conseguido gracias a los estudios de Jean Petitot sobre neurogeometría, donde conecta admirablemente la geometría riemanniana con estratos fenomenológicos del entendimiento y estratos fisiológicos del ojo y del córtex cerebral. Ver J. Petitot. *Elements of Neurogeometry. Functional Architectures of Vision.* New York: Springer, 2017 (2008, ed. francesa).

675 Debe anotarse aquí el carácter plenamente *categórico o hacificado* de una tal distribución del saber, donde lo extrasensorial se proyecta sobre las diferencias sensoriales de la misma manera como un objeto libre se proyecta sobre los demás objetos en una categoría, o como el espacio desplegado superior de un haz se proyecta sobre su espacio plegado inferior.

psíquicas, la antropología, la teosofía [**1987**, N302]. Grothendieck, "perplejo" y "desencantado" [**1987**, N302], duda de las teorías del alma según Steiner, que no le parecen "para nada convincentes" [**1987**, N303], pero se rinde ante una "profundidad" y una "buena fe" que impulsan el planteamiento de preguntas difíciles, y que aseguran en Steiner "un grado decididamente impresionante, un «perfil de mutante»" [**1987**, N303-N304]. Más allá de una "psicología steineriana" que "*no existe*", de su "descrédito" y de su "falta de seriedad" [**1987**, N549-N550], Grothendieck recupera "una ciencia del mañana", "mucho más vasta y profunda que aquella de su tiempo y del nuestro" [**1987**, N550]. Se trata de una ciencia que "en la reflexión y la observación (...) incluye los fenómenos, hechos y factores que no son de naturaleza «material», ni aún «física», sino que remiten a «otra realidad», una «realidad invisible» – aquella que escapa a todos nuestros aparatos de medida, y que no obstante, bajo ciertas condiciones, el delicado «aparato» constituido por la psiquis y el cuerpo humanos detecta y percibe" [**1987**, N551]. Alejándose de un "enorme ectoplasma de fantasmagoría oculta", Grothendieck aprecia en Steiner a un "gran sabio visionario", con sus aportes concretos sobre agricultura, medicina y educación (en particular, el cuidado de los niños autistas) [**1987**, N551]. Si la "ciencia espiritual" *general* steineriana deja mucho que desear, sus aportes *particulares* para el mejoramiento de la vida, y de los entornos que la cobijan, resuenan favorablemente en el Grothendieck ecologista, agricultor, terapeuta, educador, atento a las pequeñas cosas de la existencia.

(iv). Charles Darwin - Nota 139 (24 y 25 enero, 19 y 20 marzo 1988) [**1987**, N650-N660]. Superando una óptica meramente "científica", Grothendieck observa en la teoría de la evolución de Darwin una "*visión del Mundo y del hombre* en el Mundo", que se torna en una "*realidad* ya irrevocable", accesible a todos, con consecuencias para todos, y "presente, se quiera o no, en toda reflexión sobre el porvenir humano a largo plazo (...) porvenir anegado de brumas" [**1987**, N650]. La imagen del "*Árbol*" inunda la fantasía grothendieckiana: "«Árbol» gigantesco formado por todas las especies vegetales y animales

presentes y pasadas (...) en el cual nuestra frágil y altiva especie es uno de los últimos palillos en una exuberante profusión de ramas, ramales, ramos y ramitas (...) ramificados al infinito a lo largo de milenios de milenios de milenios"[676] [**1987**, N651]. El árbol provee "una *perspectiva* dramática de la unidad esencial detrás de todas las formas conocidas de vida sobre la tierra, y del incesante proceso creador de crecimiento y de transformación, en obra en esa unidad infinitamente diversa" [**1987**, N651]. Nueva reintegración de lo Uno y lo Múltiple, la teoría de la evolución otorga, gracias a la biología, otro arsenal de *contrapuntos armónicos* entre el hombre y el cosmos. La frase grothendieckiana se carga con un lirismo místico [**1987**, N651]:

> En el momento mismo en que escribo estas líneas, y mientras en esta tierra germinen y crezcan los musgos y las briznas de hierba y los arbustos y los árboles, y se acoplen y multipliquen las bestias de la tierra y de las aguas y de los aires, el Árbol de la Vida crece y florece y se despliega bajo el empuje de una misma savia que sube desde los oscuros fondos de la eternidad.

La visión de Darwin, "tan sencilla que un niño puede entenderla" [**1987**, N652], le acerca a "una Obra magistral en verdad, la Obra de las obras" [**1987**, N654], gobernada por "la idea general de *transformación*"[677] [**1987**, N655]. La transformabilidad de la Naturaleza se corresponde con la *transformabilidad de la matemática*, tarea a la que Grothendieck dedicó décadas enteras de trabajo. Una *transformación de las transformaciones* provee finalmente "el sentido de la unidad cósmica de la vida humana con toda vida vegetal y animal, y la unidad del Universo en su globalidad" [**1987**, N660].

---

676 Compárese con las imágenes del árbol en *Récoltes et semailles* [**1983-86**, 3.560], ver p. 413 arriba.

677 La *imaginería de las aguas* atrapa una vez más a Grothendieck: "Todo lo que nuestras inveteradas costumbres de pensamiento (...) nos habían presentado como fijo y sólido, cual roca, de repente se ponía a mover y a fluir ¡como un Río escurridizo sin comienzo ni final! En nuestro habitáculo, la tierra firme y dura, las montañas nacen, se levantan y desagregan o colapsan para hundirse en el mar; el mar se extiende y excava, luego se encoge y reseca, para abandonar el lugar, conquistado a su vez por la sabana, seguida por bosques que parecen eternos como las montañas de antaño. Estos desaparecen a su vez, limados por los glaciares o sumergidos por las aguas" [**1987**, N655]. Los ciclos del *mar* y el *volcán* se repiten tanto a "escala cósmica" [**1987**, N655], como a nivel de la obra misma del autor.

(vi). Sigmund Freud - Notas 6, 140-144 (1 mayo 1987, 21-27 marzo 1988) [**1987**, N13-N15, N660-N691]. Grothendieck introduce a Freud, para inmediatamente oponerse a su idea de "gratificación" en el sueño y a sus "aberraciones dogmáticas", y para resaltar, más bien, los caracteres fluctuantes y abiertos de la ensoñación: "*enseñanza*", acceso a un evasiva "*realidad*" [**1987**, N14]. Por otro lado, aunque las teorías freudianas le parecen "irremediablemente, fundamentalmente falsas", reconoce en Freud a un "novador intrépido y probo", un "visionario de coraje sin igual", con "las ideas más revolucionarias y fundamentales sobre la psiquis desde nuestros orígenes", "ideas maestras que quedarán para siempre vivas" [**1987**, N15]. Reevaluando sus mismos prejuicios[678], el final de *Los mutantes* dedica 30 páginas a Freud, y le sitúa al nivel de los mutantes explorados con mayor detenimiento[679]. Para Grothendieck, la "grandeza" de Freud consiste en "haber osado confrontar, a lo largo de toda una vida, los hechos fundamentales, escondidos y perturbadores que todo el mundo elude" [**1987**, N665]. En particular, le impresiona la conciencia, atribuida a Freud, de que "«todo el mundo» en el mundo moderno es, más o menos, un «enfermo mental»" y de que "el hombre moderno está psicológicamente enfermo, roto de mil maneras (y no pretendo hacer excepción a la regla, aunque me encuentre en vía de curación...)" [**1987**, N665]. La *crítica* grothendieckiana –fundacional, ecológica, ética, emotiva, espiritual– encuentra un eco natural en las exploraciones freudianas del inconsciente, en la constatación de una *oscuridad* de los tiempos y de una *degeneración* de

[678] "Hace un año aún, mis disposiciones con respecto a Freud eran sobre todo críticas. Nunca me vino la idea, hay que decirlo, de incluirlo en una reflexión, y mis impresiones sobre él yacían a flor de piel. (...) Había hecho, unos años antes, algunas lecturas esporádicas de Freud (...) y me parecían muy alejadas de todo lo que me enseñaba mi propia experiencia largamente meditada (...) Pero mientras juzgaba a Freud desde lo alto, mi pensamiento y mi visión del mundo estaban impregnados, sin que lo supiera, de las ideas fundamentales que Freud había sido el primero en despejar (...)" [**1987**, N660-N662].

[679] "A partir del mes de octubre solamente, aprovechando el intermedio-lumbago, empecé finalmente a documentarme sobre Freud. Fui ricamente recompensado, al descubrir en él uno de los hombres más profundos, más finos, más probos, que he encontrado (...)" [**1987**, N664]. La *sinceridad* y la *honradez* de Grothendieck siempre se encuentran presentes en sus reflexiones. Es interesante observar su esfuerzo de *documentación*, en una época en la que la comunidad le tilda de "loco".

los valores[680]. El "*miedo de conocer* y, sobre todo, el miedo de *conocerse*" resulta ser "congénito e irremediable, inseparable de la condición humana" [**1987**, N665], pero parte de la mutación consiste precisamente en lograr superar ese temor. Allí, "*tres grandes ideas*" [**1987**, N666] de Freud prevalecen: *(1)* el reconocimiento de una "*omnipresencia del Inconsciente*" [**1987**, N667], *(2)* el reconocimiento de una "*omnipresencia del Eros*" [**1987**, N670], *(3)* el reconocimiento de que "*el sueño es el mensajero por excelencia del Inconsciente*" [**1987**, N677]. Escondiéndonos en nuestros "ojos ciegos" (Tarkovski), intentamos obviar la presencia del tejido *(1)-(3)*, y construimos un "*escape*" [**1987**, N680] para poder eludir una realidad compleja que nos supera. El proceso de escapatoria "consiste en «*jugar a los idiotas*»" [**1987**, N682], reduciéndonos a ámbitos acotados del saber y desconociendo una multitud de niveles y formas alternativas del entendimiento. Por el contrario, las fuerzas de vida más contrastantes, después de una "*Larga Marcha a través del desierto*"[681] [**1987**, N685], impulsan una profunda "*sublimación*" [**1987**, N686] y generan una "pulsión *universal*" [**1987**, N689], cuya plena conciencia puede ayudar a liberar al hombre.

15.2 Síntesis conceptual

La clef des songes [**1987**] ofrece un muy amplio aparato de reflexiones locales para acercarse al pensamiento complejo global de Grothendieck. La *riqueza multiplicativa* de sus ideas cubre la historia, la fenomenología, la metafísica[682], así como el psicoanálisis, la sociología, la mística. Como si se tratase de un *haz universal* en acción, las consideraciones

[680] Ver referencia a Broch, p. 452 arriba.

[681] Referencia directa a la marcha de Jesús en el desierto y a *La longue marche à travers la théorie de Galois* [**1981**]: los recorridos de Grothendieck, a la búsqueda de una *realidad matemática* y de una *realidad espiritual*, se contraponen en un *irreducible back-and-forth*, que no puede restringirse a componentes puramente técnicas, filosóficas o místicas.

[682] Ver nuestro *topos de haces sobre modelos de Kripke* aplicado a la *obra entera* de Grothendieck, *Capítulo 17* abajo.

grothendieckianas buscan un soplo común, una vida unitaria, una armonía universal (secciones globales) detrás de las concreciones particulares más extremas, las briznas de hierba, los sueños diarios, las percepciones místicas (secciones locales). Grothendieck se sumerge en una suerte de *conciencia cósmica*[683], con tres etapas bien definidas en su *larga y progresiva iluminación*: *(i)* reconocimiento de Dios, como Soñador y como soplo de vida universal, *(ii)* conciencia de una dolorosa separación de lo espiritual y lo material en nuestra era, lo que conduce a una progresiva destrucción de las sociedades humanas y sus entornos naturales, *(iii)* profecía utópica de una Gran Mutación, liderada por mutantes libertarios, donde vuelvan a reintegrarse las múltiples capas del cuerpo y del espíritu.

En el *fondo*, la búsqueda de un tronco común en el Árbol de la Vida, encontrado con pasión en Whitman y en Darwin, refleja las búsquedas matemáticas centrales de Grothendieck, al *despejar arquetipos unitarios* que se proyectan sobre tipos múltiples: espacios nucleares [**1949-53**], normas proyectivas [**1953c**], grupos de la K-teoría [**1955-57**], esquemas [**1959-64**], topos [**1960-69**], motivos [**1967**], variedades anabelianas [**1981**], derivadores [**1991**]. Los soplos que conectan el entendimiento son *estructuras altas de suavidad* en el ámbito general del espíritu, así como los funtores y las transformaciones naturales que conectan las regiones de las matemáticas son *estructuras exactas de suavidad* en el ámbito concreto de la razón. Por otro lado, en la *forma*, la vena lírica de Grothendieck explota con potente originalidad. Es fácil seguir su *lenguaje libre*, desligado de ataduras y prejuicios, limpio e inocente, atento a la *escucha* de algo que trasciende al lenguaje mismo. Sentir la *plasticidad del universo* requiere un ojo y un oído plásticos, abiertos y atentos para captar aquello que usualmente nos elude. En la *combinación de un fondo y una forma suaves* yace el "estado de gracia" de *La clef des songes* [**1987**].

683 De manera similar, las "auras" de los objetos, convertidas en funtores representables, se sumergen en topos de prehaces, y se inscriben en una armonía interna superior (estructura de *exactitud* del topos).

Los *fragmentos apocalípticos* del escrito corresponden a la lucha inevitable entre la conciencia de un estado de cosas *actual*, *obstruido* –degenerado, fragmentado, rocoso, atado– y un estado de cosas *potencial*, *suavizado* –utópico, unificado, acuoso, libre–. Si los llamados de conciencia, ecológicos, éticos y espirituales de Grothendieck resultaban impactantes hace treinta años, se han convertido hoy en día en verdaderos clamores de supervivencia. *La clef des songes* [**1987**] no es solo un documento imprescindible para adentrarse en la compleja mente del mayor matemático del último siglo, sino que constituye un asombroso regalo visionario para las nuevas generaciones. Los *excesos* grothendieckianos, sus páginas sin fin, su *dejarse llevar como un río*, conforman sin duda una complicada obstrucción para la lectura. No obstante, la *grandeza* de Grothendieck consiste también en esa capacidad de *sumergirse infinitamente en la minucia*, dando todo de sí, ya sea en sus inagotables horas de inventividad técnica, ya sea en sus interminables reflexiones espirituales. Los lectores sabrán qué escoger entre los variados residuos que traen las mareas, pero el solo hecho de intentar navegar en ellas les proveerá un *sentido profundo* de orientación, particularmente acucioso en nuestros tiempos.

El *deísmo* de Grothendieck se manifiesta en su aprecio de una ubicua *acción* divina[684]. Si Dios en sí es incognoscible, resulta en cambio cognoscible por su acción sobre el mundo[685]. Lejos de los ritos y de las tradiciones religiosas, en una búsqueda personal y armónica con el globo y con el cosmos, gracias a una honda riqueza material y espiritual, el hombre accede a sus contrapartes no humanas. Una *exaltación de los sentidos*

684 Una analogía con la matemática se tiene gracias al *topos de acciones de un monoide*. Su lógica subyacente resulta ser *clásica* si y sólo si el monoide es un *grupo* (Lawvere). Si en las acciones de la matemática los grupos aparecen por doquier, en las acciones humanas los monoides lo hacen de forma más natural (en lo humano, asociar es razonable, invertir más difícil). Por lo tanto, las lógicas subyacentes en el topos de un *monoide no grupo* no son clásicas, sino intuicionistas: mucho más plásticas, ubicuas y penetrantes, como el deísmo activo de Grothendieck lo requiere.

685 Metodológicamente, no otro es el principio básico de la *teoría de categorías*: un objeto tiende a ser incognoscible *en-sí* (descomposición analítica del objeto), pero puede en cambio conocerse por su acción *en-múltiple* (morfismos, “aura”, funtor representable: composición sintética del objeto).

(vista, escucha, olfato, tacto, gusto) recorre *La clef des songes* [**1987**], y, en una suerte de *blow-up*[686] de lo terreno, se accede a lo ultraterreno. Una *realidad espiritual* compleja, multiplicada en infinitos niveles entre la conciencia y el inconsciente, nutre entonces las capacidades del hombre, y refina su estudio de los *tránsitos entre lo visible y lo invisible*. Los *sueños* y las *visiones* amplían el rango de lo "imaginario" y lo entrelazan con lo "real", en un *back-and-forth* esencial para el entendimiento e *imprescindible* para la creatividad matemática. El resultado *extiende la elasticidad y la ductilidad de las acciones humanas*, en pro de la construcción de un espíritu que reintegre suavemente al hombre con un medio ambiente del cual él mismo se ha excretado.

Los *mutantes* se sitúan en ese ámbito de extensión plástica de la inteligencia. *Instructores* e *Iluminadores* [**1987**, N488-N489], transmiten mensajes espirituales accesibles a todos, y difunden al exterior ciertas visiones que les conmovieron en su interior. Una extrema *diversidad* de temperamentos, caracteres, orígenes sociales, educaciones, opiniones, modos de vida, gustos, recorre el espectro de los mutantes[687] [**1987**, N490]. No obstante, detrás de esa diversidad, un mensaje común emerge: amparado en la "*grandeza*" de cada uno de ellos, un sentimiento de dedicación, sacrificio, generosidad y *libertad* nos conmueve a sus sucesores y nos ofrece "un fruto que han largamente madurado para nosotros"[688] [**1987**, N492-N493]. La *compenetración cordial* de las enseñanzas de los mutantes ofrece un atisbo de esperanza y de amor en los tiempos del cólera.

---

[686] El *blow-up* remite aquí tanto al acto técnico en ecuaciones diferenciales, aprovechado por Petitot en su neurogeometría, como al acto artístico de Antonioni en *Blow-Up* (1966), ver nuestro *Capítulo 18* abajo.

[687] Marcados por aspectos *yang* aparecen Darwin, Freud, Steiner, Légaut, entre otros; dentro de lo *yin*, aparecen Whitman y Riemann, entre otros [**1987**, N491]. Es interesante la aparición de Riemann en la vertiente *yin*, donde se sitúa también el temperamento predominantemente *yin* de Grothendieck. De esta manera, gracias a una *suavidad yin*, los dos mayores geómetras de los últimos dos siglos, si no de toda la historia, acceden a las más profundas intuiciones del espacio.

[688] Comparación obligada con la metáfora de la nuez y el mar, donde se desgaja con toda suavidad el fruto de la nuez, como un "aguacate maduro" [**1983-86**, 3.553]. Los *tiempos largos* y las *acciones lentas* son fundamentales para un entendimiento cabal de las cosas.

15.3 Ejemplo detallado: sombras de lo creativo

En esta sección recorremos los distintos contextos, modos y términos con los que Grothendieck habla de una *creatividad negativa*[689], donde, desde el revés, desde lo penumbroso y lo saturnal, se *liberan* algunas de las mayores fuerzas inventivas de la humanidad. El acto creativo emerge desde la *oscuridad*: "Estabas en la oscuridad o en la penumbra ¡y de repente irrumpe la luz!" [**1987**, 12]; "El «más allá» de las cosas delicadas y elusivas, cosas de la sombra y de la penumbra, que el lenguaje consigue evocar (...) pero nunca describir, «definir», realmente «agarrar»" [**1987**, 23]; "los estadios más inciertos y a tientas (...) solo se presienten oscuramente y deben revelarse por el trabajo que se hace en una noche casi total" [**1987**, N132]. De manera similar a como las hojas cubren los puntos de ramificación en una superficie de Riemann, las *sombras* cubren aquellos puntos en los que estalla un *blow-up* creativo: "imperceptible chispa que se dispara en la sombra" [**1987**, 33]; "los procesos creadores se realizan en la sombra" [**1987**, 40]; "el Universo es *Espíritu* (...) es *Sentido* (...) como una voz que murmura en la sombra" [**1987**, 152]; "nuestra única y humilde contribución a la Obra desconocida que prosigue en nosotros se realiza y se renueva día a día, sin que siquiera nos demos cuenta, en la sombra y en el silencio, en lugares muy profundos que rehuyen la mirada torpe de la conciencia" [**1987**, 315]; nuestras limitaciones son "como *sombras* en una obra maestra que aportan profundidad y misterio a las claridades extremas y las cálidas luces" [**1987**, N513].

De esta manera, los entornos nocturnos, oscuros, penumbrosos, sombríos, conforman los *espacios naturales* para el surgimiento de la creatividad. Desde el *verso*, desde lo negativo, se potencia el *recto*, lo positivo. Por un lado, en lo "delicado" y lo "elusivo" se fraguan

[689] Remitimos a Zalamea, óp.cit., para un estudio de las "antinomias creativas" –situadas en la *via negativa* de lo oscuro y lo penumbroso– en Valéry, Warburg y Florenski. La riqueza de ecos de la obra de Grothendieck con las *formas negativas* de la cultura será explorada en nuestro *Capítulo 18* abajo.

ciertas *condiciones de suavidad*[690], que permiten *moldear plásticamente* lo inteligible y lo sensible. Por otro lado, al ver llegar los apocalípticos nubarrones negros de la Tempestad, ciertas *condiciones de ruptura* permiten percibir la aparición de tiempos nuevos: "llegará el choque de la Tempestad, y los oídos de los que vivirán entenderán, y los ojos verán" [**1987**, 79]; "llegarán la Tempestad, y el Aguacero – un Tumulto frenético, y el Silencio. Y solo en el silencio una gran voz será escuchada" [**1987**, N391]; "la hora de la Tempestad se acerca, y de las aguas torrenciales del Aguacero. Entonces será el tiempo del Gran Soplo creativo" [**1987**, N456]. Así, en el péndulo del *yin* y el *yang* –lo suave y lo brutal, la caricia y el puño, lo acuoso y lo rocoso, lo íntimo y lo global– se observa *en ambos casos* el papel central de la creatividad para esperar sanar a la humanidad.

Desde lo negativo y el revés se accede mejor a lo *profundo*, espacio plástico de lo multiforme donde se obtiene una plena simbiosis con el acto creativo. Una exploración de las *sombras de lo creativo* recuerda, por inversión, las iluminaciones trascendentes que se consiguen con una inmersión en *Moby-Dick*. Las referencias a la profundidad y la hondura son incesantes en *La clef des songes* [**1987**]: *(i) profundidad del alma*: "Era algo más profundo que todo eso. Me empujaba un *hambre* que no habría sabido yo mismo nombrar. Era el *alma* la que estaba hambrienta" [**1987**, 5], "Inconsciente profundo" [**1987**, 61, 180-181, 222], "plano más elevado y más profundo a la vez" [**1987**, 123], "la psiquis ha sido un pozo vasto y muy profundo que debía sondar, sin saber adonde iba" [**1987**, 145], "realidad de una *soledad esencial*, irreducible, una con quien somos en lo más profundo de nosotros mismos" [**1987**, 171]; *(ii) profundidad del sentido*: "lo vivido tenía, más allá de su sentido «literal», otro *sentido* que me concernía de manera mucho más profunda" [**1987**, 15], "redescubrimiento del sentido profundo del sueño" [**1987**, 50], "he llorado largamente (...) solo la verdad nos toca así, en lo más profundo del ser, y nos revela a nosotros mismos"

[690] En un momento, Grothendieck afirma que la *sombra* corresponde a la vertiente *yin* [**1987**, N556].

[**1987**, 134], “contacto profundo con las cosas simples y esenciales” [**1987**, 184]; *(iii) profundidad del trabajo*: “el trabajo de *profundización*, *penetración* de la periferia hacia las profundidades (...) asegura el «enlace» (por así decir) entre el conocimiento profundo (actuando como «fuente») y su proyección en la periferia” [**1987**, 25, 28], “*Trabajo* (...) hacia las profundidades: de la periferia al corazón, de la letra del sueño a su sentido profundo, de la superficie consciente de la psiquis hacia sus trasfondos” [**1987**, 33]; *(iv) profundidad de la misión*: “conocimiento inexpresado, más profundo que las palabras, de la misión en mí” [**1987**, 125], “somos en lo más íntimo y lo más profundo aquel que está en camino y que la voz llama” [**1987**, 135], “el hombre nuevo, el *verdadero*, está presente, como un germen que llama a un devenir y que pide nacer, en lo más profundo de nosotros” [**1987**, 288].

Las *sondas* grothendieckianas barren la profundidad del espíritu, así como lo hicieron con las matemáticas mismas. La búsqueda de arquetipos matemáticos unitarios allende la multiplicidad de los tipos –parte esencial del pensamiento categórico de Grothendieck–, se refleja en el rastreo de un soplo universal allende las briznas de hierba, en la búsqueda de accesos a lo invisible allende lo visible, en la entrega a un Yo cósmico allende el yo particular. En esa *acción fiel y plena* entre el espíritu y la materia, el *cuidado de las sombras*[691] resulta ser imprescindible. Entre el volcán y el mar, entre lo diabólico y lo angélico, se sitúa *La clef des songes*, uno de los últimos grandes tratados del alma en nuestros tiempos.

[691] Las conexiones entre *opacidad y belleza*, propias de la cultura japonesa y explicitadas en *El elogio de la sombra* (1933) de Jun'ichiro Tanizaki, se encuentran muy cercanas de las consideraciones de Grothendieck. Hemos resaltado varias veces su afinidad con el espíritu oriental, algo aún más evidente al acercarlo a la vertiente *yin* de las sombras. Debo a Angie Hugueth la conciencia de la *profundidad* de Tanizaki y su conexión con Grothendieck y con el *Inferno* de Dante.

Parte IV

Esbozos de síntesis

16

Desarrollo y vertientes de la obra de Grothendieck

Las *Partes I-III* de esta monografía han ofrecido una descripción completa de la obra matemática y filosófica de Grothendieck, publicada o distribuida, entre 1949 y 1991. En esta *Parte IV*, *sintetizaremos* la información reunida, mediante tres estrategias: marcar el desarrollo histórico de la obra y distinguir sus distintas vertientes (*Capítulo 16*), conectar transversalmente las fuerzas principales allí exhibidas (*Capítulo 17*), proponer un prospecto de su eventual influencia filosófica y metodológica (*Capítulo 19*). Por otro lado, ofreceremos un entramado de contrapuntos de la obra grothendieckiana con otras realizaciones en literatura, música, arte, cine, para así integrar el pensamiento de Grothendieck con la cultura (*Capítulo 18*). Los dos capítulos finales (*18, 19*) adquieren un cariz más personal, que enlaza el caracter analítico "duro" de esta monografía con una "suavización" ensayística más plástica. El nivel estricto de los modos de referenciar se reduce en esta *Parte IV*, y solo remitimos a las obras de Grothendieck involucradas, sin apuntar a páginas específicas de las mismas (rastreables en las *Partes I-III*).

16.1 El corazón matemático y la razón categórica

El *arte matemático* de Grothendieck radica en su extraordinaria capacidad de adentrarse en las particularidades técnicas más finas de ciertas regiones de las matemáticas, y, pendularmente, de situarse en la generalidad conceptual más alta donde se contempla toda la matemática. En el *back-and-forth* entre lo particular y lo universal, lo concreto y lo abstracto, lo típico y lo arquetípico, lo múltiple y lo unitario, lo local y lo global, los ejemplos y las teorías, yace su acumen matemático excepcional. Llamaremos *corazón matemático* el entorno de sus sumas fortalezas técnicas locales –análisis funcional, topología, variable compleja, haces, (co)homología, geometría algebraica–, y llamaremos *razón categórica* el entorno de su visión conceptual global donde transitan los altos arquetipos y las formas generales de la matemática –esquemas, topos, motivos, *stacks*, n-categorías, derivadores–. Yendo y viniendo entre el "corazón matemático" y la "razón categórica", se establece una *plena dualidad entre co-razón y razón*, dialéctica que exploramos en esta sección gracias a algunas *tablas de desarrollo* (*Figuras 16.1–16.3* abajo) de la obra grothendieckiana.

En las tablas siguientes, subrayamos ciertas ocurrencias del *corazón matemático*, en *topología* (espacios vectoriales topológicos, haces, problemáticas de separación), *análisis funcional* (espacios de Hilbert y de Banach, espacios nucleares, problemáticas de aproximación), *variable compleja* (teorema de Riemann-Roch, espacios de funciones holomorfas y meromorfas, esfera de Riemann), *álgebra abstracta* (productos tensoriales, co/homología, propiedades de permanencia). Ese corazón se sitúa en la *base* de la tabla ("siembras"), y se revisa su propagación o germinación ("cosechas"), a lo largo de la obra de Grothendieck. En la *primera tabla* (*Figura 16.1*) –correspondiente a la *Parte I* de esta monografía– doce fuerzas (A-L) inscritas en el corazón se desarrollan en sus escritos principales de la época ([**1949-53**], [**1953c**], [**1955-56**], [**1955-57**], [**1958**], [**1961**]). La *riqueza concreta* de las intuiciones originarias de Grothendieck queda bien resaltada en esta primera tabla.

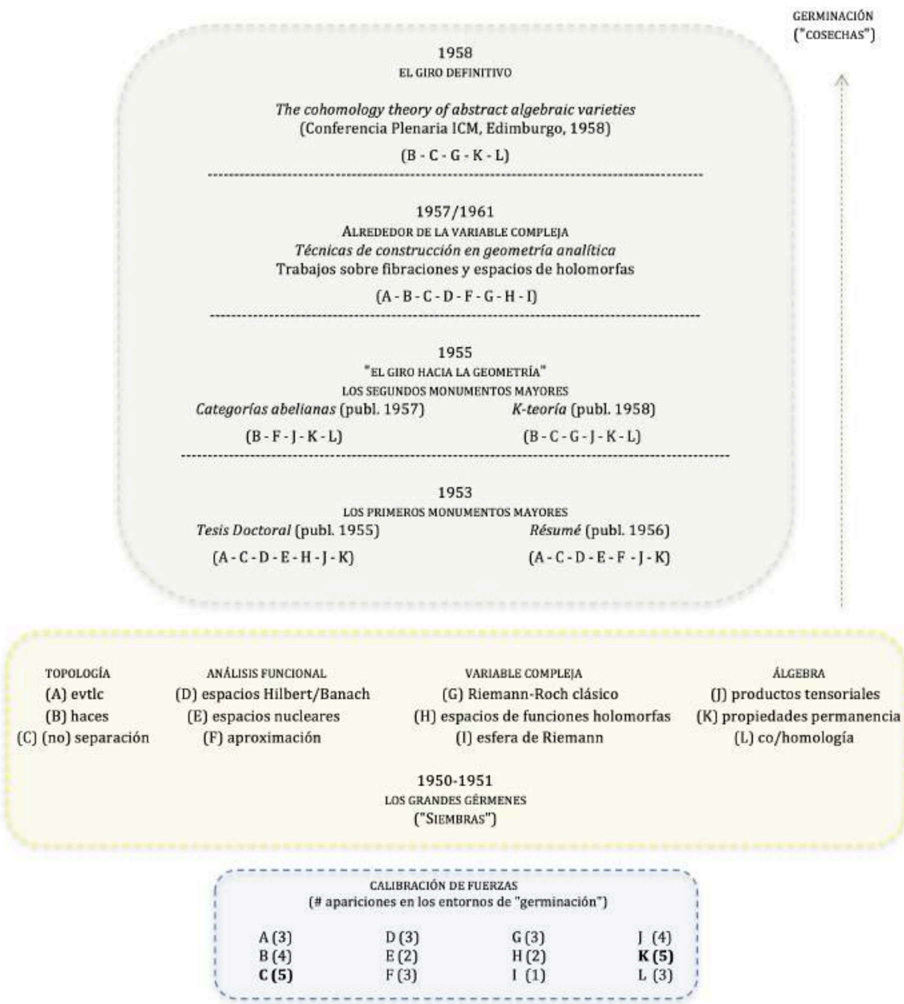


Fig. 16.1 – Desarrollo estratificado 1949-1958

Una *calibración de fuerzas* en la tabla indica que los temas de *(no) separación* (C) y de *permanencia* (K) son ubicuos en esa primera década de trabajos. Por otro lado, los *haces* (B) recorren ya todo el panorama, así como lo hacen los *productos tensoriales* (J), una de las construcciones *universales* favoritas del joven Grothendieck. En el enlace entre lo universal y lo concreto se despliega su gran imaginación matemática.

En la *segunda tabla* (*Figura 16.2*) –correspondiente a la *Parte II* de esta monografía– tres nuevas fuerzas (X-Z) ocurren en la *mediación* del corazón matemático y de la razón categórica, y se propagan en los escritos esenciales del *IHES* [**1959-64**], [**1960-69**]. La *calibración* de los temas (A-L) y (X-Z) muestra cómo Grothendieck, en esta época, pasa a trabajar en altos niveles de abstracción ("razón categórica", X-Z), en detrimento de los gérmenes concretos iniciales ("corazón matemático", A-L).

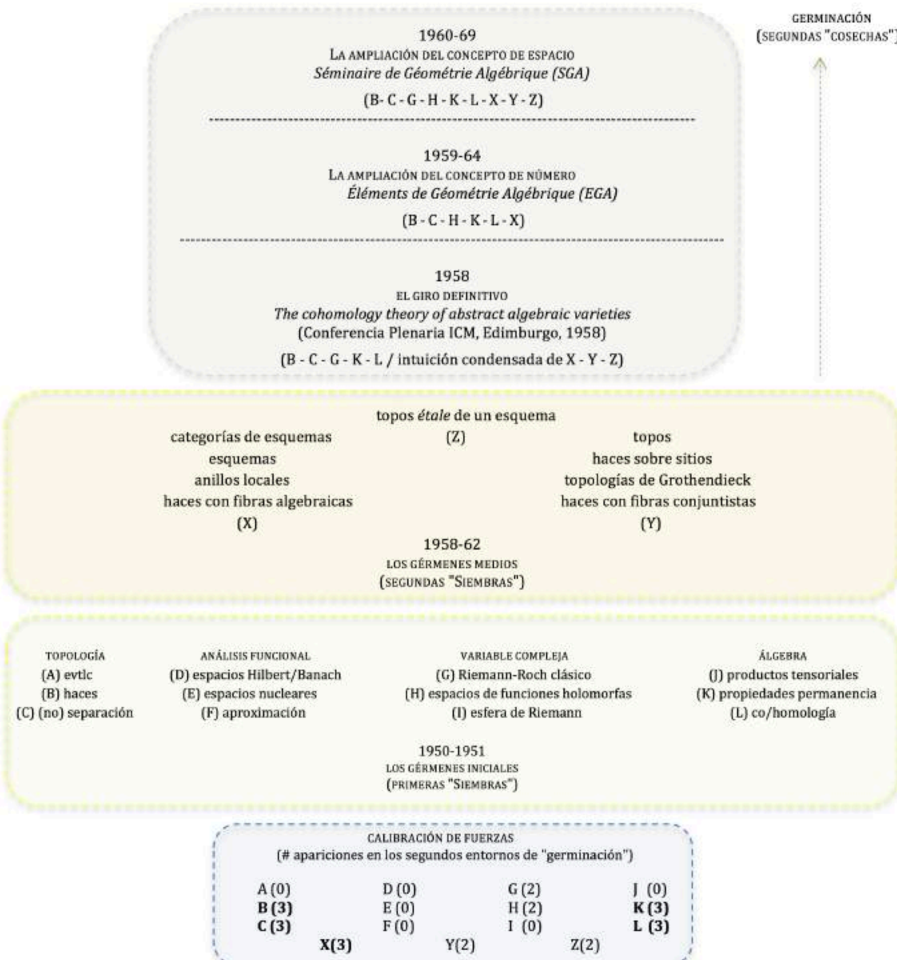


Fig. 16.2 – Desarrollo estratificado 1958-1970

La segunda tabla exhibe todo el poder de las maquinarias en juego. Las *ampliaciones* del número (esquemas [**1959-64**]) y del espacio (topos [**1960-69**]), brevemente entrevistas en la conferencia de Edimburgo [**1958**], entran en *contrapunto natural* con las fuerzas originarias del enlace espacio-número, inscritas en Riemann-Roch y asimiladas por Grothendieck desde muy joven (presentación como *cobaye* en Bourbaki (1951), prueba generalizada [**1955-57**]). Las *variedades* del espacio (espacios vectoriales topológicos, espacios de holomorfas, espacios nucleares, superficies de Riemann) *resuenan* con las *variedades* del número (productos tensoriales, anillos, co/homologías), antes de integrarse en *dos niveles de unificación*, primero como *haces* singulares, luego como *categorías de haces*. En este segundo nivel de unificación, emergen las categorías de haces con *fibras abelianas* (las fibras son grupos abelianos, caso de las *categorías abelianas*), las categorías de haces con *fibras locales* (las fibras son anillos locales, caso de las *categorías de esquemas*), las categorías de haces con *fibras conjuntistas* (las fibras son conjuntos, caso de los *topos*), y, finalmente, las categorías de haces con *fibras aritméticas* (las fibras son cuerpos residuales finitos y separables, caso de los *topos étales*). En este último ambiente, las técnicas finas de entronque entre espacio y número proveen el "mar" adecuado ("razón categórica") para resolver las conjeturas de Weil ("corazón matemático").

En la *tercera tabla* (*Figura 16.3*) –correspondiente a la *Parte III* de esta monografía– Grothendieck regresa con fuerza a temas clásicos del corazón matemático ($\alpha, \beta, \delta, \gamma$), y su imaginación se dispara alrededor de las superficies de Riemann, la torre de Teichmüller y las acciones de grupos sobre la torre. Se construye así un vaivén fascinante entre lo muy concreto en la aritmética (variedades anabelianas [**1981**]) y lo muy abstracto en la homología y la homotopía (derivadores [**1991**]), pasando por mediaciones combinatorias inesperadas (*stacks* y n-categorías [**1983**], dibujos de niños [**1984**]). La *calibración* de los temas (A-L), (X-Z) y (α-γ) muestra cómo "corazón" y "razón" se enlazan estrechamente, dando lugar a una "co-razón" integrativa muy potente.

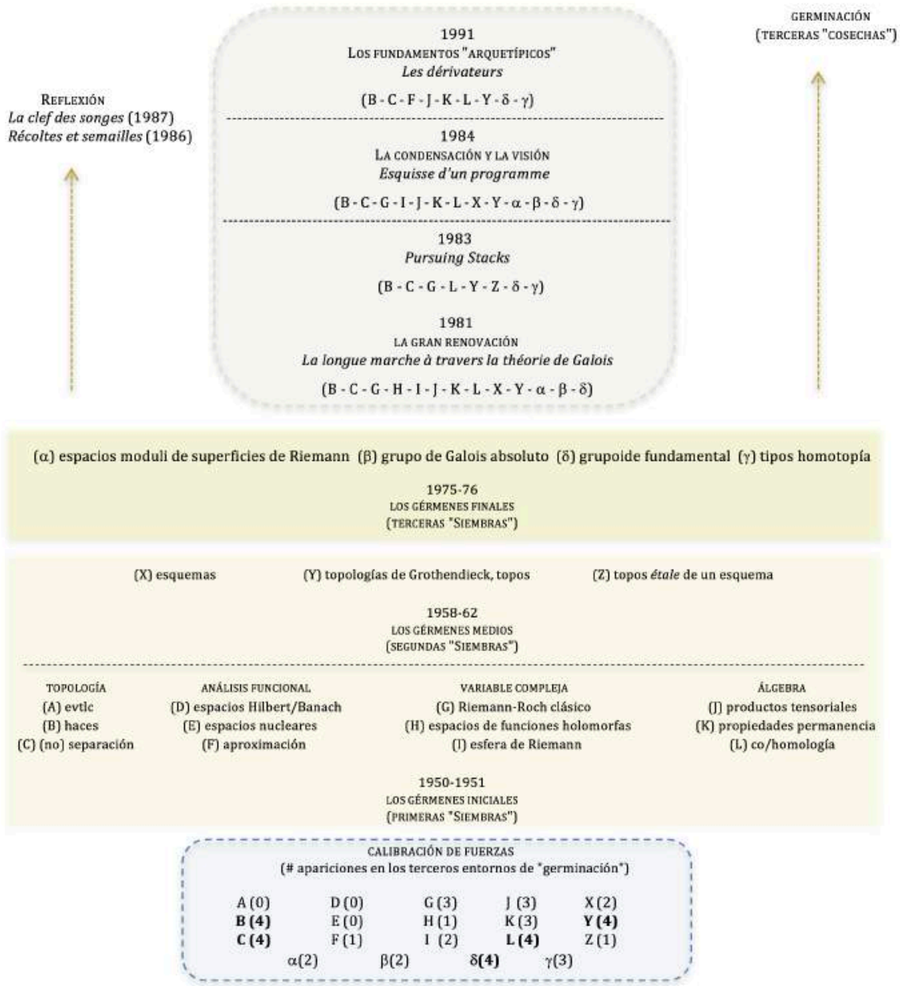


Fig. 16.3 – Desarrollo estratificado 1981-1991

Este tercer periodo de la obra grothendieckiana puede entenderse como una *época de plenitud*. No solo la matemática vive en un *entorno plástico maximal*, donde lo concreto se *interpenetra* completamente con lo abstracto, sino que la misma personalidad grothendieckiana alcanza un *equilibrio* psíquico y físico excepcional. Muy en contra de los repetidos preconceptos y prejuicios sobre su eventual "desequilibrio" mental –producidos por los *Zoilos de la vejación y la ignorancia*, si recordamos las diatribas de Galois– la matemática, la reflexión ([**1983-86**], [**1987**]) y la vida de Grothendieck revelan en cambio, en la década de los ochenta, una impactante *armonía*. En particular, en el ámbito de las matemáticas, la mixtura de su mirada “infantil” ([**1981**], [**1984**], [**1983-86**], [**1987**]) y de su visión “alta” ([**1983**], [**1991**]) produce uno de los más profundos *deslices suaves* exhibidos jamás en la disciplina, desde la combinatoria más elemental, hasta la formalidad más universal, en un Todo que gobierna –en los detalles más finos– el corazón y la razón.

