УДК 681.3
Ватутин Э.И.[1], Титов В.С.[1], Пыхтин А.И.[1], Крипачев А.В.[1], Никитина Н.Н.[2], Манзюк М.О.[3], Альбертьян А.М.[4], Курочкин И.И.[5]
evatutin@rambler.ru
[1] Юго-Западный государственный университет, Курск
[2] Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск
[3] Интернет-портал BOINC.ru, Москва
[4] ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва
[5] Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АППРОКСИМАЦИЙ СПЕКТРОВ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

В работе предложен эвристический метод построения аппроксимаций спектров числовых характеристик диагональных латинских квадратов, основанный на построении окрестностей для квадратов заданного опорного спектра. Приведены результаты вычислительных экспериментов (мощности спектров), полученные в результате его практической апробации с использованием проектов добровольных распределенных вычислений.

Латинские квадраты (ЛК) представляют собой достаточно известный тип комбинаторных объектов, исследованию свойств которых посвящено достаточно большое количество работ [1]. Диагональные латинские квадраты (ДЛК) представляют собой известный и достаточно распространенный специальный вид ЛК с дополнительным ограничением в виде запрета на наличие совпадающих значений на главной и побочной диагоналях квадрата. Для ЛК и ДЛК может быть определен ряд числовых характеристик, к которым относятся число ортогональных квадратов (ОЛК или ОДЛК соответственно), чисто трансверсалей, число диагональных трансверсалей, чисто интеркалятов, циклов и пр. Возможные значения выбранной числовой характеристики образуют спектр S, представляющий собой множество значений числовой характеристики $v(L_i)$ и подтверждающие их ДЛК L_i, для которых они были вычислены. Например, спектр числа трансверсалей в ДЛК порядка 7 приведен в табл. 1, а его графическое представление представлено на рис. 1 (файл с соответствующим подтверждающим списком доступен онлайн[1]).

---
[1] http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_transversals_n7_32_items.txt

Таблица 1. Спектр числа трансверсалей в ДЛК порядка 7 (значения элементов квадрата выписаны в строчку слева направо сверху вниз)

Значение	Подтверждающий ДЛК
7	0435261214630536205145013642156243062041534351026
11	0435261214630536205141503642536142062140534052136
12	0235641615420343215605603124106243534160522540316
13	0435261214630536205146513042536142012046534052136
14	0345261213460564205135603142156243032160544051326
15	0435261514630236205142013645156243062041534351026
16	0245361315460243265105603124106243564102532531046
17	0235641314620516205344503162506142364123502354016
18	0352641513620434215602643015156043262041534015326
19	0435261214630560245135603142156243032106544351026
20	0352641214630536245105413062106542362301544501236
21	0345261213460564205135613042356142012063544052136
22	0354261213560464205135613042106243532461504501326
23	0356241213560434215605643012106243562041534510326
24	0354261213560434265105613042106243562401534501326
25	0345261213460564215305613042156042332061544052316
26	0435261215630460245135603142136042532416504512036
27	0345261213460564215305603142156042332160544052316
28	0345261213460534265105613042156042362013544052136
29	0345621513620436215402403165156043262140534052316
30	0354261213560414265305613042306241562401534501326
31	0356241314560216245302403165506241362310544510326
32	0345621315620416205432403165506143262143504532016
33	0354261213560414265305603142306241562410534510326
34	0354261213560434265105603142106243562410534510326
37	0234561415062335260142643105106543264123505301246
41	0345261213460516205436453120506143232160544502316
43	0354261214560314265305603142306241562103544531026
45	0235641315620440215631643025536241064103522504136
47	0345261215630436215405403612106243562140534530126
55	0354261214560314265305613042306241562013544530126
133	0245361610452315260344653102236041534126505031246