16.2 El volcán y el mar – lo *étalé* y lo *étale*

Una *síntesis extrema* permite condensar la comprensión de la obra de Grothendieck en el ¡*entendimiento de una tilde*! La enorme diferencia entre los términos

étalé – étale

captura dos de las vertientes imprescindibles del pensamiento grothendieckiano. Por un lado, (1) lo *étalé* convoca al *espace étalé* de la escuela de Cartan, es decir, es un sinónimo para *haz = espacio desplegado* [**1955-56**]. Por otro lado, (2) lo *étale* convoca a la *topología étale* de la escuela de Grothendieck, es decir, es un referente para la *topología lisa* usada en la resolución de las conjeturas de Weil [**1960-69**]. La oposición no puede ser más extrema: (1) lo *étalé* alude a la multiplicidad, la ramificación, el despliegue de un haz dado, mientras que (2) lo *étale* alude a la unidad, la lisura, el pliegue en una categoría de esquemas. El *movimiento pendular entre lo uno y lo múltiple* es doble: en (1), sobre lo particular (haz fijo), se estudia la variedad de sus secciones topológicas, mientras que en (2), sobre lo general (categoría variable de esquemas), se observa la estabilidad de sus fibras aritméticas. (1) revela el paso de lo uno a lo múltiple (*étalé*), mientras que (2) detecta, inversamente, el paso de lo múltiple a lo uno (*étale*).

La prodigiosa riqueza de lo *étalé* (1) ha gobernado esta monografía, recorrida en todos los sentidos por la noción de haz. De hecho, el *despliegue* de la inventividad de Grothendieck puede imaginarse como el despliegue de un haz, donde múltiples secciones locales a lo largo de su vida convergen en secciones globales superiores[692]. Como hemos visto, la *profundidad matemática* del haz ayuda a definir notables invariantes para el espacio y el número. Por otro lado, lo *étale* (2) entra en armonía con el *mar liso* de Víctor Hugo, y, a su vez, con las *mareas* grothendieckianas. En este nivel, las categorías de haces *inundan* literalmente nuestro entendimiento: categorías abelianas [**1955-56**], topos y topos *étale* [**1960-69**]. En estos ambientes, donde la multiplicidad de los objetos se integra en estructuras axiomáticas unitarias (vía límites y propiedades de exactitud), brota una fundamental *suavidad*, propia de los mares que disuelven delicadamente (tránsitos *yin*) los problemas en juego (obstrucciones *yang*).

Las tensiones arquitectónicas entre lo *étalé* y lo *étale* ayudan a situar las mayores invenciones grothendieckianas. En el entorno analógico, universal, abstracto de lo *étalé* viven las *grandes jerarquías*, los pisos escalonados del edificio: normas tensoriales en espacios de Banach [**1953c**], haces iterados y clases de morfismos [**1959-64**], torre de Teichmüller [**1961**] [**1981**], tipos de homotopía y n-categorías [**1983**], etc. Por otra parte, en el entorno analógico, universal, abstracto de lo *étale* viven los *grandes cubrimientos*, las perspectivas altas desde la cumbre del edificio: espacios nucleares [**1949-53**], categorías abelianas [**1955-56**], K-teoría [**1955-57**], topos [**1960-69**], motivos [**1967**] [**1968**], topología moderada [**1984**], derivadores [**1991**], etc. Dos grandes formas de proceder ocurren así en la obra de Grothendieck –desplegar y plegar, desatornillar y atornillar, jerarquizar y cubrir– aplicables a una enorme diversidad de situaciones. En lo que sigue, condensaremos esos primeros procesos en la alegoría del *volcán*, y los segundos en la alegoría del *mar*.

692 Para precisiones, ver nuestro *Topos de Haces sobre modelos de Kripke* (*THK*), *Sección 17.3* abajo.

La personalidad misma de Grothendieck se encuentra en un *contrapunteo*[693] incesante entre *pulsiones volcánicas* y *suavizaciones marítimas.* Las tres etapas que conforman la actividad de un volcán –*(i)* magma bajo la tronera del volcán, *(ii)* fuegos piroclásticos y corrientes de lava, *(iii)* conformación de capas de ceniza y lava endurecida– tienen sus paralelismos con los modos de creatividad grothendieckianos. En una primera cámara, *(i)* el magma corresponde a una licuefacción ardiente de imágenes e ideas intuitivas, donde una multitud de tránsitos fluidos son posibles – estamos en el inconsciente matemático del Maestro. A lo largo de una tronera central, bajo la presión de los gases *(ii)* el magma asciende hasta la superficie, se desbordan los flujos piroclásticos y se deslizan las corrientes de lava – estamos en un nivel de conciencia emergente y de enorme movimiento, atestiguado por las muchas horas sin dormir en el *IHES*. Finalmente, *(iii)* las cenizas y las rocas se endurecen, hasta constituir el paisaje característico del volcán – estamos ante los periodos largos de una herencia que puede distanciarse mucho de la explosión creativa inicial, como en las largas requisitorias de *Cosechas y siembras* [**1983-86**].

La *estructura* misma de algunos volcanes puede servir para representar metafóricamente ciertos fragmentos de la obra de Grothendieck[694]: *(a)* las violentas erupciones del *Etna*, en Italia, con su ancho cráter y sus valles de lava y hielo[695] – nos recuerdan el paisaje imponente de la bifurcación entre espacios nucleares [**1949-53**] y espacios de Banach [**1953c**]; *(b)* la gruta de *Fingal*, en Escocia, o las montañas volcánicas de *Puy*,

[693] El vocablo "contrapunteo" procede de Fernando Ortiz, ver F. Ortiz. *Contrapunteo cubano del tabaco y el azúcar (1940).* Caracas: Biblioteca Ayacucho, 1978. En nuestro *Capítulo 18* abajo, usaremos sistemáticamente *contrapunteos y contrapuntos* para hacer resonar la obra de Grothendieck con contrapartes en la literatura, la música, el arte y el cine.

[694] Un apartado especial merece la comparación con *Bajo el volcán* (1947) de Malcolm Lowry. Ver nuestra *Sección 18.1* abajo.

[695] Ver F. Zurcher y E. Margollé. *Volcanes y terremotos (ilustraciones de Driou).* Barcelona: Cortezo, 1885, pp. 32-35.

en Francia, con sus prismas basálticos, como columnatas de un órgano[696] – nos recuerdan la arquitectónica estratificada de los esquemas [**1959-64**]; *(c)* el volcán del *Jorullo*, en México, descrito por Humboldt, con millares de conos pequeños de erupción, *malpaís* donde el Jorullo es el cono más alto[697] – nos recuerda el paisaje abrasivo de la torre de Teichmüller gobernada por el grupo de Galois absoluto [**1981**]; *(d)* el mito de los eternos amantes, el *Popocatépetl* y el *Iztaccíhuatl*, en México, con su dialogo eterno de miradas[698] – nos recuerda el encuentro alto de la homología y la homotopía [**1991**]. De esta manera, la *agitación volcánica* de Grothendieck, en sus procesos de invención matemática, puede cotejarse con el mismo mundo físico que le envuelve, captado hondamente en el gran diario cósmico *La llave de los sueños* [**1987**].

La metáfora del volcán adquiere particular relevancia al comparar la creatividad grothendieckiana con *El Paricutín. Cómo nace y crece un volcán* (1950) del Dr. Atl[699]. Se trata de un meticuloso diario donde Atl (pseudónimo de Gerardo Murillo) anota el nacimiento y el crecimiento del volcán mexicano entre 1943 y 1950, utilizando todas las técnicas a su haber: fotografías, diagramas, dibujos (a lápiz, a la pluma, al carbón, tonales), óleos, mediciones científicas (sismográficas, topográficas, calóricas, eléctricas, químicas), descripciones naturalistas, fragmentos poéticos y literarios. Con unos pocos años de anticipación, pareciera como si Atl, con el Paricutín, estuviese describiendo el surgimiento del *volcán Grothendieck*. En "lomas de poca altura", sin otro previo aviso que un "vapor que salía de la tierra", el 20 de febrero 1943 surge una "gruesa columna de humo negro"[700], y, en solo un día, el cono llega a los "80 metros de altura"[701]. El nacimiento del volcán

[696] Ver ibíd., pp. 188-189.
[697] Ver ibíd., pp. 139-144.
[698] Ver ibíd., pp. 130-135.
[699] Ver Atl, óp.cit.
[700] Citas y dibujos en Atl, ibíd., pp. 21-22, ilustración 1.
[701] Citas y dibujos en Atl, ibíd., pp. 27-28, ilustraciones 3-5.

es súbito y potente, inesperado, en un paisaje que no auguraba ningún sismo, exactamente de la misma manera en que Grothendieck derrumba los problemas de Schwartz en su *Tesis Doctoral* [**1949-53**]. Luego, en marzo, las "transformaciones del cono" presentan un "aspecto desgarrado y en continua transformación"[702], tal como ocurre con la teoría fina de los espacios de Banach en el *Résumé* [**1953c**]. En abril el Paricutín presenta un mecanismo eruptivo, "una *erupción dual, típica, exclusivamente paricutínea*"[703], en mayo se extiende "el alcance destructor de las erupciones"[704], y en junio se alcanza la "perfección geométrica del cono"[705]. Estos meses de "erupción dual" y de conformación perfecta del volcán nos recuerdan el "giro crucial" de Grothendieck hacia la geometría algebraica en el *Tôhoku* [**1955-56**] y la perfección obtenida en la generalización Riemann-Roch-Grothendieck [**1955-57**]. Por otro lado, los *óleos del Paricutín*[706] exhiben toda la fuerza colorida y finamente estructurada del volcán, de la misma manera como los trabajos del *IHES* [**1959-64**] [**1960-69**] se alzan y se estabilizan sobre el terreno agrietado de la conferencia de Edimburgo [**1958**]. En los óleos de Atl, un doble movimiento horizontal (círculos de lava, en verdes) y vertical (fumarolas y coladas piroclásticas, en morados) recuerda la estructura misma de un haz.

Las *metáforas acuáticas* son legión en Grothendieck: el *agua* que tiende a descender hacia las raíces [**1983-86**], el agua viva de un mar común [**1987**], el *río* muy profundo donde beben al tiempo los caballos del rey (espacio y número) [**1983-86**], el río Tiempo [**1987**], el río que se echa en el mar [**1983-86**], la nuez y la *marea* [**1983-86**], el *mar* continuo de matemáticas en el tablero [**1960-69**], el "ser tan «mar y movimiento» como se lo puede ser" [**1983-86**], el mar "*étale*" [**1960-69**], el *deshielo* de los grupos y el consiguiente "mal

[702] Citas y dibujos en Atl, ibíd., pp. 30-31, ilustraciones 10-13.
[703] Cita, ibíd., p. 33.
[704] Cita, ibíd., p. 34.
[705] Dibujos en Atl, ibíd., ilustraciones 18-28.
[706] Pinturas en Atl, ibíd., ilustraciones 7, 30, 30bis, 57, 71, 84, 124.

de mar" [**1981**], la fundición de los hielos en la psiquis [**1987**], las *tempestades* [**1987**]. Tres niveles del mar entran en juego[707]: *(i)* las corrientes *profundas*, en el fondo del mar, donde se apila la sabiduría, *(ii)* las olas y las tempestades en la superficie, donde se agita la creatividad, *(iii)* el mar liso después de las lluvias, donde todo adquiere de nuevo su lugar. Más allá de estas diferencias de modo, la *fluidez integral* de las aguas es esencial para Grothendieck, fluidez que responde a veces *(i, iii)* a *formas naturales de suavidad*, u otras veces *(ii)* a *formas naturales de ruptura*. Así, entre *tránsitos (i, iii)* y *obstrucciones (ii)*, a lo largo de las fluctuantes tonalidades del mar, se sitúa su obra.

La *acción de las aguas* es especialmente patente en los trabajos matemáticos donde se develan los *arquetipos* mayores. En un *doble proceso de recubrimento y de decantación*, las aguas suben y bajan, como en los tiempos de formación de la Tierra, hasta dejar emerger alturas y perspectivas desconocidas. Este es el caso de la suficiencia de inyectivos en adecuadas categorías abelianas [**1955-56**], del grupo libre de haces coherentes en la K-teoría [**1955-57**], de la topología *étale* en los topos [**1960-69**], del grupo fundamental algebraico en la geometría anabeliana [**1981**] [**1984**], de los derivadores en el álgebra topológica [**1991**], construcciones conseguidas todas gracias a amplios recubrimientos en las categorías en cuestión. Un poema de Simone Weil, *El mar* (1941-1942), condensa esta situación y la extiende hacia el *alma* grothendieckiana[708]:

> Mar dócil al freno, mar sometido en silencio,
> Mar disperso, de olas encadenadas para siempre,
> Masa al cielo ofrecida, espejo de obediencia;
> Para tejer en él pliegues nuevos cada noche (...)
> (...) El ala suspendida entre el cielo y el agua.
> Las olas oscilantes se fijan en la planicie,

[707] Otro apartado especial merece la comparación con *Moby-Dick* (1851) de Herman Melville. Ver nuestra *Sección 18.1* abajo.

[708] S. Weil. *Poemas*. Madrid: Trotta, 2006, p. 42.

> Donde cada gota a su vez asciende y desciende (...)
> (...) Mar vasto, a los mortales desdichados,
> Empujados a tus orillas y perdidos en tu desierto,
> Sé propicio.
> A quien va a zozobrar háblale antes de que perezca.
> Entra hasta el alma, oh nuestro hermano el mar;
> Dígnate a bañarla en tus aguas de justicia.

Conmueve este poema de Simone Weil, la hermana de André[709], tan *afín* al espíritu de Grothendieck y tan *armoniosamente* acoplado con él. Impactan los contrapuntos –mar silencioso, olas encadenadas, tejido de pliegues, suspenso entre cielo y agua, oscilaciones ascendentes y descendentes, vastedad, desdicha y pérdida, baño del alma, bondad y justicia– y, en cierta medida, parece como si el *espíritu* mismo de Grothendieck se viera *sumergido* en el poema.

En *El mar del Norte* (1827), Heinrich Heine describe diversos timbres que resonarán de forma similar en *Cosechas y siembras* [**1983-86**] y en *La llave de los sueños* [**1987**]: *(a)* "Sobre la pálida orilla del mar me senté soñador y solitario (...) Me pareció oír cuentos de antaño (...) con nuestros jóvenes corazones atentos y nuestros ojos del todo abiertos por la curiosidad (...)"[710]; *(b)* "(...) arena movible, ondas disueltas (...) arrancaré el más alto pino de los bosques de Noruega, y lo hundiré en la boca llameante del Etna"[711]; *(c)* "Grande es el mar y grande es el cielo, pero más grande es mi corazón, y más bello que las perlas y las estrellas brilla mi amor"[712]; *(d)* "La tempestad hace estragos y azota las

709 Las contrastantes coyunturas de vida son fascinantes: por un lado, el poema de la *joven Simone* está escrito en la misma época en la que el *niño Grothendieck* sale del campo de concentración, lo que les une íntimamente en su piedad por los "desdichados"; por otro lado, la aparición posterior de André, en los desencuentros finales de Grothendieck con Bourbaki, puede situarse en las antípodas de la sensible, devota y entregada Simone.

710 H. Heine. *La mer du Nord.* Paris: La Délirante, 2006, p. 20.

711 ibíd., p. 25.

712 ibíd., p. 26.

olas, y las ondas, espumeando de furor, se irritan y se encabritan, y se forma una blanca montaña líquida (...) ¡Oh marea! madre de la belleza (...) ¡perdóname!"[713]; *(e)* "El mar está calmado. El sol refleja sus rayos en el agua, y sobre la superficie ondulada y plateada la nave traza surcos de esmeralda"[714]; *(f)* "Yace en el fondo del mar, sueño insensato (...) Yace allí, bajo las ondas, durante toda la eternidad (...)"[715]. Las bellas imágenes de Heine capturan así algunos temas grothendieckianos por excelencia: soledad, juventud, pasión, curiosidad, pendularidades corazón/razón y volcán/mar, temor y perdón, belleza y suavización, sueños e inconsciente profundo.

La *conjunción del volcán y el mar* se consigue con suma finura en *La fúnebre góndola* (1996), los poemas de Tomas Tranströmer en homenaje a Franz Liszt. Allí, "en el espacio, un furioso mar de fuego / que se vuelve caricia al aterrizar"[716], convoca una elusiva luz que se abre paso suavemente en medio de la oscuridad, problemática central de *Las puertas del universo* [**1983-86**] y de *La llave de los sueños* [**1987**]. Al escribir[717],

> Esta noche cuando Liszt toca oprime hasta el fondo
>   el pedal del mar
> para que la fuerza verde del mar atraviese el suelo
>   y se confunda con todas las piedras de la casa.
> ¡Buenas tardes, profundidad hermosa!
> La góndola pesa lastrada con vida y es simple y negra,

Tranströmer parece estar describiendo a Grothendieck, ese otro virtuoso de un órgano matemático universal. La profundidad hermosa, simple y negra, tan grothendieckiana, reverbera en el admirable "pedal del mar" lisztiano.

---

713 ibíd., p. 28.
714 ibíd., p. 29.
715 ibíd., p. 32.
716 T. Tranströmer. *La fúnebre góndola.* México: UNAM, 2012, p. 51.
717 ibíd., p. 31.

16.3 El *yin* y el *yang*

Las vertientes "simples" del *yin* y el *yang* vertebran toda la obra de Grothendieck. El *yin*, lo femenino, actúa de dos maneras incisivas y complementarias, tanto en lo *bajo* como en lo *alto*: (1) *sencillez* – adentrándose en los problemas mismos y accediendo a las "cosas simples y verdaderas" [**1987**], (2) *suavización* – sumergiéndose en categorías más amplias y disolviendo las obstrucciones del entendimiento [**1983-86**]. La sencillez se encuentra del lado del *corazón matemático*, mediante el acceso *directo* que el corazón provee a las cosas de la razón, mientras que la suavización se sitúa cerca de la *razón categórica*, donde los cubrimientos y las mareas actúan a voluntad. La *sencillez* y la *suavización* han recorrido toda nuestra monografía: coincidencia plástica de proyectividad e inyectividad en los espacios nucleares [**1949-53**], docilidad en los productos tensoriales de espacios de Banach [**1953c**], suficiencia de inyectivos en apropiadas categorías abelianas [**1955-56**], libertad del grupo de la K-teoría [**1955-57**], cohomología *étale* que entronca a Galois y Riemann [**1958**], acoples elásticos de los espacios *moduli* en la torre de Teichmüller [**1961**], encarnaciones de lo liso en la teoría de esquemas [**1959-64**], continuidad local en las topologías de Grothendieck [**1960-69**], despeje limpio de las conjeturas estándar [**1968**], inversiones topológicas de la geometría anabeliana [**1981**], jerarquización modular de los tipos de homotopía y las n-categorías [**1983**], mirada infantil de los dibujos de niños [**1984**], moldeabilidad de la topología moderada [**1984**], cubrimiento armónico universal de los derivadores [**1991**].

Todo "mar y movimiento", el Grothendieck *yin* infunde una enorme vitalidad e inventividad en su obra. Por un lado, (1) la *sensibilidad de las pequeñas cosas* se palpa sin cesar en sus escritos, delicadamente atentos a las más nimias diferencias, con ese millar de definiciones donde campea la inteligencia de la diversidad. Por otro lado, (2) la *pureza de las altas cumbres* permea toda su escritura, siempre a la búsqueda de perspectivas que permitan despejar las brumas e integrar la visión. Un acceso bajo a los (1) *tipos* se contrapone dualmente con un vislumbrar alto desde los (2) *arquetipos*. La hondura sin igual de la matemática grothendieckiana reside precisamente en ese *saber transitar* en múltiples niveles[718], desde lo más concreto y acotado, hasta lo más abstracto y universal. Si parte de ese saber andar tiene importantes características *yang*, lo mejor se obtiene gracias a una peculiar capacidad *yin* de *deslizarse y fluir* como las aguas. En efecto, las aguas (1) horadan en lo más concreto –esfera de Riemann [**1955a**], espacios *moduli* [**1981**], dibujos de niños [**1984**]– y (2) disuelven en lo más abstracto –topos *étale* [**1960-69**], grupo fundamental algebraico [**1984**], derivadores [**1991**]–. El doble vigor del *yin, en lo sencillo y en lo suave*, penetra con suma eficacia en la práctica matemática, así como "la fuerza verde del mar", en el poema de Simone Weil, atraviesa el suelo y se confunde con todas las piedras de la casa.

La *dualidad entre yin y yang* exhibe esa travesía de lo simple a lo complejo, de lo magmático a lo arquitectónico, de los fundamentos a las piedras de la casa. La *potencia yang* se manifiesta especialmente en la década del *IHES*, con las grandes *construcciones arquitectónicas* de esos años [**1961**], [**1959-64**], [**1960-69**]. La *maniera* de las jerarquías y los niveles, entrelazados en torres de definiciones y teoremas, recorre los tratados *EGA* y *SGA*: su *tratadística* misma, intentando englobar y descomponer el todo, corresponde a fuertes controles acotados, propios de seccionamientos *yang* bien definidos. Grothendieck recuerda en *Cosechas y siembras* [**1983-86**] su doble tarea de arquitecto y obrero, donde combina visión, fundamentos, mampostería, elaboración de pisos y cuartos del edificio. Es una época en la que, con suma energía y generosidad, se *entrega a los demás* y apunta a la

---

718 Esto nos remite al *saber transitar* de Riemann, cuando introduce por vez primera sus superficies de Riemann en la *Tesis Doctoral* (1851), y las describe, sin axiomas ni definiciones, gracias a los *caminos* que pueden realizarse en los entornos holomorfos de cada hoja, y en los entornos meromorfos entre sus distintas hojas a través de los puntos de ramificación. En muchos matemáticos, el *saber andar* (desde los paseos de Hilbert y el alpinismo de Herbrand, hasta los trechos de Zilber o de Ono) está estrechamente ligado al *saber entender*.

creación de una *escuela*. La pulsión *yang* se encuentra entonces estrechamente conectada con una mirada al *exterior*[719].

Es interesante observar cómo, bordeando la década larga 1958-1970 (*Parte II* de nuestra monografía), se encuentran la conferencia de Edimburgo [**1958**] y las conjeturas estándar [**1968**], trabajos en los cuales profundas intuiciones *yin* se conjugan con programas a largo plazo *yang*. Por otro lado, en el *corazón* de las décadas 1949-1957 y 1981-1991 (*Partes I, III* de nuestra monografía) emergen muy finas *intuiciones yin*: en la primera década, balances armónicos topología-álgebra-orden en productos tensoriales de espacios de Banach [**1953c**], equilibrio formal de los funtores iterados detrás de la homología [**1955-56**], libertad plástica de haces coherentes detrás del género y la armonía diferencial [**1955-57**]; en la tercera década, acción suave del grupo de Galois sobre la torre de Teichmüller [**1981**] y conjeturas anabelianas [**1984**], enlace entre tipos de homotopía y n-categorías [**1983**], dibujos de niños [**1984**]. De esta manera, se contraponen dos periodos *interiores* de intensidad creatividad sin igual (1955-1958, 1981-1984) a tendencia *yin*, con un periodo arquitectónico central *exterior* (1960-1969) a tendencia *yang*, mediados por *portales batientes yin/yang* en sus fronteras [**1958**], [**1968**]. La riqueza del pensamiento grothendieckiano se debe, una vez más, a su increíble *amplitud*, a un hacer *dinámico* donde cualquier perspectiva dogmática está destinada al fracaso. La obra de Grothendieck se ajusta así perfectamente a las palabras de Bajtín: "todo acto cultural vive, de manera esencial, en las fronteras (...) en esto reside su seriedad e importancia – alejado de las fronteras pierde terreno, significación, deviene arrogante, degenera y muere"[720].

---

719 De la misma manera, su *Tesis Doctoral* [**1949-53**] puede situarse dentro de un periodo *yang*, orientado a responder los problemas externos de Schwartz y Dieudonné. En general, puede observarse cómo esa tendencia *yang* está muy cercana de la influencia y del *estilo* mismo de Dieudonné, redactor omnisciente de Bourbaki y constructor arquitectónico por excelencia.

720 M. Bajtín. "El problema del contenido, el material y la forma en la creación literaria (1924)". En: *Teoría y estética de la novela*. Madrid: Taurus, 1991, p. 30.

17

Fuerzas transversales y mapas comparativos en el hacer grothendieckiano

Las *fronteras* ocupan lo mejor de la obra de Grothendieck. Mediante traducciones sensibles a lo diferencial –relativización, tipificación, funtorialización–, y mediante visiones integradoras comunes –universalización, arquetipación, naturalización–, Grothendieck *va y viene* sin cesar entre distintos campos de la matemática, y barre un amplio tejido fronterizo entre todo tipo de polaridades. En particular, el *estudio sistemático de los tránsitos (y obstrucciones) entre lo relativo y lo universal, lo local y lo global, lo diferencial y lo integral, lo artificial y lo natural*, puede verse como uno de los aportes esenciales de su obra. En lo que sigue, presentamos esas *fuerzas transversales* que se aglutinan en sus trabajos, y aprovechamos para *comparar* las dinámicas en juego. Finalmente, sintetizamos y diagramamos esas perspectivas en un nuevo modelo para el pensamiento matemático (*THK*: *Topos de Haces sobre modelos de Kripke*), que hemos extrapolado a partir de las enseñanzas mismas de Grothendieck y de la lógica de los haces de Caicedo.

17.1 Relatividad–localidad y universalidad–globalidad

La práctica detallada de una "matemática relativa" es una de las características permanentes del hacer[721] grothendieckiano. La *localización* y la *variación* de los objetos ocurre en efecto desde las categorías coma en el *Tôhoku* [**1955-56**], los anillos locales en los haces coherentes y las proyecciones locales del grupo de la K-teoría sobre la homología [**1955-57**], o los esquemas localizados sobre un esquema dado [**1959-64**], para luego extenderse a cualquier tipo de construcción que merezca el apelativo de "grothendieckiana". La *relatividad* constituye así una de las fuerzas *sine qua non* de su pensamiento. Por otro lado, su contraparte natural –buscar los invariantes detrás de la variación, lo universal detrás de lo relativo, lo global detrás de lo local– es lo que define realmente su empresa. Su *hallazgo sistemático de arquetipos detrás de los tipos* lo distingue de todos los demás grandísimos matemáticos que le preceden.

Ese hallazgo no es casual y se debe, por supuesto, al *uso sistemático de haces y categorías* en su pensamiento. Se requerían tanto una *época*, como un *personaje* excepcional, para poder dar el salto. Gracias a ello, puede entonces pensarse en una noción nueva de

universal relativo

algo que parece una contradicción inmediata en términos (¿cómo algo universal puede

721 Utilizamos aquí el término "hacer" en el sentido de Javier de Lorenzo, quien, desde su *Introducción al estilo matemático* (1971), insistió en la importancia de realizar una filosofía cuidadosa de la disciplina, atenta a las técnicas pormenorizadas de la *práctica matemática*. Ver J. de Lorenzo. *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos, 1971, J. de Lorenzo. *La matemática y el problema de su historia*. Madrid: Tecnos, 1977. De Lorenzo se adelantó así cuarenta años (!) al importante movimiento actual (¿moda?) de la "*philosophy of mathematical practice*". Para una visión completa de su obra hasta el año 2000, ver mi F. Zalamea. "Javier de Lorenzo: por una filosofía dinámica de la praxis matemática". En: *Mathesis* 2.1 (2007), págs. 1-35.

ser relativo y viceversa?), pero que adquiere un sentido tan sencillo como profundo al conjugar la dialéctica *abstracto-concreto* en teoría de categorías. Por un lado, las *categorías concretas* (clases de conjuntos con estructura) proveen muy variadas diferencias, y capturan la *relatividad* de la práctica matemática. Pero, por otro lado, las *categorías abstractas* (clases de morfismos con identidades y asociatividad) ofrecen caminos integrales, y capturan la *universalidad* del conocimiento matemático, gracias a definiciones mediante el extremadamente potente cuantificador "existe único" ($\exists!$)[722].

Los *universales relativos* son la llave (clave) de bóveda (*clef de voûte*) de la catedral grothendieckiana. Gracias a ellos se mantiene la *cohesión* de los múltiples elementos que les rodean, y los arcos se sostienen firmemente en el aire, sin derrumbarse. La noción de *topos* [**1960-69**] constituye el universal relativo tal vez más rico y plástico de la obra de Grothendieck. Su construcción mezcla apropiadamente múltiples niveles de relativización–localización y universalización–globalización: *(i)* en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$, una topología de Grothendieck J usa técnicas de localización y variación, dando lugar a un sitio $(\mathcal{C}, J)$, *(ii)* un haz sobre un sitio combina la localización sobre la base y la búsqueda de secciones globales en el espacio desplegado (*étalé*), *(iii)* la colección de todos los haces sobre el sitio (topos de Grothendieck) universaliza en una estructura unitaria todos los tipos de relativización posibles. El resultado ofrece una generalización del espacio (espacio topológico $\rightarrow$ sitio $\rightarrow$ topos), cuyo *universal relativo* (topos) se extiende bastante más allá del rango de definición y aplicación inicial (espacio topológico). En el proceso de *ascenso*

722 De esta manera, por ejemplo, un "objeto inicial" 0 ($\forall X \exists!\ 0 \rightarrow X$) es un universal relativo en categorías abstractas, que encarna en el vacío en la categoría de conjuntos, en un grupo unitario en la categoría de grupos, en $\mathbb{Z}$ en la categoría de anillos, en un mínimo en la categoría asociada a un conjunto parcialmente ordenado, y que *no* encarna en la categoría de los conjuntos infinitos (infinitud de flechas desde ω, el único candidato plausible a objeto inicial), etc. La *estructura unitaria* del universal abstracto se distribuye así en la *multiplicidad formal* de sus muy distintas relativizaciones concretas. En un cierto sentido, nuestros "ojos ciegos" (Tarkovski) se disponen entonces a ver: *detrás de los tipos emergen los arquetipos, detrás de las apariencias se intuyen soplos universales.*

al universal y, luego, de *descenso* a lo relativo, emergen finas herramientas técnicas (por ejemplo, la cohomología *étale*) que ayudan a desbrozar lo muy concreto (conjeturas de Weil) desde lo muy abstracto (topos de un esquema). En particular, en este ejemplo, la conjunción de lo *étalé* y lo *étale*[723] puede verse como un entronque parcial entre lo universal (haz topológico – *étalé*) y lo relativo (esquema aritmético – *étale*).

De manera similar, la noción de *motivo* [**1967**] conforma otro de los universales relativos más celebrados de Grothendieck. La *musicalidad* misma de la noción –pliegue en un *tema* (motivo), despliegue en sus *variaciones* (cohomologías)– revela su carácter inmediato de universal relativo, atento a la fluidez armónica entre lo uno y lo múltiple, entre una melodía y sus modulaciones, entre una tesitura global y sus deslices locales. El hecho de que esta *visión general* impulse paralelamente la elaboración acotada de las *conjeturas estándar* [**1968**] es un ejemplo de cómo los universales relativos reverberan en torres de conceptos, funcionando esta vez en *dirección inversa* de la ampliación topósica. De hecho, el proceso de relativización (1: motivos → conjeturas estándar), yendo de lo general a lo particular, ofrece una manera concreta de engancharse con lo universal, cosa innecesaria en la extensión (2: espacio topológico → topos). En realidad, las flechas indicadas en (1) y en (2) pueden verse como *procesos de naturalización* de los entes en juego[724], lo que explica el sentido (1: universal → relativo), o (2: relativo → universal), en las flechas. Los procesos duales de universalización y relativización dan lugar así a construcciones de todo tipo, donde el *summum bonum* peirceano –crecimiento continuo de la razonabilidad– se enriquece gracias a inesperadas formas de mediación.

---

[723] No puedo resistirme a transcribir aquí un delicioso juego de palabras de mi colega Jaider Muñoz: "Cuando se trata de Grothendieck, confundir *étale* con *étalé* es letal" (comunicación personal, Diciembre 2018). La aliteración castellana del "tal" (que funciona también en francés: "*confondre étale avec étalé est létal*") hubiese divertido mucho a Grothendieck.

[724] Acerca de las fuerzas fundamentales de *naturalización* en la obra de Grothendieck, ver nuestra *Sección 17.2* abajo.

En otros niveles menos explícitos, muchas de las definiciones de Grothendieck tienden a proveer formas de contextualización de la noción de universal relativo. Esto sucede cada vez que una *(a) definición general* procede de un caldo de cultivo de *(b) ejemplos concretos*, para proceder a una sofisticada *(c) teorización axiomática* del campo de estudio. Los ejemplos se encuentran por doquier: *(i)* los *espacios nucleares* – que engloban la vertiente suave no Banach del análisis funcional en dimensión infinita, que cubren los espacios de distribuciones y de funciones holomorfas, y que permiten describir axiomáticamente las ramas y los ramales esenciales de los espacios vectoriales topológicos [**1949-53**]; *(ii)* las *categorías abelianas* – que engloban las construcciones principales de la homología, que cubren la estructura interna de las categorías de grupos abelianos y haces abelianos, y que captan axiomáticamente las condiciones para la construcción de funtores iterados y de suficientes inyectivos [**1955-56**]; *(iii)* el *grupo de la K-teoría* – que engloba la libertad de los haces coherentes, que cubre las vertientes de la magnitud (género) y el número (equilibrio armónico holomorfía-meromorfía) en Riemann-Roch, y que ofrece las bases para una teoría axiomática general de la dimensión [**1955-57**]; *(iv)* el *grupo fundamental algebraico* de una variedad – que engloba el estudio de las acciones sobre la torre de Teichmüller, que cubre el entendimiento de los espacios *moduli* sobre los racionales, y que consigue conjeturar en abstracto el comportamiento de las variedades anabelianas [**1981**] [**1984**]; *(v)* los *stacks* – que engloban el crecimiento iterado de las n-categorías, que cubren la jerarquización de los tipos de homotopía, y que inician la axiomatización de la teoría de categorías altas [**1983**]; *(vi)* los *derivadores* – que engloban una mirada unitaria sobre la homología y la homotopía, que cubren las distintas localizaciones en homología, categorías derivadas y tipos de homotopía, y que abren perspectivas universales de axiomatización de esos procesos localizadores [**1991**]. Si algo puede observarse en este *hacer grothendieckiano* es el éxito incontestable de una inventividad impulsada por *fuerzas transversales* en todas las expresiones de la inteligencia: técnica, conceptual, metodológica, analógica.

En todas estas elegantes ampliaciones conceptuales, los procesos *(a)-(c)* se interpenetran siguiendo una dirección ($b \to a \to c$), que luego se re-itera en una *envolvente espiral creciente* y que se asemeja en muchos aspectos a los procesos triádicos del descubrimiento científico según Peirce: (inducción → abducción → deducción). En ese crecimiento del conocimiento, la producción de hipótesis *(a: primeras)* tiende a requerir saltos a lo universal para poder distanciarse de las obstrucciones particulares *(b: segundas)*, y, a partir de ese ambiente alto –puro, suave, transitable– de la abstracción, un desatornillamiento general (*dévissage*) procede a construir las teoremáticas *(c: terceras)* que estabilizan todo el edificio[725]. Si comparamos dos de las fuerzas mayores del pensamiento de Grothendieck alrededor del *espacio-número*, (1) el funtor (continuo → discreto) en la *geometría algebraica*, donde las herramientas del álgebra se ponen al servicio de la geometría, y (2) el funtor (discreto → continuo) en el *álgebra topológica*, donde las herramientas de la topología se ponen al servicio del álgebra[cxlix], vemos cómo dos *planos distintos* cortan la espiral ($b \to a \to c \to b \to \cdots$). Por un lado, en la geometría algebraica, y particularmente en la noción de topos, se parte de nociones locales (relativas) que tienden a globalizarse (universales), de donde se despeja en definitiva una estructura superior (inscrita en los

[725] Las nociones de primeridad, segundidad y terceridad corresponden a las *categorías cenopitagóricas* de Peirce.

[cxlix] Los trabajos de Frans Oort son los únicos que intentan ofrecer una visión de la obra entera de Grothendieck, al menos en lo que se refiere a la *geometría algebraica* y el *álgebra topológica* en su conjunto. Ver F. Oort. "Did earlier thoughts inspire Grothendieck?" En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 231-268; C.-L. Chai y F. Oort. *Life and work of Alexander Grothendieck*. URL: https://www.math.upenn.edu/~chai/papers_pdf/ChaiFO-AG-final_v1.pdf. Por supuesto, el espacio de un par de artículos limita inmensamente la tarea, pero el estilo *puntillista* de Oort (cortos párrafos sobre una multitud de temas) consigue presentar magníficamente la variada grandeza de la obra. Es interesante observar cómo Oort registra cándidamente su evolución en su entendimiento de Grothendieck, desde un *prejuicio inicial* –maestro de lo abstracto, supuestamente sin ejemplos– hasta un más ponderado *juicio final* –maestro de lo abstracto/particular, donde los ejemplos invaden toda la obra–. En el primer artículo, Oort advoca por la necesidad de escribir una "*biografía científica*" de Grothendieck: Oort, óp.cit. p. 248. Esperamos haber logrado parte de esa tarea en nuestra monografía.

axiomas del topos) que permite captar una multiplicidad de perspectivas inferiores. Por otro lado, en el álgebra topológica, y particularmente en la noción de derivador, se parte de nociones globales (universales) que tienden a localizarse (relativos), lo que permite intuir una unificación arquetípica de la diversidad de tipos en homología y homotopía. En ambos casos, los resultados tienden a reintegrar lo diferencial, pero siguiendo procesos inversos entre lo universal y lo relativo.

Desde una perspectiva más amplia, un *primer mapa comparativo* del hacer grothendieckiano (ver *Figura 17.1*) incluye los siguientes aspectos relacionados con las fuerzas *relatividad–localidad* y *universalidad–globalidad*:

relatividad–localidad ↓ ***universalidad–globalidad***	**(continuo → continuo)**	EVT
	(discreto → discreto)	HOMOLOGÍA
	(continuo → discreto)	TOPOS
	(discreto → continuo)	ESQUEMAS
universalidad–globalidad ↓ ***relatividad–localidad***	**(continuo → continuo)**	TEICHMÜLLER
	(discreto → discreto)	STACKS
	(continuo → discreto)	ANABELIANIDAD
	(discreto → continuo)	DERIVADORES

Fig. 17.1 – Mapa de fuerzas relatividad–localidad y universalidad–globalidad

La distribución de los trabajos es solo indicativa, ya que algunos podrían cambiar de ubicación[726]. Lo fundamental, por el momento, consiste en subrayar cómo el retículo de fuerzas en la obra grothendieckiana es plenamente *multidimensional*, al descubrir (o inventar) *múltiples mediaciones naturales entre pares duales*, en la conformación de las construcciones técnicas más profundas.

17.2 Diferenciación–artificialidad y reintegración–naturalidad

En buena medida, el *cálculo diferencial e integral* de nuestra época coincide con la *teoría de categorías*, gracias a los tránsitos que hemos mencionado en la sección anterior, entre categorías concretas y categorías abstractas, entre lo relativo y lo universal, entre lo local y lo global. La *diferenciación*, en efecto, requiere de contextos bien determinados, donde se resaltan las especificidades concretas, las perspectivas relativas, las acotaciones locales. Por otro lado, la *integración* coliga los diversos contextos, y permite los enlaces abstractos, las cohesiones universales, los tejidos globales. En muchos sentidos, esto se encuentra muy cerca de la *máxima pragmática* según Peirce, donde un signo es, primero, diferenciado y, luego, reintegrado, para proveer un entendimiento cabal del mismo (ver *Figura 17.2*).