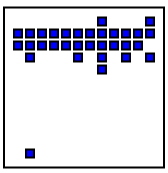

Рис. 1. Графическое представление спектра числа трансверсалей в ДЛК порядка 7

Приведенный в качестве примера спектр характеризуется мощностью $|S| = 32$, шириной $w(S) = \sup S - \inf S + 1 = 133 - 7 + 1 = 127$, а также минимальным $\inf S = 7$ и максимальным $\sup S = 133$ значениями. Все указанные числовые величины образуют числовые ряды, представляющие фундаментальный интерес и коллекционируемые в рамках Онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. Online encyclopedia of integer sequences, сокр. OEIS) [2]. Для приведенного примера числовые ряды имеют номера A287644, A287645 и A344105 (числовые ряды, соответствующие ширинам спектров, планируются к добавлению в OEIS по мере подтверждения текущих правок).

Спектры малых порядков ДЛК $(N \leq 7)$ в настоящее время известны [3], они были определены с использованием соответствующего полнопереборного генератора нормализованных ДЛК с последующей постобработкой формируемых им ДЛК на предмет расчета значений числовых характеристик для всех ДЛК и добавления их в спектр. Для порядка $N = 8$ аналогичный вычислительный эксперимент потребовал бы существенных затрат вычислительного времени ввиду чего вместо обработки всех ДЛК данной размерности был использован генератор канонических форм (КФ) ДЛК в сильно нормализованном виде и построение спектра по ним, что существенно (приблизительно на 3 порядка) снизило необходимые вычислительные затраты. Для порядка $N = 9$ аналогичный вычислительный эксперимент в настоящее время выполняется в проекте добровольных распределенных вычислений RakeSearch[2] на платформе BOINC [4], за 2 месяца расчетов обработаны 12 линеек из 20.

Для порядков $N \geq 10$ построение полных спектров невозможно ввиду необходимости анализа огромного количества ДЛК ввиду чего целесообразно ограничиться аппроксимациями спектров и соответствующими им нижними и верхними ограничениями на соответствующие члены числовых рядов в OEIS [5]. Для этого прежде всего необходимо получить опорный спектр S_0 с использованием одного из возможных источников (расчет числовых характеристик для одного из генераторов ДЛК, какой-либо коллекции ДЛК или какого-либо спектра, построенного для другой числовой характеристики). В качестве генераторов исходных ДЛК могут быть использованы случайные, симметричные в плоскости, дважды симметричные, центрально-симметричные, обобщенно-симметричные, частично симметричные, циклические, пандиагональные ДЛК, квадраты Гергели, ОДЛК и пр. Как правило подобные спектры обладают малой мощностью и в графическом виде представляют собой компактную полоску в одной из областей спектра.

Далее данный опорный спектр необходимо подвергнуть процедуре расширения, в рамках которой для каждого из квадратов L_i, $i = \overline{1, |S|}$ в

[2] https://rake.boincfast.ru/rakesearch/

составе спектра S мощностью $|S|$ необходимо произвести построение окрестности $\alpha(L_i)$, для каждого квадрата $L_j \in \alpha(L_i)$, $j = \overline{1, |\alpha(L_i)|}$ в ее составе определить значение числовой характеристики $v(L_j)$, новые значения добавить в формируемый спектр и повторить для соответствующих им квадратов L_j описанную выше процедуру. Окрестности $\alpha(L_i)$ могут быть получены путем замены (поворота) одного из структурных элементов заданного квадрата L_i – интеркалятов, частичных циклов или латинских подпрямоугольников [6] (наибольшую эффективность в рассматриваемой задаче демонстрируют первые два способа построения окрестностей, повороту подвергаются по одному интеркаляту и короткому циклу соответственно).

Данную процедуру можно применять для заданного опорного спектра целиком либо для входящих в его состав квадратов по отдельности (поквадратно). Первый вариант является существенно более быстрым, второй целесообразно выполнять непосредственно после первого при наличии необходимых для этого вычислительных возможностей.

Указанные преобразования позволяют существенно повысить мощности получаемых спектров по сравнению с опорным, что схематично показано на рис. 2 на примере одного из спектров.