[726] Por ejemplo, la homología en [**1955-56**], situada en la primera franja, podría aparecer también en la segunda línea de la segunda franja, en vez de los *stacks* [**1983**], si solo se atendiera a consideraciones algebraicas; pero si se tuvieran en cuenta aspectos algebraicos y topológicos, la homología sería parte de los derivadores [**1991**], en la cuarta línea de la segunda franja. De manera similar, Riemann-Roch-Grothendieck [**1955-57**] debería aparecer en la tercera línea de la primera franja si se pensara en cómo el Riemann-Roch clásico influencia su versión general, pero podría situarse en la tercera línea de la segunda franja si se privilegiara ante todo el carácter libre universal del grupo de la K-teoría. La *transitabilidad* de las construcciones es fundamental. El mapa bidimensional de la tabla sólo es un *pálido reflejo* de las incesantes interconexiones en el pensamiento de Grothendieck, que deberían poder dibujarse en *superficies de Riemann multidimensionales*. Para una mejoría gráfica y conceptual de esta situación, ver nuestro modelo *THK*, *Sección 17.3* abajo.

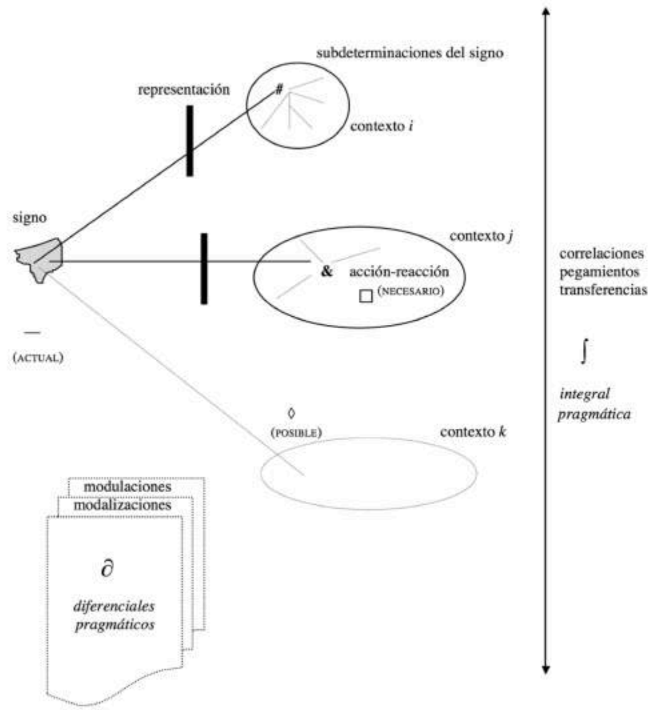


Fig. 17.2 – La máxima pragmática: modalidades de diferenciación e integración

En la figura, a izquierda, aparece el signo (actual) a ser comprendido; este se representa entonces en diversos contextos (posibles) de interpretación, y en cada ambiente se estudian sus acciones-reacciones (necesarias); finalmente, se busca la coligazón de las distintas interpretaciones, lo que constituye el conocimiento completo del signo. En un cierto sentido, la máxima pragmática puede verse como un *haz de interpretaciones*, cuya base es el signo, cuyas fibras son las representaciones contextuales del signo, y cuyas secciones son las correlaciones, o pegamientos, entre las distintas representaciones. El tránsito entre lo actual, lo posible y lo necesario –típico de la semiótica peirceana y del conocimiento matemático (ejemplos, modelos, pruebas)– se asemeja así al tránsito entre lo concreto, lo abstracto y lo universal, propio de la teoría de categorías.

Sin haber sabido de Peirce[727], Grothendieck se acerca a la vida y obra del Maestro norteamericano en múltiples aspectos. En primer lugar, sobresale la *continuidad* de sus trabajos, con periodos de germinación bien definidos (en el caso de Grothendieck, ver arriba *Figuras 16.1 - 16.3*), y con todo tipo de contrapuntos entre los estadios de crecimiento interno de sus pensamientos. En segundo lugar, se observa una profunda *armonía* entre sus invenciones, sus modos de conocer, y las formas mismas de vida en que ocurren esos avances gnoseológicos – con décadas de seclusión final en ambos casos, que les permitieron trascender todas las modas y coyunturas de sus momentos respectivos. En tercer lugar, y *gracias tanto a la continuidad como a la armonía*, impacta la asombrosa *originalidad* de ambos creadores, realmente únicos en sus maneras de aproximarse a cada cosa que tocaron. En cuarto lugar, fluye muy en lo profundo la *naturalidad* de sus constructos, siempre atentos a captar las formas más sencillas y poderosas del entendimiento. Peirce y Grothendieck constituyen en realidad dos *gigantes necesarios* para poder orientarnos parcialmente dentro de la complejidad del mundo moderno y contemporáneo.

La diferenciación forma parte de lo que en la *Sección 17.1* llamamos el *corazón matemático*, mientras que la integración se encuentra más del lado de la *razón matemática*. De hecho, las técnicas especializadas de la primera década grothendieckiana –espacios nucleares [**1949-53**], normas tensoriales en espacios de Banach [**1953c**], funtores iterados y suficiencia de inyectivos [**1955-56**], estratificación de la torre de Teichmüller [**1955-57**]– muestran el acumen diferencial del autor, al ser capaz de distinguir, en lo muy acotado,

[727] Peirce se sitúa en el hondo espacio polifacético de la segunda mitad del XIX en Estados Unidos, particularmente sensible a una suerte de Poesía Natural Universal, al lado de los queridos grothendieckianos Melville y Whitman [**1987**]. Para un estudio de las resonancias entre Peirce, Emerson, Poe y Melville, en la Nueva Inglaterra de los años 1840-1850, ver mi F. Zalamea. “Faneroscopia, filosofía natural y literatura. «La Esfinge» en Peirce, Emerson, Poe y Melville”. En: *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 1 (2009), págs. 33-52. La *esfinge* allí estudiada reverbera en el desprendimiento de los velos de *Isis* en Novalis, y se sumerge en el Gran Mar de *Cosechas y siembras* [**1983-86**] o en el Gran Río de *La llave de los sueños* [**1987**].

todo tipo de desviaciones sensibles para el conocimiento matemático. Por otro lado, las enormes *mareas* de la segunda y tercera décadas –esquemas [**1959-64**], topos [**1960-69**], motivos [**1967**], anabelianidad [**1984**], derivadores [**1991**]– exhiben una capacidad integradora sin igual. El contrapeso entre lo diferencial (tipos) y lo integral (arquetipos) se encuentra siempre presente, pero lo que torna único a Grothendieck es su tendencia cohesiva, integradora, universalista, donde la teoría de categorías adquiere un papel preponderante.

La *totalidad* de la obra muestra una enorme variedad de oscilaciones, tanto en la parte matemática, como filosófica[cl]. No obstante, detrás de la variación incesante, se encuentra una sofisticada *unificación* de los diferentes estratos variables[728]. Dentro de la matemática y la lógica en sí mismas, esa tendencia unificadora, llamada *teoría de puentes*[cli] por Olivia Caramello, adquiere un sumo valor heurístico. Pero aún más allá, la obra de Grothendieck produce *puentes por doquier*, y, lo que es más extraordinario, se trata de *puentes naturales*[729], tanto entre distintas áreas de la matemática, como entre distintas regiones del entendimiento (enlaces psiquis-cosmos [**1987**]).

728 Esa unificación fundamental, por estratos y siguiendo procesos de reflexión, se expresa con vigor en las n-categorías y en los tipos de homotopía [**1983**], que darán lugar a la *teoría homotópica de tipos* de Voevodsky (2006-2013).

729 Como el fascinante puente natural de *Icononzo*, descrito por Humboldt (1801) en su viaje a la Nueva Granada.

cl El trabajo de largo aliento de Pierre Lochak, P. Lochak. *Mathématiques et finitude*. Paris: Kimé, 2015, intenta ofrecer una visión de esa totalidad, reflexionando tanto sobre la matemática (especialmente la geometría algebraica), como sobre la filosofía (especialmente *Cosechas y siembras* [**1983-86**]). Los capítulos 1-3 y las secciones 6.3-6.4 ofrecen cerca de 200 páginas de comentarios muy finos sobre Grothendieck. Desafortunadamente, unos índices de nombres y de temas le hacen cruel falta al volumen, tanto más que el *estilo* de Lochak tiende a la digresión constante y es fácil perderse en el desarrollo de sus ideas. De los autores que intentaron mirar todo Grothendieck en su conjunto, la *maniera digresiva* de Lochak (próxima al tercer Grothendieck) y la *maniera puntillista* de Oort (próxima al segundo Grothendieck) sirven de perspectivas contrastantes. La inmensidad de Grothendieck gana con ambas miradas.

cli Ver O. Caramello. *Theories, Sites, Toposes*. Oxford: Oxford University Press, 2017.

La *naturalización* es indispensable para Grothendieck. Allende lo *artificial –ad hoc*, dispuesto a un fin, disonante, hecho de modo singular, "falso" en su especificidad–, las construcciones estándar de la teoría de categorías (transformaciones naturales, funtores representables, Yoneda, etc.) consiguen superar la diferenciación y ofrecen cohesiones conceptuales *naturales* –espontáneas, provenientes sin dobleces de un estado de cosas, armónicas, hechas de modo regular, "verdaderas" en su amplitud–. La abstracción, la universalización y la reintegración superan las obstrucciones de lo concreto y lo particular, y consiguen despejar un *ámbito general y natural de suavización*, imprescindible para poder presentar y desarrollar las *dialécticas plenas* de la actividad matemática. En efecto, si observamos algunos de los pares duales esenciales del pensamiento matemático –(1) espacio/número, (2) continuo/discreto, (3) infinito/finito, (4) negativo/positivo, (5) bello/verdadero, (6) posible/necesario, (7) uno/múltiple, (8) abstracto/concreto, (9) estructurado/deformado– múltiples *mediaciones naturales* entre esas polaridades conforman buena parte del legado de Grothendieck: (1') topos [**1960-69**], (2') anabelianidad [**1981**], (3') axiomas infinitarios en categorías abelianas [**1955-56**], (4') Riemann-Roch-Grothendieck [**1955-57**], (5') vaivén *yin/yang* en las *Puertas del universo* [**1983-86**], (6') conjeturas estándar [**1968**], (7') desigualdad de Grothendieck [**1953c**], (8') esquemas y cohomología *étale* [**1959-64**], (9') derivadores [**1991**]. En todas estas construcciones (1')-(9') sobresalen la armonía, la regularidad, la amplitud, allende compartimentaciones estancas.

Las fuerzas *diferenciación–artificialidad* y *reintegración–naturalidad* se convocan entre sí, y se precisan por oposición. Si las corrientes fundamentales para Grothendieck son la suavización, la regularización, la armonización, la naturalización, estas fuerzas emergen con mayor ímpetu al compararse con sus contrapartes polares (quiebre, singularidad, disonancia, artificio). El *mar* se aprecia mejor al contraponerse con el *volcán.* El *cálculo integral* adquiere su sentido más hondo al conjugarse con el *cálculo diferencial.* Así como la dialéctica de fuerzas *relatividad–localidad* y *universalidad–globalidad* nos produjo en la

Sección 17.1 una distribución de algunas obras de Grothendieck (ver *Figura 17.1*), una nueva dialéctica nos ayuda ahora a producir un mapa similar (*Figura 17.3*):

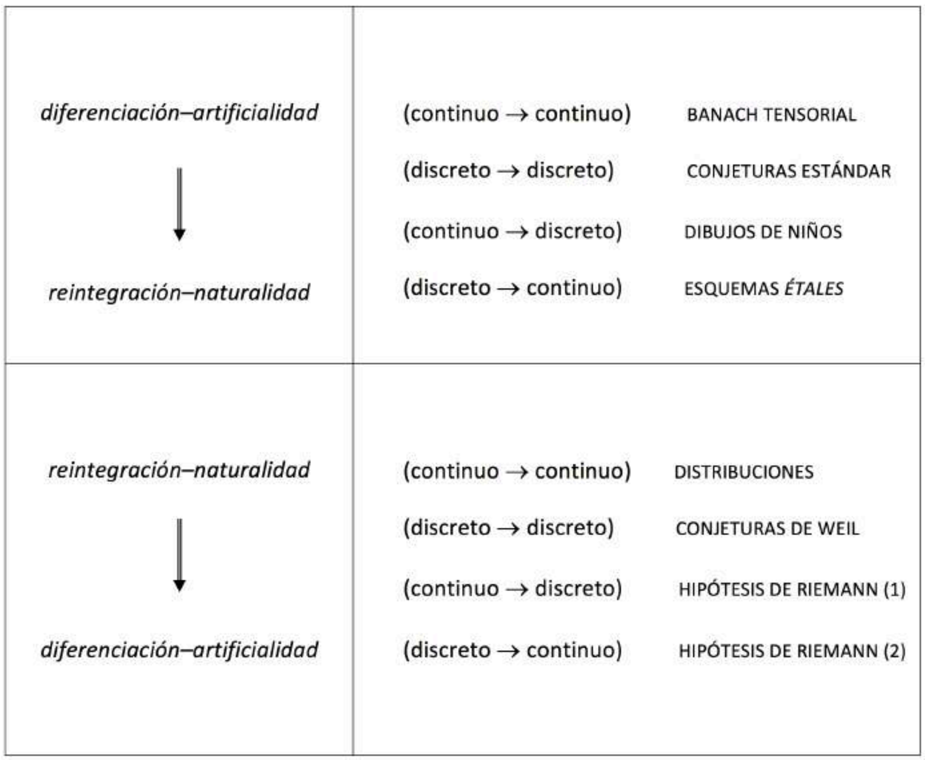


Fig. 17.3 – Mapa de fuerzas diferenciación–artificialidad y reintegración–naturalidad

En la primera franja, se sitúan algunas construcciones típicas de Grothendieck, donde se pasa de lo artificial a lo natural, hasta sumergirse en omniscientes espacios de suavización (*mares/mareas*): retículo de 14 normas tensoriales naturales en productos de Banach [**1953c**], conjeturas estándar como camino natural hacia las conjeturas de Weil [**1968**], dibujos de niños para una representación natural de las superficies de Riemann [**1984**], topología *étale* en los esquemas para alisar al máximo las protuberancias artificiales de la aritmética [**1960-69**]. Por otro lado, en la segunda franja, se observan constructos menos grothendieckianos (ausencia de suavidad o naturalidad) y más ligados a problemas "externos" de la comunidad (Schwartz, Weil, Riemann). No obstante, en estos segundos entornos del pensamiento matemático, las "mareas altas" de Grothendieck han servido (espacios nucleares, topos *étale*), o podrán servir (topos aritmético), en la resolución de difíciles problemas matemáticos. La enorme opacidad de la hipótesis de Riemann yace probablemente en que las *formidables obstrucciones analíticas* de la situación no han podido ser aún inscritas *naturalmente* dentro del ambiente aritmético-algebraico-geométrico del topos aritmético de Connes.

17.3 Tipos y arquetipos. El modelo *THK*

En esta sección, extrapolamos algunas guías provenientes de las nociones de *haz* y de *topos de haces*, para ofrecer un nuevo modelo para la filosofía matemática, donde se integran de manera natural la historia, la fenomenología y la metafísica. La construcción se realiza en dos etapas muy sencillas. Ante todo, la primera analogía conceptual consiste en *entender el pensamiento matemático como un haz* (ver *Figura 17.4*)[730]. En el nivel bajo (espacio plegado, MAT), situamos diversas formas de la técnica matemática en sí misma, es decir, definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos. En el nivel alto (espacio desplegado, FIL), aparecen en cada fibra las ideas, imágenes, intuiciones, que se proyectan sobre cada expresión técnica en el espacio bajo. Así, a través de la *proyección de ideas en técnicas*, los filosofemas se pliegan en teoremas, y, viceversa, los teoremas se despliegan en filosofemas (vía fibras y secciones). El *pensamiento matemático* cubre entonces todo su espectro polisémico, no reducible meramente a una técnica, sino expandible también a lo largo de multidimensionales imágenes e intuiciones. En el *back-and-forth* entre las ideas y las

[730] Introdujimos por vez primera esta concepción en nuestro *Seminario de Filosofía Matemática* 2016-II, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

técnicas se sitúa la enorme plasticidad creativa de la disciplina. Ya en este primer nivel emerge una incisiva *dialéctica entre tipos y arquetipos*, entre los tipos acotados de la técnica en el espacio bajo y los arquetipos vagos de las ideas en el espacio alto. El *vaivén entre vaguedad (alta) y precisión (baja)* impulsa el crecimiento de la matemática.

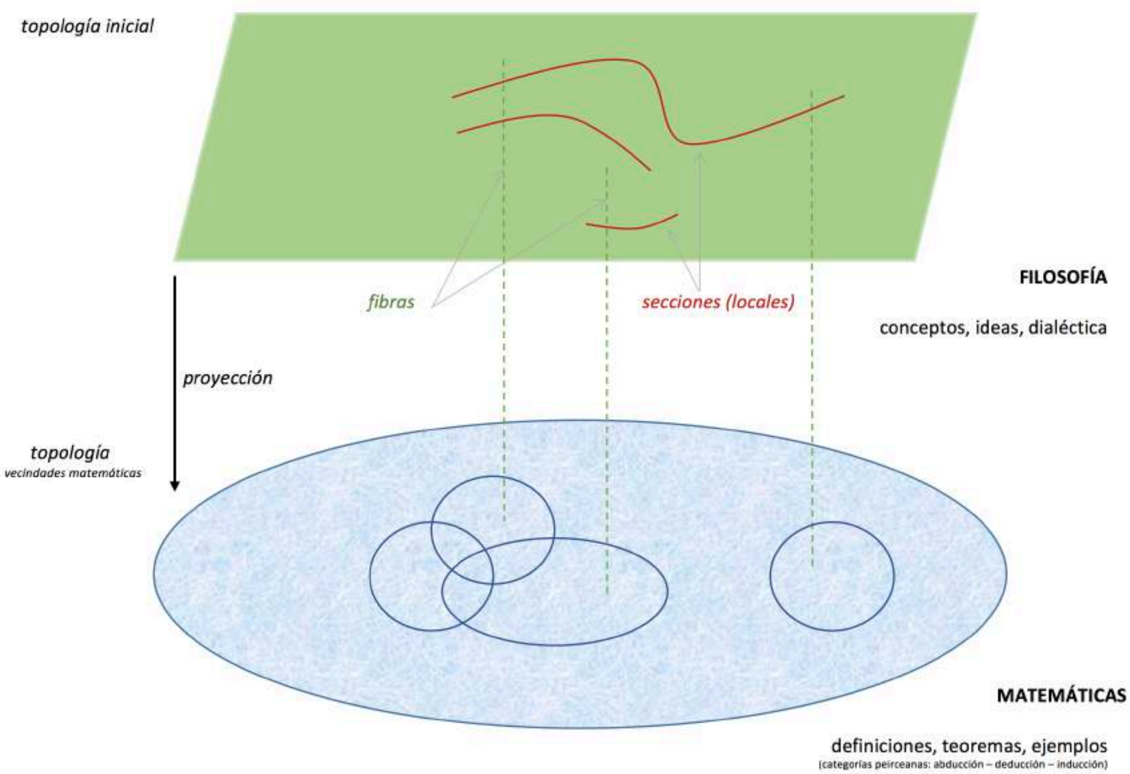


Fig. 17.4 – El pensamiento matemático como un haz (primer modelo)

Después de aplicar este primer modelo en haces al estudio de las matemáticas modernas y contemporáneas, Carlos Cardona y Nicolás Ramírez criticaron con justeza el carácter estático del modelo, y sugirieron la introducción de un nivel *temporal* y un nivel *global* en las consideraciones de la filosofía matemática vía haces. De allí surgió una segunda analogía conceptual, para *entender el pensamiento matemático como un topos de haces* (ver *Figura 17.5*)[731]. La situación abunda ahora en matices, pues se integran en el modelo un primer nivel *(K)* formado por un modelo de Kripke intuicionista que sirve para representar un tiempo ramificado, un segundo nivel *(H)* formado por los haces de la *Figura 17.4* pero relativizados ahora sobre cada instante del tiempo, y un tercer nivel *(T)* formado por la estructura resultante de todos los *haces de haces* sobre el tiempo subyacente.

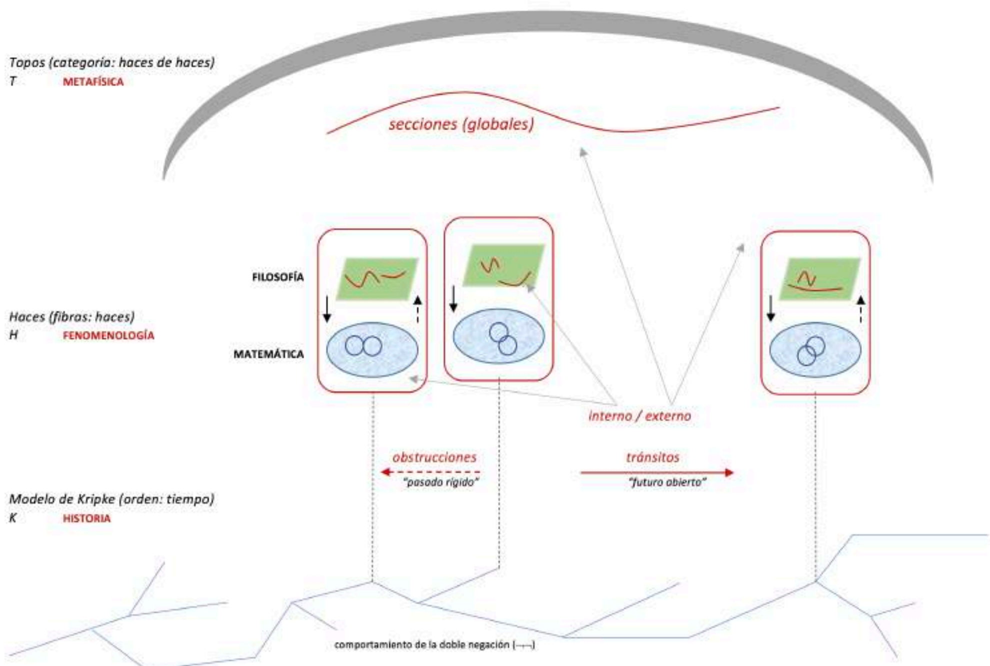


Fig. 17.5 – El pensamiento matemático como un topos de haces (segundo modelo)

[731] Introdujimos esta segunda concepción en nuestro *Seminario de Filosofía Matemática* 2017-I, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. La motivación inicial surgió al intentar extrapolar hacia la filosofía matemática la *lógica de los haces* de Xavier Caicedo, elaborada sobre modelos de Kripke intuicionistas. Ver Caicedo, óp.cit.

El *topos de haces sobre modelos de Kripke (THK)* integra consideraciones históricas en el nivel *(K)*, fenomenológicas en el nivel *(H)* y metafísicas en el nivel *(T)*. En primer lugar, el hecho de que tomemos un modelo de Kripke *intuicionista* para representar el tiempo descarta su linealidad (pues $p \to q \ \vee \ q \to p$ no vale intuicionísticamente) y permite aprovechar la riqueza de la doble negación ($\neg\neg$) como operador topológico *no identitario* ("denso-sí" en el futuro), para enriquecer el desarrollo de las ideas (la vigencia de la doble negación de una idea la acerca a su validez como sección global en el topos). Más aún, el "pasado rígido" y el "futuro abierto" en un tal modelo de Kripke intuicionista permiten desplegar de manera natural la fundamental problemática de obstrucciones y tránsitos en matemáticas (ver *Figura 17.5*). En segundo lugar, cada haz FIL-MAT situado sobre un instante del tiempo sirve para estudiar los fenomenos matemáticos en toda su complejidad de técnicas e ideas. En este caso, el estudio *interno* de cómo –dentro de cada haz fijo, es decir, dentro de cada *fibra* sobre el modelo de Kripke– ciertas secciones locales pueden (o no) extenderse a secciones globales ayuda a explicar cómo ciertas ideas se propagan (o no) en una obra matemática dada. En tercer lugar, y esto es tal vez lo más interesante, la *totalidad* de los haces FIL-MAT locales forman un topos, en cuya estructura global puede leerse una historia *externa* de la disciplina, con la aparición (o no) de secciones globales que actúan como *arquetipos altos*[732] del pensamiento matemático.

Desde un punto de vista más preciso, tres características del modelo son particularmente relevantes: *(i)* las *topologías* a considerar en MAT (el espacio plegado de los haces de la *Figura 17.4*), *(ii)* el hecho de que la proyección deba ser un *homeomorfismo local*, *(iii)* la problemática de enlaces entre secciones locales y secciones globales, tanto a nivel *(H)*, como a nivel *(T)*. Una primera manera de abordar *(i)* consiste en intentar *medir*

[732] Otros *arquetipos intermedios* emergen al nivel *(H)*, con secciones globales en cada haz determinado FIL-MAT (trazos enteros en los espacios "semi-altos" FIL).

distancias entre teoremas y pruebas, siguiendo por ejemplo las técnicas de las *matemáticas en reverso* de Friedman y Simpson; otra manera de hacerlo consistiría en introducir adecuadas topologías de Grothendieck que captaran diversas correlaciones sintéticas entre teoremas y pruebas. En caso de lograr desarrollar ese primer punto *(i)*[733], el sorprendente interés de la condición *(ii)* corresponde a realizar los *sueños de Leibniz y de Peirce*: por un lado, si gracias al *homeomorfismo* local toda idea matemática puede acotarse en una vecindad de tal manera que las ideas (en el espacio alto) y las técnicas (en el espacio bajo) se correspondan, entonces estaríamos encarnando el sueño de Leibniz, donde el "discutamos" filosófico se traduciría en el ideal "calculemos" matemático; por otro lado, leyendo ahora en sentido *inverso* el homeomomorfismo local, a partir de la exactitud técnica en MAT podría elaborarse una potente *metafísica semiótica y matemática*, respondiendo al sueño de Peirce. Finalmente, el estudio de los cortes y pegamientos en el nivel *(iii)* nos lleva a algunas de las preguntas mayores de la filosofía matemática: ¿cómo puede ser que la matemática se estabilice en el tiempo a pesar de surgir de condiciones históricas y geográficas particulares?, ¿cómo se explica la "irrazonable efectividad" de una disciplina enteramente humana en sus aplicaciones a la Naturaleza?, en suma ¿cómo se entiende la aparición de secciones globales en el topos a partir de sus secciones locales?[734]

[733] Algunos intentos se realizaron en nuestro *Seminario de Filosofía Matemática* 2017-I, alrededor de autores específicos (*e.g.* Galois, Riemann, Poincaré, Cantor, Hilbert, Gödel, etc.), pero esperan precisarse en el próximo volumen, F. Zalamea. "Modelos en haces para el pensamiento matemático. De Galois a Connes. 1830-2020". En proceso. 2019.

[734] En caso positivo, esto corresponde a la construcción general de secciones globales en un haz. A veces, tales construcciones son posibles (haces *flácidos* [*flasques*] o *blandos* [*mous*] en los cuales una sección sobre un cerrado se extiende siempre a una sección sobre todo el espacio, ver R. Godement. *Théorie des faisceaux.* Paris: Hermann, 1958, pp. 147, 151). Un haz sobre una variedad irreducible sobre un cuerpo es un haz flácido (Grothendieck), mientras que el haz de representación de un anillo (esquema afín) no lo es en general. Una extensión de estas ideas y un ejemplo de uso analógico del *THK* es lo que hemos llamado el "haz de la existencia": tomamos en la base el tiempo de nuestra vida, y situamos sobre cada instante la fibra de nuestras creencias en ese momento. Nuestras vivencias dan lugar a secciones locales a lo largo de nuestra existencia; a menudo, las secciones locales no son compatibles entre sí, y entramos en incesantes contradicciones que desconfiguran nuestra personalidad. Ya cuando contamos con un poco de perspectiva, nos preguntamos si nuestra constante agitación, en la niñez, en

En lo que sigue, aplicaremos nuestro modelo *THK* a los trabajos de Grothendieck. El modelo se divide en seis fragmentos (*Figuras 17.6–17.11*), siguiendo el desarrollo de la obra. Un adecuado *pegamiento*[735] de esas seis partes da lugar al *THK de Grothendieck*, donde la coherencia y la continuidad de sus trabajos se resalta gráfica y conceptualmente. Desde una mirada global, las tres partes principales de nuestra monografía corresponden a entornos bien definidos del modelo *THK*: *Parte I: Figuras 17.6, 17.7*; *Parte II: Figuras 17.8, 17.9*; *Parte III: Figuras 17.10, 17.11.* La triple ventaja de *(i)* una *diagramación abierta*, *(ii)* una *conceptualización dinámica* y *(iii)* una *síntesis compacta* puede observarse en el modelo *THK*. En efecto, *(i)* teniendo en cuenta diversos movimientos *verticales* (fibras sobre el modelo de Kripke, fibras sobre MAT, pliegues, despliegues), diversos entrelazamientos *horizontales* (entornos de tiempo, secciones internas locales y globales en FIL, secciones externas locales y globales en el topos), y diversos reflejos *diagonales* (inyección/proyección, *étalé/étale*, invisible/visible), se obtiene una *liberación y suavización visual* que calca icónicamente la plasticidad de la obra. Por otro lado, *(ii)* los enlaces de lo local y lo global, las contrapartidas entre la variación continua y la variación discreta, el péndulo de lo diferencial y lo integral, bien visibles en el modelo, exhiben las características dinámicas del pensamiento grothendieckiano. Finalmente, *(iii)* los *signos* y las *imágenes multidimensionales* en el *THK* ayudan a sintetizar compactamente –en lo esencial, en lo más *sencillo*, como le hubiese gustado a Grothendieck– una obra extraordinariamente coherente y atravesada por *leitmotivs* bien definidos. La *evolución* del *THK* (rastreable en el desarrollo de las *Figuras 17.6–17.11*) muestra la creciente *armonía* de una obra con *contrapunt(e)os* incesantes entre sus partes.

---

la adolescencia, en la edad madura, o en la vejez, ha tenido algún sentido. En suma, nos preguntamos si las distintas secciones locales de nuestra vida se pegan coherentemente en una sección global. ¿Nuestro haz de la existencia es flácido, blando, o, más bien, disconexo? Una respuesta positiva o negativa puede forzar en nosotros una razonable satisfacción o una inquietante crisis.

735 Para un video de una tal acción, ver las “Láminas” de nuestro *Cursillo Grothendieck*, UNAM, México, Junio 2018, https://www.youtube.com/playlist?list=PLiD-IJzweXR9ndmvpYnoqBJwAQFE778zv.

El primer diagrama *(THK: 1928-1953)* (ver *Figura 17.6*) cubre la *Tesis Doctoral* [**1949-53**] y el *Résumé* [**1953c**]:

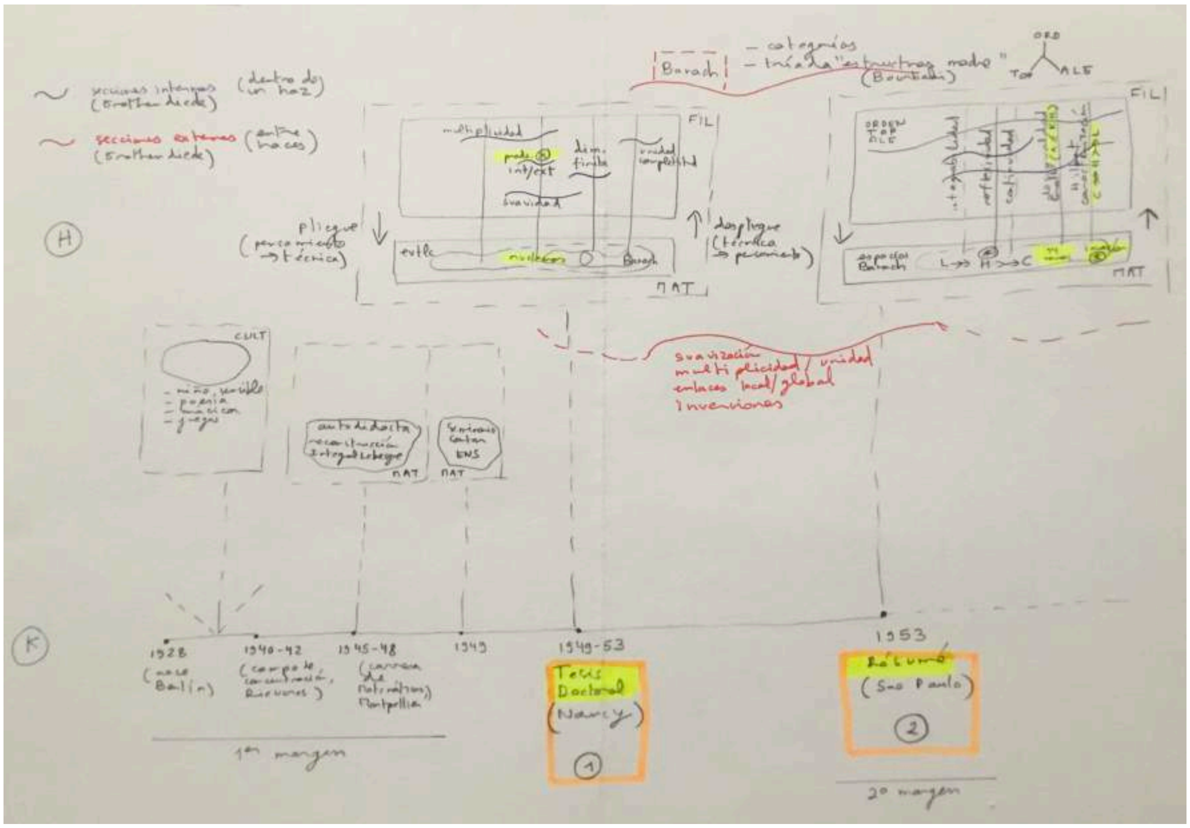


Fig. 17.6 – *THK* grothendieckiano: 1928-1953

Desde el inicio, se observan las *secciones fundamentales multiplicidad/unidad/suavidad* en FIL, proyectadas en los espacios nucleares (o desplegadas desde los mismos) [**1949-53**], así como las *inversiones y acordes armónicos* de las "estructuras madre" bourbakistas, proyectadas en las 14 normas naturales en productos tensoriales de espacios de Banach (o desplegadas desde las mismas) [**1953c**]. En ciernes, los *mares* de la *Tesis* y del *Résumé* involucran ya nociones implícitas de categorías, que gobiernan todo el panorama.

El segundo diagrama *(THK: 1955-1957)* (ver *Figura 17.7*) cubre el *Tôhoku* [**1955-56**] y el *Riemann-Roch-Grothendieck* [**1955-57**]:

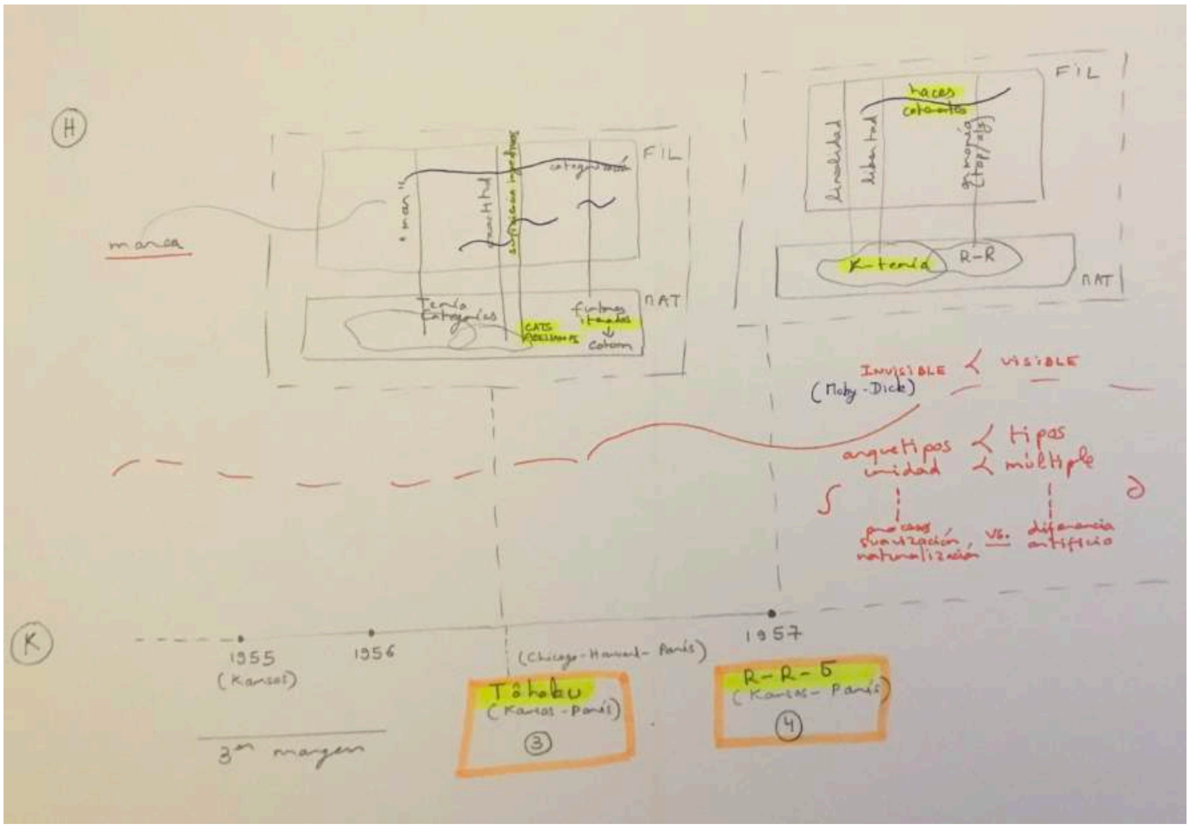


Fig. 17.7 – *THK* grothendieckiano: 1955-1957

En su “giro crucial” hacia la geometría algebraica, Grothendieck se adentra en los grandes problemas que marcarán buena parte de su vida matemática. La *categorización* y la *hacificación* aparecen como secciones globales en FIL, desplegadas desde las categorías abelianas [**1955-56**] y la *K*-teoría [**1955-57**]. De una manera aún más honda, empieza a aparecer la alegoría de *Moby-Dick*, con su búsqueda de *arquetipos profundos* que gobiernen la superficialidad de los tipos, su exploración de lo *invisible* tras lo visible.

El tercer diagrama *(THK: 1958-1964)* (ver *Figura 17.8*) cubre la *Conferencia de Edimburgo* [**1958**], los trabajos sobre variable compleja [**1961**] y *EGA* [**1959-64**]:

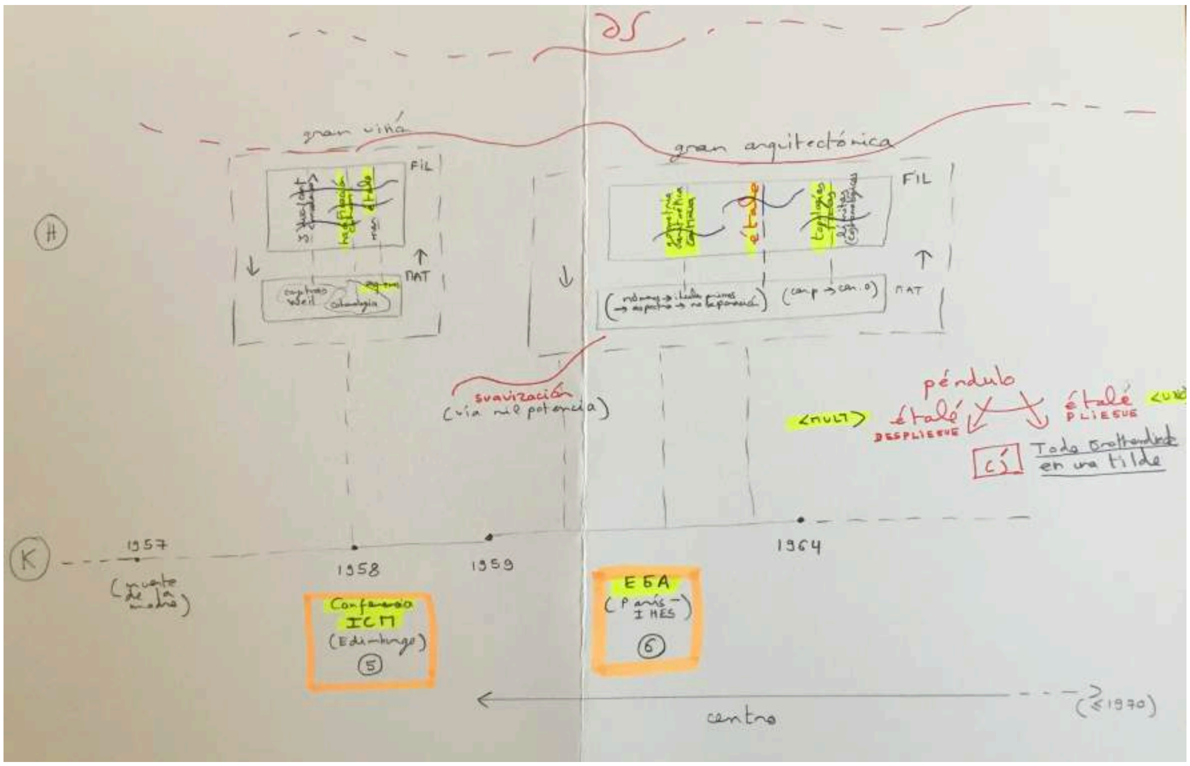


Fig. 17.8 – *THK* grothendieckiano: 1958-1964

Nuestro modelo simplifica el tiempo en forma *lineal* y enfatiza hasta este momento los niveles *(K)* y *(H)*, encontrándose implícito el nivel *(T)* que aparecerá explícitamente con los desarrollos de *SGA* [**1960-69**] (ver próxima *Figura 17.9*). Aquí emerge la *gran visión* de la cohomología *étale* [**1958**], que se concreta luego en la extensa y pormenorizada construcción de los esquemas [**1959-64**] y los topos. La sección global externa de una *arquitectónica diferencial e integral universal* se revela en toda su majestuosidad.

El cuarto diagrama *(THK: 1960-1970)* (ver *Figura 17.9*) cubre *SGA* [**1960-69**], la intuición de los motivos y las conjeturas estándar [**1968**]:

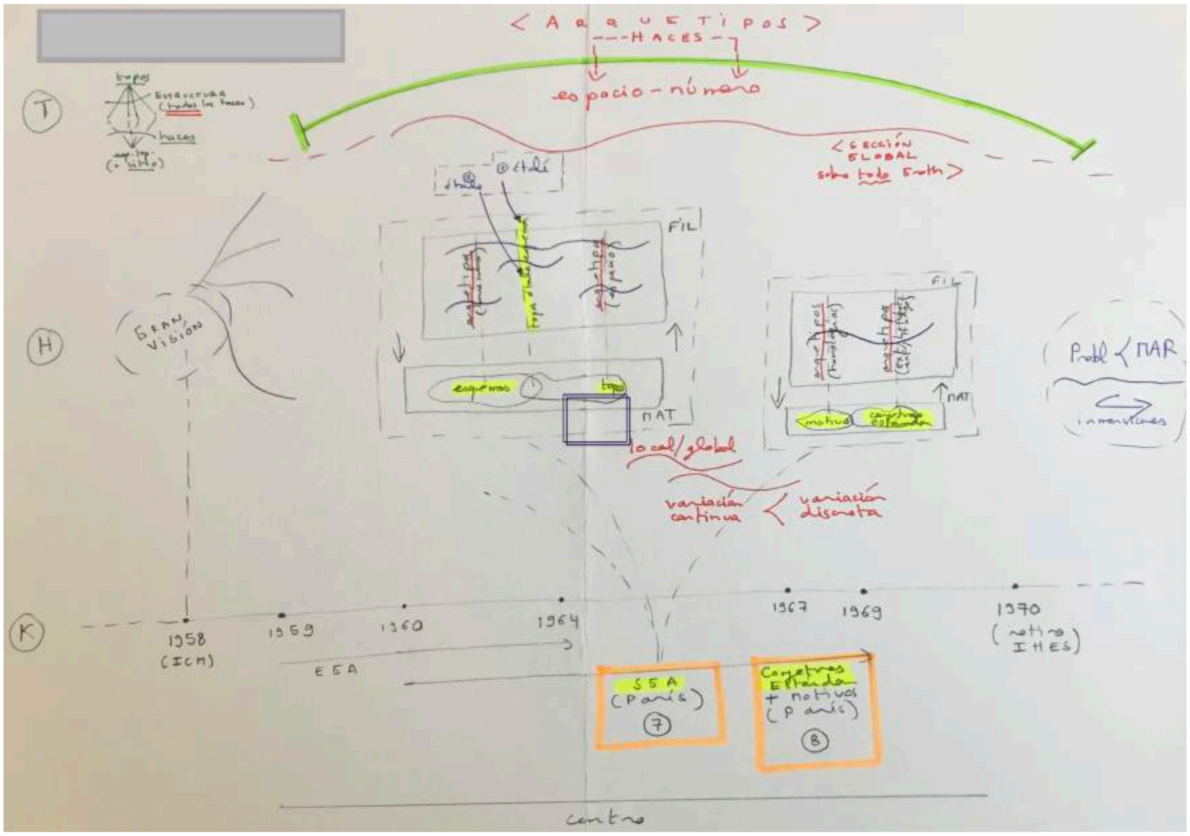


Fig. 17.9 – *THK* grothendieckiano: 1960-1970

El panorama multidimensional alcanza toda su potencia con los topos y, en particular, el topos *étale* de un esquema [**1960-69**]. Es la época de las *altas unificaciones abstractas* que descenderán sobre las conjeturas estándar [**1968**] y las conjeturas de Weil, de los *mares* inmensos que fecundan toda la obra. Los *haces* cifran la *unificación arquetípica del espacio-número*, y las secciones globales de la dualidad *variación discreta versus variación continua* empiezan a marcar las vertientes de la geometría algebraica y del álgebra topológica.

El quinto diagrama *(THK: 1981-1984)* (ver *Figura 17.10*) cubre la *Larga marcha* [**1981**], el *Esbozo de un programa* [**1984**] y el inicio de *Cosechas y siembras* [**1983-86**]:

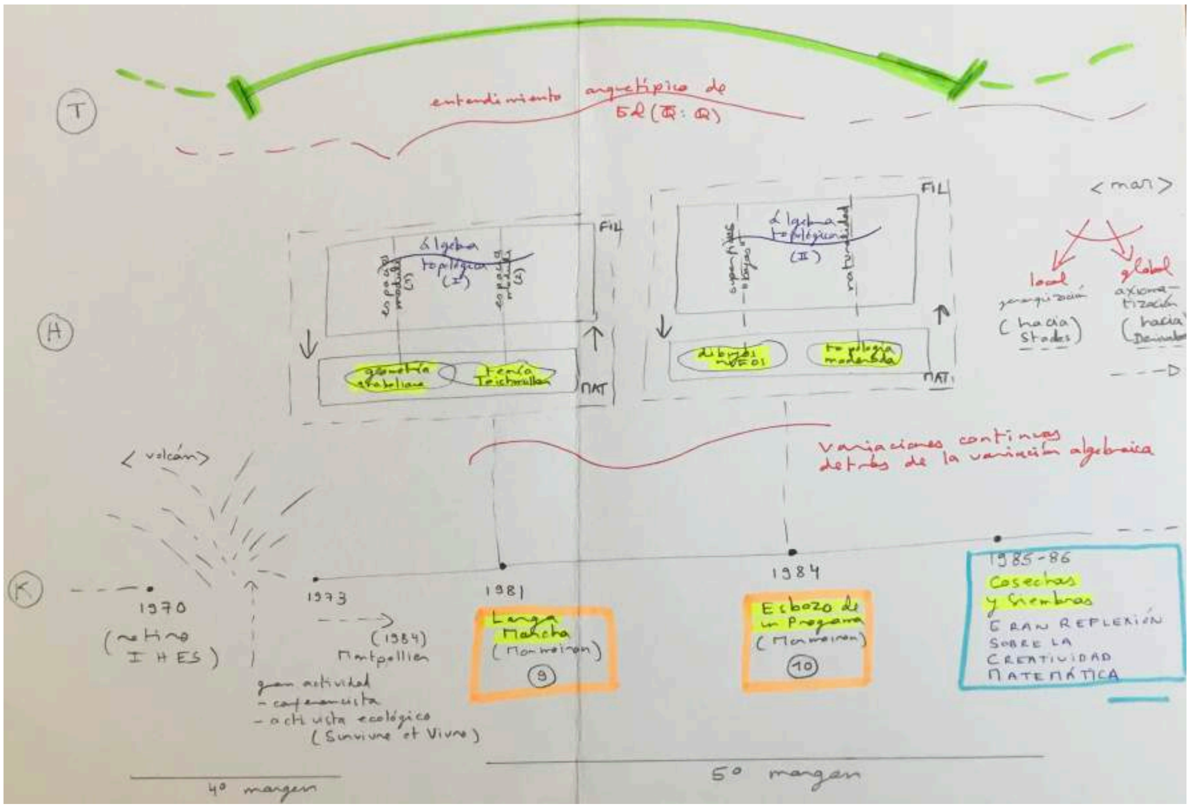


Fig. 17.10 – *THK* grothendieckiano: 1981-1984

El *volcán* de las construcciones *concretas* (espacios *moduli* y torre de Teichmüller [**1981**], superficies topológicas y dibujos de niños [**1984**]) *invierte* la mirada, yendo ahora de lo particular a lo general, de la variación algebraica a la variación continua. El grupo de Galois absoluto y los grupos fundamentales algebraicos, gobernando la aritmética a través de las conjeturas anabelianas [**1981**] [**1984**], conforman una sección global con enorme impacto en la concepción y el desarrollo del *álgebra topológica*.

El sexto diagrama *(THK: 1983-1991)* (ver *Figura 17.11*) cubre los *Stacks* [**1983**], los *Derivadores* [**1991**] y el pleno desarrollo de *Cosechas y siembras* [**1983-86**] y de la *Llave de los sueños* [**1987**]:

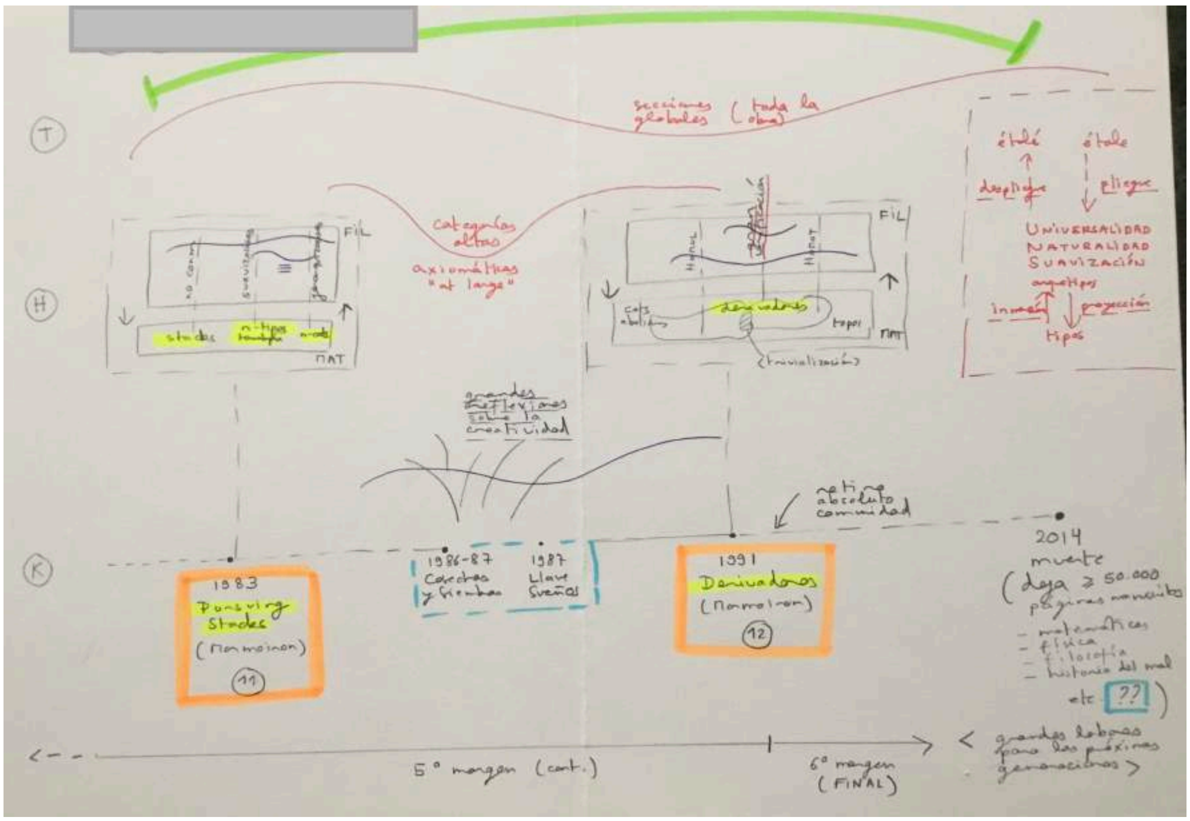


Fig. 17.11 – *THK* grothendieckiano: 1983-1991

Es la época de *integración* de la inagotable variedad del pensamiento de Grothendieck, capaz de ir y venir con total elasticidad entre lo más concreto (tipos de homotopía [**1983**]) y lo más abstracto (localizadores [**1991**]), entre la *retrospectiva* sociológica y creativa [**1983-86**] y la *introspectiva* psicológica y mística [**1987**]. Su retiro en Mormoiron asegura la originalidad completa de sus ideas –axiomáticas o espirituales– sobre *lo alto y lo bajo*.

El *THK grothendieckiano* subraya las grandes corrientes de *universalización, naturalización y suavización* que otorgan cohesión y continuidad a la obra de Grothendieck. La variedad y la profusión diferencial de sus técnicas pueden tender a dificultar una comprensión global e integral de la obra, pero las síntesis sencillas del *THK* ayudan a percibir el *balance armónico* de las partes, así como el *equilibrio modular* entre pliegues y despliegues, inmersiones y proyecciones, tipos y arquetipos. Comprender a Grothendieck requiere tiempo y paciencia –hasta adentrarse en los más nimios detalles técnicos– así como ingenuidad y distancia –hasta percibir las más amplias visiones filosóficas y conceptuales–. En el *seccionamiento y pegamiento* de las más finas partituras locales de los miembros de una orquesta con los más plásticos movimientos globales de un director, se encuentra una de las llaves (o claves) para acercarse a la *musicalidad integral* –técnica, conceptual, filosófica, espiritual– de ese agitador creativo que fue Alexander Grothendieck.

18

Entramados culturales

En este capítulo presentamos múltiples cruces de la obra grothendieckiana con realizaciones en la cultura. Si unos pocos enlaces surgen directamente de sus gustos conocidos (Melville, Proust, Beethoven), todos los demás se deben a nuestras perspectivas propias. Hemos intentado así acercar *naturalmente* ciertas fuerzas mayores del pensamiento de Grothendieck (explicitadas en nuestros *Capítulos 16, 17* arriba) con concreciones literarias, musicales, artísticas y fílmicas, de tal manera que *reverberen armónicamente* la matemática y la cultura, las ideas conceptuales y las expresiones sensibles, el contenido y el continente, el fondo y la forma. En *precisos contrapunt(e)os*, entrelazamos los trabajos específicos de Grothendieck con despliegues novelísticos, composiciones sinfónicas, imágenes plásticas, secuencias cinematográficas. Si, a lo largo de esta monografía, esperamos haber conseguido mostrar que los *seccionamientos no son buenos* –ni para entender la obra matemática de Grothendieck en sí misma, ni para entender en conjunto su obra matemática, filosófica, ecológica y espiritual–, de la misma manera, no parece procedente seccionarle de la cultura en general, y ofrecemos aquí un ejercicio de *pegamiento* de su obra con otros altos momentos creativos en los siglos XIX y XX.

Andrei Baldin, en su ensayo *La prolongación del punto*, observa cómo la literatura rusa, a partir de Pushkin, "instala la palabra en el espacio" y "se despliega entera, inmensa, ilimitada", más allá de los "bordes" y los "abismos", buscando un "haz de luz" que proviene de un "espacio imaginario" en las sombras, "detrás de la página"[736]. Difícilmente podría encontrarse una mejor descripción de la *empresa* grothendieckiana, y tal vez no sea una casualidad que esta provenga de un acercamiento literario a la *gran alma rusa*. Sin duda, acorde con la entrega política de su padre, Grothendieck estaba imbuido de una *grandiosidad* en la forma y en el fondo que se acerca a la estatura de un Dostoievski, y que *encuentra en las pequeñas cosas la enorme multidimensionalidad de la experiencia humana*. La compleja estratificación de los seres humanos y de sus modos de conocimiento, a la manera del *Atlas Mnemosine* (1924-1929) de Aby Warburg o del *Libro de los Pasajes* (1927-1940) de Walter Benjamin[737], resulta imprescindible para entender a Grothendieck. Ramificaciones, jerarquizaciones, nivelaciones, contrapuntos, mixturas, inversiones, dualidades, pliegues, despliegues, recubrimientos, despejes, son *andares* incesantes del matemático, que corresponden también a estrategias finas de los críticos de la cultura para develar la riqueza dinámica e irreducible del pensamiento[738]. En lo que sigue, exploraremos parte de esa *complejidad contrapuntística* al adentrarnos en entornos muy específicos de la literatura, la música, el arte y el cine, donde explotan la multidimensionalidad y los andares de Grothendieck.

[736] A. Baldine. *Le prolongement du point. Voyages littéraires*. Lagrasse: Verdier, 2015, pp. 15-25.

[737] Para el estudio de estratificaciones, pliegues, penumbras y espacios imaginarios en Warburg y en Benjamin, ver Zalamea, *Antinomias de la creación. Las fuentes contradictorias de la invención en Valéry, Warburg, Florenski*, y F. Zalamea. *Pasajes de Proteo. Residuos, límites y paisajes en el ensayo, la narrativa y el arte latinoamericanos*. México: Siglo XXI, 2012.

[738] Otro buen ejemplo de la complejidad temporal y espacial de nuestra experiencia aparece en el extraordinario libro gráfico *Here* (2014) de Richard McGuire, donde se dibujan las diversas vivencias que ocurren en una misma casa a lo largo de los siglos. Es fascinante la sensación de *vivir en una superficie de Riemann*, donde las diversas páginas (fechas y lugares) del libro se acceden a través de puntos de ramificación ocultos para el lector/visor. Ver R. McGuire. *Here*. New York: Pantheon Books, 2014.

18.1 Una lectura literaria: Melville, Proust, Lowry, Fonseca

Moby-Dick (Herman Melville, 1850-1851).

A lo largo de esta monografía, hemos visto, por un lado, cómo Grothendieck se refiere directamente en algunos lugares a Melville y *Moby-Dick*[739], y, por otro lado, cómo la alegoría de *Moby-Dick* capta de forma ubicua la búsqueda de hondos arquetipos en el pensamiento grothendieckiano[740]. Es sin embargo en una carta a Yuichi Tsuji, el traductor al japonés de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], donde Grothendieck expresa con mayor detenimiento su admiración por *Moby-Dick*[clii]:

> La "ballena blanca" [referencia a [**1983-86**, L.30]] es una imagen simbólica, tomada del libro bien conocido *Moby-Dick* (es también el nombre de dicha ballena) de Melville – el libro es la historia de la persecución de la "ballena blanca" por el capitán Ahab, y termina, creo, con el naufragio completo del navío, mientras la ballena corre siempre... Es el símbolo del ideal elusivo, siempre fuera de alcance, aún mismo cuando parece que se lo agarra, y que fascina a algunos hombres lanzados en su búsqueda, que no viven sino por él y en la imposible esperanza de alcanzarlo. Le recomiendo ese libro (uno de los más bellos libros que conozco), y el autor, Melville, con seguridad uno de los raros espíritus verdaderamente originales del siglo pasado, un gran hombre...

La *variedad polisémica* de *Moby-Dick* refleja con creces la *multidimensionalidad matemática* de Grothendieck. El abismo y la infinitud van progresivamente simbolizándose en la ballena blanca, por medio de un extraordinario procedimiento de acumulación que nos lleva de lo real al mito. En efecto, la progresiva visión mítica de *Moby-Dick* que obtiene

[739] Ver arriba pp. 149, 428, 458.

[740] Ver entrada "Moby-Dick" en el índice analítico.

[clii] La carta, a máquina, lleva el encabezado "Les Aumettes le 4.9.1986". Debo una copia a Alexander Cruz, quien la obtuvo a su vez de Winfried Scharlau (2016).

el lector resulta de una superabundancia de detalles realistas que, en su conjunto, poco a poco dejan de ser distinguidos como particulares y pasan a fusionarse genéricamente en un Todo Universal, sólo concebible en una dimensionalidad "trascendente". La *summa* realista de los particulares que emprende Melville le permite fundir literatura y metafísica, y acceder a una genericidad ideal. Partiendo de la etimología de "*whale*" (del danés *hval, hvalt*, balanceo[741]: preludio de la zambullida en los abismos) y de las once primeras páginas de epígrafes sobre la ballena[742], hasta llegar a las últimas consideraciones sobre su supervivencia[743], pasando por extensos apuntes sobre cetología[744], por capítulos enteros de anatomía (despedazamiento[745], cabeza[746], frente[747], nuez[748], cola[749], esqueleto[750]), de simbolismo metafísico (blancura[751], representaciones monstruosas[752]), o de datos variopintos y contrastantes (historia[753], gastronomía[754], crónicas de pesca[755]), se construye el mito como *summa inabarcable* de lo real, como hondura ilimitada de la realidad. Las pátinas del "más allá" se construyen por acumulación de pigmentos diversos del "acá", así como el blanco puede verse como coalescencia de todos los demás colores. En "La blancura de la

741 Melville, óp.cit., p. xv.
742 ibíd., p. xvii-xxviii.
743 ibíd., cap. 105, "Does the Whale Diminish?".
744 ibíd., cap. 32, "Cetology".
745 ibíd., cap. 67, "Cutting In".
746 ibíd., cap. 74, "The Sperm Whale's Head", cap. 75, "The Right Whale's Head".
747 ibíd., cap. 76, "The Battering Ram".
748 ibíd., cap. 80, "The Nut".
749 ibíd., cap. 86, "The Tail".
750 ibíd., cap. 103, "Measurement of the Whale's Skeleton".
751 ibíd., cap. 42, "The Whiteness of the Whale".
752 ibíd., cap. 55, "Monstruous Pictures of Whales", cap. 57, "Of Whales in Paint, in Teeth".
753 ibíd., cap. 45, "Affidavit", cap. 83, "Jonah Historically Regarded".
754 ibíd., cap. 65, "The Whale as Dish".
755 ibíd., cap. 82, "The Honor and Glory of Whaling".

ballena" (cap. 42), ese blanco coalescente es símbolo de alegría pero, a su vez, de algo profundamente elusivo muy cercano al pánico, de maravilla y repugnancia. El blanco, como todo concepto ideal, incorpora un enorme rango de contrarios, contradicciones que, en el fondo, son las que aseguran su permanente riqueza re-interpretativa[756]. La escritura de Melville acumula múltiples estratos de realidad, interpretación e imaginación, y conjuga muy diversas voces en una trama polivalente de fragmentos novelísticos, documentales, teatrales, épicos, cuyo resultado es la construcción del mito de la ballena blanca.

Las afinidades con Grothendieck son legión. Al igual que Ahab, Grothendieck busca un "ideal elusivo", "fuera de alcance", y "vive por él", "en la imposible esperanza de alcanzarlo". El *ideal abstracto* –imaginemos *(i)* el grupo de Galois absoluto o su versión combinatoria, el grupo de Grothendieck-Teichmüller [**1981**], *(ii)* los motivos [**1967**], o *(iii)* la unificación de la homología y la homotopía [**1991**]– trasciende todas las *escalas concretas* de aproximación –*(i)* torre de Teichmüller [**1961**], *(ii)* conjeturas estándar [**1968**], *(iii)* localizadores [**1991**]–. La fabulosamente precisa *anatomía de la ballena* según Melville nos recuerda la detalladísima *anatomía de los esquemas* [**1959-64**] y *los topos* [**1960-69**]. La zambullida del *Pequod* en los abismos se refleja en la zambullida sin fin de *La llave de los sueños* [**1987**]. El acceso al Gran Río universal [**1987**] se consigue con una *summa inabarcable* de las pequeñas cosas de la vida cotidiana, al igual que el acceso a *Moby-Dick* se consigue mediante una prolija descripción de la materialidad de la vida ballenera. Se trata de *formas de acceso a lo invisible a través de una suerte de método de exhaución de lo visible*, donde hondas fuerzas románticas impregnan tanto a Melville como a Grothendieck.

[756] Vale aquí el aforismo de Benjamin en sus apuntes *Sobre la estética* (1920-1921): "La luz de la idea va a enfrentarse con la oscuridad del fondo creativo; en esa lucha se produce el juego de colores de la fantasía", ver W. Benjamin. *Obras, Libro VI, Fragmentos de contenido misceláneo.* Madrid: Abada Editores, 2017, p. 148. Hemos visto cómo las *sombras de lo creativo* impulsan la fantasía grothendieckiana (*Sección 15.3* arriba), y cómo los *fondos oscuros* del océano esconden las corrientes mayores de la Sabiduría melvilleana (*Nota 409* arriba, p. 265).

El grito de Ahab –"¡Ciencia! Te maldigo, juguete inútil"[757]– resuena en los anatemas de la primera época de *Survivre* (antes de querer "sobrevivir y vivir") y en las imprecaciones proféticas sobre la Gran Mutación [**1987**]. El Yo debe anularse para poder tornarse en Mundo, gracias a un *back-and-forth* muy profundo entre lo sensible y lo suprasensible, entre el corazón y el espíritu, propio de los grandes visionarios.

A la Búsqueda del Tiempo Perdido (Marcel Proust, 1913-1922).

Las referencias directas a Proust no existen en los escritos de Grothendieck, pero es indudable que algunos *temas de fondo*, así como muchos *tonos de expresión* y *fragmentos de estilo*, les acomunan. Las dos vertientes mayores de *À la recherche du temps perdu*[758] –los "momentos privilegiados" (magdalena, campanarios de Martinville, árboles de Hudimesnil), y las "inmersiones en la memoria" (historias de Odette, Saint-Loup, Albertine)– recuerdan la dialéctica grothendieckiana entre la variación discreta y la variación continua. Por un lado, los momentos privilegiados proustianos o las epifanías joyceanas –*ámbito de la discreción*– constituyen esos secretos tras "impresiones de forma, de perfume o de color", que obligan a "tratar de percibir lo que se esconde tras ellas", a buscar aquello "protegido por recubrimientos de imágenes"[759]; de la misma manera, hemos visto cómo Grothendieck, en sus procesos de descubrimiento, se impresiona con muy diversas formas y estructuras, y busca arquetipos escondidos tras ellas, arquetipos recubiertos por haces coherentes [**1955-57**], topologías [**1960-69**] o acciones de grupos [**1981**]. Por otro lado, las inmersiones proustianas en la memoria –*ámbito de la continuidad*– producen extensas mareas del recuerdo, donde una multitud de detalles y sensaciones intenta reconstruir la fugacidad del tiempo; de la misma manera, las construcciones categóricas grothendieckianas sumergen

[757] Melville, óp.cit., p. 501.

[758] M. Proust. *À la recherche du temps perdu (4 vols.)* Paris: Gallimard, Pléiade, 1987.

[759] ibíd., vol. I, p. 177.

el conocimiento parcial (olvido) de los objetos en entornos más plenos (prehaces, funtores representables [**1959-64**], topos [**1960-69**]) donde intenta reconstruirse la fugacidad de las estructuras.

El extenso trabajo *La Mathesis de Marcel Proust* de Jean-Claude Dumoncel[760] exhibe en detalle una cantidad de *alusiones* de Proust a la matemática, aunque sus referencias *directas* a los grandes matemáticos sean escasas[761]. A partir de allí, Dumoncel propone una fascinante relectura de Proust a la luz de las lógicas y las matemáticas (plurales fundamentales) del siglo XX[762]. En particular, alrededor de una cita de Proust sobre "la más emotiva de las geometrías"[763], Dumoncel elabora un largo y sofisticado estudio de una "*geometría proustiana*" que se eleva con analogías y metáforas sobre la geometría de los matemáticos, pero que se extiende hacia nuevos espacios de lo imaginario, donde reina la *multidimensionalidad sensible.* Así mismo, aprovechando la riqueza de las lógicas modales a la Kripke, Dumoncel recorre con gran finura las lógicas del amor[764] y las intrincadas multivalencias de los mundos posibles[765] en la *Recherche.* De esta manera, una *geometría lógica* (a la Grothendieck [**1960-69**], recuperada por Caramello) y una *lógica geométrica* (a la Lawvere) se acercan al universo proustiano, siempre atento a develar la complejidad (geométrica) de las ramificaciones (lógicas) del recuerdo. Las *inmensidades* proustiana y grothendieckiana se convocan *naturalmente* entre sí.

760 J.-C. Dumoncel. *La Mathesis de Marcel Proust.* Paris: Classiques Garnier, 2015.

761 Entre las cuales sobresale una mención al "gran matemático Poincaré", Proust, óp.cit., vol II, p. 414.

762 Dumoncel solo menciona una vez a Grothendieck (Dumoncel, óp.cit., p. 726), pero este se encuentra detrás de una "*simplificación fibrada*" (ibíd., p. 570) de una figura universal (cónica del tiempo y la memoria, ibíd., p. 67) con la que Dumoncel diagrama el universo proustiano. Por otro lado, Alain Connes ha realizado en una conferencia ("Intelligence proustienne et imaginaire mathématique", 2013) un acercamiento vívido y emocionado de los *estilos* de la *Recherche* y de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], pero no parece haber surgido un texto de esa intervención. Ver http://www.alainconnes.org/en/videos.php.

763 ibíd., p. 79.

764 ibíd., p. 411.

765 ibíd., p. 471.

Desde el punto de vista del *estilo*, la sinuosa e interminable frase proustiana[766] alcanza un eco parcial en algunas de las mejores disquisiciones de *Récoltes et semailles* [**1983-86**] y, sobre todo, en las largas requisitorias "iluminadas" de *La clef des songes* [**1987**]. Uno de los milagros estéticos de la *Recherche* consiste en la asombrosa adecuación de su sofisticada *arquitectura global* con la elíptica, enrevesada, sin cesar ramificada *frase local.* Jean Milly desmenuza su construcción y revela tres aspectos fundamentales de la frase proustiana: *duplicación* (metonimia generalizada, o unión por contigüidad semántica, generadora de retomas, enumeraciones, disyunciones, exclusiones, oposiciones, paralelismos, anáforas, comparaciones, segmentaciones, complementaciones)[767], *subordinación* (expansión por complementos secundarios, gracias a borrosos tránsitos gramaticales entre nombres, verbos, sujetos y objetos)[768], *desarrollo cíclico* (pliegue y despliegue de motivos sonoros, léxicos y semánticos)[769]. Todo resulta ser así *multiplicación* y *diversificación*, lejos de una ingenua asunción de verdades acotadas. Las *intermitencias del corazón* (primer título de la *Recherche*) se reflejan en el mismo estilo intermitente del autor. Impacta entonces observar cómo la duplicación, la subordinación, la ciclicidad, la multiplicación, la diversificación, la intermitencia, encarnan de forma similar en Grothendieck: duplicación de lo proyectivo y lo inyectivo en los espacios nucleares [**1949-53**], subordinación de los espacios de Hilbert en los de Banach [**1953c**], ciclicidad en las conjeturas estándar [**1968**], multiplicación en la torre de Teichmüller [**1961**], diversificación en las n-categorías [**1983**], intermitencia por doquier entre co-razón (matemática) y razón (categórica). Los contrapuntos entre lo local y lo global, en Grothendieck, *contrapuntean* a su vez con los complejos equilibrios de la armazón proustiana.

766 Ver J. Milly. *La phrase de Proust.* Paris: Champion, 1983.

767 ibíd., pp. 167, 170-175.

768 ibíd., pp. 187, 190-191.

769 ibíd., pp. 194-198.

Una *doble dialéctica de descomposición y composición* gobierna la técnica proustiana. Si las frases finales de Proust constituyen portensosas aleaciones de naturalidad y artificialidad, de plasticidad y dificultad, sus alteraciones y concordancias con los borradores, las variantes y las pruebas de imprenta conforman una constelación aún más fascinante, donde emerge la complejidad entera del acto creativo. La famosa primera frase ("Durante mucho tiempo, me he acostado temprano"[770]) aparece tachada, otra, más pesada, es propuesta en cambio ("Durante muchos años, cada noche, recién acostado, leía algunas páginas..."[771]), pero esta llega también a ser tachada para reescribir a mano la misma frase original. Las variantes dactilográficas recalcan las metamorfosis de la duda: "En esa época (...) dormía hasta la mañana", "De noche me acostaba (...)", "(...) el médico me hizo llevar una vida de reposo"[772]. Y los borradores (*Cuaderno 3*) terminan de acentuar la complejidad del taller proustiano: "Llevaba acostado alrededor de una hora", "Desde hace mucho dormía solo en el día (...)", "En otras épocas había conocido como todo el mundo la dulzura de despertarme en mitad de la noche (...)"[773]. Las oscilaciones de la dulzura y la angustia (oposición con "reposo"), los vaivenes de la tarde y la mañana, las inversiones del sueño (de día) y del despertar (de noche) conforman de hecho el tono y el fondo de la novela, y explican las múltiples intermitencias de la apertura. Nos encontramos así ante toda una *geometría no estándar*, llena de miradas oblicuas, inversiones, accesos a lo espectral y lo invisible. De forma similar, podemos comparar el "primer" Grothendieck (1949-1957), aparentemente limpio y luminoso, con el "tercer" Grothendieck (1981-1991), libremente tachonado y penumbroso. Las intermitencias del día y la noche, el *back-and-forth* entre composición

[770] Proust, óp.cit., vol. I, p. 3.

[771] M. Proust. *Du côté de chez Swann. Combray. Premières épreuves corrigées 1913.* Paris: Gallimard, 2013, "Placard 1".

[772] íd., *À la recherche du temps perdu (4 vols.)* vol. I, pp. 1085-1086.

[773] ibíd., Borradores I.1, I.5, I.9, vol. I, pp. 633, 637, 639.

(arquitectónica de *EGA* [**1959-64**] o de *SGA* [**1960-69**]) y descomposición (desatornillamiento de la *Longue marche* [**1981**] o de los *Dérivateurs* [**1991**]), las inversiones entre lo visible y lo invisible, acompañan todas las labores del matemático.

Tal vez nadie haya descrito mejor que Proust las *intermitencias del mar* que tan bien se aplican al entendimiento de Grothendieck. El "mar desnudo", "ese vasto circo deslumbrante y montañoso con las cimas nevadas[774] de sus olas en piedra de esmeralda aquí y allá pulida y translúcida"[775], las "ondas de un verde tan tierno como el que se conserva en los pastizales alpinos"[776], el "mar como un topacio (..) rubio y lechoso como la cerveza"[777], la "marea plena", "baluarte indestructible y móvil de esmeralda y de oro"[778], son visiones del mar que capturan la variedad tonal de las metáforas acuáticas de Grothendieck. Aún más allá, en la mirada de Marcel, "ninguno de esos Mares permanecía más de un día (...) no ví nunca el mismo dos veces"[779]. Se trata de una esencia arquetípica (Mar con mayúscula) que se distribuye en la multiplicidad de los tipos, como la captará luego Elstir, el pintor de las marinas en la *Recherche*[780]. Las *variedades inabarcables del mar* cubren apropiadamente los infinitos matices de la obra grothendieckiana.

Bajo el Volcán (Malcolm Lowry, 1934-1947).

Incesante urdimbre, la obra literaria de Malcolm Lowry es una de las mixturas mayores del siglo XX. Enrejado de ecos, repeticiones, cánticos y conjuras entre la vida y la obra

---

[774] Contrapunto armónico proustiano entre el *bajo* mar y la *alta* montaña, que prefigura nuestro enlace grothendieckiano entre mar y volcán.

[775] ibíd., vol. II, p. 33.

[776] ibíd., vol. II, p. 33.

[777] ibíd., vol. II, p. 34.

[778] ibíd., vol. II, p. 35.

[779] ibíd., vol. II, p. 65.

[780] Para conexiones con Turner, una de las fuentes de Elstir, ver nuestra *Sección 18.3* abajo.

del escritor, entramado de montajes, *collages*, síncopas y contrapuntos, entrelazamiento de tiempos, lugares, *flashbacks*, giros, avances y retrocesos, sedimentación de estratos, contrastes y analogías invertidas, la técnica literaria de Lowry compone y refleja hondas acumulaciones de signos. En *Bajo el volcán*[781], la inagotable multiplicidad del mundo es evocada con combinaciones y alertas ubicuas al lector: citas, pancartas, onomatopeyas –presente: mixto de lucidez, dolor y ebriedad–; recuerdos, narraciones, añoranzas –pasado: mixto de ilusión, felicidad y utopía–; premoniciones, invocaciones, dudas –futuro: mixto de esperanza, horror y fatalidad–. *Tejiendo continuamente* obsesiones y signos, hasta convertirlos en verdaderas "señales", Lowry construye una honda expresión de los *altibajos y vaivenes* de lo humano, de su fuerza y fragilidad, de su suavidad y dureza, de su bondad y mezquindad, de su ascenso y caída. Una combinación de miradas hacia el *interior* (alcoholismo del Cónsul) y hacia el *exterior* (paisaje mexicano) nos recuerda muchos momentos de *La clef des songes* [**1987**], donde la introspección se conecta naturalmente con una sensibilidad fina frente al *cosmos entero* que envuelve al hombre. Las capas, las sedimentaciones, los montajes convocan al Grothendieck arquitectónico de la segunda década (*EGA* [**1959-64**] y *SGA* [**1960-69**]). Por otro lado, las técnicas literarias más profundas en Lowry –*repeticiones, rememoraciones, retomas*[782]–, formas incesantes del prefijo *(re)*, son las mismas de Grothendieck en su tercera década, tanto en las retomas e iteraciones matemáticas de la *Longue marche* [**1981**], como en las rememoraciones y giros biográficos de *Récoltes et semailles* [**1983-86**], o en las repeticiones y digresiones místicas de *La clef des songes* [**1987**]. Atentos a oír la "voz de las cosas" (paisajes de la tierra y de la psiquis, estructuras armónicas, señales de correspondencia entre el hombre y el cosmos), Lowry y Grothendieck comparten métodos y visiones similares.

[781] M. Lowry. *Bajo el volcán*. México: ERA, 1964.

[782] Ver C. Delesalle-Nancey. *La Divine comédie ivre. Répétition, ressassement et reprise dans l'oeuvre en prose de Malcolm Lowry.* Paris: Michel Houdiard éditeur, 2010.

Una fugaz percepción de la belleza y la felicidad, al comienzo de *Bajo el volcán* –"me parece ver ahora, entre los mezcales, esa vereda, y más allá, extraños paisajes (...) con montañas y colinas y aguas azuladas"[783]–, se diluye en su fúnebre final, donde alguien empuja, tras el cuerpo sin vida del Cónsul, "un perro muerto en la barranca"[784]. La imaginería infernal y apocalíptica –caída, lava, crepitación, horror, erupción, estallido, negrura, estrépito, llamas, cadáveres– arrasa al lector. Oponiendo estuario y volcán, colina y barranco, agua y fuego, azul y negro, el hombre vive un permanente vaivén entre la felicidad y el desgarro. No es otra la "iluminación" grothendieckiana de los años setenta, con su radicalismo ecológico, su vida comunitaria, su denuncia de los excesos de la ciencia. Su *conciencia planetaria* en *Survivre et vivre* (1970-1975), muy *avant la lettre*, que degenera progresivamente en un salto del Paraíso al Infierno [**1987**] –acorde con las resonancias de Dante en Lowry– se encuentra hoy en pleno auge, cuando la humanidad se juega realmente su *supervivencia* en las próximas décadas.

La presencia permanente del *Popocatépetl* y el *Iztaccíhuatl*, los grandes volcanes mexicanos[785], inunda *Bajo el volcán*: valle "dominado por dos volcanes"; "Popocatépetl e Iztaccíhuatl, se erguían majestuosos y nítidos"; "se alzaban, eternamente, sus volcanes, sus hermosos, hermosos volcanes"; "allí estaban Popocatépetl e Iztaccíhuatl, lejanos embajadores"; "el Iztaccíhuatl y el Popocatépetl, aquella imagen del matrimonio perfecto, se alzaban ahora, claros y hermosos"; "detrás de los volcanes Hugh podía ver que se acumulaban nubes de tempestad"; "la espantosa sima, el eterno horror de los contrarios"; "nubecillas de humo flotaban en lo alto, sobre las rocas, bajo el Popo"; "cuesta abajo";

783 Lowry, óp.cit., p. 45.

784 ibíd., p. 403.