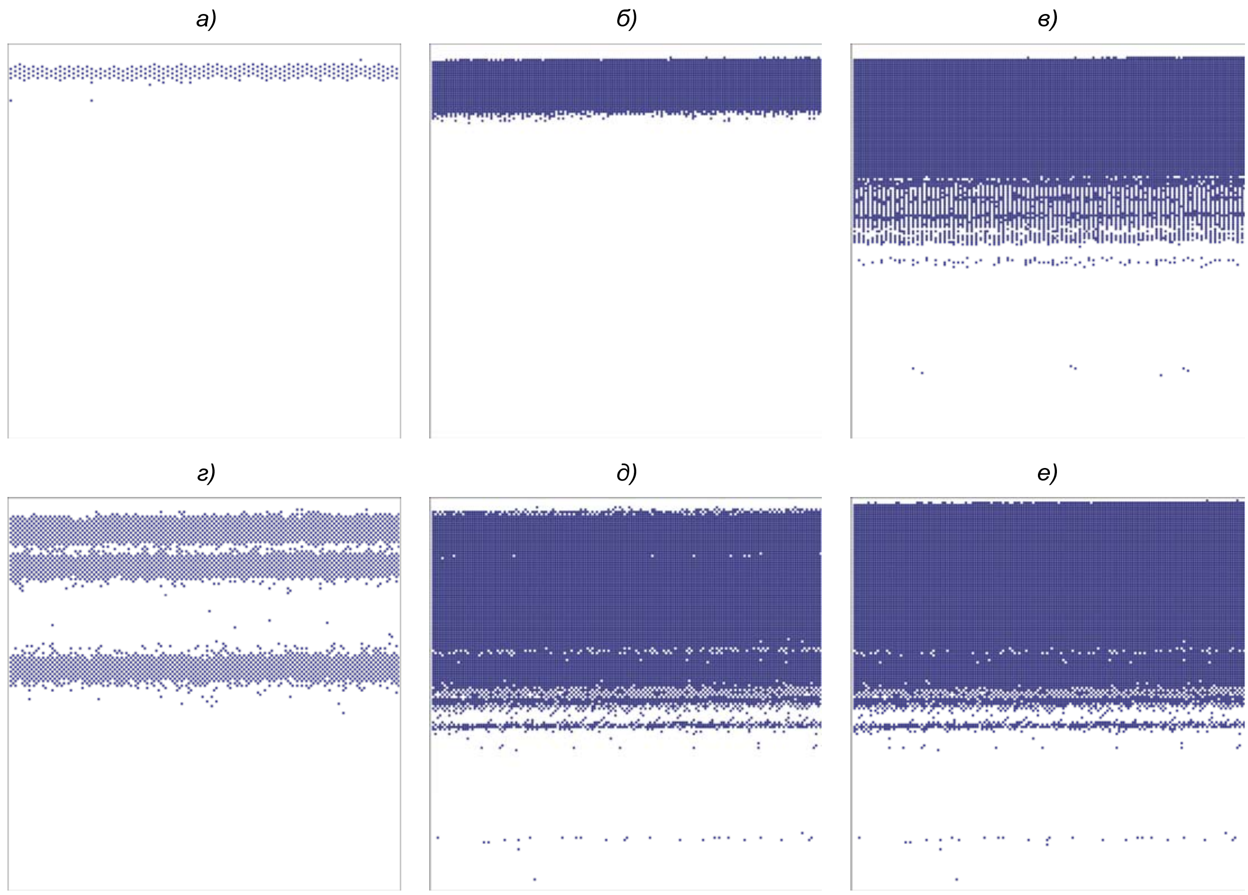

Рис. 2. Пример двух опорных спектров для дважды симметричных ДЛК (а) и ДЛК Брауна (г) порядка 12 и их расширения путем применения процедур поворота одного интеркалята (б, д) и одного короткого цикла (в, е)

В результате использования различных источников опорных спектров, применения к ним рассмотренных выше процедур расширения, объединения полученных спектров в один в комбинации с поквадратной диагонализацией [7] в настоящее время получены аппроксимации спектров быстровычислимых числовых характеристик ДЛК порядков 10–13 с мощностями, приведенными в табл. 2. Для порядков 14–15 выполнена часть расчетов, полученные на данный момент результаты также приведены в табл. 2.