785 Para una muy bella lámina, siguiendo la descripción de Humboldt, ver "Le volcan Popocatepetl et l'Iztaccihuatl", en A. de Humboldt. *Volcans des cordillères de Quito et du Mexique.* Paris: Théodore Morgand éditeur, 1864, cap. VIII. Debo a César Guevara mi primer acceso al magnífico tratado humboldtiano sobre los volcanes americanos.

"por doquiera aparecían testimonios de la presencia y la antigüedad del Popocatépetl"; "el Popocatépetl se alzó piramidal, con un flanco, que se arqueaba como pecho de mujer, y el otro, precipitoso, mellado, feroz"; "¡Los volcanes! ¡Qué sentimental podía uno ponerse con ellos!"; "Ante él, clivosos, los volcanes parecían haberse acercado. Erguíanse dominando la selva y se adentraban en el cielo cada vez más bajo"; "en la trágica leyenda indígena, el Popocatépetl resultaba ser, extrañamente, el soñador: el fuego de su amor guerrero (...) ardía para siempre por Iztaccíhuatl"; "el Popocatépetl se erguía con su inmensa falda en parte oculta por tempestuosos nubarrones"; "desde la altura veía hacia «El Infierno»"; "tambaleándose, el Cónsul vio por un momento sobre su cabeza la silueta del Popocatépetl empenachado de nieve color esmeralda y bañado de luz (...) *¡Dolente... dolore!*"; "caía, caía en el interior del volcán (...) lava insinuante (...) erupción"[786]. Desde la nitidez y la claridad, desde la hermosura y la majestuosa belleza, hasta la tempestad, el horror, el fuego, la caída y la muerte, los volcanes cubren la alegría y el dolor de la experiencia humana. A lo largo de nuestra monografía, hemos visto cómo la metáfora transgresora del volcán –o del "mar al revés"[787]– ayuda a entender, por un lado, la inventividad matemática piroclástica de Grothendieck (*e.g.*, [**1955-57**], [**1958**], [**1981**], [**1984**]), y ayuda a apreciar, por otro lado, su oscuro tono profético en contra de la degradación de los valores en la civilización occidental ([**1983-86**], [**1987**]). Yendo aún más allá, *Bajo el volcán* se adentra en un prodigioso doble movimiento de *descenso* en una psiquis concreta y de *ascenso* en una paisajística simbólica abstracta, que entra en *contrapunteo natural* con los procesos exploratorios de lo *bajo* y lo *alto* en Grothendieck.

---

786 Ver Lowry, óp.cit., pp. 9 (tercera línea de la novela), 11, 53, 68, 105, 140, 146, 164, 254, 262, 263, 280, 341, 344, 366, 376, 401, 403 (último párrafo de la novela), en el orden de las citas.

787 ibíd., p. 196. Compárese la "nieve color esmeralda" del Popocatépetl con las "olas en piedra de esmeralda" de los mares de Proust. Por otro lado, en el cuento *The bravest boat* (1953), Lowry habla de la "cima nevada y volcánica del Mount Hood", "con tonos referentes a *Moby-Dick*". Ver M. Lowry. *The bravest boat*. Montpellier: L'arachnoïde, 2013, p. 15, y carta manuscrita al final a Clarisse Francillon y Maurice Nadeau, línea 10.

Coronel Lágrimas (Carlos Fonseca, 2015).

En esta subsección invertimos perspectivas y, en vez de basarnos sobre obras literarias previas, aprovechamos ahora la figura misma de Grothendieck para recorrer una creación literaria armada sobre su vida. *Coronel Lágrimas*[788] del joven escritor costarricense Carlos Fonseca es en efecto una novela motivada en las dos últimas décadas de reclusión en los Pirineos[789]. La novela se sitúa en una tradición latinoamericana muy sensible a lo penumbroso y lo alucinado, siguiendo la frase fundacional de Felisberto Hernández: “no creo que solamente deba escribir lo que sé, sino también lo otro”[790]. Si algo caracteriza a Grothendieck es esa *búsqueda de lo otro*, tanto en los arquetipos ocultos (razón categórica) detrás de las prácticas técnicas (corazón matemático), como en los sueños y los soplos (mares profundos) que gobiernan nuestra cotidianeidad (olas superficiales). Combinando una exploración de lo “otro” y una gran capacidad sincrética y sintética[791], Fonseca consigue una maravillosa restitución del *espíritu multidimensional* de Grothendieck.

788 C. Fonseca. *Coronel Lágrimas*. Barcelona: Anagrama, 2015.

789 En una *Ficha bibliográfica* al final del volumen, Fonseca indica: “Como la mayoría de los personajes de ficción, el protagonista de esta novela tiene algo de verdad y mucho de alucinación. Su picaresca intelectual toma como punto de partida la vida del matemático francés Alexander Grothendieck. No pretende, sin embargo, ser ésta una novela histórica y mucho menos una novela biográfica. Acá la historia es meramente el punto de partida para un delirio ficcional, un mundo alucinado que espero hubiese gustado al propio Grothendieck”, ibíd., p. 169. Por lo que sabemos, se trata de la única creación literaria construida hasta el momento (2018) sobre la vida de Grothendieck (para una obra de teatro, ver nuestra *Nota cxlvi* arriba, p. 388). Como lo indica Fonseca, el interés no es biográfico, sino evocativo; pero, a nuestro entender, la finura de Fonseca capta bastante más a fondo la *personalidad global* grothendieckiana que las biografías locales producidas hasta el momento.

790 F. Hernández. *Narrativa completa*. Buenos Aires: El cuenco de plata - Fundación Felisberto Hernández, 2015, “Por los tiempos de Clemente Colling” (1942), p. 169. Al igual que Felisberto, Bombal, Rulfo y Onetti exploran “fantasmagorías otras” muy cercanas a Grothendieck.

791 La “*síntesis*” es considerada por los Maestros de América (Pedro Henríquez Ureña, Alfonso Reyes, Francisco Romero) como fortaleza paradigmática del pensamiento latinoamericano, abierto a nuevas “*estructuras unitarias*”, a una especial capacidad de “*integración*”, a un ir y venir “*plástico*” y “*flexible*”, propio de los “*transplantados*”. Ver A. Reyes. *La constelación americana (1936)*. México: Archivo de Alfonso Reyes – Serie D, Número 3, 1950, pp. 24, 20, 23, 36, 37, 38, en el orden de los seis términos entrecomillados. *Un ser humano transplantado, plástico y flexible, un integrador sintético a la búsqueda de estructuras unitarias*, encarna perfectamente en Grothendieck.

La *pulsión* y la *pasión* de Grothendieck se despliegan con emoción e ingenio en *Coronel Lágrimas*. Si la técnica matemática en sí misma supera a Fonseca[792], el *fondo conceptual* del trasegar grothendieckiano es captado con la incipiente maestría de un joven talento literario. El *ritmo de la escritura* en la novela dualiza magníficamente el *ritmo de la vida y la obra* grothendieckianas: el diario del Coronel transmuta los interminables diarios matemáticos de los ochenta ([**1981**], [**1983**], [**1983-86**], [**1987**], [**1991**]), la fina descripción del eremita se adentra en los nimios residuos de una existencia donde se refleja un cosmos inabarcable (suerte de teorema de los residuos de Cauchy aplicado a la personalidad de Grothendieck), la jerarquía de enlaces en el tiempo y de múltiples giros entre pasado y presente evoca la narración oblicua y sinusoidal de *Cosechas y siembras* [**1983-86**]. Una substitución entre los proyectos universales matemáticos de Grothendieck y los proyectos enciclopédicos alquímicos del Coronel ayuda a potenciar la precisión de los detalles, los placeres, las alucinaciones de ambos personajes. Los *ecos*, las *modulaciones*, los *acordes* entre ambos caracteres conforman una *musicalidad contrapuntística en sordina* que habría podido gustarle a Grothendieck, tal como Fonseca lo auguraba.

En múltiples pasajes, vemos la hondura de Grothendieck *como nadie antes la había visto*: "ojos encendidos por una pasión que desconocemos", "tal vez por esa rectitud marcial hay que llamarlo coronel y no profesor", "muchas vidas que esconde día a día (...) escribiendo con un ritmo frenético", "la locura del coronel tiene orden y método", "el coronel persigue la curiosidad con una precisión matemática", "belleza de una vida que recorre la historia de un siglo y desde allí explota hacia todas partes", "su lema: anarquía es orden", "tenacidad de una hormiga en celo", "pasión infantil", "su pasión es una pasión

[792] Esto es evidentemente como debe ser, aunque Fonseca no se resiste a *contrapuntear* a lo largo de la novela el *leitmotiv* de una subfórmula tipo Riemann-Roch en K-teoría [**1955-57**]: metáfora críptica para los lectores, que sirve sin embargo como poderosa evocación alquímica de lo inalcanzable, lo invisible, lo "otro". Véase la ecuación $[f_! = \sum(-1)^i R^i f_* : K_0(X) \to K_0(Y)]$ como *talismán poético arquetípico desplegado en múltiples tipologías de la vida misma*: Fonseca, óp.cit., pp. 62 (amor), 73 (pasión), 77 (belleza), 96 (infamia), 111 (canto), 118 (guerrilla), 137 (culpa), 154 (matemática).

cansada pero pasión aún (...) duerme ahora por todas las noches en las que no durmió", "el placer de lo preciso", "como el mundo de los espíritus, nuestra realidad tiene una geometría extraña", "el hambre lo llevó a las matemáticas", "el coronel ambiciona tener mil rostros (...) dedicó su vida a ser muchos (...) nos queda la magia de la perspectiva: mirarlo desde mil ángulos distintos", "locura arquitectónica del coronel", "la pasión no se gasta tan fácilmente, late aún mientras duerme", "en su prolongado y monástico retiro, el coronel se dedica a rendir homenaje a la más anacrónica de las posturas: la honestidad", "se distingue una pizarra con símbolos que no llegamos a distinguir", "su amor fue algo escrito en código sobre pizarras mojadas por lloviznas de guerra", "en el espacio del sueño no existen líneas rectas", "pasión negativa (...) hombre de extremos", "romántico en un siglo que ya no creía en genios", "humanismo elástico (...) el más breve de los actos se compone de un millar de costados", "el más contemporáneo de sus contemporáneos: su destierro lo volvió omnipresente", "matemático que decidió dejarlo todo para ser algo más"[793]. En un "desierto que ya no es meramente desierto, sino mar, montaña"[794], Fonseca evoca así al matemático que ve y va más allá, que supera su propia contemporaneidad, que se entrega románticamente, inundado de pasión, rectitud, frenesí, precisión, tenacidad, honestidad, amor, elasticidad. La *integralidad* de la personalidad grothendieckiana se eleva con sorprendente sindéresis en un escritor tan joven, capaz de armar una densa red literaria que rinde plena justicia a la *complejidad no seccionable* de Grothendieck. *Coronel Lágrimas*, en una reverberación alquímica de la trama misma de la novela, transmuta la obra negra, y el haz de luz que proviene de las sombras (Baldin) alcanza una irradiación universal global bajo una inesperada perspectiva latinoamericana local.

---

793 ibíd., pp. 13, 14, 16, 17, 19, 20, 24, 25, 27, 33, 35, 38, 41, 49, 53, 58, 60, 61, 62, 63, 69, 70, 88, 95, 162, en el orden de las citas.

794 ibíd., p. 64. Fonseca convoca varias veces al "volcán Iztaccíhuatl" (ibíd., pp. 20, 32, 102, 137) y lo funde con el "blanco escenario de los Pirineos" (ibíd., p. 29), forma de una "herencia francesa de montañas blancas" (ibíd., p. 24). Por un "millar de costados", tanto en la literatura como en la matemática, se conectan el *mar* y el *volcán*.

18.2 Una interpretación musical: Beethoven, Mahler, Ives, Mazzola

Cuarteto en Do Sostenido Menor, op. 131 (Ludwig van Beethoven, 1825-1826). Desde sus años de adolescencia en el Collège Cévenol, cuando empezó a tocar piano[cliii], Grothendieck desarrolló su temperamento musical. En su época de Nancy, con apasionadas prácticas nocturnas al piano que desesperaban a sus caseros, y que lo llevaban de una residencia a otra[cliv], el matemático vivió de la mano del músico. Según el testimonio de Luc Illusie, "Grothendieck tenía un muy fuerte sentido de la música. Le gustaba Bach, y sus piezas más queridas eran los últimos cuartetos de Beethoven"[clv]. Aunque no se encuentran referencias directas a Beethoven en sus escritos, es fácil entender esa cercanía con las últimas obras del compositor alemán.

Un sentido profundo de la arquitectónica les une. El *Cuarteto de cuerdas en do sostenido menor* (op. 131) puede verse como el paradigma mismo de lo múltiple convertido en ondulante unidad continua. Producto de la portentosa profusión creativa de los últimos años ("robos de aquí y de allá, pegados juntos", según un irónico Beethoven[795]), el *Cuarteto* eleva uno de los más prodigiosos monumentos imaginados por el hombre para resolver las dialécticas de lo uno y lo múltiple, lo continuo y lo discreto, lo sintético y

795 J. Lonchampt. *Les quatuors de Beethoven.* Paris: Fayard, 1987, p. 159.

cliii Ver Scharlau, *Who is Alexander Grothendieck? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude. A Biography. Part 1: Anarchy.* p. 150, y foto sentado al piano, p. 151.

cliv Remembranza de Ribenboim, ver *Nota vi* arriba, p. 33. En el recuerdo de Grothendieck, "con Terry Mirkil (...) pasábamos muchas tardes en Nancy, y a veces algunas noches, cantando, tocando piano, hablando de música" [**1983-86**, 1.39].

clv Ver Illusie, "Reminiscences of Grothendieck and his school", p. 1112.

lo analítico. Si todo en el cuarteto parece ser división y diversidad –"robos de aquí y de allá": contrastantes tesituras de las cuerdas (ondulaciones graves, extensiones líricas, *pizzicatos*, murmullos, silencios), múltiples formas posibles (fuga, scherzo, recitativo, andante con variaciones, rondó), permanentes cambios de tiempo (*adagio ma non troppo, allegro molto vivace, andante cantabile, presto, molto poco adagio*, incluyendo nueve cambios de tiempo en el cuarto movimiento)–, todo en el cuarteto es también, *simultáneamente*, unidad, continuidad y síntesis: la ejecución ininterrumpida de sus siete movimientos, el equilibrio tonal alrededor del do sostenido menor, la permanente presencia de lazos de unión y de transición, la cohesión de temas y variaciones, el denso y elástico entramado de la composición. Dentro de una *meticulosa arquitectura* con decenas de iteraciones, reflejos, inversiones, aceleraciones y desaceleraciones, donde resurgen los temas y las formas después de su fulgurante presencia y de su pasajero olvido, el cuarteto combina y unifica las múltiples torsiones, oscilaciones y contradicciones que tensan la sensibilidad humana. De manera similar, la arquitectónica grothendieckiana entrelaza la diversidad y la unidad (espacios vectoriales topológicos y espacios nucleares [**1949-53**], normas tensoriales y desigualdad de Grothendieck [**1953c**], homología y funtores iterados [**1955-56**], género, armonía diferencial y grupo de la K-teoría [**1955-57**], por solo mencionar algunos hitos de la primera década), y ofrece el mismo tipo de solapamientos entre lo discreto y lo continuo –iterados, reflejados, invertidos, "pegados juntos"– del *Cuarteto op. 131.*

De manera más precisa, una filigrana continua emerge en el *Cuarteto en do sostenido menor* a través de una pendularidad de aparentes discordancias que convergen en la unidad. Un descenso de voces puede converger en un centro tonal reducido a una nota compartida (I: 68-69 (violines), 74 (viola), 75 (cello); 83 (unidad))[796], o, más complejamente, una

796 Las referencias del tipo (Y: y) (número romano, número arábigo) envían al movimiento Y (I-VII) y al compás y dentro de ese movimiento, remitiéndonos a la partitura publicada en Ludwig van Beethoven, *XIVe quatuor à cordes op. 131 en ut♯ mineur*, Paris: Heugel et Cie., 1951. Interpretaciones consultadas: Cuarteto Végh (1973) (CD: Audivis Valois 4400, 1987); Cuarteto Hagen (1999) (CD:

alternancia de descensos y ascensos *discretos* puede converger en un centro tonal *continuo* (IV: 100 (descenso), 105-107 (unidad); 134-140 (*crescendo* de trémolos), 141 (unidad)). A su vez, un diálogo lleno de reflejos y ecos entre las diversas voces tiende luego a unirse en una frase común (IV: 77 (primer violín), 79 (cello), 85 (segundo violín), 86 (cello); 97 (unidad)). Las transiciones (todo el movimiento III, por ejemplo) enlazan *suavemente* los contrapuntos[797], las corcheas, las notas largas, las modulaciones. El *contraste unitario de lo continuo y lo discontinuo* se siente también en la articulación de los movimientos de arco y los *pizzicatos* (IV: 142-144), en las alternancias de fondos sonoros uniformes y subsiguientes silencios (IV: 219-222 (fondo), 223 (silencio); 280-282 (fondo), 283 (silencio)) –donde la pausa realza la coherencia unitaria inmediatamente anterior o posterior al descanso–, o en la alternancia de *pianissimos* (II: 128-129), *sotto voces* (IV: 200), o el aéreo *sul ponticello* (V: 472) que abre la coda final, con bruscos cambios de tiempo y subsiguientes *fortissimos.* La *mutación permanente* que recorre así los compases del cuarteto alcanza la unidad gracias precisamente a su exacerbada contrastación dialéctica: *una suerte de diferenciación de la diferenciación llevada al extremo recompone la integralidad, una variación incesante de lo múltiple recompone lo uno.* Nos encontramos entonces ante técnicas grothendieckianas afines, como aquellas que vimos en los *Capítulos 16, 17* arriba: fuerzas diferenciales e integrales, locales y globales, particulares y universales, cuyo valor más alto se encuentra en el *pegamiento suave de los opuestos.*

Deutsche Grammophon 459 611-2, 1999, incluye CD-pluscore). Obsérvese que hay ligeras discrepancias en la numeración de los compases entre algunas partituras.

797 Según algunos teóricos de fines del siglo XVIII (Kollmann en 1796, por ejemplo), un contrapunto completo no sólo debía obtenerse con contraposiciones duales sino *cuatripartitas*, objeto por excelencia del cuarteto de cuerdas. Es notable que algunos de los avances contemporáneos más sofisticados de la *teoría matemática de la música*, basados en Grothendieck, validen esas intuiciones ilustradas: según Mazzola, hay razones teóricas de peso para asegurar que el número mínimo de instrumentos de una familia de cuerdas para cubrir un espectro armónico y modular suficientemente complejo es *exactamente* cuatro. Véanse G. Mazzola y otros. *The Topos of Music*. Basel: Birkhäuser, 2002, pp. 995 (Kollmann), 1009 (teorema del cuarteto), así como el final de nuestra *Sección 18.3* abajo.

Segunda Sinfonía (Gustav Mahler, 1888-1894).

Es posible que el gusto “clásico” (Bach, Beethoven) de Grothendieck le impidiera apreciar la modernidad de Mahler, a quien probablemente tampoco llegó a oír[798]. Las formas de vida distinguen claramente a los Maestros de Viena y de Mormoiron[799], pero, no obstante, mucho les acomuna en sus obras: en el *fondo*, una expresión de alegrías y pesares (“acá”) que entra en contrapunto con una alta espiritualidad a nivel cósmico (“más allá”); en la *forma*, una inmensidad instrumental, o técnica, entrelazada gracias a una multitud de deslices cromáticos, o de pasajes conceptuales, entre las partes. De hecho, una *inmensidad espiritual acentuada por la potencia abstractiva de la matemática y la música* es lo que aproxima naturalmente a Mahler y Grothendieck. Como indica Gustav en una carta a su esposa Alma, “fuera del espacio y el tiempo hay un selecto grupo de personas solitarias que son llevadas a compartir una vida intensa”[800]. Una intensidad solitaria, fuera del espacio y del tiempo, fue algo que, en comunión con el músico, experimentó el matemático.

La *Segunda Sinfonía, “Resurrección”*, ofrece un programa de vida después de la muerte, con múltiples ecos del “*vivre*” después de “*survivre*”, particularmente presentes en los tonos apocalípticos de *La clef des songes* [**1987**]. En palabras del mismo Mahler, en su programa de la sinfonía, en el primer movimiento, ante “el féretro de un hombre amado”, “atrae la atención de nuestros corazones una voz de temible solemnidad que raramente o nunca oímos por encima del ensordecedor tráfico de los asuntos mundanos”: “¿Qué es la vida... y qué es la muerte? ¿Hay una continuación de la existencia? ¿Es todo un sueño vacío?”. En el segundo movimiento, surge “un triste recuerdo de la juventud y la inocencia

798 No se tiene registro de asistencias de Grothendieck a conciertos en París, algo que no debía acoplarse por lo demás con su temperamento más bien humilde y poco dado a “lujos” culturales.

799 Resaltamos la oposición geográfica entre la capital del Imperio y el pequeño pueblo perdido en la Provincia, para simbolizar, en sus entornos de vida, el contraste entre el exquisito refinamiento de Mahler y la burda sencillez de Grothendieck.

800 A. Mahler. *Gustav Mahler. Recuerdos y cartas.* Madrid: Taurus, 1978, p. 256, carta de “mediados de julio” 1904.

perdida". En el tercer movimiento, "al contemplar el torbellino de las apariencias, junto con la candorosa mirada de la infancia, se pierde el apoyo seguro que solo da el amor". En el cuarto movimiento, "la voz conmovedora de la creencia ingenua" resuena en homenaje a Dios. En el quinto movimiento, se evoca el Juicio Final, "la tierra tiembla[801], las tumbas se abren", "la conciencia se desvanece ante la proximidad del espíritu eterno", "suenan las trompetas del Apocalipsis", "se oye suavemente un coro de santos y seres celestiales: «Resucitaréis»" y "una maravillosa luz suave nos penetra hasta el corazón"[802]. La complejidad de la existencia, la fragilidad de los sueños, la inocente mirada de la infancia, la riqueza del corazón, el apoyo del amor, la conciencia espiritual, los *temblores del volcán* y la *suavidad del mar* nos acompañan una vez más, como si el mismo Grothendieck estuviese describiendo su obra.

La *variedad musical* de la *Segunda Sinfonía*[803] compacta sintéticamente la *variedad matemática* grothendieckiana. Por ejemplo, si nos restringimos al *primer movimiento*, la entrada (I: 1) combina un *tremolo* sostenido de los cellos con un lamento del corno, luego retomado por los demás vientos: intuimos los ecos de un "más allá" (variaciones del *Dies Irae*), fragmentos de un arquetipo en silencio aún sin forma – suerte de visión de la cohomología *étale* en la conferencia de Edimburgo [**1958**]. En un vaivén subsiguiente entre furia (I: 2) y suavidad (I: 3), se contrapone la orquesta con el oboe y el clarinete: vivimos una lucha de lo pesado y lo ligero, donde los temas van encarnando en múltiples variaciones – suerte de concreción entre los motivos [**1967**] y las conjeturas estándar [**1968**]. Después

801 Ver, en nuestra *Sección 18.4* abajo, otro contrapunteo con *La terra trema* (1948) de Visconti.

802 ibíd., pp. 230-231, programa escrito el 10 de diciembre 1901.

803 Las referencias del tipo (Y: y) (número romano, número arábigo) envían al movimiento Y (I-V) y a la sección y (marcada por Mahler) dentro de ese movimiento, remitiéndonos a la partitura publicada en Gustav Mahler, *Symphonies Nos. 1 and 2*, Mineola: Dover, 1987. Interpretaciones consultadas: London Symphony Orchestra, Gilbert Kaplan (1988) (CD: MCA Classics 20112, 1988); Royal Concertgebouw Orchestra, Riccardo Chailly (2002) (CD: Decca 4756688, 2002); San Francisco Symphony, Michael Tilson Thomas (2004) (CD: San Francisco Symphony, SFS 0039, 2011).

de alternar agitaciones y silencios, en la recapitulación del primer movimiento un tiempo *molto pesante* (I: 20) se apoya sobre las trompetas y la tuba, y recoge los lamentos iniciales de los cellos: nos adentramos en una tesitura compleja con reenvíos líricos a sinuosos fragmentos melódicos – suerte de búsqueda aérea de los derivadores [**1991**] allende homologías y homotopías previas. Yendo más allá, los siguientes cuatro movimientos entran también en *contrapunteo natural* con temas grothendieckianos: *(i)* danza alegre de las cuerdas (II: 1) contra un tema más oscuro en el corno (II: 4) – a la manera de momentos felices y tristes en *Récoltes et semailles* [**1983-86**]; *(ii)* mezcla de sonidos materiales (III: 30; palos, golpeteos de las cuerdas, *glissandos*, *pizzicatos*) y de llamados ultraterrenos (III: 40; trompeta) – a la manera de un *back-and-forth* entre particulares concretos y universales abstractos [**1960-69**]; *(iii)* canto de lo divino (IV: 1-6; contralto) – a la manera de los homenajes al Soñador [**1987**]; *(iv) crescendo* de percusiones (V: 14; tambores, tímpanos, gongs) y entrada suavísima del coro, en tiempo “misterioso” (V: 43; contralto, soprano, voces) – a la manera de la “percutante” torre de Teichmüller [**1961**] gobernada suavemente por el misterioso grupo de Galois absoluto [**1981**].

De esta manera, la *Sinfonía “Resurrección”* simboliza, en su multidimensionalidad musical, la multidimensionalidad matemática de Grothendieck. Las frustraciones de Mahler con las primeras ejecuciones de la sinfonía fueron las mismas de Grothendieck con la recepción de su obra. Pero así como la *Segunda Sinfonía* ha renacido sin cesar a lo largo del siglo XX, es fácil predecir cómo los topos, los motivos, los *stacks* o los derivadores lo harán en el siglo XXI. Estamos ante creadores que se magnifican en los *tiempos largos*, cuando una polisemia amplia de perspectivas, estratos, interpretaciones, desarrollos, otorga una justa variedad de miras para poder apreciar la riqueza de sus obras. Si la Gran Mutación [**1987**] merece entenderse más como un potencial llamado simbólico que como un acto material realizable, tal vez no sea equivocado pensar que una *resurrección de la inteligencia* pueda darse en buena medida gracias a una reinterpretación continua de los Maestros.

Sinfonía Universo (Charles Ives, 1915-1928).

La *Sinfonía Universo* intenta reconstruir musicalmente la evolución del universo gracias a un doble proceso horizontal (*tiempo*, del pasado al futuro) y vertical (*espacio*, de lo bajo a lo alto)[804]. En palabras de Ives, la sinfonía se divide en tres partes: "I. Sección A: (Pasado) Formación de las aguas y las montañas. II. Sección B: (Presente) Tierra, evolución en la Naturaleza y humanidad. III. Sección C: (Futuro) Cielo, el ascenso de todos a lo espiritual"[805] – "lo que intentamos hacer es moldear la historia eterna, el universo de toda la humanidad, pasado, presente y futuro, físico y espiritual – moldearlos en un «universo de Tonos»"[806]. La sinfonía quedó inconclusa y solo han sobrevivido unas cincuenta páginas de esbozos[807]. En lo que sigue nos concentraremos en una pequeña parte de lo que se ha podido despejar de los manuscritos de Ives.

La *Sinfonía Universo* es una obra en gestación permanente, que evoluciona de lo indeterminado (bajo) a lo determinado (alto), de lo material a lo espiritual, a lo largo de un flujo universal con múltiples tonalidades intermedias. Es fascinante la semejanza con emprendimientos similares en Peirce y en Grothendieck, ya sea a través de las *categorías cenopitagóricas* de Peirce, ya sea a través de las *categorías matemáticas* de Grothendieck.

[804] En esta subsección nos basamos en los trabajos P. Lambert. *The Music of Charles Ives*. New Haven: Yale University Press, 1997 y W. Rathert. "Paysage imaginaire et perception totale – l'idée et la forme de la symphonie *Universe*". En: *Contrechamps* 7 (1986), págs. 129-154. El desarrollo temporal y espacial fue marcado por el mismo Ives, y, acorde con ello, Rathert introduce el "sistema de coordenadas" horizontal/vertical. Si vamos un poco más allá, estamos ante la incipiente presencia de un *haz*, cuya base es el pliegue del tiempo (evolución universal cifrada en las secciones de la sinfonía) y cuyas fibras son los despliegues del espacio (descripciones del cosmos cifradas en el pentagrama de notas y tonos).

[805] ibíd., p. 132.

[806] Lambert, óp.cit., p. 187.

[807] Según Ives, la sinfonía se encontraba "bastante bien bosquejada, pero no completada", aunque "los temas y el plan general están bastante claramente indicados en el bosquejo", ibíd., p. 188. Ives menciona que "en caso de no poder terminar esto, alguien podría querer trabajar la idea", ibíd. El tiempo dio la razón al compositor, y diversos ensayos han intentado completar la *Sinfonía Universo*: David Gray Porter (1993), Larry Austin (1994), Johnny Reinhard (1996). Para una comparación de las versiones de Austin y Reinhard, ver ibíd., pp. 229-230.

Cuando Ives describe cómo la música de la Tierra debe incluir “algunas escalas correctas perfectamente acordadas, algunas pequeñas escalas bien temperadas, una escala de sobretonos (...), escalas de una división más pequeña que un semitono, escalas de división desigual más grandes que un tono completo, escalas sin octavas (...)”[808], vemos cómo actúan paralelamente las múltiples iteraciones y degeneraciones de las categorías peirceanas, así como las estrategias de jerarquización, transferencia y *dévissage* [**1960-69**] de la matemática grothendieckiana. Las *vidas aisladas* de Peirce, Ives y Grothendieck –fuera de su tiempo y adelante de su tiempo, con consiguientes inmersiones forzadas del Yo en el Mundo– ayudan a elaborar una *cosmografía universal* con todo tipo de *tonos intermedios*, semióticos, musicales o matemáticos.

El *Preludio* (P) de la *Sinfonía Universo* ofrece “una suerte de pulso cósmico para el universo, fuente fundamental de vida y energía”[809], con diez secciones repletas de subdivisiones métricas, inversiones, palíndromes, ciclos, que intentan capturar, en palabras de Ives, “el movimiento y los ciclos de la tierra, el sol, todos los planetas y ocurrencias conocidas en el firmamento o en el universo”[810]. En la *Sección A*, la “formación de las aguas y las montañas” evoca el contrapunto del *mar* y el *volcán* en Grothendieck. En la *Sección B*, de nuevo según Ives, “la Tierra se representa por líneas que empiezan en diferentes puntos y en diferentes intervalos – una suerte de contrapunto desigual y superpuesto que alcanza nueve o diez líneas diferentes que representan los salientes, las rocas, las maderas y las formaciones de la tierra – líneas de árboles y bosques, pantanos, caminos, ríos, etc. – y ondulantes líneas de montañas en la distancia que se perciben en un amplio paisaje”[811]. En la *Sección C*, “el ascenso de todos a lo espiritual” traza el camino de lo bajo a lo alto,

808 Rathert, óp.cit., pp. 137, 152.

809 Descripción de Lambert, en Lambert, óp.cit., p. 188.

810 ibíd., p. 189.

811 Rathert, óp.cit., pp. 132, 151.

con una “organización y una lógica que ordena las diversas ideas previas, y resuelve todas las ambigüedades y los conflictos de la vida en la Tierra”[812]. El *contrapunteo armónico* con Grothendieck es espectacular: (P) el pulso cósmico evoca la corriente del Río Universal en *La llave de los sueños* [**1987**]; (A) los estratos de tierra (materia) y cielo (nubes) evocan la torre de Teichmüller, en su acordonamiento local [**1961**] y en su caracterización global [**1981**]; (B) las líneas (fibras) y las ondulaciones (secciones), aunadas en el todo de la Tierra, evocan el “amplio paisaje” estructural de un topos [**1960-69**]; (C) el ascenso a una razón espiritual más alta evoca los intentos de acceso al Soñador [**1987**], así como una clarificación superior de las ambigüedades de la vida evoca el rol del grupo de Galois absoluto en el entendimiento de las ambigüedades de la torre de Teichmüller [**1984**].

Un bosquejo para el inicio de la *Sección B*[813] muestra la riqueza conceptual, programática y musical de la *Sinfonía Universo*. En un estadio primordial inicial, los “océanos”, los “cielos” y las “nubes” aparecen marcados en la partitura como agrupaciones de violines en cuartos de tonos; luego, el “pulso del universo” emerge en una percusión creciente, que se enlaza con un “libre” juego de trompetas y corno, abierto hacia la “evolución de la humanidad”; finalmente la “Tierra se forma” en grupos de cellos y bajos que se integran con tubas, trombones, fagots, de nuevo subrayados como “abiertos” y “libres”[814]. El *back-and-forth* con Grothendieck puede imaginarse con precisión: “océano” de las categorías cubrientes [**1959-64**], “nubes” de los derivadores [**1991**], “pulso” de los grandes arquetipos aritméticos [**1958**], “libertad” de las construcciones categóricas universales [**1955-56**], “formas abiertas” en la jerarquía de n-categorías [**1983**]. La inventividad matemática *resuena* de manera enteramente natural con la creatividad musical.

[812] Descripción de Lambert, en Lambert, óp.cit., p. 205.

[813] “«Universe sym» and now the Earth & the Firmament & the Heavens (...)”, ibíd., Ejemplo 10.6, pp. 198-199.

[814] Descripciones de Ives en la partitura, ibíd.

Topos de la Música (Guerino Mazzola, 1996-2002).

Dentro de las conexiones naturales entre música y matemática, *The Topos of Music*[815] debe considerarse sin lugar a dudas, hoy en día, como la mayor aplicación realizada de la obra de Grothendieck hacia la cultura. Aunque se trata estrictamente de un tratado de *teoría matemática de la música*, y podría por tanto considerarse como parte de la matemática misma, la empresa de Mazzola va bastante más allá[816] y se sitúa en un *borde* muy productivo entre la arquitectónica compositiva/demostrativa del hacer matemático y la arquitectónica compositiva/interpretativa del hacer musical. Si las referencias directas a Grothendieck son escasas[817], su *espíritu* matemático recorre todo el trabajo. En efecto, siguiendo la tabla de contenidos, se observa cómo la *teoría de categorías* aparece por doquier (entre paréntesis, secciones en la tabla): "composiciones locales funtoriales" (7.3), "categorías de composiciones locales" (8.3), "perspectivas tipo Yoneda" (9), "composiciones globales funtoriales" (13.3), "interpretaciones motívicas" (13.4.4), "categorías de composiciones globales conmutativas" (14.6), "un criterio cohomológico" (16.1.2), "categoría de denotadores" (18.3.1), "topos de la música" (19), "despliegue de la geometría y la lógica en el tiempo" (47), "estrategias locales y globales en la composición" (48), "categorías, topos y lógica" (apéndice G)[818], entre otras entradas del índice.

---

[815] Mazzola y otros, óp.cit.

[816] Esto fue reconocido por el propio Grothendieck en carta a Mazzola (1 abril 1990), donde, al referirse a la *Geometrie der Töne* (1990) de Mazzola, escribe: "Das ist wohl schon die Mathematik des «Neuen Zeitalters»" (Es ya la matemática del futuro). Ver ibíd., p. 427.

[817] En un volumen de 1335 páginas –¡justa longitud grothendieckiana!– Grothendieck aparece una decena de veces (entre paréntesis, números de página): visión de los topos (vi), agradecimiento (ix), importancia del Lema de Yoneda (175), cambio de paradigma (180), funtorialización (185), carta a Mazzola (427), topologías de Grothendieck (430, 436, 1129), foto en Montréal (436), cohomología (437). Por otro lado, el libro está dedicado a Christina, la mujer de Mazzola, y a "Alexander Grothendieck, el maestro de todos" (i).

[818] Debe notarse que, además de estas referencias explícitas a la teoría de categorías, *The Topos of Music* está literalmente *inundado* por una multitud de otras técnicas matemáticas muy cercanas a las especialidades de Grothendieck –teoría de grupos (simetrías, órbitas, permutaciones), combinatoria (enumeración, programación), topología (comparación, clasificación, homología), álgebra abstracta

En la sección 19.2, "The Topos of Music: An Overview"[819], Guerino Mazzola rinde tributo a Grothendieck y describe cómo los topos [**1960-69**] sirven de marco conceptual, local y global, particular y universal, para una teoría de la música. Según Mazzola, "la teoría general de formas y denotadores[820] es un marco conceptual basado en el topos de prehaces sobre la categoría *Mod* de módulos y subcategorías seleccionadas"[821]. De allí surgen problemas de pasaje entre objetos locales y globales, con la particularidad de que, desde la musicología, existe un atlas fijo, intrínseco, para eventuales pegamientos; por otro lado, una introducción de topologías de Grothendieck ayuda a resolver múltiples aproximaciones en la clasificación y la interpretación musical[822]. En resumen[823],

> El topos de la música, primero, se centra alrededor de la arquitectura conceptual de los objetos musicales en la teoría general de denotadores y, allí, alrededor del topos de prehaces sobre módulos, y, segundo, evoluciona hacia un universo de perspectivas locales-globales, bien descritas por Alexander Grothendieck con sus admirables e inspiradoras topologías y sus funtores y teorías cohomológicas.

El enlace metafórico con la *Sinfonía Universo*[824] es inmediato, gracias a las referencias a una arquitectónica general de la música y a una evolución de lo local hacia lo global, donde lo continuo (topología) y lo discreto (homología) entran en contrapunto funtorial permanente. Con Ives, Grothendieck y Mazzola, nos encontramos así en ambientes *universales* que superan sus acotadas emergencias locales.

(anillos, módulos, transformaciones), geometría diferencial (pliegues y despliegues, espacios fibrados, operadores), geometría algebraica (espectros, esquemas), etc.–, que Mazzola aplica al estudio de la armonía, el contrapunto, la modulación, la interpretación.

819 ibíd., pp. 435-437.

820 Un *denotador* empareja ideas de substancia-punto y forma-espacio, de tal manera que, por un lado, se describan en *abstracto* partituras e interpretaciones, y, por otro lado, estas encarnen en coordenadas musicales *concretas* (planteamiento, tono, volumen, duración). Ver ibíd., pp. 48, 50, 52, 55, 67.

821 ibíd., p. 435.

822 ibíd., p. 436.

823 ibíd., p. 437.

824 Ives no se estudia en *The Topos of Music*.

Un buen ejemplo del *espíritu* grothendieckiano en acción es el capítulo 22, "Motif Gestalts"[825], donde Mazzola propone "un estudio refinado de cómo tornar esbozos conceptuales vagos de las humanidades en marcos precisos y consistentes –sin caer en los efectos de «simplificaciones matemáticas terribles»"[826]. El estudio orgánico –motívico, melódico, temático– de una composición musical es abordado desde tres perspectivas fundamentales –*(i)* profundidad semántica, *(ii)* complejidad formal, *(iii)* malas definiciones–, que pasan a ser formalizadas gracias una *topologización* ubicua: "espacio motívico", "tipos formales" (rígido, diastémico, elástico, toroidal), "similaridad métrica", "topologías en *gestalts*", "topologías epsilon", "topologías toroidales", "pesos motívicos"[827]. El estudio de la forma (*gestalt*) musical adquiere una precisa *calibración espacial*, donde la riqueza de motivos, melodías y temas de una composición no solo no se reduce con la visión matemática, sino que, por el contrario, se *amplifica y ramifica*, como siguiendo diversos circuitos en las hojas de una superficie de Riemann o diversas secciones en un haz.

El *despliegue* (*espace étalé*) de la invención musical gana con una mayor multiplicidad de perspectivas, donde se integran dimensiones abstractas (estructurales, combinatorias, computacionales) y materiales (psicológicas, interpretativas, gestuales). Con Mazzola, la *multidimensionalidad musical* –expresada en parte por su *(i)* profundidad, *(ii)* complejidad y *(iii)* vaguedad– encuentra imágenes y formalizaciones sugestivas en las matemáticas grothendieckianas, ya sea en los esquemas [**1959-64**], los topos [**1960-69**] o los motivos [**1967**]. Un *diálogo natural* emerge entonces entre una "alta" teoría de la música y "altas" visiones categóricas, suerte de *adjunción*[828] musical y matemática sustentada en una enorme diversidad de nutrientes ejemplos "bajos".

825 ibíd., pp. 465-498.

826 ibíd., p. 465.

827 ibíd., pp. 467, 468, 472, 479, 482, 487, 496, en el orden de los términos entrecomillados.

828 G. Mazzola. *La vérité du beau dans la musique. Quatre leçons à l'École normale supérieure.* Paris: Delatour – Ircam, 2007, p. 5.

18.3 Una visión artística: Turner, Monet, Picasso, Kiefer

Marinas Finales (Joseph Mallord William Turner, 1840-1845).

Lo universal –en su etimología medieval "*unum* [uno] *versus alia* [otro] ... lo único y lo general simultáneamente"[829]– encarna con arrolladora potencia en Turner. Muchos de sus óleos nos muestran en efecto violentas batallas de los elementos, que chocan unos *versus* otros: agua y aire azotando la tierra (*Fall of the Rhine at Schaffhausen* (1806), *Snow Storm: Hannibal and his Army crossing the Alps* (1812), *Snow Storm, Avalanche and Inundation* (1837), *Rain, Steam, and Speed* (1844)), fuego devorando el agua (*The Eruption of the Souffrier Mountains* (1815), *Staffa, Fingal's Cave* (1832), *The Burning of the Houses of Lords and Commons, October 16* (1835), *Rockets and Blue Lights* (1840)), tierra recortando el aire (*The Pass of St Gothard* (c. 1803-04), *The Fall of an Avalanche in the Grisons* (1810))[830]. El *volcán* y el *mar* grothendieckianos adquieren todo tipo de formas. Las contraposiciones de temas y geometrías, y, sobre todo, las *graduaciones* y las *contaminaciones* de los colores, multiplican la visión del espectador. Gracias a la lucha de los opuestos, se pasa *naturalmente* de la percepción de un momento y un entorno particulares a una serie de perspectivas universales. La cercanía con las fuerzas mayores del pensamiento de Grothendieck (*Capítulos 16, 17* arriba) no es casual: tanto el pintor como el matemático buscan trascender coyunturas acotadas siguiendo un *pasaje matérico a la abstracción*, inversión conceptual donde una acumulación de materia (co-razón artística o matemática) permite escapar de lo específico y acceder a lo universal.

829 P. Florenski. *Il significato dell'idealismo (1914)*. Ed. por N. Valentini. Milano: SE SRL, 2012, p. 46.

830 J. M. W. Turner. *The Paintings*. Ed. por M. Butlin y E. Joll. New Haven: Yale University Press, 1984, volumen 2 (Plates), números 72, 131, 375, 414, 136, 350, 365, 392, 155, 118, respectivamente.

La culminación de esa *búsqueda de lo más alto y genérico* se encuentra en la serie final de óleos, esbozos (*sketches*) y acuarelas del último Turner. La investigación *pura* del color explora todas las posibilidades del material (soporte: papel, cartón tela; medio: carbón, agua, aceite) y todas sus posibles encarnaciones (difuminaciones, superposiciones, rugosidades, lisuras). Los óleos que tienden a estar más "terminados" –*Off Ramsgate* (c. 1840), *The Day after the Storm* (c. 1840-45), *Procession of Boats with Distant Smoke, Venice* (c. 1845), *Norham Castle, Sunrise* (c. 1840-50)[831]– se construyen como "agregados" de notables óleos intermedios –*Seascape with Storm coming on* (c. 1840), *Seascape with Distant Coast* (c. 1840), *Seascape with Buoy* (c. 1840), *Sun setting over a Lake* (c. 1840), *Rough Sea* (c. 1840-45), *Seascape: Folkestone* (c. 1845), *Sunrise with Sea Monsters* (c. 1845), *Venice with the Salute* (c. 1840-45), *Riva degli Schiavoni, Venice: Water Fete* (c. 1845)[832]–. En los óleos "intermedios" predomina la difuminación de paisajes marítimos (*Seascapes*) o acuosos (Venecia), tratados con una extraordinaria suavidad de amarillos y ocres sobre fondos grises, verdes y azules. Posibles etapas para la construcción posterior de telas más acabadas, los *paisajes* intermedios merecen verse en realidad como obras enteras, como *pasajes* hacia aquello que nos elude. Las mil variedades del mar, *sinfonías inacabadas del color*, presagian los textos de Proust y los *Nenúfares* de Monet. Los *pasajes hacia el más allá* –formas helicoidales entre completitud e incompletitud– abundan similarmente en los escritos de Grothendieck, tanto matemáticos (arquetipos en la K-teoría [**1955-57**], los topos [**1960-69**], los motivos [**1967**], la geometría anabeliana [**1981**], las n-categorías [**1983**] o los derivadores [**1991**]), como filosóficos (*Puertas del universo* [**1983-86**], Soñador [**1987**], Gran Mutación [**1987**]). La riqueza turneriana de difuminaciones entre lo rugoso y lo liso simboliza la incesante búsqueda de Grothendieck por suavizar, en la abstracción, las rugosidades de lo singular.

[831] ibíd., números 480, 482, 506, 514, respectivamente.

[832] ibíd., números 467, 468, 469, 470, 472, 473, 474, 502, 508, respectivamente.

La serie de catorce esbozos *Escenas de la Costa* (c. 1840-45)[833] revela los instantes primigenios de la creación. La escogencia misma del material (óleo sobre cartón) enfatiza el carácter iniciático y pasajero del acto. Si *Coast Scene with Buildings* presenta una estructura arquitectónica (reminiscente de *SGA* [**1960-69**]), *Ship in a Storm*, *Coast Scene*, *Figures on a Beach*, *Sailing Boat in a Rough Sea* y *Two Figures on a Beach with a Boat* apenas incorporan mínimos borrones figurativos[834] (reminiscentes de los *Derivadores* [**1991**]), mientras los demás ocho esbozos son trabajos del todo abstractos (reminiscentes de los *Motivos* [**1967**] o los *Stacks* [**1983**]). Los títulos de estos últimos invocan un "cielo rojo", un "mar calmo", "nubes grises distantes", "olas que rompen", "arena y cielo"[835], pero el objetivo de las obras se reduce al estudio *genérico* de manchas de color y sus correlaciones con la luz, de forma similar a cómo Grothendieck busca caracterizar genéricamente la acción del grupo de Galois absoluto por sus correlaciones con los espacios *moduli* [**1981**]. Utilizando a lo sumo tres borrosos bordes horizontales[836], Turner divide los cartones en espacios vagos, donde mínimas alternancias de ocres revelan las dinámicas de los elementos. Las conformaciones del color (tachones, chorreones, salpicaduras, evanescencias, líneas) convocan alteraciones de fuerzas (atardeceres, vientos, rupturas). Los óleos y las olas dialogan en susurros inaudibles. Como Grothendieck en su descenso hacia las estructuras primordiales de la matemática, o como Melville en *Moby-Dick*, Turner desciende así al milagro de lo más profundo, espacio a su vez de lo más universal.

---

833 ibíd., números 488-501. Los esbozos fueron recuperados solo en 1962, ibíd., volumen 1 (Text), p. 294.

834 Los bellísimos velámenes marrones, aislados entre borrones de azul, en *Sailing Boat in a Rough Sea* pueden imaginarse como asombrosa *mediación exacta entre figuración y abstracción*.

835 *Red Sky over a Beach* (número 489), *Calm Sea with Distant Grey Clouds* (número 491), *Coast Scene with Breaking Waves* (número 492), *Sea, Sand and Sky* (número 493), *Waves breaking on a Beach* (número 501), ibíd.

836 Se trata de una aparición casi *arquetípica* de los elementos: un corte para el cielo (aire), dos cortes para mar y cielo (agua, aire), tres cortes para arena, mar y cielo (tierra, agua, aire). Por otro lado, los amarillos y ocres invocan un *fuego* escondido que parece gobernar la visión del pintor, y que entra en contrapunto con el volcán grothendieckiano.

Nenúfares (Claude Monet, 1895-1926).

Si dejamos de lado los últimos trabajos de Turner, poco conocidos y nada apreciados en su momento, la serie de los *Nenúfares* (*Nymphéas*) de Monet es la primera exploración consistente de una *pintura pura* en la historia del arte. El nivel de abstracción alcanzado precede por 50 años las técnicas de la *teoría pura de categorías* que desarrollará Grothendieck en el *Tôhoku* [**1955-56**]. A partir de su "jardín de agua" en Giverny, Monet construye una total inmersión mental en el color, donde poco importan los restos de representaciones naturales del paisaje (agua, bruma, sol, nenúfares, vegetación, árboles, puentes, cielo), y donde, en cambio, el valor de las composiciones se obtiene gracias al desarrollo *interno* y orgánico de las *masas de color*, sin necesidad de recurrir a referencias externas.

Los *pasajes* (mediaciones y demediaciones) entre lo real (jardín) y lo ideal (abstracción pictórica), lo visible (residuos orgánicos) y lo invisible (trascendencia del color puro), lo determinado (materialidad del entorno) y lo aleatorio (fluxiones inesperadas de los óleos), lo local (fragmentos de las telas) y lo global (grandes dimensiones de cada panel y alta complejidad de la serie), gobiernan con fuerza todo el ciclo de los *Nenúfares*. Se trata de *procesos de obstrucción y tránsito* que evocan muchas situaciones similares en Grothendieck: por un lado, (1) alrededor de la aparición ubicua de los haces (categorías abelianas [**1955-56**], esquemas [**1959-64**], topos [**1960-69**]), con sus enlaces entre bases reales y fibras ideales, despliegues hacia lo alto/indeterminado (mundo *étalé*) y pliegues hacia lo bajo/determinado (mundo *étale*), secciones locales y globales, y, por otro lado, (2) alrededor de muchas de las técnicas propias del álgebra topológica (geometría anabeliana [**1981**], topología moderada [**1984**], derivadores [**1991**]), con sus dialécticas de suavización entre lo real/discreto y lo ideal/continuo, intentos de caracterización de niveles locales (estratos de la torre de Teichmüller) por medio de miradas globales (grupo de Galois absoluto), enlaces entre tipos de visibilidad (espacios *moduli*) y arquetipos invisibles (grupo de Grothendieck-Teichmüller).

Desde lo global, la *totalidad* de la serie de los *Nenúfares*[837] provee un buen contrapunto con la totalidad de la obra de Grothendieck. En efecto, por un lado, (1) una contraposición entre *flujo* (secciones continuas) y *quietud* (fibras discretas) encarna en toda la serie, alternando el *discurrir* del agua y de la pintura con el *permanecer* de la vegetación y del dibujo, de manera similar a cómo las *variaciones* grothendieckianas se contraponen con *teoremas de permanencia* (casos paradigmáticos, la *Tesis* [**1949-53**] y el *Résumé* [**1953c**]). Por otro lado, (2) una integración entre *rugosidad* (estratificación) y *lisura* (suavización) se observa de cerca en las masas de color (emplastes y disoluciones), de manera similar a cómo las *alturas* grothendieckianas se integran con *conjeturas de aplanamiento* (casos paradigmáticos, la *Longue marche* [**1981**] y la *Esquisse* [**1984**]). La sencillez de la visión y la complejidad de la técnica se conjugan de forma análoga en Monet y en Grothendieck, al servicio de un *entendimiento multidimensional* del mundo, donde se entretejen una multiplicidad de perspectivas y una unidad de sentido.

Desde lo local, diversos *fragmentos* de los *Nenúfares* entran en *contrapunteo natural* con fragmentos asociados de la obra de Grothendieck: *(i) espacios nucleares* [**1949-53**] en contrapunto con el puente japonés en verde escondido armónicamente entre la proyección de la mirada y la inyección en la verdura (c. 1918-1919); *(ii) desigualdad de Grothendieck* [**1953c**] con los dos sauces erguidos que gobiernan las largas normas acostadas de malvas y azules (c. 1924-1926); *(iii) suficiencia de inyectivos* [**1955-56**] con la inmersión iterada de amarillos, ocres y verdes del estanque (c. 1922); *(iv) K-teoría* [**1955-57**] con la disimetría no conmutativa de manchas y lisura en un amanecer (c. 1921-1926); *(v) cohomología étale* [**1958**] con el aplanamiento de las aguas en los tondos circulares (c. 1908); *(vi) torre de Teichmüller* [**1961**] con las finas estratificaciones horizontales de la vegetación (c. 1920); *(vii) esquemas* [**1959-64**] con los reflejos invertidos del sol en un atardecer (c. 1921-1922);

837 Para una excelente reproducción de la serie completa, ver C. F. Stuckey. *Monet, Nymphéas*. Paris: Herscher, 1989.

(viii) topos [**1960-69**] con la estructura global del tronco de un sauce y sus ramas lloronas (c. 1916-1926); *(ix) motivos y conjeturas estándar* [**1968**] con el ordenamiento vertical de los lirios malvas (c. 1922-1923); *(x) variedades anabelianas* [**1981**] con los arcos florecidos reflejados en las aguas (c. 1913); *(xi) n-categorías y tipos de homotopía* [**1983**] con las adjunciones de aire (azules) y fuego (ocres) sobre el estanque (c. 1907); *(xii) dibujos de niños* [**1984**] con la captación de toda una superficie continua por sus residuos en los costados (c. 1923); *(xiii) derivadores* [**1991**] con un mínimo escorzo de cielo alto detrás de las glicinias (c. 1920)[838].

Una *fluidez material* y una *suavización conceptual* recorren todo Monet y Grothendieck. Más allá de impresionismos iniciales, diversas formas de un *expresionismo abstracto*[839] les acomunan. En la *transitabilidad alta de la abstracción*, el pintor y el matemático superan los entornos acotados de la figuración, y despliegan sus velámenes en profundos mares creativos, persiguiendo lo invisible, lo trascendente, lo universal ("momentos privilegiados" a la Proust). La búsqueda del "más allá" (inmersión en *Moby-Dick* a la Melville) ocurre a lo largo de un alternar de residuos particulares y señales generales, donde una limpidez abstracta termina por bañar y barrer la cacofonía de las obstrucciones singulares. La pasión y el frenesí del *Coronel Lágrimas* (a la Fonseca) se inscriben en gigantescas tareas que superan con creces las vidas mismas de los *compositores*[840]. Las urdimbres que gobiernan los ascensos y descensos del Cónsul (a la Lowry) se reflejan en las mamposterías de lo alto y lo bajo, tanto en el color, como en la topología. Una *resonancia natural* emerge así entre la exactitud pictórica y la plasticidad matemática (a la Novalis).

838 Para cada uno de los trece contrapuntos *(i)-(xiii)*, correspondientes a nuestros *Capítulos 1-13* arriba, ver ibíd., planchas numeradas 41, 64, 58, 54, 21, 34, 57, 63, 45, 23, 19, 49, 38, respectivamente.

839 Ver C. Debray. *Nymphéas. L'abstraction américaine et le dernier Monet.* Paris: Musée de l'Orangerie, 2018.

840 Hemos resaltado la *musicalidad* de Grothendieck, y esta no es menos evidente en toda una estrategia de modulaciones y cromatismos en Monet, que le lleva de paralelos impresionistas concretos (Debussy) en sus primeras obras, a paralelos expresionistas abstractos (Mahler, Ives) en los *Nenúfares*.

Guernica (Pablo Picasso, 1937).

Picasso aparece nombrado una vez en los escritos de Grothendieck, al inicio de *Récoltes et semailles*, cuando, al atacar a condescendientes colegas, displicentes en entender la importancia de preguntar y *oír de manera sencilla*, exclama: "un zopenco es un zopenco ¡y no es ni Einstein, ni Picasso!" [**1983-86**, 1.5]. El artista español cobra existencia así como paradigma de la inteligencia y el discernimiento, en medio de los entornos de incomprensión que envuelven usualmente a los grandes maestros. *Guernica*, realizado al inicio de la Guerra Civil española, cuando los padres de Grothendieck se encontraban ya luchando en el bando republicano, debió impactar mucho al matemático[841]. El retrato de su padre y la máscara mortuaria de su madre[clvi] siempre le acompañaron desde sus años del *IHES*, símbolos de un ambiente de anarquismo, conciencia social, entrega revolucionaria, pasión y dolor, reminiscentes del *Guernica*.

En el enorme mural (tres metros y medio de alto por cerca de ocho metros de largo) convergen un *fondo* dramático (insensatez de la guerra, brutalidad del bombardeo, dolor del exterminio, desesperanza de la supervivencia) y una *forma* extraordinariamente inventiva que captura la miseria de la condición humana (oscura uniformidad cromática,

[841] El bombardeo de Guernica ocurrió el 26 de abril 1937. La obra, en homenaje a las víctimas de la masacre, fue realizada entre el 1 de mayo y el 4 de junio 1937. Un registro fotográfico de las diversas etapas en la creación de *Guernica* fue llevado por Dora Maar, la compañera de Picasso. *Guernica* fue expuesto en julio 1937 en la Exposición Internacional de París, y luego en diversas giras internacionales (Noruega, Dinamarca, Suecia, Inglaterra, 1938; Estados Unidos, 1939), antes de ser depositado en el MoMA de Nueva York (1940). Entre el 13 de diciembre 1953 y el 20 de febrero 1954, *Guernica* se expuso en la II Bienal de São Paulo. En septiembre 1981, la obra se restituyó a España y se situó, primero, en el Museo del Prado (1981-1992), y, luego, en el Museo Reina Sofía. De todos estos movimientos, tal vez Grothendieck podría haber contemplado la obra en vivo en São Paulo o en Nueva York, pero en cualquier caso seguramente llegó a conocer reproducciones de la misma. Para un estudio exhaustivo del *Guernica* y de sus circunstancias, ver É. Bouvard y G. Mercier. *Guernica.* Paris: Gallimard - Musée Picasso, 2018. Para una visión meticulosa del desarrollo de la obra y de sus bocetos, ver R. Arnheim. *Guernica. Genesi di un dipinto (1962).* Milano: Abscondita, 2005.

[clvi] Ver Scharlau, óp.cit., p. 194.

vaivenes cortantes de lo alto y lo bajo, mujeres rotas, triangulaciones agudas que despedazan los cuerpos, llamaradas punzantes, curvas orgánicas del toro indomable y el caballo aullante encima del desastre). El mural –tal vez la *obra mayor*[842] de las artes plásticas en el siglo XX– alcanza dimensiones trascendentes, subrayando con suma potencia un clamor universal en contra de la injusticia y de la violencia. Desde el punto de vista del *fondo*, *Guernica* evoca las requisitorias proféticas de Grothendieck en *La clef des songes* [**1987**], en contra de la progresiva degeneración de lo humano y a favor de la necesidad de una Gran Mutación. Desde el punto de vista de la *forma*, el manejo *desplazado e iterado* de lo quebrado y lo oscuro en Picasso, a través de triangulaciones, inversiones, bordes y cortes, recuerda técnicas similares en Grothendieck, donde, por ejemplo, la descomposición de ciertos cubrimientos se recompone de manera inversa (*e.g.*, pullbacks en una topología de Grothendieck [**1960-69**]) para ofrecer una *geometría del desplazamiento*, o donde las triangulaciones de las categorías (bordes iniciales para la construcción de los derivadores [**1991**]) ayudan a conformar una *geometría de la iteración.*

Adentrándonos en los detalles de la obra[843], pueden encontrarse varias correspondencias entre las geometrías de lo alto y lo bajo, lo superficial y lo profundo, las luces y las

842 El calificativo "mayor" no resulta en balde, dadas la riqueza de la composición y su enorme influencia. De manera más precisa, si nos atenemos al *summum bonum* peirceano (= "crecimiento continuo de la razonabilidad"), el *Guernica*, como ninguna otra obra pictórica, ha crecido continuamente desde su creación, gracias a múltiples interpretaciones y correlaciones en el espectro de su recepción. La "razón" más la "sensibilidad" (= "razonabilidad") se ha potenciado gracias a un triple proceso crítico, inspirativo y formativo, que ha marcado a varias generaciones. En contra del facilismo postmodernista, el *summum bonum* de la estética según Peirce ayuda a construir una fundamental *escala de valores* en el arte, donde *no todo vale igual*, escala cercana al pensamiento de Grothendieck, con sus tensiones entre lo local/regional y lo global/universal, entre la co-razón matemática y la razón categórica (para desarrollos orientados al mundo contemporáneo, ver nuestro *Capítulo 19* abajo). Siguiendo estos cauces, *Guernica*, partiendo de la tragedia regional vasca, se ha convertido en una obra enteramente universal, obra plástica "mayor" que supera las demás instancias artísticas del siglo XX.

843 Para una visión de la obra en escala 1:1, con todos los fragmentos accesibles en perfectas reproducciones, ver P. Picasso. *Guernica. Vol. 1 (reproducción del cuadro a su tamaño). Vol. 2 (cronología y documentación).* Poesía. Revista ilustrada de información poética, 39-40. Madrid: Ministerio de Cultura, 1993.

sombras picassianas y grothendieckianas[clvii]: *(i)* una dialéctica de lo discreto y lo continuo ocurre en los seccionamientos de las figuras curvas (cola/humo, mano y dedos, garganta, talón, rodilla del caballo, rodilla de una mujer, codo de otra mujer[844]), *(ii)* un vaivén entre lo superficial y lo profundo ocurre en el alternar de triángulos aplanados en blanco y mamposterías proyectadas en grises y negros (gran triángulo central, ventana, arquitectónica del toro, picaporte, piso sombreado[845]), *(iii)* una lucha entre la luz y la sombra ocurre en la contraposición entre vida y muerte (bombillo, resplandor, llamas, paloma muerta, cabeza seccionada, brazo seccionado[846]), *(iv)* un desprendimiento entre lo alto y lo bajo ocurre entre el techo imposible del lugar y el piso recubierto de cadáveres (altura aérea, diagonal descendente, diagonal ascendente, baldozas quebradas, bordes penumbrosos[847]). De esta manera, una compleja *geometría multidimensional* recorre todo *Guernica*, en forma similar a cómo Grothendieck construye *(i)* el lecho común para una dialéctica del número y la magnitud en los topos [**1960-69**], *(ii)* la acción profunda del grupo de Galois absoluto sobre los espacios *moduli* superficiales [**1981**], *(iii)* la contraposición luminosa y oscura de las conjeturas estándar y los motivos [**1968**], o *(iv)* el *dévissage* entre lo alto y lo bajo en haces [**1957**] y en *stacks* [**1983**]. Una concepción amplia de una *multitud de estratos* de la creatividad y del entendimiento acomuna a Picasso y a Grothendieck[848], permitiéndoles superar los estragos, vividos en carne propia, de los horrores franquista y hitleriano.

844 Picasso, óp.cit., vol. 1, cuadros 79, 348-349, 428, 431, 365, 487, 225, respectivamente.

845 ibíd., vol. 1, cuadros 249-251, 110, 272-274, 303, 478, respectivamente.

846 ibíd., vol. 1, cuadros 52-53, 89-93, 30-34, 162-163, 429, 471, respectivamente.

847 ibíd., vol. 1, cuadros 60-64, 41, 74, 505-506, 517-523, respectivamente.

848 Podemos extender entonces la exclamación citada al comienzo de esta subsección: “un zopenco es un zopenco ¡y no es ni Einstein, ni Picasso, ni Grothendieck!”. Para una comprensión de la obra de Grothendieck como *giro einsteiniano* para la contemporaneidad, ver nuestro *Capítulo 19* abajo.

clvii Para una breve percepción de la luz y la sombra en Grothendieck (marcada en el título, pero poco desarrollada en el texto), ver C. Bosch y C. García. “Alexandre Grothendieck: de la luz a la sombra”. En: *Miscelanea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana* 62 (2016), págs. 45-61.

La Fractura de los Buques (Anselm Kiefer, 1990).

Anselm Kiefer se ha convertido en el Gran Herrero del fugaz y contradictorio entretiempo que hemos vivido entre milenios. Desde fines del siglo XX hasta comienzos del XXI, su fragua alcanza las dimensiones míticas de Vulcano. Sus gigantescos talleres, en Buchen, Barjac o Croissy[849], logran combinar una multivalente dimensionalidad *conceptual* –donde las fuerzas de la creatividad parecen no tener fin– y una polisémica pluralidad *matérica* –donde centenares de fibras originarias se doblan y desdoblan en violentas aleaciones de lo orgánico y lo inorgánico, piedra, tierra, vidrio, metal–. Los decimonónicos hangares y almacenes industriales renacen bajo la actividad incesante de Kiefer y se convierten en calderos de un nuevo fuego artístico. Decenas de enormes óleos e instalaciones[850] emergen de largas decantaciones en óscuros sótanos e iluminadas marquesinas. Las obras recogen la degradación de la materia e invierten el decaímiento de lo físico y de lo espiritual en ascenso del arte. Una urdimbre oculta, primigenia, milenaria, casi sideral, gobierna los fútiles movimientos del hombre. Los metales de Novalis encarnan en el plomo contradictorio, a la vez aéreo y cargado, del visionario contemporáneo. Las conexiones con Grothendieck –ese otro Vulcano– son inmediatas: pluralidad, multivalencia, pliegue y despliegue, dialéctica de lo material y lo conceptual, descenso y elevación, inmensidad, decantación, inversiones, visión cósmica, exploración de lo primigenio.

En una serie portentosa de telas, esculturas e instalaciones, Kiefer se ha venido ocupando de una situación límite particularmente claustrofóbica y angustiosa: ¿Cómo ser un artista después de Auschwitz? Sus telas –de tallas ciclópeas, muy a menudo por encima del rango de los 4 x 3 metros, especialmente impactantes en una época que parece haber

849 D. Cohn. *Anselm Kiefer. Ateliers.* Paris: Les Editions du Regard, 2012.
850 D. Arasse. *Anselm Kiefer.* Paris: Les Editions du Regard, 2001.

perdido toda pretensión de grandiosidad– integran densas capas de pintura (rugosos emplastos que dan lugar a una topografía abismal del color), superposiciones de materiales cercanos a la tierra (arenas, flores, paja, arbustos, sometidos a diversos procesos de resecamiento), colgandejos de productos humanos (batas, aviones, hilos, vidrios, arrugados o resquebrajados), e incrustaciones de desvencijadas planchas de acero (cuarteadas con ácidos y oxidantes, luego machacadas a golpes). La Obra Negra evoca el horror de los campos de exterminio nazis y la abyección suprema del ser humano, pero, al mismo tiempo, con una energía sombría, indica una exigua vía de escape para el hombre, al imaginar cómo éste podría penetrar en las estructuras inconmensurables del cosmos y tratar de apaciguar su ansiedad. Las resonancias con Grothendieck se multiplican, tanto con la vida (desde el campo de concentración de Rieucros hasta la inminencia de una Gran Decadencia [**1987**]), como con la obra (*pasajes* de lo bajo a lo alto, de la oscuridad a la luz, de lo material a lo espiritual, de lo estratificado a lo libre).

Acercándose en muchos sentidos a los *bordes y fronteras* de lo innombrable, los trabajos de Kiefer han ido evolucionando desde el centro hacia los márgenes, ya sea en sus temáticas (de la barbarie nazi al polvo de las antiguas culturas babilónicas), ya sea en los sostenes visuales de su obra (de la foto y la acuarela a alucinantes intervenciones con materiales de desecho), ya sea en su propio lugar de trabajo (de Buchen, Alemania central, a los galpones de Barjac, Francia meridional). De hecho, el *margen* –del latín *margo*: borde, orilla; substantivo ambivalente en español, cuyo acorde, masculino o femenino, queda a libre arbitrio del intérprete– es el lugar conceptual de Kiefer por excelencia. Pero el margen es también el lugar del apátrida Grothendieck, del ser humano *yin* y *yang* a la vez, del promotor de los arquetipos abstractos (esquemas [**1959-64**], topos [**1960-69**], motivos [**1967**], *stacks* [**1983**], derivadores [**1991**]) allende las técnicas calculatorias usuales, del ecologista radical, del renovador extremo en la aldea perdida de Mormoiron, del visionario cuya herencia es ignorada o abusada por la comunidad [**1983-86**].

Una sobrecogedora escultura-instalación, *La fractura de los buques* (*The Breaking of the Vessels* (1990; 4 x 4 x 1.5 m)[851]), incorpora una lluvia de ventanales rotos sobre una alta estantería donde se acumulan diezmados y corroidos libros de plomo. Entre hirientes placas de metal y peligrosos fragmentos de cristal, se articula una singular poética donde conviven polos opuestos: el peso y la levedad (*contrapunteos* con [**1955-57**]), el ángulo punzante y la curva suave ([**1984**]), la muerte y la eternidad ([**1987**]). Reflejo de un mítico conocimiento *primario, unitario*, que se habría luego roto y fragmentado ([**1960-69**]), la biblioteca en ruinas se sitúa en un preciso entorno cabalístico, en donde se simbolizan la violencia y la caída del hombre, pero también su búsqueda de lo eterno en un mundo áspero y rugoso, ácido y quemado, como la biblioteca de imposibles volúmenes. Los cristales estallados y los libros retorcidos evocan la triste destrucción de la herencia grothendieckiana [**1983-86**]. Más allá de la decadencia, "Ain-Sof" (Dios, lo "sin fin") posee diez "Sefirots" (atributos divinos) entre los cuales aparecen, escritos en desgastadas planchas de metal, "Chochma", la idea primordial, "Binah", la inteligencia, "Chesed", el amor (*Puertas del universo* [**1983-86**]). Pero nuestra pérdida de los Sefirots, cotidiana victoria de la muerte, nos acompaña. El plomo, material de Saturno, símbolo de melancolía y nostalgia, combina el dolor consciente de nuestra desgastada condición y nuestra añoranza de Ain-Sof ([**1987**]). Entre el potencial imaginable del vacío (Chesed, co-razón) y la fuerza imaginada de la cultura (Binah, razón), Kiefer expande el espectro de nuestra razonabilidad. No menor es la empresa grothendieckiana, con su esfuerzo acuciante por sondar los fondos del entendimiento matemático, los fondos de la psiquis y los fondos mismos del Universo. En el acceso a Chochma y a las fuerzas primigenias del cosmos, el *volcán* y el *mar*[852] gobiernan una honda alternancia de paisajes quebrados y lisos.

---

[851] ibíd., pp. 164-165.

[852] Ver por ejemplo en Kiefer, *The Book* (1979-1985; 3.3 x 5.5 m), *Emanation* (1984-1986; 4.1 x 2.8 m), ibíd., pp. 134, 196, o su homenaje a Klebnikov y el mar, A. Kiefer. *Velimir Chlebnikov and the Sea.* Ridgefield: Derneburg, 2006.

18.4 Un recorrido cinematográfico: Visconti, Antonioni, Kubrick, Tarkovski

La Tierra Tiembla (Luchino Visconti, 1947-1948).

Una poderosa expresión del entronque entre *volcán* y *mar* aparece en *La tierra tiembla* (*La terra trema. Episodio del mare*[853]) de Visconti, con la geografía del Etna alrededor de Aci Trezza, la aldea de pescadores protagonistas de la película. El *volcán* solo aparece explícitamente –fuertemente nevado– en el fondo de la foto de familia, que las mujeres cuidan e invocan a lo largo de la historia[854]. Pero la presencia indirecta del Etna es permanente, con las incrustaciones y protuberancias volcánicas en los arrecifes sobre el mar, las grandes lavas en los bordes de la playa ("sciara"), las piedras de las casas, o el terreno rugoso por el que pasean Nedda y Antonio antes del desastre. El *mar*, en cambio, inunda todo, desde la entrada (primera llegada de los pescadores al amanecer, en una bellísima mediación de barcas y luces entre los dos extremos rocosos que marcan la entrada a la bahía) hasta el final (ruido de remos en medio de las aguas, símbolo de un nuevo renacimiento), pasando por algunas de las imágenes más poderosas del film (trabajo nocturno en el mar, "affondare e salpare"; segunda llegada al amanecer, alternando luces y mástiles; mujeres en las rocas, con el mar revuelto y las capas negras ondeando al viento, en medio de la tempestad que llevará a la ruina a los Valastro).

853 Film consultado: *La terre tremble (La terra trema)* (DVD: Films sans Frontières EDV 229, 2010). Los subtítulos son útiles para entender partes del diálogo, enteramente en siciliano. Como lo indica Visconti, "Todos los actores del film fueron elegidos entre los habitantes del pueblo: pescadores, muchachas, jornaleros, albañiles, mayoristas de pescado. Ellos no conocen otro idioma que el siciliano para expresar rebeldías, dolores, esperanzas. El idioma italiano no es en Sicilia el idioma de los pobres", M. Eseverri, ed. *Raab/Visconti. La tierra tiembla.* Buenos Aires: Eudeba, 2011, p. 144. Visconti y Grothendieck comparten una compasión dolida por los desposeídos.

854 La foto aparece cuatro veces, en momentos de alegría (Lucía y Mara, al inicio), desesperanza (evicción, 1947, en la mitad) o renovada confianza (caricia de Mara, al saber del trabajo de Antonio, al final).

Las *aliteraciones* del mar –"il mare è amaro", al decir de Lucía; "marinaio muore in mare", al decir del narrador (Visconti)[855], murmullos *mr…mr…* que resuenan al tenor estruendoso de las olas– abren un abultado espacio sonoro, tan impactante como el visual. El tañido de las campanas (*allegro*, llamado al mercado; *grave*, anuncio de la tempestad, camino de Mara en medio del diluvio) acompaña vivencias de entusiasmo y de dolor. El extraordinario vaivén pendular de la cámara en la venta de pescado –*travelling* continuo sobre las cabezas, en medio de una protuberante cacofonía de voces, con la arquitectura del pueblo al fondo– ofrece una triple alegoría del mar: bullicio que evoca el fragor de las olas, figuras que recuerdan la danza de los mástiles, edificios que se contraponen con las escolleras. Muchos de los diálogos del film se refieren a profundas fuerzas en juego: "el mar está agotado y la noche es negra", "nuestro padre murió en el mar", "no consigo estar en paz (..) en Trezza hemos nacido y en Trezza debemos morir", "moriría de dolor", "somos pobres... es la voluntad de Dios"[856]. La exclamación de Antonio –"hemos vivido con los ojos cerrados... y lo mismo nuestros padres y los padres de nuestros padres..."[857]– se acopla con el oscuro tono apocalíptico de Grothendieck en *La llave de los sueños* [**1987**]. La *marginalidad* de la familia Valastro convoca la marginalidad del recluso (en Mormoiron) y del eremita (en Lasserre). El *sueño destrozado* de Antonio tañe al mismo ritmo de la amargura en *Cosechas y siembras* [**1983-86**]. La *lucha* de Antonio contra los patrones, los mayoristas y la Cooperativa ("Popolo" y "Mussolini" esgrafiados en la pared, apenas ocultos por una capa débil de cal) concurre con las luchas libertarias de los padres de Grothendieck. Allende la gran pesca de anchoas y la exitosa salazón consiguiente, el *sombrío tono general* de *La tierra tiembla* se funde con la oscura conciencia grothendieckiana emergente a partir de los alrededores de 1985.

855 ibíd., "el mar es amargo", p. 145; "el marinero muere en el mar", frase no transcrita.

856 ibíd., pp. 150, 155, 170, 175, 177.

857 ibíd., p. 157.

En un fascinante texto escrito poco después de la salida de *La tierra tiembla*[858], Antonioni revela algunas de las características más sobresalientes del film: *(i)* "experiencia intelectual que alcanza la poesía (...) obra de pureza lógica (...) film sin guión a la manera «romántica» (...) compleja invención poética", *(ii)* "invención técnica, función técnica tan moderna, desde los panfocales hasta los largos movimientos de cámara; desde los encuadres, entendidos como documento armonioso, hasta el carácter neto e incisivo de la fotografía", *(iii)* "invasión auténtica, inexorable [de] vibraciones (...) gestos (...) explosiones (...) rumores (...) canciones (...) inflexiones"[859]. La pureza lógica y poética en medio de la algarabía, la invención técnica de acordes armónicos entre cinematografía (global) y fotografía (local), la invasión de múltiples dimensiones y variaciones, son formas del entendimiento que hemos visto ocurrir repetidas veces en la obra de Grothendieck: *(i)* pureza axiomática en los espacios nucleares [**1949-53**], las categorías abelianas [**1955-56**] o los topos [**1960-69**], *(ii)* largos movimientos categóricos en la K-teoría [**1955-57**], los esquemas [**1959-64**] o la geometría anabeliana [**1981**], *(iii)* invasión de vibraciones e inflexiones en la torre de Teichmüller [**1961**], las conjeturas estándar [**1968**] o los derivadores [**1991**]. La *visión iterada* de Visconti y Antonioni –superposición de imágenes, técnicas, conceptos, perspectivas críticas– enriquece la compleja estratrigrafía de *La tierra tiembla*, en concordancia natural con las *fuerzas eruptivas y erosivas del volcán y el mar*. De manera similar, en el pensamiento de Grothendieck, ciertas aberturas y grietas, repentinas y violentas (*e.g.* [**1958**], [**1981**] – volcán), se contraponen con desgastes y aplanamientos, lentos y suaves (*e.g.* [**1960-69**], [**1991**] – mar). El cine y la matemática, en sus funciones poéticas y cognoscitivas, recurren a hondos manantiales imaginarios, de los cuales brota un fundamental *fluir dinámico*. La invención y la creatividad se desarrollan así al contacto de fuegos y aguas profundas.

[858] Michelangelo Antonioni, "El gesto poético" (1949), en ibíd., pp. 129-133.

[859] Antonioni, ibíd., pp. 130-131, 132, 133.

La Aventura (Michelangelo Antonioni, 1959-1960).

La aventura (*L'avventura*)[860] se sitúa en un vaivén entre paisajes *internos* de la psiquis (amor, desamor, duda, soledad) y paisajes *externos* de la naturaleza y la sociedad (volcán, mar, arquitectura, urbanismo). Una historia romántica (la "aventura" de Claudia[861] con Sandro) es el pretexto para efectuar viajes profundos en la psicología oculta de los personajes, materializada en los ambientes concretos que les envuelven. Después del fugaz encuentro inicial entre Anna y Sandro[862], la primera vista abierta en el *mar* ocurre con el *volcán* Stromboli al frente[863]. El islote volcánico de Basiluzzo, en medio del mar donde se bañan los protagonistas, antecede a la llegada a Lisca Bianca, principal escenario del film, donde Anna desaparece. El *volcán* y el *mar* inundan entonces la pantalla: caminatas de ascenso y descenso entre grandes piedras piroclásticas, giros de la cámara entre las rugosas paredes volcánicas y la suavidad del mar, recortes agudos de la isla y el mar (reflejos de dislocaciones emocionales: Anna *vs.* Sandro, Giulia *vs.* Corrado, Claudia *vs.* sí misma), altura de la montaña con caídas verticales sobre el agua, vistas del Stromboli a lo lejos, cubrimientos de las olas en las piedras bajas (juego en las piernas de Claudia), cuevas oscuras, fugaz tornado y fuerte aguacero, rugido del viento y fragor de la resaca.

---

860 Film consultado: *L'Avventura* (DVD: Editions Montparnasse EDV 69, 2004). Algunas monografías útiles: G. Nowell-Smith. *L'Avventura.* London: British Film Institute, 1997, P. Sorlin. *L'Avventura. Michelangelo Antonioni.* Lyon: Aléas Cinéma, 2010, F. Vitella. *Michelangelo Antonioni. L'Avventura.* Torino: Lindau, 2010.

861 Se trata de la primera actuación cinematográfica de Monica Vitti bajo Antonioni, después de haber trabajado con él en el teatro (1957). Vitti se convertirá en la musa de la serie de la "incomunicación": *L'Avventura* (1960), *La Notte* (1961), *L'Eclisse* (1962), *Il Desserto Rosso* (1964).

862 Deben compararse los abrazos iniciales de Sandro y Anna –en Roma, con el rostro meláncolico y frío de Anna– y los abrazos finales de Sandro y Claudia –en Santa Panagia, cerca de Siracusa, con el rostro alegre y tierno de Claudia–. Una *dualidad entre los rostros*, captados por dos secuencias de complejas tomas horizontales (la escena de amor de Sandro y Claudia tardó diez días en filmarse), muestra la lucha permanente de amor y desamor en el film.

863 En sordina, la última escena de *La aventura* ocurre con el Etna al fondo, visto desde el hotel San Domenico Palace en Taormina. El contrapunto entre el Stromboli (primer plano de Claudia y Sandro, en Lisca Bianca, con el volcán *entre* ellos) y el Etna (plano intermedio, con el volcán *al lado* de ellos) sella la apertura y la clausura, tanto de la historia de amor en sí misma, como del film.