Таблица 2. Мощности аппроксимаций спектров быстровычислимых числовых характеристик ДЛК порядков, полученные в ходе вычислительных экспериментов в проектах добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home и RakeSearch (нижние ограничения на соответствующие члены числовых рядов в OEIS)

Порядок ДЛК	Числовая характеристика (числовой ряд)			
	Число трансверсалей (A344105)	Число диагональных трансверсалей (A345370)	Число интеркалятов (A345760)	Число ОДЛК (A345761)
10	442	736	88	10
11	5 081	1 242	100	39
12	23 113	17 693	210	4 672
13	64 978	11 925	152	расчет не производился
14	расчет не производился	281 067	расчет не производился	расчет не производился
15	расчет не производился	1 958 394	расчет не производился	расчет не производился

Полученные спектры являются максимально мощными среди известных на данный момент и применением указанных выше процедур не расширяются. Применение аналогичных рассмотренным выше процедур для построения спектров порядков $N \geq 14$ планируется в перспективе по завершению текущих вычислительных экспериментов. При этом некоторые вычислительные процедуры могут быть неприемлемо долгими и потребуют модификации с целью упрощения и снижения их вычислительной сложности (например, поквадратное расширение спектра числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 14 по оценкам потребует 87 лет расчетов в проекте добровольных вычислений с реальной производительностью порядка 10 TFLOP/s, что неприемлемо долго).

Некоторые из полученных спектров обладают рядом особенностей, замеченных эмпирически и на данный момент не имеющих теоретического объяснения. Так, например, все известные значения в спектрах числа трансверсалей в ДЛК четных порядков $N=2k$ кратны двум (как минимум для $N\in\{4,6,8,10,12,14,16\}$), порядков $N=4k+2$ – четырем (как минимум для $N\in\{6,10,14\}$), $k\in\mathbb{Z}$. Данная особенность позволяет наложить следующие верхние ограничения на мощности соответствующих спектров:

$$|S|\leq\frac{\sup S-\inf S+2}{2}=\frac{w(S)+1}{2}\text{ для } N=2k$$

и

$$|S|\leq\frac{\sup S-\inf S+4}{4}=\frac{w(S)+3}{4}\text{ для } N=4k+2.$$

Слагаемые +1 и +3 в числителях дробей приведенных формул фактически отвечают за выполнение округления вверх.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.

2. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences // https://oeis.org/

3. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. О построении спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов малого порядка // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2021). Тула, 2021. С. 7–17.

4. Anderson D.P. BOINC: A Platform for Volunteer Computing // Journal of Grid Computing. 2019. pp. 1-24. DOI: 10.1007/s10723-019-09497-9.

5. Ватутин Э.И. и др. Оценка мощностей спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов порядков N>9 // Наука и образование в развитии промышленной, социальной и экономической сфер регионов России. Муром, 2022. С. 314–315.

6. Vatutin E., Belyshev A., Nikitina N., Manzuk M. Evaluation of Efficiency of Using Simple Transformations When Searching for Orthogonal Diagonal Latin Squares of Order 10 // Communications in Computer and Information Science. Vol. 1304. Springer, 2020. pp. 127–146. DOI: 10.1007/978-3-030-66895-2_9.

7. Brown J.W., Cherry F., Most L., Most M., Parker E.T., Wallis W.D. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares // Lecture notes in pure and applied mathematics. 1992. Vol. 139. pp. 43–49. DOI: 10.1201/9780203719916.