Desarrollando una idea de Châtelet, Charles Alunni estudia el *quiebre de la noción de punto* en Grothendieck, y acentúa la importancia de un “estremecimiento metafísico” ligado a la percepción de un “punto de indiferencia”[clviii]. La explosión de los estratos de soledad en Antonioni –suerte de *Blow-Up* (1966) correspondiente a un *blow-up*[864] en las ecuaciones diferenciales– convoca la explosión del punto en Grothendieck. La lucha contra la indiferencia del desamor se convierte en el “tema metafísico” por excelencia de Antonioni, y se expresa en las famosas tomas de los personajes *desde atrás* (Anna y Claudia en la lancha, Claudia y Sandro a lo largo de movimientos verticales de la cámara entre el mar, la isla, el cabello y el cielo). Un *punto de perspectiva inverso* multiplica las capas vivenciales de los seres humanos, así como, en Grothendieck, el paso de lo puntual-analítico a lo categórico-sintético multiplica las capas del entendimiento matemático. Los rápidos *trenes* de *La aventura* (tren a Palermo, a lo largo de la costa, donde Claudia rechaza a Sandro; tren en Santa Panagia, en medio del campo, donde se plasma el encuentro de los amantes), así como el *Rain, Steam, and Speed* de Turner, trascienden la instantaneidad de tiempos puntuales y evocan la *aceleración* de los funtores iterados grothendieckianos [**1955-56**]. El *río* de los niños escolares, con sus atuendos negros en medio de la blanquísima plaza central de Noto, evoca la constante dualidad grothendieckiana discreto/continuo (puntos en negro, superficie en blanco), encarnada en el enlace entre combinatoria (dibujos de niños) y variable compleja (superficies de Riemann) [**1984**].

Por otro lado, la *visión arquitectónica* de Antonioni se emparenta con aquella de Grothendieck. Ya sea *(i)* en Lisca Bianca (pequeño refugio cuadriculado al lado de grandes protuberancias volcánicas), *(ii)* en la villa de los Montaldo en Palermo (espejos, escaleras,

---

864 Usado, por ejemplo, por Jean Petitot en sus estudios de neurogeometría, Petitot, óp.cit.

clviii C. Alunni. *Spectres de Bachelard.* Paris: Hermann, 2018, p. 358.

ángulos, curvas), *(iii)* en el entorno futurista de Santa Panagia (arcos, líneas rectas, penumbras, "Dio mio, come è triste"), *(iv)* en los cuartos de hotel en Noto y Taormina (divisiones y ventanas, sombras, luces, claroscuros), *(v)* en la explosión barroca de Noto (escala de construcciones, majestuosas plaza y escalera central, Catedral, vistas aéreas desde el campanario, entramado de cuerdas, tañir y eco de las campanas), Antonioni aprovecha a fondo una *arquitectura sensible* donde se entreveran las geometrías del cuerpo (exterior) y del alma (interior). De manera similar, Grothendieck explora una polisémica *arquitectura conceptual* en sus escritos: *(i)* cuadrícula de los espacios nucleares en medio de los espacios vectoriales *at large* [**1949-53**], *(ii)* reflejos y transferencias gracias a propiedades de exactitud en categorías abelianas [**1955-56**], *(iii)* pobreza de lo material al lado de lo espiritual [**1987**], *(iv)* obstrucciones y tránsitos en topos concretos y abstractos [**1960-69**], *(v)* proliferación de ecos barrocos en la torre de Teichmüller [**1981**].

En *La tierra tiembla* y en *La aventura*, las formas de representar los contrastes entre el volcán y el mar no pueden ser mayores. Es interesante observar cómo la obra de Grothendieck *media de manera natural*: (1) entre un gradiente (positivo, proyectivo) de lo explosivo (Visconti) y un gradiente (negativo, inyectivo) de lo explosionado (Antonioni), Grothendieck construye un reticulado neutro de suavizaciones intermedias; (2) entre lo social (Visconti) y lo individual (Antonioni), Grothendieck combina lo general y lo particular; (3) entre una fotografía cinematográfica (Visconti) y una cinematografía fotográfica (Antonioni), Grothendieck revela las estructuras invariantes (topos / fotografía) detrás del movimiento (haces / cinematografía). Si Visconti tiende a *narrar* y Antonioni a *reflexionar*, Grothendieck responde a ambos, adentrándose tanto el *corazón* matemático (narración de los grandes temas aritméticos, diferenciales y topológicos de Galois, Riemann y Poincaré), como en la *razón* categórica (reflexión alta sobre el espacio-número, tratamiento axiomático de la geometría algebraica y el álgebra topológica). Entre naturaleza y cultura, Grothendieck se *vierte* en la expresión cinematográfica.

2001: Odisea del Espacio (Stanley Kubrick, 1965-1968).

En un registro completamente diferente al *jeitzeit* ("aquí y ahora") benjaminiano que comparten Visconti y Antonioni, múltiples formas grothendieckianas de exploración del "más allá" aparecen en *2001: Odisea del Espacio* (*2001: A Space Odyssey*)[865]. El "más allá"[866] adquiere la silueta perfecta del *monolito* en momentos reveladores del film: inicio (entre los monos, en la alborada del hombre), mitad (entre los astronautas, en la Luna), final (entre sueños, en la misión a Júpiter). La *limpieza geométrica* del monolito evoca los *arquetipos libres* encontrados por Grothendieck (grupo libre de haces coherentes [**1955-57**], topos clasificadores [**1960-69**], motivos [**1967**], derivadores [**1991**]). A su vez, las *proyecciones* del monolito sobre el entendimiento *transhumano* evocan la proyectividad genérica grothendieckiana (razón categórica proyectada sobre el corazón matemático).

En la última aparición del monolito, conviven la muerte y el (re)nacimiento, cuando el astronauta, en su vejez, observa el embrión evolutivo de un niño ("Star Child") donde se conjugan las formas esféricas del saco amniótico, los planetas y el universo. En un *contrapunteo natural*, varias reflexiones de Grothendieck en Mormoiron [**1983-86**], cuando empieza la vejez y observa con cuidado su niñez [**1987**], se desarrollan paralelamente a la construcción de formas matemáticas circulares universales (dibujos de niños [**1984**], funtores HOT [**1991**]). El contraste entre las *punzantes líneas rectas* del monolito (origen de desajustes: huesos destructores en los monos, sospechas en los hombres, cuadrícula informática fallada en el computador HAL, confusión en el astronauta del futuro) y las *curvas suaves* del cosmos (origen de concordancias: concavidades en la nave espacial *Discovery*,

---

865 Film consultado: *2001: A Space Odyssey* (DVD: Two-Disc Special Edition, Warner BOOOUJ48SG, 2007). Para una presentación de la génesis del film, ver P. Bizony, ed. *The Making of Stanley Kubrick's 2001: A Space Odissey*. Köln: Taschen, 2015. Para una visión de los archivos, ver A. Castle, ed. *The Stanley Kubrick Archives*. Köln: Taschen, 2005, y Cineteca-Nacional. *Stanley Kubrick. La Exposición - México*. México: Cineteca Nacional, 2016.

866 El título alternativo del film fue "Un viaje más allá de las estrellas", ibíd., p. 185.

vals de los planetas, reflejos convexos de luz y sombra, "ojo" redondo gentil del computador) recuerda el contraste entre las arquitectónicas *yang*, cuadriculadas y encajadas, de la segunda década grothendieckiana ([**1959-64**], [**1960-69**]) y las elevaciones libres *yin*, plásticas y redondas, de la tercera década ([**1981**], [**1984**]).

Allende la rugosidad y rocosidad del preludio en la Tierra, la *geometría danzante* de *2001: Odisea del Espacio* –inscrita en su mismo título: "espacio" geométrico, "odisea" de danzas– cubre todas las demás *imágenes sonoras* del film, desde *El bello danubio azul* de Johann Strauss en la estación espacial, hasta las *Atmósferas* de György Ligeti en el inimaginable túnel de luz que lleva al astronauta a una danza final de muerte y resurrección[867], pasando por *Así habló Zaratustra* de Richard Strauss en la conjunción luminosa de Tierra, Luna y Sol ante la oscuridad del espacio, o el *Kirie* de Ligeti en las diversas apariciones misteriosas del monolito, evocando el "más allá". Un *baile* de cortes y suavizaciones, de obstrucciones y tránsitos, inunda todo *2001*: lo terráqueo y lo sideral, los monos y las azafatas, los utensilios cortantes y la comida disuelta, la detención y el viaje, el gravitar y el flotar, el choque y la circulación, el decaimiento y la metamorfosis. La matemática grothendieckiana está repleta de danzas similares entre *vertientes discretas y continuas*: lo singular/funcional/acotado y lo suave/nuclear/libre ([**1949-53**], [**1953c**], [**1955-57**]), lo aritmético/cohomológico/motívico y lo geométrico/toposico/derivado ([**1960-69**], [**1967**], [**1991**]), lo estratificado/combinatorio/n-categórico y lo moderado/topológico/∞-categórico ([**1981**], [**1983**], [**1984**]). La musicalidad visual de Kubrick refleja la musicalidad conceptual de Grothendieck. El cineasta y el matemático conviven en una búsqueda de armonías contrapuntísticas entre lo humano y lo cósmico.

867 Pueden encontrarse acá muchos ecos con la *Sinfonía Resurrección* de Mahler (*Sección 18.2* arriba, p. 536), no aprovechada sin embargo por Kubrick. Por otro lado, los *Kindertotenlieder* (Canciones de los niños muertos, 1904) de Mahler convocan sentimientos de angustia, resignación y trascendencia, muy propios también de la Odisea en *2001*. Entre el dolor del "acá" y el alivio del "allá", transitan el músico, el matemático y el cineasta.

En sus escritos sobre el cine, Deleuze estudia la dualidad mente/cuerpo en Kubrick, y observa cómo en su cine “el mundo es cerebro y hay identidad de cerebro y mundo”: “la piedra negra de *2001* preside tanto los estados cósmicos como los cerebrales: es el alma de los tres cuerpos, tierra, sol y luna, pero también el germen de los tres cerebros, animal, humano, mecánico”[868]. El *límite* entre mundo y mente, “membrana que pone en contacto un afuera y un adentro”[869], es superado “al final de *La odisea del espacio*, siguiendo una cuarta dimensión, cuando la esfera del feto y la esfera de la Tierra tienen la posibilidad de entrar en una nueva relación inconmensurable, desconocida, que convierte la muerte en una nueva vida”[870]. El acceso a lo desconocido, la inmersión en aquello que nos supera, es también un rasgo típicamente grothendieckiano, tanto en la matemática de los arquetipos [**1960-69**], como en el sondeo de las profundidades del alma [**1987**]. La *nueva vida* de la *razón categórica*, fertilizadora de la *co-razón matemática*, insufla un nuevo aire en las membranas intermitentes del corazón (Proust), así como entran en intercambio osmótico el niño sideral y la Tierra en *2001.* La *contaminación de la inteligencia* es esencial en las empresas de Grothendieck y de Kubrick; sin ella, los compartimientos estancos del saber estarían destinados a una muerte sin resurrección posible. Entre el adentro/pasado/involución y el afuera/futuro/evolución, tanto Grothendieck como Kubrick circulan a lo largo de una *geometría iterada*, con infinitas hojas imaginarias –a la manera de la superficie de Riemann del logaritmo complejo– donde todo tipo de analogías, simetrías y correspondencias van develando los secretos del Universo[871].

---

868 G. Deleuze. *Cinéma 2. L’Image-temps.* Paris: Les Éditions de Minuit, 1985, p. 267.

869 “El adentro es la psicología, el pasado, la involución, toda una psicología de las profundidades que mina el cerebro. El afuera es la cosmología de las galaxias, el futuro, la evolución, todo lo sobrenatural que hace explotar el mundo”, ibíd., p. 268. Resultan impactantes los ecos con *La clef des songes* [**1987**]: descensos introspectivos profundos en los sueños y ascensos sobrenaturales al Soñador.

870 ibíd., p. 268.

871 Pueden encontrarse acá también muchos ecos con la *Sinfonía Universo* de Ives (*Sección 18.2* arriba, p. 539), con su flujo natural de tonos en una partitura fuertemente estratificada.

Stalker (Andrei Tarkovski, 1976-1979).

Tarkovski es, por excelencia, el cineasta que torna visible lo invisible. *Stalker* (*Stalker*)[872] representa en ese sentido, junto con *El espejo* (1974)[873], una culminación artística en el acceso a un "más allá" que supera nuestra mirada/miseria cotidiana: "La imagen es una impresión de la verdad que nos está dada para percibir con nuestros ojos ciegos"[874]. *Stalker* explora el espectro de nuestras creencias interiores e inventa un complejo sistema de imágenes externas para reflejar las inseguridades de los seres humanos, sus intentos de escapar de la duda y sus esfuerzos por fraguar frágilmente escorzos de una verdad contradictoria. Tres personajes se adentran en un espacio misterioso –la Zona– cuyo acceso se ha mantenido vedado después de una incomprensible conflagración, y buscan una cámara oculta donde pueden supuestamente realizar sus más recónditos deseos. Entre el Stalker (guía de la Zona, "del verbo inglés *to stalk*: caminar a paso de lobo"[875]), el Escritor (receptáculo de sensaciones, árbol nervioso contrapuesto con la conciencia, limitado por el lenguaje), el Profesor (adalid de la experiencia, demarcador de lo positivo, limitado por las "muletas" de la ciencia) y el paisaje residual de la Zona, se establece un tenue vaivén donde lo *inefable* –interior, alma, creencia, fe– y lo *visible* –exterior, cuerpo, materia, decadencia– se rozan asombrosamente entre sí. La extremada concreción de los elementos de la Zona y el tortuoso camino espiritual de los personajes conviven en lo más hondo. Superando membranas disyuntas, física y metafísica, tipos y arquetipos, dialogan entre sí.

[872] Film consultado: *Stalker* (DVD: Artificial Eye ART 215, 2002). Para un análisis compacto del film, ver A. Mengs. *Stalker de Andrei Tarkovski.* Madrid: RIALP, 2004. Para una bella colección de artículos, ver A. Kaourova y Eugène, eds. *Phénomène Stalker.* Lausanne: L'Age d'Homme, 2015. Para la mejor visión completa de la obra de Tarkovski, ver R. Llano. *Andréi Tarkovski. Vida y obra (2 vols.)* Valencia: Generalitat Valenciana - Ediciones de la Filmoteca, 2002.

[873] Ver la notable monografía J. C. Goyes. *La mirada espejeante. Análisis textual del film El espejo de Andréi Tarkovski.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2016.

[874] A. Tarkovski. *Le temps scellé (1985).* Paris: Cahiers du cinéma, 2004, p. 123.

[875] A. Tarkovski. *Journal 1970-1986.* Paris: Cahiers du cinéma, 2004, p. 166 (14 de diciembre 1976).

Arbustos, maderas, pastizales, ríos, cascadas, humos, brumas, tierras movedizas, arenas, metales, herrumbres, cristales, paredes, ruinas, utensilios desvencijados, restos de maquinarias, manuscritos rotos, se van sucediendo ante nuestros "ojos ciegos", siempre *fragmentos*, siempre *residuos* de un sistema mucho más amplio que se nos escapa. El bellísimo perro lobo que se une al Stalker en medio de la ruta –cuya asombrosa precisión de movimientos supera nuestros más elementales instintos– convoca una comunión insondable del hombre con la *alta vida natural* que le circunda. La conciencia de que nuestra existencia no es sino un *frágil fragmento residual* de la evolución del planeta adquiere toda su fuerza gracias al movimiento ecologista liderado por Grothendieck, unos pocos años antes de la realización de *Stalker*. La lucha contra las limitantes del lenguaje y las "muletas" de la ciencia, la búsqueda de una vida espiritual "más alta", recorren toda *La llave de los sueños* [**1987**]. Los roces entre el alma y la materia son permanentes en las décadas reflexivas grothendieckianas de los setenta y los ochenta. El *ir y venir* entre lo concreto y lo abstracto es fuente de renovación matemática ([**1981**], [**1984**]). Grupos, topologías, haces, cubrimientos, lazos, triangulaciones, modularidades, curvas, superficies, acciones, límites, fibraciones, *stacks*, espacios *moduli*, modeladores, localizadores, dibujos de niños, *se van sucediendo ante nuestros "ojos ciegos", siempre fragmentos, siempre residuos de un sistema mucho más amplio que se nos escapa.*

Citando a Mahler ("la exactitud es el alma del trabajo del artista"[876]), Tarkovski explora de manera exacta la *multidimensionalidad* del universo en *Stalker*. Las líneas rectas son imposibles en la Zona, se anda siempre en zigzag, "todo cambia cada minuto", nunca se regresa por un mismo camino (tipos de homotopía [**1983**] y derivadores [**1991**])[877]. La visión del Stalker, mientras se recuesta en una quebrada, evoca todo tipo de fragmentos

[876] ibíd., p. 174 (26 de agosto 1977).

[877] En este parágrafo, situamos sistemáticamente entre paréntesis algunos ecos con la obra de Grothendieck.

de la civilización y se adentra en la perecedera porosidad de nuestro pasado (degradación de la memoria [**1983-86**]); en un plano continuo ascendente, con veladuras de sepias, con la voz *off* de un niño, vemos cómo, a lo largo del curso de la quebrada, los más maravillosos inventos se convierten en agotada herrumbre, cómo las aguas y los musgos absorben quietamente los residuos del conocimiento (degradación de los valores [**1987**]). Detrás de la aparente estabilidad que nutre nuestra retina, el mundo *vibra* indefinidamente (variaciones algebraicas [**1959-64**] y continuas [**1981**]); en el despertar del Stalker, en la primera escena de la película, una bandeja vibra ostensiblemente, y creemos que el tránsito de un tren produce la vibración; pero, en la última escena, la hija del Stalker es quien hace ahora vibrar su entorno y puede desplazar los vasos sobre la mesa con la sola fe de su mirada (motivos [**1967**] y conjeturas estándar [**1968**]). En la Zona, los umbrales barridos por el viento, las aguas fluctuantes, las tierras movientes, delatan las vibraciones incesantes del paisaje (sensibilidad diferencial por las pequeñas cosas [**1987**]). El *ir y venir* de la cámara (adjunciones [**1955-56**]), las tomas de los personajes desde el revés (inversiones en el álgebra topológica [**1981**] y homenaje a Antonioni), los ángulos que permiten integrar quietud y movimiento (topos [**1960-69**]), las sugerencias de mixturas entre lo duro y lo blando (grupos fundamentales algebraicos y espacios *moduli* [**1981**]), los decorados con múltiples niveles de profundidad (torre de Teichmüller [**1961**]), remiten todos a una ubicua multidimensionalidad, a una ronca vibración que nuestro "conocimiento engañoso"[878] tiende a escondernos.

De esta manera, una red de *perspectivas invertidas*, parte de una penetrante *via negativa* rusa en la que participan Tarkovski, Grothendieck y Florenski[879], extiende nuestra visión, ya sea matemática, filosófica, mística o cinematográfica. Yendo más allá, hemos

---

[878] ibíd., p. 186 (23 de diciembre 1978).

[879] Ver P. Florenskij. *La prospettiva rovesciata (1919) e altri scritti.* Ed. por N. Misler. Roma: Casa del Libro, 1983, y Zalamea, *Antinomias de la creación. Las fuentes contradictorias de la invención en Valéry, Warburg, Florenski.*

visto en este capítulo cómo toda una trama de contrapuntos con la literatura, la música, el arte y el cine, entra en *armonía natural* con el pensamiento grothendieckiano. A través de los escritores, los compositores, los artistas y los directores de cine, algunas veces de manera explícita y la mayoría de las veces de manera implícita, la profundidad y el desgarro –*el mar y el volcán*– vibran al unísono, ante nuestros ojos ciegos y nuestros oídos sordos, con la gigantesca obra multidimensional de Alexander Grothendieck.

19

El lugar de Grothendieck para el pensamiento contemporáneo

En este capítulo final, *(i)* indicamos brevemente logros y bloqueos, tanto matemáticos como filosóficos, en la *recepción* de la obra de Grothendieck, pero, sobre todo, *(ii)* apoyándonos en nuestra *descripción* técnica local (*Capítulos 1-13* arriba) y conceptual global (interna: *Capítulos 14-15*; externa: *Capítulos 16-17*), *(iii)* presentamos una *prospección* del pensamiento grothendieckiano hacia la cultura del siglo XXI (una *irradiación* hacia los siglos XIX y XX se realizó en el *Capítulo 18*). Si nuestra descripción *(ii)* de los trabajos matemáticos y filosóficos de Grothendieck provee por vez primera una visión unitaria del conjunto de su producción, queda aún muchísimo por hacer para calibrar la influencia de su obra, tanto en *(i)* el fragmento que queda atrás (1950-2020), como en *(iii)* los fluctuantes desarrollos por venir del siglo XXI. A nuestro entender, el mundo contemporáneo ganará mucho al poder *proyectar* las ideas, técnicas y métodos de Grothendieck. Para ello, esta monografía puede servir de *base* desde donde se desplieguen los múltiples haces, fibras y secciones de un TOPOS UNIVERSAL que cubra aspectos remotos de la cultura.

Recepción.

Un estudio detallado de la *recepción matemática* de la obra de Grothendieck requeriría, de por sí solo, otro volumen copioso como este. No obstante, ante todo, (1) resulta fácil marcar el espectro de su influencia en el Panorama Fields. De hecho, si algunos de los creadores mayores de la matemática en la segunda mitad del siglo XX se relacionan directamente con ideas de Grothendieck (ver *Figura 19.1*), también hoy en día, al mirar los últimos Medallistas Fields anunciados en Rio de Janeiro (ICM 2018), tres de ellos (Birkar, Scholze, Venkatesh) trabajan en temas esencialmente grothendieckianos alrededor de la *geometría aritmética* (fibraciones y descomposiciones, haces y perfectoides, cohomología motívica y formas automorfas).

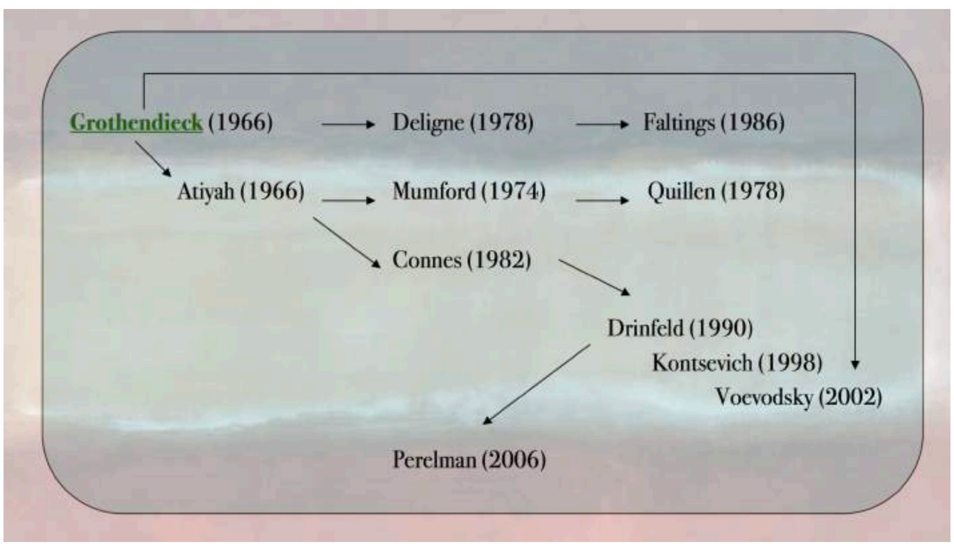


Fig. 19.1 – Espectro de influencia de Grothendieck en el Panorama Fields 1966-2006

Segundo, (2) la consolidación (Voevodsky, Levine, André) de la teoría de *motivos*, el renacimiento de los *topos de Grothendieck* (Caramello, Connes) en detrimento de los topos elementales, los desarrollos actuales (Leinster, Riehl, *n-Category Café*) de la teoría de *n-categorías*, la homología (Lurie) en *categorías altas*, los enormes trabajos de la comunidad (*Stacks Project*) alrededor de los *stacks*, son algunos ejemplos de la herencia *viva* de Grothendieck en las primeras décadas del siglo XXI. Tercero, (3) el volumen *Alexander Grothendieck: A Mathematical Portrait* (2014)[clix] ofrece una importante colección de artículos (locales) sobre sus trabajos, que hemos ido desgranando a lo largo de esta monografía. Yendo más allá, nuestras 164 notas a pie de página sobre la literatura secundaria, denotadas *i-clxiv*, ofrecen un *razonable cubrimiento* de lo que se ha escrito directamente acerca de Grothendieck. Un *recorrido horizontal* por esas notas a pie de página sirve de *bajo continuo* (o sub-base) para un despliegue (o fibración) de la obra.

En contraste con esa alta recepción matemática, la *recepción filosófica* de las ideas grothendieckianas puede medirse como casi nula. Solo seis intentos avanzan algunas líneas en ese sentido: Herreman (1999)[clx], Patras (2001)[clxi], Badiou (2006)[clxii], Zalamea (2009, 2017)[clxiii] y Lochak (2015)[clxiv]. Los resultados son muy desiguales y solo demuestran la *urgente necesidad* de que aparezcan unos jovencísimos filósofos, ya entrado el siglo XXI, para que construyan nuevas vertientes ("filosofía sintética") sobre Grothendieck y la lógica de los haces, así como Russell y Wittgenstein lo hicieron a inicios del siglo XX ("filosofía analítica") sobre Cantor y la lógica clásica. En ese sentido, esperamos que una *visión entera* de Grothendieck, como la aquí ofrecida, ayude a despejar el camino. La tarea es larga, pero fascinante y *perentoria* para poder desarrollar una inteligencia a la vez elástica y rigurosa, capaz de orientarnos en las complejidades del mundo contemporáneo.

---

clix L. Schneps, ed. *Alexander Gothendieck: A Mathematical Portrait.* Boston: International Press, 2014.

clx Herreman, óp.cit.

clxi F. Patras. *La pensée mathématique contemporaine.* Paris: PUF, 2001.

clxii A. Badiou. *Logiques des mondes.* Paris: Seuil, 2006.

clxiii Zalamea, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* y F. Zalamea, ed. *Grothendieck. Visiones sobre la multiplicidad de su obra.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2017.

clxiv Lochak, óp.cit.

Prospección.

Los entornos actuales de nuestra existencia, cuando empieza el nuevo milenio, se sumergen en *modos geométricos* extremadamente sofisticados, donde se despedazan las aproximaciones clásicas al saber (linealidad y afinidad, bivalencia y polaridad, compartimentación y complementariedad, rigidez y conmutatividad). Por el contrario, múltiples características de *continuidad, plasticidad, elasticidad* gobiernan nuestra época. El prefijo TRANS (transitabilidad, transformación, transmisión, transferencia, transición, transmutación, transvase, transposición, transgresión[880]) conecta el Romanticismo (Novalis) con el Nuevo Milenio (Kiefer). Gracias a Internet, los *millennials* tienen a su disposición el paisaje inabarcable de "todos los mundos posibles". La ductilidad de la experiencia se ha multiplicado de forma inconcebible hace tan solo treinta años. Los enlaces permanentes entre lo local y lo global son ahora una realidad gracias a herramientas tecnológicas que potencian nuestra imaginación. Múltiples *formas de contrastación, coherencia y pegamiento* están a nuestra disposición.

Sin embargo, la *extensión horizontal* del saber así conseguida tiende a quedarse en la *superficie*, concordando con la "ligereza" y la "rapidez" entrevistas por Italo Calvino en sus *Lecciones americanas* (1988). Las olas esconden las corrientas submarinas. La dimensión trascendente de *Moby-Dick*, con su sondeo incesante de las profundidades del alma, desaparece del panorama. La riqueza horizontal, superficial, de la *web* adolece de la falta de su *contraparte vertical*, aquella que pretende sumergirse en lo más hondo. Es como si el *haz de nuestra existencia* se expandiera, pero a su vez tendiera a aplanarse, a perder la riqueza de sus fibras verticales. El resultado es una *desgastante desorientación*,

[880] Para un estudio del entronque de Grothendieck con desarrollos culturales *transgresores* contemporáneos (*Collapse, Glass Bead, Networkologies*), ver nuestro cursillo *Grothendieck and a Theory of Contemporary Transgression* (Pratt Institute, New York, Octubre 2015; https://zalameaseminarnyc.wordpress.com/), y, sobre todo, las 105 páginas (pdf) asociadas a las conferencias. Agradecemos vivamente a Christopher Vitale, quien nos impulsó a realizar ese trabajo.

donde desaparecen las jerarquías, las cimas, los puntos proyectivos. Lo *étale* prevalece sobre lo *étalé*, todo tiende a plegarse y a valer por igual, y se olvidan las ramificaciones y los despliegues que hacen que la cultura merezca ser vivida.

En una época que tiende a privilegiar lo material sobre lo espiritual, lo concreto sobre lo abstracto, lo visible sobre lo invisible, los tipos sobre los arquetipos, lo relativo sobre lo universal, la invención sobre el descubrimiento, el *back-and-forth* grothendieckiano entre esos polos resulta ser extremadamente iluminador. La *riqueza armónica* del despliegue y el pliegue (par "*étalé – étale*", *Capítulo 16* arriba), así como la *riqueza contrapuntística* de lo general y lo particular (noción de "*universal relativo*", *Capítulo 17*), permiten explorar fundamentales *mediaciones* (o mixturas lautmanianas) entre los polos. Valen más las fluctuaciones del *margen*, el borde, el límite, desde donde puede moldearse una *suavización* de los opuestos, que la rigidez estable de un centro. Ese "estar medio" corresponde también a un "estar alto" (arquetipo) –o, dualmente, a un "estar bajo" (ballena)– desde donde se eliminan las obstrucciones de una mirada planar. El límite convoca una dimensión vertical adicional desde donde se *proyecta* la visión. La abstracción –*despeje* de los particulares– permite transitar donde no se hallaba ningún pasaje.

La obtención de *pasajes por despejes* es una de las características incesantes del hacer matemático multidimensional de Grothendieck. La razón categórica permite recorrer múltiples caminos por entre las intermitencias del corazón matemático (*Capítulo 16*). La suavidad *yin* sumerge la rocosidad *yang*. Al despejar rugosidades, singularidades, diferencias, y convocar lisuras, regularidades, integrales (*Capítulo 17*), Grothendieck consigue construir una suerte de *metasuperficie de Riemann general* –o de *metatopos universal*– donde diversas axiomatizaciones locales resuenan entre sí. Aparecen nuevas formas de continuidad donde parecía reinar una separación discreta. De esta manera, la *conexidad grothendieckiana*, evidente en la *coherencia continua* de su obra, puede ayudar a reorientar la descuadernación de nuestra época: aceptando lo diverso pero reintegrándolo, valorando lo específico pero universalizándolo, apreciando lo singular pero suavizándolo, palpando lo material pero espiritualizándolo. Una gran ventaja para el siglo venidero es que cuenta ahora con un *enorme instrumental de herramientas de tránsito*, proporcionadas por algunos de los aportes técnicos mayores de Grothendieck y pronto extrapolables hacia los estudios culturales: categorización, funtorialización, hacificación, relativización, toposificación, con todo un arsenal de enlaces arquetípicos entre las partes (adjunción, aproximación, dualización, inversión, inyección, proyección).

La superación del yo particular, tan típico de las redes sociales en su aberración más oclusiva, y la inmersión en un *Yo Universal*, plenamente integrado con la Naturaleza, es otra enseñanza particularmente acuciante de Grothendieck para nuestra época. Su *generosidad altruista* se encuentra en las antípodas del egoísmo creciente de cada quien ante la pantalla de un computador. Su acción ecológica, su cuidado del entorno, sus requisitorias contra una Gran Decadencia presagian los desastres industriales de finales del siglo XX, y anteceden en cuarenta años las protestas actuales de la juventud por volver a cuidar el ecosistema. Su rectitud ética, su sencillez, su frugalidad, son *ejemplos de limpieza* en tiempos como los nuestros, donde todo se rige por la desvergüenza del dinero. La *concordancia natural* entre su vida matemática, su vida física y su vida espiritual le torna en modelo paradigmático de altura y entrega para las nuevas generaciones. Contra la desarticulación artificial efectuada entre el pensador y el hombre –fruto de una desdeñosa *incomprensión de su vida* por parte de la comunidad matemática y consecuencia de una *falta de lectura seria* de sus escritos– ese "múltiple a la búsqueda de la unidad" que fue Grothendieck nos sirve de *arquetipo armónico* hacia el cual elevarnos. Allende todo tipo de estrategias de desarticulación, la *plenitud* de obra y vida en Grothendieck nos ofrece mejores horizontes en medio de cómodas subespecializaciones, fáciles sectarismos, despectivos desprecios, tenebrosas intolerancias. Las *aperturas* de la invención matemática se ponen al servicio de una apertura mental imprescindible para la humanidad.

Simone Weil recuerda en su *Autobiografía espiritual* (1942) cómo una noción de *pureza* se le apareció por vez primera a los dieciséis años, al contemplar un paisaje de montaña, y cómo sus mejores pensamientos ocurrían en un *espacio abierto*, allende toda perspectiva, donde un equilibrio de los contrarios (*volcán*), en un sentido casi pitagórico, generaba una *suave inteligencia armónica* (*mar*). Con la hermana de André y a las antípodas del maestro de Bourbaki, nos adentramos en pleno territorio grothendieckiano: limpieza, candor, apertura, acceso a lo alto, despeje de lo coyuntural, equilibrio armónico. Por otro lado, en los renglones finales de su *Vida, arte, mística* (1905), Brouwer hace la apología de quien *no posee nada, todo sacrifica y todo da*, y a quien se le abren los mundos de la *libertad* y la contemplación. Los ecos con Grothendieck son inmensos, desde sus modestas labores de labriego en Mairargues, hasta su seclusión definitiva en Lasserre: desposeído que vibra con los desposeídos, ser humano enteramente libre, explorador de la trascendencia. Y en *El pensamiento del afuera* (1966), las reflexiones de Foucault sobre los intersticios, los umbrales, los abismos, los lugares sin lugar, convocan el permanente trasegar de Grothendieck, nunca enteramente anclado, siempre en movimiento, abriendo y despejando perspectivas, libre de cargas, dispuesto a sumergirse en lo más hondo. Emerge así la figura de un *nuevo Ahab*, irrefrenable, irreprimible, irredento. *Moby-Dick* campea con su asombrosa clarividencia.

La creatividad abierta y libre de Grothendieck, resaltada en el epígrafe de esta monografía, provee múltiples “preguntas nuevas”, “nociones nuevas”, “puntos de vista nuevos”, “nuevos mundos”, que pueden ayudar a calibrar la *geometría plástica* del pensamiento contemporáneo. La *filosofía*, desafortunadamente convertida en historia de la filosofía y aún muy rezagada, tendrá que tener en cuenta la extraordinaria riqueza de la obra grothendieckiana, y refinar tanto sus análisis locales como sus síntesis globales. Una filosofía de lo intermedio, del *horos* (= borde, en griego), atenta a los vaivenes pendulares entre los extremos, que supere el análisis y la síntesis, tendrá que ir emergiendo. Una *horótica del futuro* sabrá valorar entonces las adjunciones (categorías), las localizaciones (sitios), las globalizaciones (topos), las torres (anabelianidad), las jerarquías (*stacks*), las elevaciones (derivadores), para potenciar un *pensamiento multidimensional* que sepa situar las diferencias, pero que sepa a la vez conectarlas e integrarlas. En particular, la *hacificación* y la *toposificación* –temas y modos grothendieckianos *sine qua non*– permitirán superar nuestra desgastada desorientación, circunnavegar en espacios helicoidales complejos y recorrer los nuevos rumbos fluctuantes del TRANS.

Al reintegrar una unidad después de apreciar las diferencias, los *universales relativos* cifran los signos y las representaciones (máxima pragmática de Peirce), pegan lo local y lo global (teoría de haces) e integran lo concreto y lo abstracto (teoría de categorías). El paso del objeto "en-sí" al objeto "en-otro" (funtor representable) explica los pasajes (*horótica*) entre lo interno y lo externo, en correspondencia con las transformaciones del *aura* según Benjamin. El corazón –o, mejor, la co/razón– ayuda a entender los *bordes exactos de la negación* (no conmutatividad, cuantización; no separación, continuidad; no puntualidad, fluxión; no multiplicidad, unidad). Una *dualidad* honda sublima la frase de Pascal: "*le coeur a ses raisons que la raison ne connaît point*". Gracias a las variaciones, negaciones, extensiones e inversiones realizadas alrededor del número, del espacio y de la forma, se despejan lógicas subyacentes no analíticas, no clásicas, no separadas (lógica topológica, lógica intuicionista, lógica de haces): *(i)* en el *número*, esto sucede gracias a las *no-unidades*, donde se *invierte* el camino fundacional usual (naturales $\to$ enteros $\to$ racionales $\to$ reales $\to$ complejos $\to$ secciones de un haz); *(ii)* en el *espacio*, gracias a los *no-puntos*, donde se *invierte* el camino (puntos $\to$ líneas $\to$ planos $\to$ superficies $\to$ sitios $\to$ secciones de un haz); finalmente, *(iii)* en la *forma*, gracias a las *no-disyunciones*, donde se *invierte* el camino (cadenas de grupos $\to$ (co)homologías $\to$ funtores derivados $\to$ categorías abelianas $\to$ motivos $\to$ secciones de un haz). Esto da lugar a una *transformada transversal de principios cubrientes*, que podríamos llamar *transformada de Grothendieck*, donde, desde arquetipos aéreos globales (*hacificación*) y siguiendo un proceso descendente inverso, emergen nuevos entendimientos de los tipos locales (*toposificación*), en los casos del número, el espacio y la forma.

No cuesta mucho imaginar el enorme impacto que esta manera de ver puede tener sobre las nebulosas de la cultura contemporánea. En *La sonrisa de Saturno* (1989), Rosa María Rodríguez Magda ofrece una visión *transmoderna* de nuestra época, que supera los facilismos del *post* y que nos reintegra, siguiendo una mirada abierta y crítica, con los fundadores de la Modernidad. A nuestro entender, Grothendieck es el maestro de esa *Transmodernidad* en ciernes, que la joven filósofa de Alicante revela a fines del siglo XX. De hecho, entre algunos pioneros modernos y algunos exponentes contemporáneos, la *transformada de Grothendieck* actúa magníficamente, cubriendo múltiples registros y pasajes: *(1) estratificación*, en el paso de la minería poética de Novalis al *Atlas of Transformation* (2010) de la escuela checa; *(2) iteración*, en el paso del pragmaticismo de Peirce al proyecto *Collapse* (2008-hoy) de Mackay y Negarestani; *(3) reflexión*, en el paso de las inversiones de Florenski a las *Networkologies* (2014) de Vitale; *(4) foliación*, en el paso de las ramificaciones de Valéry al *Topos of Music* de Mazzola; *(5) residuación*, en el paso de las superposiciones de Warburg al proyecto *Glass Bead* (2012-hoy) de Giraud. En todos estos casos, la ampliación *(i)-(iii)* del espacio-número-forma actúa como entorno de libertad y tránsito, como lugar de invención y transgresión, como *paisaje de pasajes* y transmutaciones. Las formas concretas *(1)-(5)* que en esos haceres adquiere la transformada de Grothendieck reflejan la ductilidad y la plasticidad que el pensamiento grothendieckiano puede ofrecer en nuestros tiempos.

Una articulación entre *imágenes, intuición y oído* es central para Grothendieck, en contraposición con otros manejos meramente formales del lenguaje (filosofía analítica). Una de sus metáforas centrales le pone a escuchar “la voz de las cosas”, develadora de una belleza escondida en las estructuras, una belleza *intrínseca* que el matemático descubre gracias a la invención *extrínseca* de lenguajes suficientemente expresivos. En la perspectiva de Grothendieck, las estructuras matemáticas se encuentran dentro del espectro fenomenológico del mundo, y por tanto se *descubren*, pero se trata de descubrimientos que sólo se pueden obtener al *inventar* –en un movimiento pendular sincrónico– adecuadas representaciones de las estructuras. La metáfora misma del motivo (musical, cohomológico) refrenda la idea de la existencia de *gérmenes escondidos de estructuración*, que un buen "oído" debería ser capaz de detectar. Los motivos se encontrarían ya presentes en la estructura dinámica de las formas, independientemente de sus posteriores descubridores, cuya labor consistiría esencialmente en crear los lenguajes adecuados, los marcos teórico/prácticos y las cajas de resonancia propicias para dejarlos *vibrar*. De esta manera, el pensamiento grothendieckiano ayuda también a superar la frágil y confusa dicotomía *realismo/idealismo* y la modula gracias a una *suave integración*, donde el Yo (allende "yos" particulares) y el Mundo (allende fragmentos atómicos) se funden en aleaciones duraderas. En medio de los extremos –escepticismo y fundamentalismo– del mundo contemporáneo, una justa escucha armónica de los complejos contrapunteos del entendimiento está a la orden del día.

Con la obra de Grothendieck –zaga metafísica a la *Moby-Dick*– estamos ante un nuevo *ars combinatorio*, donde se explica, en cuatro etapas precisas, la articulación de lo Uno y lo Múltiple, es decir, "la vida misma y el soplo" de la Matemática y del Universo: *(A)* estratificación incesante de la actividad cognoscitiva (corazón matemático); *(B)* ramificación de ambientes de interpretación (razón categórica); *(C)* deconstrucción recursiva ("*dévissage*") de los conceptos en juego, a lo largo de las múltiples jerarquías disponibles (funtorialización); *(D)* armazón de enlaces relacionales (diagramas de transferencias y obstrucciones) entre las deconstrucciones realizadas (hacificación y toposificación). En ese arte combinatorio, el espacio adquiere muy diversas formas variables, gobernadas por tensiones estéticas bien definidas, y, en medio de un *back-and-forth permanente*, surgen nuevos arquetipos (esquemas, topos, motivos, *stacks*, derivadores). Las inversiones *(i)-(iii)* recién descritas, los cubrimientos *(1)-(5)* y las estrategias *(A)-(D)*, resultados de *pensar a la manera de Grothendieck*, son solo algunos ejemplos de su prospección para el siglo XXI. Una vez comprendida a cabalidad su obra matemática y una vez entendida sin prejuicios su acción vital, la *extrapolación* de sus enseñanzas a la cultura modificará sin duda nuestro mundo. Confiemos en que su creatividad, su libertad, su honestidad y su entrega sean apreciadas por las nuevas generaciones.

Obras de Grothendieck

Grothendieck, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Providence: American Mathematical Society, 1955 [Tesis Doctoral, Nancy, 1953], **1949-53** (vid. págs. 4, 27-49, 53-56, 62, 63, 78-80, 104, 126, 135, 140, 148, 164, 174, 184, 204, 230, 242, 261, 299, 327, 345, 355, 370, 372, 377, 465, 474, 480, 481, 483, 487, 489, 495, 500, 510, 524, 534, 549, 559, 562, 564).

——— "Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires". En: *Annales de l'Institut Fourier* 4 (**1952a**), págs. 73-112 (vid. págs. 27, 28, 48, 49).

——— "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires". En: *Séminaire Bourbaki* 2 (**1952b**), págs. 193-200 (vid. págs. 27, 49).

——— "Sur certains espaces de fonctions holomorphes I". En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 192 (1953) (**1953a**), págs. 35-64 (vid. págs. 31, 173, 175, 176).

——— "Sur certains espaces de fonctions holomorphes II". En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 192 (1953) (**1953b**), págs. 77-95 (vid. págs. 31, 173, 175, 176).

——— "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques". En: *Bol Soc. Mat. São Paulo* 8 (1956) (**1953c**), 1-79 [Manuscrito, São Paulo, 1953] (vid. págs. 5, 33, 34, 37-41, 43-45, 48, 49, 51, 54, 56-79, 81-85, 88, 101, 102, 104, 117, 126, 140, 184, 230, 242, 299, 381, 440, 465, 474, 480, 481, 483, 487, 489, 500, 502, 503, 510, 524, 534, 549, 564).

Grothendieck, A. *Topological Vector Spaces*. New York: Gordon & Breach, 1973 [Seminario, São Paulo, 1953], **1953d** (vid. págs. 5, 50, 58).

——— "Sur quelques points d'algèbre homologique". En: *Tôhoku Math. J. (1957)* 9 (**1955-56**), págs. 119-221 (vid. págs. 5, 7, 35, 40, 43, 44, 56, 64, 66, 80, 82, 87, 89-91, 93, 94, 96-117, 124-126, 128, 134, 139, 140, 147, 162, 164, 183, 203, 209, 216, 223, 230, 235, 242, 245, 247, 269, 295, 299, 317, 320, 372, 381, 393, 440, 474, 479, 480, 483, 484, 487, 489, 492, 495, 498, 500, 502, 511, 534, 541, 548, 549, 559, 561, 562, 568).

——— "Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch". En: *SGA*. Vol. 6. Paris: IHES, **1955-57**, págs. 20-77 (vid. págs. 5, 40, 43, 44, 80, 101, 119, 120, 122, 125-130, 132, 134, 135, 139-142, 147, 148, 174, 223, 232, 240, 242, 299, 440, 465, 474, 477, 480, 483, 484, 487, 489, 492, 495, 498, 500, 502, 511, 522, 529, 531, 534, 546, 549, 556, 559, 563, 564).

——— *A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf*. Inf. téc. Lawrence: University of Kansas – NSF G1126, **1955** (vid. págs. 121, 136-139).

——— "Sur la classification des fibrés homolorphes sur la sphère de Riemann". En: *American Journal of Mathematics* 79 (1957) (**1955a**), págs. 121-138 (vid. págs. 121, 136, 173, 175, 176, 488).

——— *Fondements de la Géométrie Algébrique*. Paris: *Séminaire Bourbaki*, 1956-62 [8 exposiciones realizadas entre 1956 y 1962, con comentarios finales (1962)], **1956-62** (vid. págs. 172, 206, 228, 229, 231).

——— "Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents". En: *Séminaire Cartan ENS 1956/57* 9.2 (**1957**), págs. 1-16 (vid. págs. 121, 134, 135, 141, 553).

——— "The cohomology theory of abstract algebraic varieties". En: *Proceedings International Congress of Mathematicians (Edinburgh)*. Cambridge: Cambridge University Press, **1958**, págs. 103-118 (vid. págs. 6, 50, 54, 120, 147, 150, 151, 153-169, 171, 189, 201, 209, 211, 299, 429, 474, 477, 483, 487, 489, 512, 529, 537, 541, 549, 559).

——— “Techniques de construction en géométrie analytique”. En: *Séminaire Henri Cartan* 13 (**1961**). Exposés 7-17, Paris: Secrétariat Mathématique ENS (vid. págs. 173, 175, 177, 178, 180-192, 209, 237, 297, 474, 480, 487, 488, 512, 521, 524, 538, 541, 549, 559, 568).

——— “Motifs”. **1967** (vid. págs. 251, 254, 255, 268-271, 440, 465, 480, 494, 501, 521, 537, 544, 546, 547, 555, 563, 564, 568).

——— “Standard conjectures on algebraic cycles”. En: *Algebraic Geometry*, Oxford University Press (1969), **1968**, págs. 193-199 (vid. págs. 10, 120, 127, 167, 242, 251, 254, 258-263, 272, 480, 487, 489, 494, 502, 503, 513, 521, 524, 537, 550, 553, 559, 568).

——— *Esquisse thématique des principaux travaux mathématiques de A. Grothendieck*. Inf. téc. CNRS, **1972** (vid. págs. 173, 179, 220, 221, 238, 264, 342).

——— “La longue marche à travers la théorie de Galois”. **1981** (vid. págs. 12, 13, 42, 179, 189, 190, 192, 215, 243, 277, 284, 285, 289-303, 305-308, 316, 320, 323, 327, 331, 333, 334, 336, 338, 339, 355, 359, 364, 366, 464, 465, 477, 479, 480, 482, 484, 487-489, 495, 502, 514, 521, 522, 526, 527, 529, 531, 538, 541, 546-550, 553, 559, 562, 564, 567, 568).

——— “Récoltes et semailles”. **1983-86** (vid. págs. 3-6, 10, 12, 32, 36, 47, 49, 52, 55, 76, 85, 86, 88, 89, 108, 112, 121, 131, 134, 142, 148, 149, 154, 167, 169-171, 174, 188, 189, 196, 197, 202, 220, 221, 237, 239-242, 252-254, 256, 263, 265, 266, 277-279, 282-285, 306, 308-310, 315, 322, 331, 335, 343, 344, 361, 363, 364, 387-422, 427-430, 432, 462, 467, 479, 481, 483, 485-488, 500-502, 514, 515, 519, 523, 524, 527, 529, 531, 533, 538, 546, 551, 555, 556, 558, 563, 568).

——— “Pursuing Stacks”. **1983** (vid. págs. 12, 13, 215, 243, 249, 277, 294, 299, 307-310, 318-332, 336, 355, 364, 369, 383, 388, 389, 418, 477, 479, 480, 487, 489, 495, 498, 501, 515, 524, 531, 541, 546, 547, 550, 553, 555, 564, 567).

——— “Esquisse d’un programme”. **1984** (vid. págs. 12, 13, 171, 179, 189, 192, 215, 232, 243, 247, 277, 284, 285, 292, 295, 298, 299, 308-310, 317, 331, 333-336, 344-361, 363, 364, 389, 418, 477, 479, 480, 484, 487-489, 495, 501, 503, 514, 529, 541, 548-550, 556, 561, 563, 564, 567).

——— “La clef des songes ou dialogue avec le Bon Dieu”. **1987** (vid. págs. 12, 215, 240, 277, 281-283, 306, 322, 324, 331, 353, 361, 363, 364, 392, 399, 401, 431-434, 438-470, 479, 482-487, 500, 501, 515, 521, 522, 524, 527-529, 531, 536, 538, 541, 546, 552, 555, 556, 558, 562, 563, 565, 567, 568).

Grothendieck, A. "Les dérivateurs". **1991** (vid. págs. 12, 13, 42, 108, 117, 215, 243, 248, 266, 269, 277, 299, 307, 314, 317, 320, 321, 323, 327, 331, 336, 341, 363-367, 369-376, 378-385, 389, 465, 477, 479, 480, 482, 484, 487, 488, 495, 498, 501, 502, 515, 521, 526, 531, 538, 541, 546-548, 550, 552, 555, 559, 563, 564, 567).

——— "Archives Grothendieck". Université de Montpellier. **IMAG**. URL: https://grothendieck.umontpellier.fr/ (vid. págs. 20, 136, 141, 193, 208, 221, 251, 272, 302-304, 309, 311, 312, 314, 315, 317, 318, 323, 324, 330, 334, 347, 349, 350, 364, 366, 367, 376, 377).

Grothendieck, A. y J. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algébrique*. IV vols., 7 partes. Paris: IHES, 1960-66 [Manuscritos realizados entre 1959 y 1964], **1959-64** (vid. págs. 7, 42, 46, 47, 50, 54, 126, 147, 153, 156, 158, 159, 161, 167, 168, 170, 171, 175, 181, 184, 189, 195-198, 200-204, 206-211, 214-217, 220, 221, 223, 229, 230, 232, 252, 299, 316, 324, 393, 410, 420, 439, 465, 476, 477, 480, 482, 483, 487, 488, 492, 501, 502, 512, 521, 523, 526, 527, 541, 544, 548, 549, 555, 559, 564, 568).

Grothendieck, A. y otros. *Séminaire de Géométrie Algébrique*. 7 vols., 12 tomos. Paris: IHES, **1960-69** (vid. págs. 7, 37, 47, 50, 54, 85, 108, 113, 126, 138, 147, 156, 167, 171, 175, 189, 195, 208-210, 213-215, 217, 219-221, 223-238, 242-252, 259, 263, 299, 316, 320, 355, 393, 416, 440, 465, 476, 477, 479, 480, 483, 484, 487, 488, 493, 501-503, 512, 513, 521-523, 526, 527, 538, 540, 541, 543, 544, 546-548, 550, 552, 553, 555, 556, 559, 562-565, 568).

Grothendieck, A. y J.-P. Serre. *Grothendieck-Serre Correspondence*. Providence / Paris: American Mathematical Society, Société Mathématique de France, 2004 [Cartas entre 1955 y 1987], **1955-87** (vid. págs. 89, 90, 120, 126, 140-142, 278, 316).

Bibliografía secundaria

Alunni, C. *Spectres de Bachelard*. Paris: Hermann, 2018 (vid. pág. 561).

Arasse, D. *Anselm Kiefer*. Paris: Les Editions du Regard, 2001 (vid. págs. 554, 556).

Arnheim, R. *Guernica. Genesi di un dipinto (1962)*. Milano: Abscondita, 2005 (vid. pág. 551).

Artin, M. y col. "Alexandre Grothendieck 1928-2014, Part 1". En: *Notices of the AMS* 63.3 (2016), págs. 242-255 (vid. págs. 121, 196, 198).

——— "Alexandre Grothendieck 1928-2014, Part 2". En: *Notices of the AMS* 63.4 (2016), págs. 401-413 (vid. pág. 283).

Atiyah, M. *K-theory Past and Present*. URL: arXiv:math/0012213v1 (vid. pág. 131).

Atl, D. *Cómo nace y crece un volcán. El Paricutín*. México: Editorial Stylo, 1950 (vid. págs. 50, 482, 483).

Bachelard, G. *La philosophie du non*. Paris: PUF, 1940 (vid. págs. 299, 381).

Badiou, A. *Logiques des mondes*. Paris: Seuil, 2006 (vid. pág. 573).

Baer, R. "Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group". En: *Bulletin Amer. Math. Soc.* 46 (1940), págs. 800-806 (vid. pág. 114).

Bajtín, M. *Problemas de la poética de Dostoievski (1929)*. México: Fondo de Cultura Económica, 1986 (vid. pág. 415).

——— "El problema del contenido, el material y la forma en la creación literaria (1924)". En: *Teoría y estética de la novela*. Madrid: Taurus, 1991 (vid. pág. 489).

Baldine, A. *Le prolongement du point. Voyages littéraires.* Lagrasse: Verdier, 2015 (vid. pág. 518).

Bélanger, M. "Grothendieck et les topos : rupture et continuité dans les modes d'analyse du concept d'espace topologique". Tesis doct. Université de Montréal, 2010 (vid. págs. 243, 246-248).

Benjamin, W. *Obra de los pasajes (2 vols.)* Madrid: Abada Editores, 2013-2015 (vid. pág. 63).

——— *Obras, Libro VI, Fragmentos de contenido misceláneo.* Madrid: Abada Editores, 2017 (vid. pág. 521).

Bizony, P., ed. *The Making of Stanley Kubrick's 2001: A Space Odissey.* Köln: Taschen, 2015 (vid. pág. 563).

Borel, A. y J.-P. Serre. "Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck)". En: *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958), págs. 97-136 (vid. págs. 121, 139).

Bosch, C. y C. García. "Alexandre Grothendieck: de la luz a la sombra". En: *Miscelanea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana* 62 (2016), págs. 45-61 (vid. pág. 553).

Bouvard, É. y G. Mercier. *Guernica.* Paris: Gallimard - Musée Picasso, 2018 (vid. pág. 551).

Bringuier, G. *Alexandre Grothendieck. Itinéraire d'un mathématicien hors normes.* Toulouse: Privat, 2015 (vid. págs. 27, 58, 125, 142, 148, 196-198, 279, 280, 334, 389).

Brown, R. *The origins of Alexander Grothendieck's Pursuing stacks.* URL: http://groupoids.org.uk/pstacks.html (vid. pág. 309).

Caicedo, X. "Lógica de los haces de estructuras". En: *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 19.74 (1995), págs. 569-586 (vid. págs. 245, 506).

Caramello, O. *Theories, Sites, Toposes.* Oxford: Oxford University Press, 2017 (vid. pág. 501).

Cartan, H. y S. Eilenberg. *Homological Algebra.* Princeton: Princeton University Press, 1956 (vid. pág. 114).

Cartier, P. "Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les "motifs")". En: *IHES/M/00/75* (2000), págs. 2-33 (vid. pág. 196).

——— "A country of which nothing is known but the name: Grothendieck and "motives"". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 269-298 (vid. págs. 266, 267).

Cassou-Noguès, P. *Les démons de Gödel. Logique et folie*. Paris: Seuil, 2007 (vid. pág. 420).

Castle, A., ed. *The Stanley Kubrick Archives*. Köln: Taschen, 2005 (vid. pág. 563).

Chai, C.-L. y F. Oort. *Life and work of Alexander Grothendieck*. URL: https://www.math.upenn.edu/~chai/papers_pdf/ChaiFO-AG-final_v1.pdf (vid. pág. 496).

Cineteca-Nacional. *Stanley Kubrick. La Exposición - México*. México: Cineteca Nacional, 2016 (vid. pág. 563).

Cisinski, D.-C. "Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles". En: *Annales mathématiques Blaise Pascal* 10.2 (2003), págs. 195-244 (vid. págs. 370, 380, 383).

Cohn, D. *Anselm Kiefer. Ateliers*. Paris: Les Editions du Regard, 2012 (vid. pág. 554).

Connes, A. y C. Consani. *The Arithmetic Site*. 2014 (vid. págs. 242, 265).

De Azevedo, A. "Grothendieck no Brasil". En: *Matemática Universitaria* 44 (2008), págs. 39-42 (vid. pág. 58).

De Humboldt, A. *Volcans des cordillères de Quito et du Mexique*. Paris: Théodore Morgand éditeur, 1864 (vid. pág. 528).

De Lorenzo, J. *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos, 1971 (vid. pág. 492).

——— *La matemática y el problema de su historia*. Madrid: Tecnos, 1977 (vid. pág. 492).

Debray, C. *Nymphéas. L'abstraction américaine et le dernier Monet*. Paris: Musée de l'Orangerie, 2018 (vid. pág. 550).

Delesalle-Nancey, C. *La Divine comédie ivre. Répétition, ressassement et reprise dans l'oeuvre en prose de Malcolm Lowry*. Paris: Michel Houdiard éditeur, 2010 (vid. pág. 527).

Deleuze, G. *Différence et répétition*. París: PUF, 1968 (vid. pág. 382).

——— *Cinéma 2. L'Image-temps*. Paris: Les Éditions de Minuit, 1985 (vid. pág. 565).

Di Cesare, D. "Il deserto dentro: le ragioni della «grande svolta»". En: *Matematica ribelle. Le due vite di Alexander Grothendieck*. Ed. por G. Giorello. Corriere della Sera, 2014, págs. 63-79 (vid. pág. 279).

Diestel, J. "Grothendieck and Banach space theory". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 1-12 (vid. págs. 74, 84).

Diestel, J., J. H. Fourie y J. Swart. *The Metric Theory of Tensor Products. Grothendieck's Résumé Revisited*. Providence: American Mathematical Society, 2000 (vid. pág. 81).

Dieudonné, J. *Cours de géométrie algébrique*. Paris: PUF, 1974 (vid. págs. 203, 212-214).

——— "De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique". En: *The Grothendieck Festschrift*. Vol. 1. Basel: Birkhäuser, 1990, págs. 1-14 (vid. págs. 104, 169, 222, 223).

Douroux, P. *Alexandre Grothendieck. Sur les traces du dernier génie des mathématiques*. Mayenne: Allary Éditions, 2016 (vid. págs. 58, 149, 196, 279, 280, 364).

Dumoncel, J.-C. *La Mathesis de Marcel Proust*. Paris: Classiques Garnier, 2015 (vid. pág. 523).

Eseverri, M., ed. *Raab/Visconti. La tierra tiembla*. Buenos Aires: Eudeba, 2011 (vid. págs. 557-559).

Florenski, P. *Il significato dell'idealismo (1914)*. Ed. por N. Valentini. Milano: SE SRL, 2012 (vid. pág. 545).

Florenskij, P. *La prospettiva rovesciata (1919) e altri scritti*. Ed. por N. Misler. Roma: Casa del Libro, 1983 (vid. pág. 568).

Fonseca, C. *Coronel Lágrimas*. Barcelona: Anagrama, 2015 (vid. págs. 530-532).

Fu, L. *Etale Cohomology Theory*. Singapore: World Scientific, 2011 (vid. pág. 235).

Gattei, S. "Ricerca e pacifismo: Einstein, Pauling, Grothendieck". En: *Matematica ribelle. Le due vite di Alexander Grothendieck*. Ed. por G. Giorello. Corriere della Sera, 2014, págs. 103-128 (vid. pág. 280).

Georgel, P. *Les dessins de Victor Hugo pour Les travailleurs de la mer*. Paris: Herscher, 1985 (vid. pág. 175).

Giraud, J. “Une entrevue avec Jean Giraud, à propos d’Alexandre Grothendieck (propos recueillis par Eric Dumas)”. En: *Le journal de maths* 1.1 (1994), págs. 63-65 (vid. pág. 221).

Girondo, E. y G. González-Diez. *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d’Enfants*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012 (vid. págs. 358, 360).

Gödel, K. “Ontological Proof (1970)”. En: *Collected Works*. Ed. por S. Feferman. Vol. III. Oxford: Oxford University Press, 1995, págs. 403-404 (vid. pág. 440).

Godement, R. *Théorie des faisceaux*. Paris: Hermann, 1958 (vid. pág. 508).

Goyes, J. C. *La mirada espejeante. Análisis textual del film El espejo de Andréi Tarkovski*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2016 (vid. pág. 566).

Grothendieck, A. “Geométrie Formelle et Géometrie Algébrique”. En: *Séminaire Bourbaki* 182 (1959), págs. 193-220 (vid. pág. 228).

——— “Technique de descente et théorèmes d’existence en Géométrie Algébrique”. En: *Séminaire Bourbaki* 195 (1960), págs. 369-390 (vid. pág. 231).

Heine, H. *La mer du Nord*. Paris: La Délirante, 2006 (vid. págs. 485, 486).

Hernández, F. *Narrativa completa*. Buenos Aires: El cuenco de plata - Fundación Felisberto Hernández, 2015 (vid. pág. 530).

Herreman, A. *Découvrir et transmettre. Une analyse de la dimension collective des mathématiques dans Récoltes et semailles*. http://decouvrir-transmettre.alainherreman.fr, Prépublications IHES, 1999 (vid. págs. 388, 398, 573).

Hilbert, D. “On the infinite (1925)”. En: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Ed. por J. van Heijenoort. Harvard University Press, 1967, págs. 367-392 (vid. págs. 67, 413).

Hirzebruch, F. *Topological Methods in Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1956 (vid. pág. 126).

Hugo, V. *Les travailleurs de la mer (1865-66)*. Vol. Oeuvres Complètes, XII. Paris: Club Français du Livre, 1969 (vid. págs. 175, 239).

Illusie, L. “Reminiscences of Grothendieck and his school”. En: *Notices of the AMS* 57.9 (2010), págs. 1106-1115 (vid. págs. 221, 222, 533).

——— “Grothendieck et la cohomologie *étale*”. En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 175-192 (vid. págs. 234, 236-238).

Imagoshi, Y. y M. Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Tokyo: Springer-Verlag, 1992 (vid. págs. 179, 347).

Jackson, A. “*Comme Appelé du Néant*. As if Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck”. En: *Notices AMS* 51.4,10 (2004), págs. 1038-1056, 1196-1212 (vid. págs. 148, 149, 174, 197, 221-223, 278).

Jones, G. y J. Wolfart. *Dessins d’Enfants on Riemann Surfaces*. New York: Springer, 2016 (vid. pág. 360).

Kaourova, A. y Eugène, eds. *Phénomène Stalker*. Lausanne: L’Age d’Homme, 2015 (vid. pág. 566).

Karoubi, M. “Rapport sur la K-théorie (1956-1997)”. En: *Development of Mathematics 1950-2000*. Ed. por J.-P. Pier. Birkhäuser, 2000, págs. 635-653 (vid. págs. 128, 142).

——— “L’influence d’Alexandre Grothendieck en K-théorie”. En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 13-23 (vid. pág. 133).

Kiefer, A. *Velimir Chlebnikov and the Sea*. Ridgefield: Derneburg, 2006 (vid. pág. 556).

Krömer, R. *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory*. Basel: Birkhäuser, 2007 (vid. págs. 90, 98, 100, 105, 114).

Lambert, P. *The Music of Charles Ives*. New Haven: Yale University Press, 1997 (vid. págs. 539-541).

Lautman, A. *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011 (vid. págs. 134, 157).

Lawvere, F. W. “Some thoughts on the future of Category Theory”. En: *Proceedings of the Como Meeeting on Category Theory*. New York: Springer, 1991, págs. 1-13 (vid. pág. 202).

Lawvere, F. W. “Alexander Grothendieck and the Concept of Space”, 2015. URL: www.acsu.buffalo.edu/~wlawvere/GrothendiekAveiro15.htm (vid. págs. 76, 250).

Llano, R. *Andréi Tarkovski. Vida y obra (2 vols.)* Valencia: Generalitat Valenciana - Ediciones de la Filmoteca, 2002 (vid. pág. 566).

Lochak, P. *Mathématiques et finitude*. Paris: Kimé, 2015 (vid. págs. 501, 573).

Lonchampt, J. *Les quatuors de Beethoven*. Paris: Fayard, 1987 (vid. pág. 533).

Lowry, M. *Bajo el volcán*. México: ERA, 1964 (vid. págs. 527-529).

——— *The bravest boat*. Montpellier: L’arachnoïde, 2013 (vid. pág. 529).

Lurie, J. *Higher Topos Theory*. Princeton: Princeton University Press, 2009 (vid. pág. 332).

Mahler, A. *Gustav Mahler. Recuerdos y cartas*. Madrid: Taurus, 1978 (vid. págs. 536, 537).

Maltsiniotis, G. *Infini groupoïdes d’après Grothendieck*. Preprint. URL: https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/ps/infgrart.pdf (vid. pág. 324).

——— *Introduction à la théorie des dérivateurs, d’après Grothendieck*. Preprint. URL: https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/groth/Derivateurs.html (vid. págs. 369, 372).

——— *La théorie de l’homotopie de Grothendieck*. Astérisque 301. Paris: Société Mathématique de France, 2005 (vid. págs. 323, 325).

Manin, Y. I. “Correspondences, motives and monoidal transformations”. En: *Math USSR-Sb.* 6 (1968), págs. 439-470 (vid. pág. 267).

——— “Forgotten motives: the varieties of scientific experience”. En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 299-307 (vid. págs. 253, 267-269, 273).

Marquis, J.-P. *From a Geometrical Point of View. A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. New York: Springer, 2009 (vid. pág. 100).

Mazza, C., V. Voevodsky y C. Weibel. *Lecture Notes on Motivic Cohomology*. Vol. 2. Clay Mathematics Monographs. Providence: American Mathematical Society, 2006 (vid. pág. 273).

Mazzola, G. *La vérité du beau dans la musique. Quatre leçons à l'École normale supérieure*. Paris: Delatour – Ircam, 2007 (vid. pág. 544).

Mazzola, G. y otros. *The Topos of Music*. Basel: Birkhäuser, 2002 (vid. págs. 535, 542-544).

McGuire, R. *Here*. New York: Pantheon Books, 2014 (vid. pág. 518).

McLarty, C. "How Grothendieck Simplified Algebraic Geometry". En: *Notices AMS* 63.3 (2016), págs. 256-265 (vid. pág. 205).

Melville, H. *Moby-Dick, or The Whale (1849-51)*. Ed. por H. Hayford, H. Parker y G. T. Tanselle. Evanston y Chicago: Northwestern University Press, 1988 (vid. págs. 265, 520, 522).

Mengs, A. *Stalker de Andrei Tarkovski*. Madrid: RIALP, 2004 (vid. pág. 566).

Merleau-Ponty, M. *Le visible et l'invisible*. Paris: Gallimard, 1964 (reed. Folio 2004) (vid. pág. 80).

——— *L'Oeil et l'Esprit*. Paris: Gallimard, 1964 (reed. Folio 2004) (vid. págs. 80, 81).

Messing, W. "Alexandre Grothendieck 1928-2014, Part 2". En: *Notices AMS* 63.4 (2016), págs. 405-407 (vid. pág. 252).

Milly, J. *La phrase de Proust*. Paris: Champion, 1983 (vid. pág. 524).

Mochizuki, S. "The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields". En: *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 3 (1996), págs. 571-627 (vid. pág. 300).

——— *Inter-universal Teichmüller Theory I-IV*. Inf. téc. Kyoto University, 2011-2012 (vid. pág. 300).

Moerdijk, I. y G. Reyes. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. New York: Springer, 1991 (vid. pág. 157).

Montefiori, S. "Profugo, luminare, eremita: una vita tra scienza e anarchia". En: *Matematica ribelle. Le due vite di Alexander Grothendieck*. Ed. por G. Giorello. Corriere della Sera, 2014, págs. 29-48 (vid. pág. 280).

Mumford, D. "My introduction to schemes and functors". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 75-81 (vid. pág. 206).

Murre, J. “On Grothendieck’s work on the fundamental group”. En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 143-167 (vid. págs. 228, 231, 233).

——— “Remembering Grothendieck (Interview with Ulf Persson)”. En: *Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW)* 5/17.1 (2016), págs. 58-62 (vid. págs. 221, 222).

Nowell-Smith, G. *L’Avventura*. London: British Film Institute, 1997 (vid. pág. 560).

Oort, F. “Did earlier thoughts inspire Grothendieck?” En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 231-268 (vid. pág. 496).

Ortiz, F. *Contrapunteo cubano del tabaco y el azúcar (1940)*. Caracas: Biblioteca Ayacucho, 1978 (vid. pág. 481).

Patras, F. *La pensée mathématique contemporaine*. Paris: PUF, 2001 (vid. pág. 573).

Pelczynski, A. “Structural theory of Banach Spaces and its interplay with analysis and probability”. En: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warszawa)*. 1983, págs. 237-269 (vid. pág. 78).

Petitot, J. *Elements of Neurogeometry. Functional Architectures of Vision*. New York: Springer, 2017 (2008, ed. francesa) (vid. págs. 460, 561).

Picasso, P. *Guernica. Vol. 1 (reproducción del cuadro a su tamaño). Vol. 2 (cronología y documentación)*. Poesía. Revista ilustrada de información poética, 39-40. Madrid: Ministerio de Cultura, 1993 (vid. págs. 552, 553).

Pisier, G. “Grothendieck’s theorem, past and present”. En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (2012), págs. 237-323 (vid. pág. 75).

Plessis, C. *Survivre et vivre. Critique de la science, naissance de l’idéologie*. Montreuil: Éditions l’Échapée, 2014 (vid. págs. 281, 282).

Poincaré, H. *L’invention mathématique*. Paris: Institut Général Psychologique, 1908 (vid. págs. 395, 419, 421).

Pradeau, Y. *Algèbre. Éléments de la vie d'Alexandre Grothendieck*. Paris: Éditions Allia, 2016 (vid. págs. 58, 125, 148-150, 279, 280).

Proust, M. *À la recherche du temps perdu (4 vols.)* Paris: Gallimard, Pléiade, 1987 (vid. págs. 522, 523, 525, 526).

——— *Du côté de chez Swann. Combray. Premières épreuves corrigées 1913.* Paris: Gallimard, 2013 (vid. pág. 525).

Rathert, W. "Paysage imaginaire et perception totale – l'idée et la forme de la symphonie *Universe*". En: *Contrechamps* 7 (1986), págs. 129-154 (vid. págs. 539, 540).

Raynaud, M. "Grothendieck et la théorie des schémas". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait*. Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 25-34 (vid. págs. 206, 207).

Reyes, A. *La constelación americana (1936).* México: Archivo de Alfonso Reyes – Serie D, Número 3, 1950 (vid. pág. 530).

Samuel, P. "Les fonctions holomorphes abstraites de Zariski". En: *Séminaire N. Bourbaki* 86 (1953), págs. 335-343 (vid. pág. 156).

Scharlau, W. "Who is Alexander Grothendieck? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude. A Biography. Part 3: Spirituality." 2010 (vid. págs. 197, 279-281, 283, 308, 334, 365, 366, 389).

——— *Who is Alexander Grothendieck? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude. A Biography. Part 1: Anarchy.* Norderstedt: Herstellung und Verlag, 2011 (vid. págs. 27, 28, 33, 36, 47, 58, 142, 533, 551).

Schneps, L. *Grothendieck – Mathematics*. Preprint. URL: https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Mathematics/chap3.pdf (vid. págs. 28, 33, 50, 51).

——— *Grothendieck – Mathematics*. Preprint. URL: https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Mathematics/chap4.pdf (vid. págs. 58, 59, 88, 89, 125).

——— ed. *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants.* Cambridge: Cambridge University Press, 1994 (vid. pág. 360).

——— "Grothendieck's «Long March through Galois Theory»". En: *Geometric Galois Actions. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme.* London: Cambridge University Press, 1997, págs. 59-66 (vid. págs. 285, 293, 296, 298, 301).

——— "The Grothendieck-Teichmüller group $\widehat{GT}$: a survey". En: *Geometric Galois Actions. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme.* London: Cambridge University Press, 1997, págs. 183-203 (vid. pág. 346).

——— ed. *Alexander Gothendieck: A Mathematical Portrait.* Boston: International Press, 2014 (vid. pág. 573).

Schneps, L. y P. Lochak, eds. *Geometric Galois Actions. I. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997 (vid. págs. 334, 335).

Serre, J.-P. "Faisceaux algébriques cohérents". En: *The Annals of Mathematics* 61.2 (1955), págs. 197-278 (vid. págs. 109, 126, 134, 150, 209, 241).

——— "Géométrie algébrique et géométrie analytique". En: *Ann. Inst. Fourier* 6.1 (1956), págs. 1-42 (vid. págs. 175, 185).

——— "Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p". En: *Symp. Int. Top. Alg.* Mexico, 1958, págs. 24-53 (vid. pág. 155).

——— "Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck (1965)". En: *K-Theory* 3 (1989), págs. 199-204 (vid. págs. 200, 201, 223).

Serres, M. *Atlas.* Madrid: Cátedra, 1995 (vid. pág. 167).

Simpson, C. "Descent". En: *Alexandre Grothendieck. A Mathematical Portrait.* Ed. por L. Schneps. Boston: International Press, 2014, págs. 83-141 (vid. pág. 322).

Sorlin, P. *L'Avventura. Michelangelo Antonioni.* Lyon: Aléas Cinéma, 2010 (vid. pág. 560).

Soulé, C. "The Work of Vladimir Voevodsky". En: *Fields Medallists' Lectures.* Ed. por M. Atiyah y D. Iagolnitzer. New Jersey: World Scientific, 2003, págs. 769-772 (vid. pág. 273).

Stuckey, C. F. *Monet, Nymphéas.* Paris: Herscher, 1989 (vid. págs. 549, 550).

Suslin, A. y V. Voevodsky. "Singular homology of abstract algebraic varieties". En: *Inv. Math.* 123 (1996), págs. 61-94 (vid. pág. 273).

Szamuely, T. *Galois Groups and Fundamental Groups.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009 (vid. pág. 228).

Tarkovski, A. *Journal 1970-1986.* Paris: Cahiers du cinéma, 2004 (vid. págs. 566-568).

——— *Le temps scellé (1985).* Paris: Cahiers du cinéma, 2004 (vid. pág. 566).

Teissier, B. "Tame and Stratified Objects". En: *Geometric Galois Actions. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme.* London: Cambridge University Press, 1997, págs. 231-242 (vid. pág. 352).

Toulouse, D. *Henri Poincaré. Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle.* Paris: Flammarion, 1910 (vid. pág. 332).

Tranströmer, T. *La fúnebre góndola.* México: UNAM, 2012 (vid. pág. 486).

Turner, J. M. W. *The Paintings.* Ed. por M. Butlin y E. Joll. New Haven: Yale University Press, 1984 (vid. págs. 545-547).

Verdier, J.-L. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes (1967).* Vol. Astérisque 239. Paris: Société Mathématique de France, 1996 (vid. pág. 269).

Vitella, F. *Michelangelo Antonioni. L'Avventura.* Torino: Lindau, 2010 (vid. pág. 560).

Voevodsky, V. "The $\mathbf{A}^1$-homotopy theory". En: *Proc. Int. Congr. Math.* Vol. 1. Berlin, 1998, págs. 579-604 (vid. pág. 273).

Voevodsky, V. y otros. *Homotopy Type Theory. Univalent Foundations of Mathematics.* Princeton: Institute for Advanced Study, 2013 (vid. pág. 327).

Weil, A. "Numbers of solutions of equations in finite fields". En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), págs. 497-508 (vid. pág. 154).

——— "Abstract versus classical algebraic geometry". En: *Proc. Int. Cong. Math. Amsterdam.* 1954, págs. 550-558 (vid. pág. 151).

Weil, S. *Poemas*. Madrid: Trotta, 2006 (vid. pág. 484).

Zalamea, F. *El continuo peirceano: aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad. Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2001 (vid. pág. 83).

——— "Javier de Lorenzo: por una filosofia dinámica de la praxis matemática". En: *Mathesis* 2.1 (2007), págs. 1-35 (vid. pág. 492).

——— *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2009 (vid. págs. 166, 191, 573).

——— "Faneroscopia, filosofía natural y literatura. «La Esfinge» en Peirce, Emerson, Poe y Melville". En: *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 1 (2009), págs. 33-52 (vid. pág. 500).

——— *Pasajes de Proteo. Residuos, límites y paisajes en el ensayo, la narrativa y el arte latinoamericanos*. México: Siglo XXI, 2012 (vid. pág. 518).

——— *Peirce's Logic of Continuity*. Boston: Docent Press, 2012 (vid. págs. 129, 143).

——— *Antinomias de la creación. Las fuentes contradictorias de la invención en Valéry, Warburg, Florenski*. Santiago de Chile: Fondo de Cultura Económica, 2013 (vid. págs. 450, 468, 518, 568).

——— ed. *Grothendieck. Visiones sobre la multiplicidad de su obra*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2017 (vid. pág. 573).

——— "Modelos en haces para el pensamiento matemático. De Galois a Connes. 1830-2020". En proceso. 2019 (vid. pág. 508).

Zurcher, F. y E. Margollé. *Volcanes y terremotos (ilustraciones de Driou)*. Barcelona: Cortezo, 1885 (vid. págs. 481, 482).

Índice onomástico

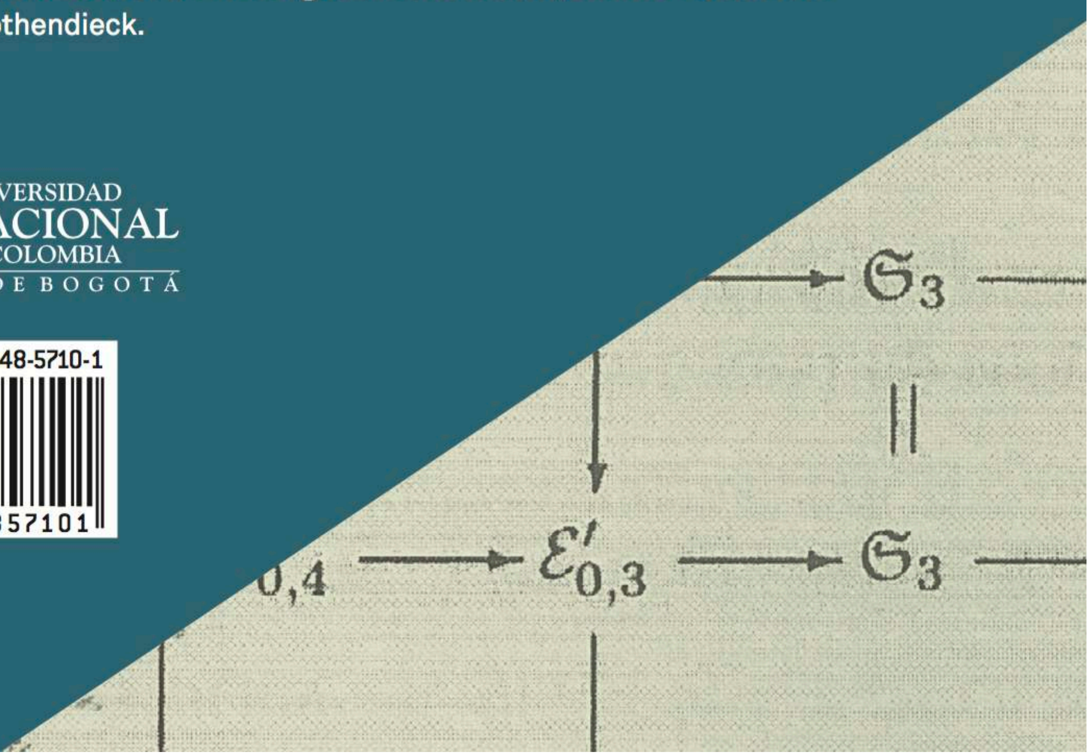
Índice analítico

ALEXANDER GROTHENDIECK

(1928-2014)

Debe ser considerado sin duda, junto a Hilbert, como uno de los dos matemáticos mayores del siglo XX. La amplitud (análisis funcional, geometría algebraica, teoría de categorías, homología, teoría de números, álgebra topológica) y la profundidad (espacios nucleares, K-teoría, categorías abelianas, esquemas, topos, motivos, stacks, derivadores) de su visión la convierten en referencia ineludible para el desarrollo de la matemática en el siglo XXI.

Esta monografía ofrece, por vez primera en el ámbito internacional, una visión de conjunto de sus trabajos matemáticos y filosóficos, publicados o distribuidos, a lo largo de sus tres décadas principales de producción (1949-1957, 1958-1970, 1981-1991). Se trata de una guía que consta de tres partes centrales, dedicadas a pormenorizadas descripciones analíticas de sus libros, artículos y manuscritos, así como de una cuarta parte adicional, donde se ofrecen algunas perspectivas sintéticas sobre la totalidad de la obra. Este volumen resume 15 años de investigaciones del autor (2004-2019) sobre la figura de Grothendieck.



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

ISBN: 978-958-48-5710-1

9 789584 857101